

Representación en potencial de capa simple  
de la solución del problema de Neumann y  
aplicación a un problema inverso

Haydey Alvarez Allende

Director de Tesis: Dr. Miguel Angel Moreles Vázquez

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Identificación del Término Fuente en el Problema de Neumann</b>	<b>9</b>
2.1. Método de Elementos de Frontera . . . . .	9
2.2. Representación en potencial de capa simple . . . . .	13
2.2.1. Una comparación entre FEM y BEM . . . . .	15
2.3. Implementación del Problema de Dirichlet . . . . .	16
2.3.1. Ejemplo Numérico . . . . .	18
2.4. Implementación del Problema de Neumann . . . . .	21
2.4.1. Ejemplo Numérico . . . . .	23
2.5. Formulación del problema inverso continuo . . . . .	25
2.6. Formulación del problema inverso discreto . . . . .	26
2.7. Inestabilidad numérica del problema inverso discreto . . . . .	28
<b>3. Métodos de solución al problema inverso discreto</b>	<b>30</b>
3.1. La inversa de Moore-Penrose . . . . .	30
3.2. Sistemas mal condicionados . . . . .	34
3.3. Métodos de regularización . . . . .	35
3.4. El método de Tikhonov . . . . .	37
3.5. Elección del parámetro de regularización . . . . .	39
3.5.1. El método de discrepancia de Morozov . . . . .	40
3.5.2. El método de la curva L . . . . .	41
3.6. Un método de descenso con regularización . . . . .	42
<b>4. Problemas Sintéticos</b>	<b>45</b>
4.1. Fuente cero . . . . .	46
4.2. Fuente lineal $(x + y)$ . . . . .	50

4.3. Fuente exponencial ( $e^x - 4 \cos(2y)$ ) . . . . .	55
<b>5. Conclusión y Trabajo Futuro</b>	<b>61</b>
<b>Referencias</b>	<b>63</b>

## DEDICATORIA

A mi madre y a mi abuelita María Luisa, las dos mujeres que me han guiado por la vida.

# Capítulo 1

## Introducción

Un problema es bien planteado en el sentido de Hadamard, si se puede demostrar existencia, unicidad y continuidad de la solución con respecto a los datos. En la literatura a un problema bien planteado se le conoce como problema directo. El problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0,$$

es un ejemplo. Si el problema no es bien planteado se le llama problema inverso, ver Engl [4] y Vogel [11]. Ilustramos el concepto con el ejemplo siguiente. Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} - ax = f, \quad x(0) = 1,$$

supongamos que la función  $x(t)$  se conoce en los tiempos:  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_m$ , y el problema de interés es encontrar la constante  $a$  en la ecuación. Observemos que la solución es de la forma

$$x(t) = e^{at} \left( \int_0^t e^{-as} f(s) ds + 1 \right).$$

Definimos:

$$F_i(a) = e^{at_i} \left( \int_0^{t_i} e^{-as} f(s) ds + 1 \right).$$

Así, el problema consiste en resolver el sistema

$$F_i(a) = x(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Observemos que el problema inverso asociado a una ecuación diferencial, relativamente simple, es no lineal y sobredeterminado. No hay garantía de existencia y unicidad de la solución. Una dificultad adicional, es que aún cuando el problema matemático asociado a un problema inverso tiene solución única, tal solución es inestable.

La solución puede no ser continua con respecto a los datos, ó puede ser numéricamente mal condicionada. En este caso se requieren algoritmos numéricos específicos para su aproximación.

El problema inverso en Electro-Encefalo-Grafía (EEG) es el antecedente principal, y la motivación de este trabajo. Ver Baillet, Mosher y Leahy [1]. EEG es un medio no invasivo para medir la actividad eléctrica en el cerebro. El problema de interés es relacionar mediciones de potencial eléctrico en el cuero cabelludo con la distribución espacio-temporal de las fuentes de corriente cerebral. Una dificultad del problema es el hecho que la relación entre la distribución de fuente de corriente y el campo electromagnético no es uno a uno, ver Faugueras et al [5]. En consecuencia, la solución del problema inverso no necesariamente es única. Otras dificultades son el nivel del ruido de las mediciones y la poca cantidad de estas. Así, el problema también es mal condicionado: pequeñas variaciones en las mediciones debido al ruido, pueden causar gran variación de la solución.

En el problema inverso en EEG, usualmente se supone que la distribución de conductividades es conocida, lo cual es muy cuestionable. La geometría real de la cabeza y el cerebro también es una limitante.

La formulación matemática del problema es como sigue. Se propone como modelo del potencial eléctrico  $V$ , la ecuación

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \nabla \cdot J^p \quad \text{en } \Omega.$$

Aquí  $\Omega$  es el dominio que ocupa la cabeza,  $\sigma \equiv \sigma(x)$  es la conductividad eléctrica, y  $J^p \equiv J^p(x)$  es la fuente de corriente primaria.

La condición de frontera apropiada es la de Neumann

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{en } S = \partial\Omega.$$

El cuero cabelludo esta contenido en  $S$ .

Se supone que la fuente de corriente primaria esta contenida en el cerebro, y por tanto

$$J^p = 0 \quad \text{en } S.$$

El problema directo en EEG consiste en calcular el potencial  $V$  dada la corriente primaria  $J^p$  y la conductividad  $\sigma$ . Este es el problema clásico de Neumann.

El problema inverso en EEG es: dadas mediciones del potencial en algunos puntos  $x_1, \dots, x_m$  y la conductividad  $\sigma$ , estimar la corriente primaria  $J^p$ .

En la práctica se supone que la cabeza es esférica y se divide en tres regiones esféricas concéntricas representando el cuero cabelludo, el cráneo y cerebro. Valores típicos de conductividades en estas regiones son 0,33, 0,0042 y 0,33  $\Omega^{-1}m^{-1}$  respectivamente.

Con esta simplificación se utiliza la Fórmula de Green para obtener un sistema de ecuaciones integrales en las superficies de las esferas. En este proceso juega un papel crucial la solución fundamental del operador de Laplace en  $\mathbb{R}^3$ ,

$$E(x - \xi) = \frac{1}{2\pi |x - \xi|}.$$

Las ecuaciones integrales se discretizan para obtener un sistema lineal

$$\Phi = KJ \tag{1.1}$$

donde  $\Phi$  de  $m \times 1$  es el vector de mediciones de potencial,  $J$  de  $n \times 1$  es el vector de fuentes primarias a determinar, y  $K$  es la *matriz de transferencia* que resulta de la discretización de las ecuaciones integrales. En general  $n \gg m$ , y la matriz  $K$  es mal condicionada. Por lo tanto la solución se busca en un sentido generalizado, e.g. mínimos cuadrados. Dado que la matriz es mal condicionada y se tiene ruido en los datos, los métodos clásicos de aproximación no son aplicables.

Se han propuesto diversas soluciones generalizadas al sistema (1.1). Una reseña de estos métodos se presenta en Pascual-Marqui [10].

El método preferido de aproximación de las ecuaciones integrales es el de elemento finito. Cuando las integrales son sobre la frontera del dominio, el método se conoce en la literatura como el método de elemento finito en la frontera (FEM y BEM por sus siglas en inglés respectivamente).

Es bien conocido en la literatura de BEM, que la discretización de las ecuaciones integrales a partir de la Fórmula de Green, no es la mejor manera de resolver problemas de potencial, ver Chen y Zhou [3]. La manera más eficiente consiste en proponer una solución de la forma

$$V(x) = \int_S E(x - \xi) f(\xi) d\xi + c, \quad (1.2)$$

y deducir un sistema de ecuaciones integrales que satisface la función  $f$  y la constante  $c$ . A la expresión (1.2) se le conoce como una *representación en potencial de capa simple*.

Una ventaja adicional de esta formulación, es que su aplicabilidad no está restringida a dominios simples como la esfera. La única hipótesis sobre el dominio es que sea válido el teorema de la divergencia, e.g. dominios con frontera *suave por pedazos*.

Inspirados en el Problema Inverso en EEG, en este trabajo consideramos el siguiente problema inverso en el plano: Supongamos el potencial  $w(x) = g_2(x)$  en la frontera, para  $g_2(x)$  conocida. Estimar el término fuente,  $g_1(x)$  si  $w(x)$  es solución al problema de Neumann:

$$\Delta w(x) = g_1(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial w(x)}{\partial n} = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (1.4)$$

En este trabajo utilizamos la representación en potencial de capa simple del problema de Neumann para resolver el problema inverso. La discretización de las ecuaciones integrales se realiza con BEM usando funciones de prueba constantes por elemento. Como es común en problemas inversos, los sistemas lineales obtenidos son mal condicionados. Para resolver estos sistemas proponemos dos métodos: el método de regularización de Tikhonov, y un método de descenso con regularización de Tikhonov. Ver Engl [4] y Vogel [11].

Será claro de la exposición que este tipo de formulación se extiende de manera automática a  $\mathbb{R}^3$ , e incluso a dimensiones mayores. Esta extensión, así como su aplicación al problema inverso en EEG es un proyecto futuro.

El contenido es como sigue:

En el Capítulo 2 presentamos los fundamentos de BEM y la representación en potencial de capa simple a soluciones de problemas de potencial. Ilustramos el método con los problemas de Dirichlet y de Neumann. En base a esta teoría introducimos la formulación en ecuaciones integrales del problema inverso, así como su discretización. Concluimos el capítulo mostrando la inestabilidad numérica del sistema lineal obtenido en la formulación del problema discreto.

En el Capítulo 3 desarrollamos la Teoría de regularización para la solución de sistemas lineales mal condicionados. En particular presentamos en detalle el método de regularización de Tikhonov, y dos técnicas de elección del parámetro de regularización: el método de discrepancia de Morozov, y el método de la curva L. La estructura del problema inverso discreto sugiere una estrategia mixta de solución, de esta manera, en la última sección del capítulo proponemos un método de descenso con regularización de Tikhonov.

La aplicación de los métodos propuestos en los capítulos anteriores se presenta en el Capítulo 4. A manera de muestra representativa, consideramos tres ejemplos sintéticos en el disco unitario. Los términos fuente son:  $g_1(x, y) = 0$ ,  $g_1(x, y) = x + y$ ,  $g_1(x, y) = e^x - 4 \cos(2y)$ . La elección del disco unitario como dominio de definición, es con el fin de fácil validación de los resultados. Se observará que la metodología no depende de la topología del dominio.

Una reflexión sobre el trabajo de tesis y posibles extensiones o direcciones de investigación, es el contenido del último capítulo.

## Capítulo 2

# Identificación del Término Fuente en el Problema de Neumann

La ecuación del potencial se utiliza para modelar diferentes tipos de fenómenos físicos, por lo cual se han desarrollado diferentes métodos para resolverla. En este capítulo vamos a desarrollar el Método de Elementos de Frontera (BEM). Esto se hará en el sentido clásico del problema, i.e. resolviendo el problema directo para entender como funciona el método. Este desarrollo es bien conocido, el propósito es presentar los antecedentes a la formulación del problema inverso de interés y su discretización. El estilo es descriptivo, en particular utilizaremos de manera formal la Teoría de Distribuciones. Los detalles técnicos se pueden consultar en Chen & Zhou [3].

### 2.1. Método de Elementos de Frontera

Para plantear BEM, consideremos el siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{aligned}\Delta w(x) &= 0, & x \in \Omega, \\ w(x) &= g(x) & x \in \partial\Omega.\end{aligned}\tag{2.1}$$

De la teoría clásica sabemos que si  $\Omega$  es suave y  $g$  es continuo, entonces existe una única solución  $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ .

Esencialmente BEM consiste en formular el problema (2.1) como una ecuación integral, donde las integrales son sobre la frontera del dominio. La

ecuación integral se resuelve por el método de elemento finito.

A continuación presentamos el método en el contexto del Problema de Dirichlet (2.1).

Sea  $w(x)$  la solución de (2.1), por propiedades de la delta de Dirac,  $\delta(x)$ , podemos escribir  $w(x)$  de la forma:

$$w(x) = \int_{\Omega} \delta(x - \xi) w(\xi) d\xi. \quad (2.2)$$

Por otra parte, sea

$$E(x - \xi) = \begin{cases} -(2\pi)^{-1} \ln|x - \xi|, & N = 2 \\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}N)}{2\pi^{\frac{N}{2}}(N-2)|x - \xi|^{N-2}}, & N > 2 \end{cases}, \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (2.3)$$

Notemos que  $E(x)$  radial y además es solución fundamental del operador de Laplace, es decir  $E(x)$  satisface

$$\Delta_{\xi} E(x - \xi) = -\delta(x - \xi), \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

A partir de (2.1) y (2.4) podemos escribir (2.2) en la forma:

$$\begin{aligned} w(x) &= - \int_{\Omega} \Delta_{\xi} E(x - \xi) w(\xi) d\xi \\ &= \int_{\Omega} [\Delta w(\xi) E(x - \xi) - \Delta_{\xi} E(x - \xi) w(\xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por la fórmula de Green se tiene

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} \left[ E(x - \xi) \frac{\partial w(\xi)}{\partial n} - w(\xi) \frac{\partial E(x - \xi)}{\partial n_{\xi}} \right] d\sigma_{\xi}, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.6)$$

De la ecuación (2.6) observamos que conocemos  $w(x)$  en  $\partial\Omega$ , así que para poder resolver el sistema de manera directa se pueden hacer básicamente dos cosas:

- eliminar la presencia o dependencia de  $\frac{\partial w(x)}{\partial n}$  ó
- encontrar  $\frac{\partial w(x)}{\partial n}$  de alguna manera y obtener  $w(x)$ .

La primera elección nos conduce al método de la función de Green. En este caso, se busca una función  $G(x - \xi)$ , que es solución fundamental del operador de Laplace

$$\Delta_\xi G(x - \xi) = -\delta(x - \xi), \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (2.7)$$

y satisface

$$G(x - \xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega.$$

La aplicación de este método es limitada pues encontrar una función de Green no siempre es posible para dominios arbitrarios. Se conocen funciones de Green solo para dominios con una topología muy restrictiva, e.g., el disco, la esfera, el semi-plano, etc.

La segunda opción nos lleva a los métodos de elementos de frontera. La restricción sobre el dominio en este caso, es esencialmente que las integrales sobre la frontera estén definidas, e.g., dominios de clase  $C^1$ . Procedemos a encontrar una ecuación integral para  $\frac{\partial w(x)}{\partial n}$  a partir de (2.6).

Para una función  $f$  definida en  $\partial\Omega$  definimos los siguientes potenciales de frontera

$$V_1(f)(x) = \int_{\partial\Omega} E(x - \xi) f(\xi) d\sigma_\xi, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

$$V_2(f)(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x - \xi)}{\partial n_\xi} f(\xi) d\sigma_\xi, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Estos potenciales están bien definidos para  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$  pues los núcleos son  $C^\infty$  cuando  $\xi \in \partial\Omega$ ,  $x \notin \partial\Omega$ . Para  $x \in \partial\Omega$ , los potenciales también están bien definidos para  $f$  suficientemente suave. En la literatura,  $V_1$ ,  $V_2$  se les llama potenciales de *capa simple* y *capa doble* respectivamente.

Denotemos por

$$V_i^+(f)(x) = V_i(f)(x), \quad x \in \Omega^c,$$

$$V_i^-(f)(x) = V_i(f)(x), \quad x \in \Omega.$$

Para  $x \in \partial\Omega$ , definimos

$$V_i^+(f)(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega^c}} V_i^+(f)(y),$$

$$V_i^-(f)(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} V_i^-(f)(y),$$

donde los límites son puntualmente.

Entonces, se puede mostrar que para  $x \in \partial\Omega$ , se tiene

$$V_1^+(f)(x) = V_1^-(f)(x) = V_1(f)(x),$$

y

$$V_2^+(f)(x) = \frac{1}{2}f(x) + V_2(f)(x),$$

$$V_2^-(f)(x) = -\frac{1}{2}f(x) + V_2(f)(x).$$

**Comentario:** Estas expresiones explican los términos capa simple y capa doble.

En consecuencia, tomando el  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}}$  en (2.6) obtenemos la expresión:

$$w(x_0) = \frac{1}{2}w(x_0) + \int_{\partial\Omega} \left[ E(x_0 - \xi) \frac{\partial w(\xi)}{\partial n} - \frac{\partial E(x_0 - \xi)}{\partial n_\xi} w(\xi) \right] d\sigma_\xi, \quad \forall x_0 \in \partial\Omega. \quad (2.8)$$

Así, la ecuación integral asociada a (2.1) es

$$\int_{\partial\Omega} E(x_0 - \xi) \frac{\partial w(\xi)}{\partial n} d\sigma_\xi = \frac{1}{2}w(x_0) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x_0 - \xi)}{\partial n_\xi} w(\xi) d\sigma_\xi, \quad \forall x_0 \in \partial\Omega. \quad (2.9)$$

La cual es una ecuación integral de primer tipo para  $\frac{\partial w(\xi)}{\partial n}$ . Al resolver esta ecuación podemos utilizar (2.6) para obtener la solución al Problema de Dirichlet (2.1).

La solución numérica de la ecuación integral (2.9) por medio de elemento finito, es el método de elemento finito en la frontera para el problema de Dirichlet.

Podemos argumentar de manera análoga para el problema de Neumann

$$\Delta w(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial w(x)}{\partial n} = g(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Se puede llegar, en este caso, a una ecuación integral de segundo tipo para  $w(\xi)$ , de la forma

$$\frac{1}{2}w(x_0) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x_0 - \xi)}{\partial n_\xi} w(\xi) d\sigma_\xi = \int_{\partial\Omega} E(x_0 - \xi) \frac{\partial w(\xi)}{\partial n} d\sigma_\xi, \quad \forall x_0 \in \partial\Omega. \quad (2.10)$$

**Comentario.** Esta ecuación integral es el punto de partida en la solución del problema inverso en EEG. Notemos sin embargo, que el núcleo  $\frac{\partial E(x - \xi)}{\partial n_\xi}$  tiene una singularidad más fuerte que  $E(x - \xi)$ . En consecuencia, la aproximación de la solución en (2.6) es inestable. Adicionalmente el lado derecho de (2.10) involucra la evaluación de una integral. Una ecuación integral asociada al problema de Neumann, con mejores propiedades de estabilidad se presenta en la siguiente sección.

## 2.2. Representación en potencial de capa simple

En lo que sigue  $E(x - \xi)$  denota la solución fundamental del operador de Laplace en el plano, esto es,

$$E(x - \xi) = -(2\pi)^{-1} \ln|x - \xi|. \quad (2.11)$$

También suponemos que el dominio  $\Omega$  y los datos de Dirichlet o Neumann son suficientemente regulares.

La idea de representación en potencial de capa simple de soluciones a ecuaciones de potencial, consiste en proponer soluciones de la forma:

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} E(x - \xi) f(\xi) d\sigma_\xi + c \quad (2.12)$$

y determinar  $f$ ,  $c$ , a partir de una ecuación integral apropiada.

### El Problema de Dirichlet

Se puede mostrar que (2.12) es la solución del Problema de Dirichlet, si  $f$ ,  $c$ , son la única solución de

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f(\xi) d\sigma &= A, \\ c + \int_{\partial\Omega} E(x - \xi) f(\xi) d\sigma_\xi &= g(x) \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.13)$$

para alguna constante (arbitraria) dada  $A$ .

### El Problema de Neumann

Recordemos dos propiedades fundamentales del problema de Neumann. La primera nos dice que la solución existe solo si se satisface la siguiente condición de compatibilidad

$$\int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma = 0. \quad (2.14)$$

La segunda propiedad indica que no hay unicidad, cualesquiera dos soluciones difieren por una constante.

En este caso se puede demostrar que (2.12) es solución al Problema de Neumann con  $c$  arbitraria y  $f$  solución no única de la ecuación integral

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x - \xi)}{\partial n_x} f(\xi) d\sigma_\xi + \frac{1}{2} f(x) = g(x) \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.15)$$

Para obtener unicidad es necesario agregar una condición adicional. Por ejemplo, se puede prescribir el valor de la solución en un punto de la frontera,

$$w(x^0) = \alpha \quad x^0 \in \partial\Omega. \quad (2.16)$$

Con esta condición, (2.12) es la única solución al problema de Neumann, si  $f$ ,  $c$  son la única solución de

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x - \xi)}{\partial n_x} f(\xi) d\sigma_\xi + \frac{1}{2} f(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.17)$$

$$\int_{\partial\Omega} E(x^0 - \xi) f(\xi) d\sigma_\xi + c = \alpha, \quad x^0 \in \partial\Omega.$$

**Comentario:** *Notemos que el lado derecho de la primera ecuación de (2.17) en la representación de (2.12) es más simple que la obtenida a partir de la fórmula de Green.*

### 2.2.1. Una comparación entre FEM y BEM

Se hará una breve comparación entre las ventajas y desventajas de FEM y BEM. El primero está basado sobre el principio variacional, puede manejar casi cualquier ecuación diferencial parcial (EDP) lineal, no lineal o dependiente del tiempo sobre dominios con una frontera curvada. Es un método muy general y poderoso para resolver EDP's. No obstante, las dificultades surgen y aquí se mencionan algunas:

- La EDP debe ser discretizada sobre todo el dominio  $\Omega$ . El código a escribir para el programa es bastante grande y laborioso.
- Para dominios no acotados, se deben imponer límites artificiales (cerca de  $\infty$ ) para truncar el dominio a uno acotado, esto da como resultado una pérdida de la precisión numérica. En algunos casos se puede obtener una solución falsa o incorrecta.
- Para EDP's de alto orden ( $\geq 4$ ), el elemento finito lineal a tramos más conveniente no puede utilizarse, se requieren funciones (base) forma.

En contraste las ventajas de BEM son:

- Las ecuaciones integrales de frontera (EIF) son formuladas sobre la frontera así que hay una reducción significativa de dimensión. Consecuentemente, la discretización es más simple. Los programas requieren menos espacio de memoria, y son fáciles de desarrollar.

- BEM nos permite calcular ciertos valores en puntos y sobre subdominios de interés especial, através de la aplicación de fórmulas como (2.12), sin tener que calcular la solución  $w(x)$  sobre todo  $\Omega$ . Esto no se puede hacer con FEM.
- Para aplicaciones en ingeniería, una motivación importante para usar BEM es su adaptabilidad a "geometrías singulares" tales como grietas.

La formulación de EIF a partir de un problema de valores en la frontera depende de la disponibilidad de la solución fundamental de manera explícita  $E(x - \xi)$ . Para EDP's lineales con coeficientes variables o EDP's no lineales, tales soluciones usualmente no están disponibles de manera explícita. Por lo tanto BEM no se puede aplicar. Esta es la mayor desventaja de BEM.

### 2.3. Implementación del Problema de Dirichlet

Sea

$$\begin{aligned}\Delta w(x) &= g_1(x), & x \in \Omega, \\ w(x) &= g(x), & x \in \partial\Omega.\end{aligned}\tag{2.18}$$

el sistema de tipo Dirichlet que se quiere resolver. Observese que se tiene una ecuación no homogénea. La siguiente, es la reducción clásica a un sistema homogéneo.

Sea

$$v(x) = - \int_{\Omega} E(x - \xi) g_1(\xi) d\xi, \quad x \in \Omega,\tag{2.19}$$

y se tiene que

$$\Delta v(x) = g_1(x), \quad x \in \Omega.$$

Definimos

$$w_0(x) = w(x) - v(x), \quad x \in \Omega,\tag{2.20}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta w_0(x) &= 0, & x \in \Omega, \\ w_0(x) &= \tilde{g}(x), & x \in \partial\Omega,\end{aligned}\tag{2.21}$$

y

$$\tilde{g}(x) = g(x) - v(x).$$

De (2.12) se tiene que la solución a (2.21) puede expresarse como

$$w_0(x) = \int_{\partial\Omega} E(x - \xi) f(\xi) d\sigma + c, \quad x \in \Omega, \quad (2.22)$$

donde  $c$  y  $f$  son la única solución de:

$$\int_{\partial\Omega} f(\xi) d\sigma = A, \quad x \in \partial\Omega \quad (2.23)$$

$$c + \int_{\partial\Omega} E(x - \xi) f(\xi) d\sigma_\xi = \tilde{g}(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.24)$$

Donde la constante  $A$  es arbitraria así que elegimos  $A = 1$ .

Se discretiza la frontera ( $\partial\Omega \approx (\partial\Omega)_h \equiv \bigcup_{i=1}^{m'} \Gamma_i$ ). Sobre  $\partial\Omega$  suponemos una solución aproximada  $f_h$  a la densidad  $f$  como:

$$f_h(x) = \sum_{j=1}^{\hat{m}} a_j \psi_{j,h}(x), \quad x \in (\partial\Omega)_h. \quad (2.25)$$

donde  $\psi_{j,h}(x)$  es un elemento de frontera y está dado como sigue:

$$\psi_{j,h}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \gamma_j \\ 0 & \text{si } x \notin \gamma_j \end{cases}. \quad (2.26)$$

Entonces de (2.23) y (2.24) se obtiene lo siguiente

$$\int_{\partial\Omega} f(\xi) d\sigma = \sum_{j=1}^{\hat{m}} a_j \int_{\Gamma_j} d\Gamma, \quad (2.27)$$

$$\int_{\partial\Omega} E(x - \xi) f(\xi) d\sigma_\xi = \sum_{j=1}^{\hat{m}} a_j \int_{\Gamma_j} E(x - \xi) d\Gamma_\xi. \quad (2.28)$$

Se eligen los puntos de colocación como los puntos medios de los segmentos  $\Gamma_i$  y se denotan como  $\bar{x}_i$ .

Finalmente se obtiene la siguiente discretización:

$$c + \sum_{i=1}^{\hat{m}} \int_{\Gamma_i} E(\bar{x}_j - \xi) a_i d\Gamma_\xi = \tilde{g}(\bar{x}_j), j = 1, 2, \dots, \hat{m}, \quad (2.29)$$

y

$$\sum_{j=1}^{\hat{m}} a_j \int_{\Gamma_j} d\Gamma = 1, \quad (2.30)$$

produciendo el siguiente sistema lineal de  $(\hat{m} + 1) \times (\hat{m} + 1)$

$$M_h \bar{a}_h = \bar{\gamma}_h, \quad (2.31)$$

donde

$$M = \begin{cases} |\Gamma_j| & \text{si } i = 1 \text{ y } j = 1 \dots m \\ \int_{\Gamma_j} E(x_i - \xi) d\sigma_\xi & \text{si } i = 2 \dots m + 1 \text{ y } j = 1 \dots m \\ 1 & \text{si } i = 2 \dots m + 1 \text{ y } j = m + 1 \\ 0 & \text{si } i = 1 \text{ y } j = m + 1 \end{cases},$$

y

$$x = \begin{bmatrix} c \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{g}(\bar{x}_1) \\ \tilde{g}(\bar{x}_2) \\ \vdots \\ \tilde{g}(\bar{x}_m) \end{bmatrix}.$$

### 2.3.1. Ejemplo Numérico

Sea

$$\begin{aligned} \Delta w(x, y) &= e^x - 4 \cos 2y, & x, y, \in \Omega, \\ w(x, y) &= e^x + \cos(2y), & x, y, \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.32)$$

el sistema que se quiere resolver de manera numérica con BEM donde  $\Omega$  es el disco unitario, aplicando la discretización descrita anteriormente se obtiene el sistema lineal asociado a (2.32) y los siguientes resultados que se mostrarán gráficamente.

En las gráficas (1) y (2) observamos  $w(x, y)$ , en la primera, obtenido con BEM, en la segunda, la solución real  $w(x, y) = e^x + 2 \cos(2y)$ . Se observa que las gráficas son muy parecidas, así que a continuación se mostrarán las curvas de nivel de ambas superficies para poder distinguir mejor la pequeña diferencia que existe entre ellas.

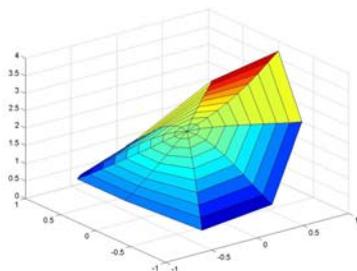


Fig 1: Superficie aproximada

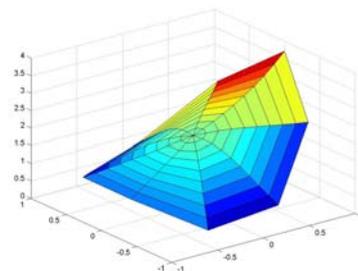


Fig 2: Superficie real

En la gráfica (3) se puede observar que las curvas de nivel de la superficie aproximada reproducen de manera adecuada a las de la superficie real.

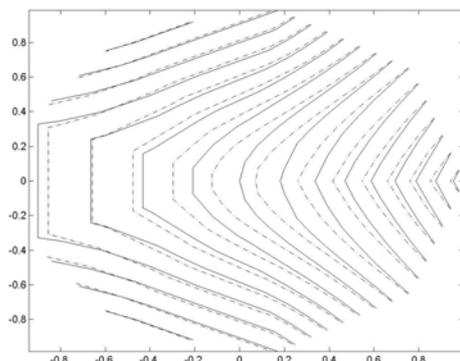


Figura 3: Curvas de nivel de las superficies: aproximada (línea punteada) vs real (línea sólida)

La matriz asociada tiene un tamaño de  $101 \times 101$  en donde 100 son los elementos de frontera y 100 también son los puntos de colocación. El dominio  $\Omega$ , se dividió también en 100 elementos aunque se puede hacer una partición más fina.

Dada una función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , el RMS de  $\varphi$  se define como:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 dx}$$

Aquí  $|\Omega|$  denota la medida de  $\Omega$ . El RMS es la norma  $L^2$  de  $\varphi$  ponderada por el factor  $\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$ . El RMS indica la bondad de la aproximación. En el ejemplo el error promedio y el RMS se muestran en la tabla siguiente:

Error promedio	0.0838
RMS	0.0341

Una medida de la inestabilidad numérica de un sistema lineal es el número de condición de la matriz en cuestión. En el siguiente capítulo discutiremos en detalle estos aspectos. Sólo por referencia, mostramos que el número de condición de la matriz  $M$  en el sistema de ejemplo, es de 201.1 Observemos que este número es pequeño, y por tanto, el sistema no es mal condicionado.

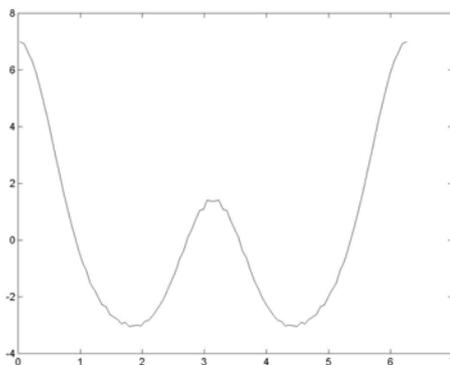


Figura 4: Valores de  $f$

En la gráfica anterior observamos la aproximación de la densidad  $f$ , ya que más adelante se usará para comparar los resultados obtenidos del problema inverso con los que se obtienen aquí (problema directo).

## 2.4. Implementación del Problema de Neumann

El sistema de interés es de tipo Neumann así que se va a dar un ejemplo de implementación del problema directo que mas adelante se modificará para plantear el problema inverso.

### Planteamiento

Sea

$$\Delta w(x) = g_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial w(x)}{\partial n} = g(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Para tener unicidad en la solución se agrega la siguiente condición:

$$w(x_0) = \alpha. \quad (2.34)$$

Podemos observar en la ecuación (2.33), que  $\Delta w(x) \neq 0$ , así que se va a realizar el mismo cambio de variable que se hizo en el problema de Dirichlet ( $w_0(x) = w(x) - v(x)$ ). Donde

$$v(x) = - \int_{\Omega} E(x - \xi) g_1(\xi) d\xi, \quad x \in \Omega,$$

y

$$\tilde{g}(x) = g(x) + \int_{\Omega} \frac{\partial E(x - \xi)}{\partial n_x} g_1(\xi) d\xi,$$

quedando el nuevo sistema homogéneo como sigue:

$$\Delta w_0(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial w_0(x)}{\partial n} = \tilde{g}(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

De la formulación del potencial en capa simple la solución a (2.35) se puede escribir como:

$$w_0(x) = c + \int_{\partial\Omega} E(x - \xi) f(\xi) d\sigma_{\xi}, \quad (2.36)$$

en donde  $c$  y  $f$  deben de ser soluciones de

$$\frac{1}{2}f(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x - \xi)}{\partial n_x} f(\xi) d\sigma_\xi = \tilde{g}(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.37)$$

y

$$w(x^0) = \alpha. \quad (2.38)$$

Observemos que se tiene que satisfacer la condición de compatibilidad siguiente:

$$\int_{\Omega} g_1(x) dx = \int_{\Omega} \Delta w(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w(x)}{\partial n} dx = \int_{\partial\Omega} g(x) dx.$$

Discretizando (2.36), (2.37) y (2.38), como en el problema de Dirichlet, se obtiene el siguiente sistema lineal

$$Mx = b, \quad (2.39)$$

donde

$$M(i, j) = \begin{cases} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial E(\tilde{x}_i - \xi)}{\partial n_x} d\sigma_\xi + \frac{1}{2}\delta_{ij} & \text{si } i = 1 \dots m \text{ y } j = 1 \dots m \\ \int_{\Gamma_j} E(x^0 - \xi) d\sigma_\xi & \text{si } i = m + 1 \text{ y } j = 1 \dots m \\ 1 & \text{si } i = j = m + 1 \\ 0 & \text{si } i = 1 \dots m \text{ y } j = 2m + 1 \end{cases},$$

y

$$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ c \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} g(\tilde{x}_1) \\ g(\tilde{x}_2) \\ \vdots \\ g(\tilde{x}_m) \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Para encontrar  $x$  se resuelve (2.39).

### 2.4.1. Ejemplo Numérico

Sea

$$\Delta w(x, y) = 0, \quad x, y \in \Omega, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial n} = x + y, \quad x, y \in \partial\Omega, \quad (2.41)$$

el sistema que se quiere resolver numéricamente con el método de elementos de frontera, donde  $\Omega$  es el disco unitario, aplicando la discretización anterior se obtiene un sistema lineal asociado a (2.40) que se resuelve y arroja los siguientes resultados.

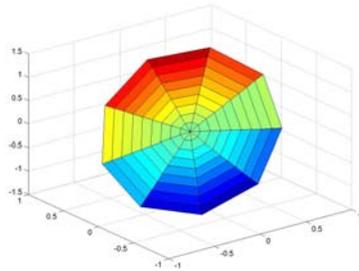


Fig 5: Superficie aproximada

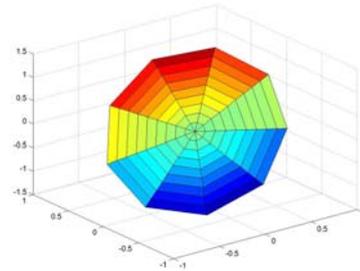


Fig 6: Superficie real

En las gráficas (5) y (6) se observan las superficies aproximada y real de  $w(x, y) = x + y$ , en las gráficas no se aprecia ninguna diferencia entre ellas así que se mostrará a continuación una gráfica con las curvas de nivel de ambas.

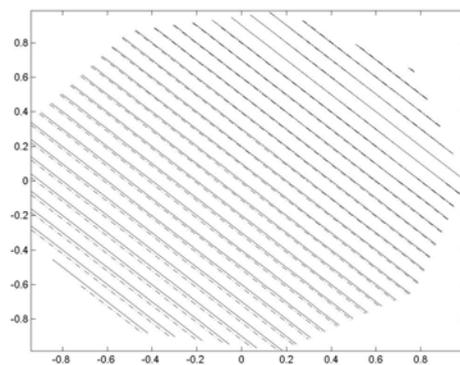


Figura 7: Curvas de nivel, superficie real (línea sólida) vs superficie aproximada (línea punteada)

En la gráfica (7) se observa que las curvas se empalman bastante bien.

La matriz tiene un tamaño de  $101 \times 101$ , es decir tiene 100 elementos de frontera y también 100 puntos medios, además se usó una partición del dominio  $\Omega$  de  $10 \times 10$ .

En las siguientes tablas vemos que la matriz  $M$  tiene un número de condición que no es muy grande por lo que no se puede decir que sea mal condicionada. Los errores nos dicen que la solución que se obtuvo es buena.

Número de condición de $M$	Error promedio	0.0101
201.1	RMS	0.0044

En esta gráfica (figura 8) observamos los valores de la aproximación de la densidad  $f$ , ya que en los problemas inversos que se mostrarán más adelante se compararán estos valores.

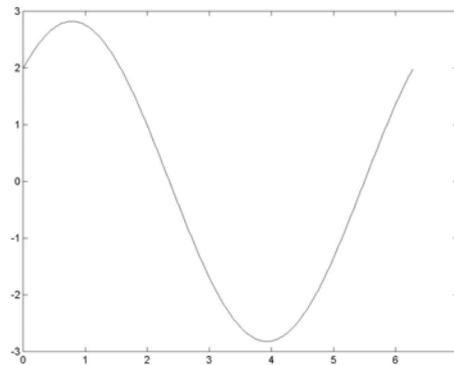


Figura 8: Valores de  $f$

## 2.5. Formulación del problema inverso continuo

Recordemos el problema inverso de interés. Consideremos

$$\begin{aligned}\Delta w(x) &= g_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial w(x)}{\partial n} &= g(x), \quad x \in \partial\Omega.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Notemos que de los datos recuperamos la condición:

$$w(x^0) = \alpha,\tag{2.43}$$

de unicidad y el problema de Neumann. Supongamos que  $g(x)$  es conocido, así como:

$$w(x) = g_2(x) \quad \text{para } x \in \partial\Omega.\tag{2.44}$$

El problema inverso consiste en identificar  $g_1(x)$ , el término fuente, a partir de estos datos.

Con (2.42), (2.43) y (2.44) se planteará el problema inverso asociado al problema de Neumann.

Igual que en las secciones anteriores se va a realizar una reducción a un sistema homogéneo.

La solución al problema directo de Neumann se puede escribir como

$$w_0(x) = \int_{\partial\Omega} E(x, \xi) f(\xi) d\sigma_\xi + c, \quad x \in \bar{\Omega},\tag{2.45}$$

siempre que  $f$  y  $c$  sean soluciones únicas de,

$$\frac{1}{2}f(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x - \xi)}{\partial n_x} f(\xi) d\sigma_\xi = \tilde{g}(x), \quad \forall x \in \partial\Omega,\tag{2.46}$$

y

$$\int_{\partial\Omega} E(x^0, \xi) f(\xi) d\sigma_\xi + c = \alpha, \quad x^0 \in \partial\Omega,\tag{2.47}$$

en donde

$$\begin{aligned} w_0(x) &= w(x) - v(x), \\ v(x) &= - \int_{\Omega} E(x - \xi) g_1(\xi) d\xi, \\ \tilde{g}(x) &= g(x) + \int_{\Omega} \frac{\partial E(x - \xi)}{\partial n_x} g_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Observemos que tenemos dos ecuaciones, (2.46) y (2.47), y tres incógnitas:  $f$ ,  $c$  y  $g_1(x)$ . Otra ecuación la obtenemos de la formulación en potencial de capa simple:

$$\int_{\partial\Omega} E(x, \xi) f(\xi) d\sigma_{\xi} + c - \int_{\Omega} E(x, \xi) g_1(\xi) d\xi = g_2(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.48)$$

De las tres ecuaciones ((2.46), (2.47) y (2.48)) planteamos el sistema de ecuaciones integrales para  $f$ ,  $c$  y  $g_1(x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x - \xi)}{\partial n_x} f(\xi) d\sigma_{\xi} - \int_{\Omega} \frac{\partial E(x - \xi)}{\partial n_x} g_1(\xi) d\xi &= g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \\ \int_{\partial\Omega} E(x^0, \xi) f(\xi) d\sigma_{\xi} + c &= \alpha, \quad x^0 \in \partial\Omega, \\ \int_{\partial\Omega} E(x, \xi) f(\xi) d\sigma_{\xi} + c - \int_{\Omega} E(x, \xi) g_1(\xi) d\xi &= g_2(x), \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Este sistema es la formulación al problema inverso.

## 2.6. Formulación del problema inverso discreto

Para formular el problema discreto se aproximan las integrales (2.46), (2.47) y (2.48). Para realizar esto primero dividimos la frontera en arcos  $\Gamma_i$ , i.e.  $\partial\Omega = \sum_{i=1}^n \Gamma_i$ , en seguida se colocarán puntos en la mitad de cada arco (los llamaremos puntos de colocación  $\tilde{x}_i$ ), y despues discretizaremos  $\Omega$  en  $k \times k$  nodos. Vamos a aproximar  $f$  con elementos de frontera localmente constantes dados por:

$$f(x) = \sum_{j=1}^m a_j \psi_j(x), \quad \psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Gamma_j \\ 1 & \text{si } x \notin \Gamma_j \end{cases}, \quad (2.50)$$

con estas discretizaciones se obtiene la siguiente matriz:

$$M(i, j) = \begin{cases} \int_{\Gamma_j} E(\tilde{x}_i - \xi) d\sigma_\xi & \text{si } i = 1 \dots m \text{ y } j = 1 \dots m \\ \int_{\Gamma_j} \frac{\partial E(\tilde{x}_i - \xi)}{\partial n_x} d\sigma_\xi + \frac{1}{2} \delta_{ij} & \text{si } i = m + 1 \dots 2m \text{ y } j = 1 \dots m \\ \int_{\Gamma_j} E(x^0 - \xi) d\sigma & \text{si } i = 2m + 1 \text{ y } j = 1 \dots m \\ E(\tilde{x}_i - \xi_j) |\Omega_j| & \text{si } i = 1 \dots m \text{ y } j = m + 1 \dots m + k^2 \\ \frac{\partial E(\tilde{x}_i - \xi_j)}{\partial n_x} |\Omega_j| & \text{si } i = m + 1 \dots 2m \text{ y } j = m + 1 \dots m + k^2 \\ 1 & \begin{array}{l} \text{si } i = 1 \dots m \text{ y } j = m + k^2 \\ \text{o } i = 2m + 1 \text{ y } j = m + k^2 \end{array} \\ 0 & \begin{array}{l} \text{si } i = m + 1 \dots 2m \text{ y } j = m + k^2 \\ \text{o } i = 2m + 1 \text{ y } j = m + 1 \dots m + k^2 \end{array} \end{cases}, \quad (2.51)$$

y

$$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ g_1(\xi_1) \\ g_1(\xi_2) \\ \vdots \\ g_1(\xi_{k^2}) \\ c \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} g_2(\tilde{x}_1) \\ g_2(\tilde{x}_2) \\ \vdots \\ g_2(\tilde{x}_m) \\ g(\tilde{x}_1) \\ \vdots \\ g(\tilde{x}_m) \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Finalmente se obtiene el sistema lineal

$$Mx = b. \quad (2.53)$$

El sistema (2.53) es la formulación del problema inverso discreto. Es el sistema a resolver para encontrar los valores de  $g_1$  en  $\Omega$ , mostraremos su aplicación en algunos casos específicos.

## 2.7. Inestabilidad numérica del problema inverso discreto

El sistema. (2.53) es en general mal condicionado y por ende inestable numéricamente. Los métodos clásicos de solución no son apropiados. Para ilustrar este hecho, consideremos el problema

$$\Delta w(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in \Omega, \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}(x, y) = x + y, \quad \forall x, y \in \partial\Omega.$$

Donde los datos son

$$w(x, y) = x + y, \quad x, y \in \partial\Omega.$$

Con 100 elementos de frontera y 100 puntos de colocación asociados a ellos, además el dominio  $\Omega$  es el disco unitario y se divide en 100 elementos también, así obtenemos un sistema de  $201 \times 201$ , con la condición de unicidad.

La solución se muestra en las siguientes gráficas,

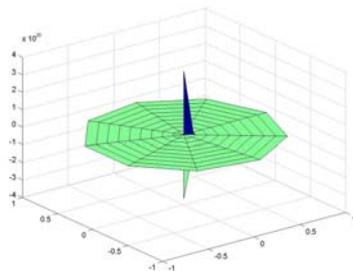


Fig 9:Superficie aproximada

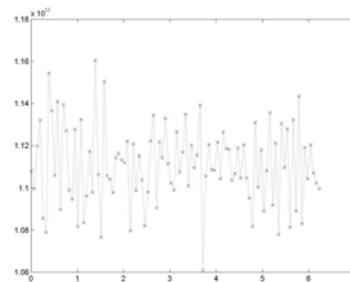


Fig 10:Valores de f

En la figura (9) observamos que el valor real de  $g_1(x, y)$  en el disco es cero y se esta obteniendo un valor mucho más grande que ese mientras que

la figura (10) debería parecerse a la figura (8) y no es así, los valores en la figura (10) se disparan mientras que los de la figura (8) están acotados entre -3 y 3. Este resultado se explica pues la matriz  $M$  es mal condicionada, su número de condición es  $1,48 \times 10^{33}$ .

Una mejor solución a sistemas mal condicionados se obtiene a partir de métodos de regularización. En el siguiente capítulo describimos a detalle esta metodología.

# Capítulo 3

## Métodos de solución al problema inverso discreto

En el último ejemplo, pudimos observar que al tratar de resolver el sistema lineal asociado a (2.54), se obtuvieron resultados erróneos, esto se debe a que algunos de los valores singulares de la matriz generada  $M$  son muy pequeños. En las siguientes secciones se hablará de estos valores y su importancia para obtener una solución correcta. Así como de las técnicas que se emplean para sustituir estos valores cuando son muy pequeños (métodos de regularización). También se hablará de cuando una matriz es mal condicionada y su significado. En la última sección se tratan los métodos iterativos y una propuesta que combina un método iterativo con un método de regularización. Módulo algunos conceptos de Algebra Lineal, este capítulo es una introducción autocontenida a la solución por regularización de sistemas lineales. Esta teoría no es tan conocida, por lo cual la exposición es más detallada. Las referencias básicas son Engl [4] y Vogel [11].

### 3.1. La inversa de Moore-Penrose

Sea  $A$  una matriz compleja con  $m$  renglones y  $n$  columnas,  $b \in \mathbb{C}^m$ . Notemos que  $A$  no es necesariamente cuadrada, tampoco restringimos el rango de  $A$ . En tal caso el sistema

$$Ax = b \tag{3.1}$$

no necesariamente tiene una solución en el sentido clásico. Se puede proponer una solución generalizada al sistema. Un ejemplo muy utilizado es la solución en mínimos cuadrados la cual definimos a continuación.

**Definición.**  $x \in \mathbb{C}^n$  se dice una solución

- de mínimos cuadrados (s.m.c.) de (3.1) si

$$\|Ax - b\| = \inf \{\|Az - b\| : z \in \mathbb{C}^n\},$$

- mínima de mínimos cuadrados (s.m.m.c) de (3.1) si

$$\|x\| = \inf \{\|z\| : z \text{ es s.m.c.}\}$$

Para un sistema lineal, la s.m.m.c. siempre existe y es única. Por lo cual la siguiente definición tiene sentido.

**Definición.** La matriz  $A^\dagger$  de  $n$  renglones por  $n$  columnas, se define como la matriz que asigna a cada  $b \in \mathbb{C}^m$  la s.m.m.c. de (3.1) y se llama la inversa generalizada (seudo inversa) de Moore-Penrose.

Es posible construir la pseudo inversa de Moore-Penrose a partir de la descomposición en valores singulares de  $A$ . Recordemos la definición

**Definición.** Sean  $s_1, \dots, s_r$  tal que  $s_1^2 \geq s_2^2 \geq \dots \geq s_r^2 > 0$  son los valores propio positivos de la matriz  $A^H A$  (cada uno escrito tantas veces como su multiplicidad). Entonces  $s_1, \dots, s_r$  son los valores singulares (no cero) de  $A$ .

Un resultado fundamental en la solución de sistemas lineales mal condicionados es el siguiente:

**Teorema.** Sean  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0$  los valores singulares de  $A$ . Entonces existen matrices unitarias  $V$  de  $n \times n$ ,  $U$  de  $m \times m$  tal que

$$U^H A V = \begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & s_r & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Las columnas de  $V$  y  $U$  son los vectores propios de  $A^H A$  y  $AA^H$  respectivamente.

De (3.2) se tiene que

$$A = U \begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & s_r & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} V^H$$

A esta expresión se le conoce como la descomposición en valores singulares (SVD) de  $A$ . La descomposición no es única.

Notemos que con  $V = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $U = (u_1, \dots, u_m)$ , se tiene de la descomposición SVD para  $i = 1, 2, \dots, r$  que

$$Av_i = s_i u_i \tag{3.3}$$

y

$$A^H u_i = s_i v_i.$$

El sistema  $\{(s_i; u_i, v_i) : i = 1, 2, \dots, r\}$  se llama un *sistema singular* para  $A$ .

Como  $\{u_1, \dots, u_r\}$  es una base ortonormal del rango de  $A$ ,  $R(A)$ , para  $x \in \mathbb{C}^n$  se satisface

$$Ax = \sum_{i=1}^r \langle Ax, u_i \rangle u_i = \sum_{i=1}^r \langle x, A^H u_i \rangle u_i,$$

por tanto, de (3.3) se sigue

$$Ax = \sum_{i=1}^r s_i \langle x, v_i \rangle u_i. \tag{3.4}$$

Análogamente, para  $b \in \mathbb{C}^n$ ,

$$A^H b = \sum_{i=1}^r s_i \langle b, u_i \rangle v_i. \tag{3.5}$$

**Comentario.** Notemos que si  $A$  es real, entonces también lo son  $U, V$ . Las expresiones (3.4) y (3.5) son generalizables a operadores compactos.

El siguiente resultado nos muestra como calcular la inversa de Moore-Penrose a partir de la descomposición SVD.

**Teorema.** Supongamos que  $A$  tiene la descomposición en valores singulares (3.2). Entonces

$$A^\dagger = V \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{s_r} & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} U^H \quad (3.6)$$

Sea  $x$  la s.m.m.c del sistema (3.1). De (3.6)

$$x = A^\dagger b = V \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{s_r} & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} U^H b$$

o también

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{1}{s_i} \langle b, u_i \rangle v_i.$$

Así

$$A^\dagger b = \sum_{i=1}^r \frac{1}{s_i} \langle b, u_i \rangle v_i. \quad (3.7)$$

## 3.2. Sistemas mal condicionados

La expresión (3.7) es crucial para entender como afectan los errores en  $b$  a la solución  $A^\dagger b$ , así como el mal condicionamiento de  $A$ . Notemos que errores en  $b$  en componentes, con respecto a la base ortonormal  $\{u_1, \dots, u_r\}$ , correspondientes a valores singulares pequeños, se amplifican por el factor  $\frac{1}{s_i}$ . Esto muestra la inestabilidad numérica del sistema (3.1) si  $A$  tiene algunos valores singulares pequeños.

Precisemos un poco la noción de mal condicionamiento de una matriz  $A$ . Por simplicidad consideramos una matriz cuadrada, una discusión similar se puede hacer en matrices más generales.

Recordemos que el número de condición de una matriz  $A$  cuadrada no singular, con respecto a una norma  $N(A) = \|A\|$ ,  $cond(A, N)$  se define como

$$cond(A, N) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

La norma  $N(A)$  es la norma operador asociada a una norma en  $\mathbb{C}^n$ . Intuitivamente, un sistema lineal es mal condicionado cuando  $cond(A, N)$  es muy grande. Dada la equivalencia de normas en  $\mathbb{C}^n$ , cualquier norma es apropiada para determinar el mal condicionamiento de una matriz.

Si equipamos  $\mathbb{C}^n$  con la norma  $p$ ,  $p \geq 1$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p},$$

escribimos el número de condición como  $\kappa_p(A)$ . Cuando  $p = 2$ , se tiene

$$\kappa(A) \equiv \kappa_2(A) = \frac{s_1}{s_n}.$$

Para una matriz no cuadrada, posiblemente singular, podemos definir

$$\kappa(A) \equiv \kappa_2(A) = \frac{s_1}{s_r}.$$

En general, cuando una matriz es mal condicionada  $s_r \ll s_1$ , además los últimos valores propios son muy pequeños. En este caso, el problema de encontrar la s.m.m.c es bien planteado, pero numéricamente inestable.

Mencionamos que un sistema es mal condicionado si el número de condición es muy grande, esto depende de la computadora en uso. Sea  $EPS$  el

epsilon de la máquina, es decir, el número positivo  $\tau$  más pequeño de tal manera que  $1 + \tau > 1$  en la máquina en cuestión. Del análisis en Wilkinson [12], se sigue que si  $\text{cond}(A, N) > (EPS)^{-1}$ , la solución del sistema (3.1) no es confiable. La práctica muestra una cota menor, si  $\text{cond}(A, N) > (EPS)^{-1/2}$  entonces el sistema es en general mal condicionado.

### 3.3. Métodos de regularización

Una técnica para reducir inestabilidad consiste en reemplazar

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{1}{s_i} \langle b, u_i \rangle v_i$$

por

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^r \frac{1}{s_i} \langle b, u_i \rangle v_i$$

$$s_i^2 \geq \alpha$$

para un  $\alpha > 0$  apropiado. Este es un ejemplo de un método de *regularización*, donde el problema original se reemplaza por uno *cercano*, el cual es más estable. La elección del *parámetro de regularización*  $\alpha$  es crucial.

En la práctica, en lugar del vector de datos  $b$ , se tiene una aproximación  $b_\delta$  con  $\|b - b_\delta\| < \delta$ . Reemplacemos  $b$  con  $b_\delta$  y consideremos la *solución regularizada*

$$x_\alpha^\delta = \sum_{i=1}^r \frac{1}{s_i} \langle b_\delta, u_i \rangle v_i. \quad (3.8)$$

$$s_i^2 \geq \alpha$$

La expresión (3.8) se conoce como la *descomposición en valores singulares truncada*, TSVD.

Estimemos el error entre  $x_\alpha^\delta$  y la solución buscada  $A^\dagger b$ .

$$\begin{aligned}
\|x_\alpha^\delta - A^\dagger b\| &= \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ s_i^2 \geq \alpha}}^r \frac{1}{s_i} \langle b_\delta, u_i \rangle v_i - \sum_{i=1}^r \frac{1}{s_i} \langle b, u_i \rangle v_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^r \frac{1}{s_i} \langle b, u_i \rangle v_i - \sum_{\substack{i=1 \\ s_i^2 \geq \alpha}}^r \frac{1}{s_i} \langle b, u_i \rangle v_i \right\| + \\
&\quad + \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ s_i^2 \geq \alpha}}^r \frac{\langle b, u_i \rangle - \langle b_\delta, u_i \rangle}{s_i} v_i \right\|;
\end{aligned}$$

puesto que los  $v_i$  son ortonormal. Además

$$\left\| \sum_{\substack{i=1 \\ s_i^2 < \alpha}}^r \frac{1}{s_i} \langle b, u_i \rangle v_i \right\|^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ s_i^2 < \alpha}}^r \frac{|\langle b, u_i \rangle|^2}{s_i^2} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0,$$

puesto que para  $\alpha$  suficientemente pequeño, la última sumatoria es vacía. Por otra parte

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{\substack{i=1 \\ s_i^2 \geq \alpha}}^r \frac{\langle b, u_i \rangle - \langle b_\delta, u_i \rangle}{s_i} v_i \right\|^2 &= \sum_{\substack{i=1 \\ s_i^2 \geq \alpha}}^r \frac{|\langle b - v, u_i \rangle|^2}{s_i^2} \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^r |\langle b - v, u_i \rangle|^2 \\
&\leq \frac{\delta^2}{\alpha}
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\|x_\alpha^\delta - A^\dagger b\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}.$$

**Comentario.** Esta cota muestra la dependencia del parámetro de regularización con el error en los datos. Lo que no se observa es su dependencia en el orden de la matriz. En general, el sistema lineal (3.1) se obtiene a partir de la discretización de un problema continuo, en los problemas de identificación estos son mal planteados por naturaleza, y por ende mal condicionados. Mientras más fina sea la partición, más grande será el orden de  $A$ , y peor el condicionamiento. El estudio de la relación entre el error en los datos, el tamaño de la partición, y la elección del parámetro de regularización es un problema complejo y de activa investigación.

### 3.4. El método de Tikhonov

El método TSVD se puede escribir como

$$x_\alpha^\delta = \sum_{i=1}^r \omega_\alpha(s_i^2) \langle b_\delta, u_i \rangle v_i \quad (3.9)$$

donde

$$\omega_\alpha(s^2) = \begin{cases} 1 & s^2 \geq \alpha \\ 0 & s^2 < \alpha \end{cases}$$

Otra manera de estabilizar (3.7) es reemplazar  $\omega_\alpha(s^2)$  con

$$\omega_\alpha(s^2) = \frac{s^2}{s^2 + \alpha},$$

con esta elección se obtiene el método de regularización de Tikhonov

$$x_\alpha^\delta = \sum_{i=1}^r \frac{s_i}{s_i^2 + \alpha} \langle b_\delta, u_i \rangle v_i. \quad (3.10)$$

Una gran restricción del método TSVD es la obtención de la descomposición en valores singulares. Esta descomposición no es costeable para matrices de orden muy grande. Una ventaja del método de Tikhonov es que puede plantearse como la minimización de un funcional, es generalizable a dimensión infinita y a problemas no lineales. En efecto, se tiene el siguiente resultado

**Teorema.** *Sea  $x_\alpha^\delta$  como en (3.10). Entonces*

(i)  $x_\alpha^\delta$  es la única solución del sistema

$$(A^H A + \alpha I) x = A^H b_\delta$$

(ii)  $x_\alpha^\delta$  es el único minimizador del funcional

$$x \longmapsto \|Ax - b_\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2$$

### Demostración

Por la ortonormalidad de  $v_i$  se tiene que para todo  $j \in \{1, \dots, r\}$ :

$$\langle x_\alpha^\delta, v_j \rangle = \frac{s_j}{s_j^2 + \alpha} \langle b_\delta, u_j \rangle,$$

y de aquí

$$s_j^2 \langle x_\alpha^\delta, v_j \rangle + \alpha^2 \langle x_\alpha^\delta, v_j \rangle = s_j \langle b_\delta, u_j \rangle. \quad (3.11)$$

Ahora, se tiene de (3.4) y (3.5) que:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^r s_j \langle b_\delta, u_j \rangle v_j &= \sum_{j=1}^r \langle b_\delta, Av_j \rangle v_j \\
&= \sum_{j=1}^r \langle A^H b_\delta, v_j \rangle v_j \\
&= A^H b_\delta
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^r [s_j^2 \langle x_\alpha^\delta, v_j \rangle + \alpha^2 \langle x_\alpha^\delta, v_j \rangle] v_j &= \sum_{j=1}^r [\langle x_\alpha^\delta, A^H Av_j \rangle + \langle x_\alpha^\delta, v_j \rangle] v_j \\
&= A^H Ax_\alpha^\delta + \alpha x_\alpha^\delta,
\end{aligned}$$

donde  $x_\alpha^\delta$  está en el generador lineal de  $\{v_1, \dots, v_r\}$  por (3.10). Ahora (3.11) implica que

$$(A^H A + \alpha I) x_\alpha^\delta = A^H b_\delta \quad (3.12)$$

la cual es una caracterización alternativa de la regularización de Tikhonov. Para el segundo inciso se toma la derivada del funcional y se sustituye  $x_\alpha^\delta$ , y se obtiene (3.12). ■

**Comentario:** El método de Tikhonov se puede generalizar a

$$\min_f \rho(K(f), g) + \alpha J(f)$$

donde  $\alpha > 0$  es el parámetro de regularización,  $J$  es el funcional de penalización y  $\rho$  es el funcional de discrepancia.

### 3.5. Elección del parámetro de regularización

En esta sección nos restringimos al caso de interés de este trabajo, y consideramos datos en  $\mathbb{R}$ . La descomposición en valores singulares de  $A$  es

$$A = U \begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & s_r & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} V^T. \quad (3.13)$$

y el sistema lineal que en realidad se está resolviendo es,

$$Ax = b + \eta \quad (3.14)$$

donde  $\eta$  es una perturbación al sistema (3.1).

Para encontrar el parámetro de regularización probamos dos técnicas que a continuación se describen.

**Nota:** A la solución regularizada se le llamará simplemente  $x_\alpha$ .

### 3.5.1. El método de discrepancia de Morozov

Se define el funcional de discrepancia como (ver Morozov [8] para más detalles):

$$D(\alpha) = \| Ax_\alpha - b \|^2, \quad (3.15)$$

y se busca que  $\alpha$  cumpla lo siguiente,

$$D^2(\alpha) - \|\eta\|^2 = 0, \quad (3.16)$$

ya que,

$$D(\alpha) = \|\eta\|^2. \quad (3.17)$$

Vemos que

$$\begin{aligned} D^2(\alpha) &= \|(I - A(A^T A + \alpha I)^{-1} A^T) b\|^2 \\ &= \sum \left( 1 - \frac{s_i^2}{s_i^2 + \alpha} \right)^2 (u_i^T b)^2 \end{aligned}$$

así  $D(\alpha)$  es continua y estrictamente creciente con  $D(0) = 0$  y  $D(\alpha) = \|b\|^2$  cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ . Se sabe que  $D(\alpha) = \|\eta\|^2$  tiene una única solución cuando el nivel de ruido es menor que la norma de los datos,

$$\eta < \|b\|^2.$$

Para encontrar la raíz  $\alpha$  utilizamos el método de Newton.

### 3.5.2. El método de la curva L

Para implementar el método de la curva L, se gráfica el logaritmo de la norma al cuadrado de la solución regularizada contra la norma al cuadrado de el residual para un rango de valores del parámetro de regularización. Esta curva típicamente tiene forma de L. El criterio de la curva L para la selección del parámetro de regularización es elegir el valor del parámetro que corresponde a la "esquina" de esta curva.

Un detalle crucial es la caracterización precisa de la esquina de la curva L. Hansen y O'Leary [6] recomiendan el punto de máxima curvatura.

Denotemos por  $x_\alpha$  a la solución regularizada y sea  $r_\alpha = Ax_\alpha - b$  el residual regularizado. Definimos

$$\begin{aligned} X(\alpha) &= \log(R(\alpha)), & R(\alpha) &= \|r_\alpha\|^2, \\ Y(\alpha) &= \log(S(\alpha)), & S(\alpha) &= \|x_\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Suponemos que  $X(\alpha)$  y  $Y(\alpha)$  varían suavemente con respecto de  $\alpha$ . Este es el caso con la regularización de Tikhonov. Uno selecciona el valor de  $\alpha$  que maximice la función de curvatura

$$\kappa(\alpha) = \frac{X''(\alpha)Y'(\alpha) - X'(\alpha)Y''(\alpha)}{(X'(\alpha)^2 + Y'(\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.18)$$

donde la prima (') denota diferenciación con respecto a  $\alpha$ . Dada la descomposición SVD  $A = U \text{diag}(s_i) V^T$  y una representación filtro, uno puede expresar

$$R(\alpha) = \sum_{s_i > 0} [\omega_\alpha(s_i^2) - 1]^2 \hat{b}_i^2 + \sum_{s_i = 0} \hat{b}_i^2, \quad S(\alpha) = \sum_{s_i > 0} (\omega_\alpha(s_i^2))^2 \frac{\hat{b}_i^2}{s_i^2},$$

y se puede mostrar que

$$R'(\alpha) = -\alpha S'(\alpha).$$

De esto uno puede derivar una fórmula para la curvatura que dependa solamente de  $R(\alpha)$ ,  $S(\alpha)$  y  $R'(\alpha)$ :

$$\kappa(\alpha) = -\frac{R(\alpha)S(\alpha) [\alpha R(\alpha) + \alpha^2 S(\alpha)] + [R(\alpha)S(\alpha)]^2 / S'(\alpha)}{[R^2(\alpha) + \alpha^2 S^2(\alpha)]^{\frac{3}{2}}},$$

con esta función se elige el valor de  $\alpha$  que la maximice. Este método tiene la ventaja de que no necesita conocer el error ni suponer nada acerca de él. La desventaja es que si la gráfica no forma una L (según algunos autores) el método no sirve para ese problema.

En los experimentos numéricos que se realizaron se obtuvieron mejores resultados con el método de discrepancia de Morozov que con el método de la curva L.

**Comentario:** *La elección del parámetro de regularización es un tema delicado. Hemos seleccionado sólo dos técnicas de la gran variedad en la literatura. Se podría afirmar que todo problema inverso es diferente y requiere una elección de parámetro de regularización específica. En muchas aplicaciones la elección es heurística.*

### 3.6. Un método de descenso con regularización

Supongamos que tenemos el siguiente sistema lineal

$$Ax = b.$$

El sistema puede resolverse minimizando el funcional

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2.$$

En efecto, el gradiente es

$$\nabla\varphi(x) = A^T(Ax - b).$$

Consideremos la iteración

$$x_{k+1} = x_k + \omega A^T(b - Ax_k).$$

Si en cada iteración  $k$  el escalar  $\omega$  se elige tal que minimice  $\tilde{J}(\omega) = J(x_k - \omega \nabla J(x_k))$ , entonces obtenemos el método de descenso rápido. Si fijamos el valor de  $\omega$  con  $0 < \omega < 1/\|A\|^2$ , obtenemos el método (iteración) de Landweber (ver [7] para más detalles). Con cualquier elección de  $\omega$ , si se inicia con  $x_0 = 0$  y se supone que  $A$  es invertible, se puede demostrar que  $x_k$  converge a  $x_* = A^{-1}b$ .

Una limitación de estos métodos es que requieren muchas iteraciones para convergencia. Adicionalmente, si se tienen errores en los datos, la solución no será apropiada.

Aún así, se ha mostrado recientemente, que con preconditionamiento y regularización apropiada, estos métodos de descenso pueden ser competitivos. Ver [9].

En base a esta observación, y dada la naturaleza del problema inverso discreto (2.53), proponemos el siguiente método de solución.

De (2.51) se tiene que la matriz  $M$  se puede escribir como sigue:

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{bmatrix}$$

donde los submatrices de la primera columna corresponden a los valores de  $f$  y  $c$  mientras que las submatrices de la segunda columna corresponden a los valores de  $g_1$ . Así que el sistema lineal (2.53) se re-escibe como

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

donde

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} f \\ c \end{bmatrix} & \text{y} & b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \\ y &= [g_1] \end{aligned}$$

de la ecuación (3.19) se desglosan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} M_{1,1}x &= b_1 - M_{1,2}y, \\ M_{2,2}y &= b_2 - M_{2,1}x. \end{aligned}$$

Este sistema acoplado se va a resolver de forma iterativa de la manera siguiente: la primera ecuación se va a resolver usando un método de regularización y la segunda usando un método iterativo para minimizar el funcional de Tikhonov:

$$\min_x \|M_{1,1}x - (b_1 - M_{1,2}y_k)\|^2 + \alpha \|x\|^2.$$

De tal modo que la iteración es como sigue

$$y_{k+1} = y_k + \omega M_{2,2}^T [(b_2 - M_{2,1}x) - M_{2,2}y_k].$$

Donde la segunda ecuación calcula un nuevo valor para  $y$  y la primera lo toma y vuelve a encontrar un valor para  $x$ , de manera recursiva hasta que el error satisface una tolerancia dada. En el siguiente capítulo se mostrarán algunos resultados obtenidos con este método.

# Capítulo 4

## Problemas Sintéticos

En este capítulo se presentarán algunos ejemplos de problemas inversos que cumplen con el modelo presentado en el capítulo 2, donde se sabe de antemano cual es el valor de la función  $g_1(x)$  que se quiere encontrar. De esta manera se podrá ver la eficacia del método. El sistema (2.53) se resuelve con los métodos de regularización descritos previamente y el método iterativo mixto. En todos los ejemplos  $\Omega$  es el disco unitario.

Al utilizar problemas sintéticos para probar la eficiencia de un método inverso, se corre el riesgo de cometer un “ crimen en inversión” (*inverse crime*). Para evitarlo Colton & Kress [2] dicen casi textualmente: “ A fin de evitar la inversión trivial de problemas de dimensión finita, para probar el desempeño de un método de aproximación para el problema inverso es crucial que los datos sintéticos sean obtenidos con otro método que resuelva el problema directo el cual no tenga relación con el método que resuelve el problema inverso bajo consideración”.

Por construcción nuestros ejemplos cumplen este criterio satisfactoriamente

## 4.1. Fuente cero

Sea

$$\Delta w(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in \Omega,$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}(x, y) = x + y, \quad \forall x, y \in \partial\Omega,$$

donde

$$w(x, y) = x + y, \quad \forall x, y \in \partial\Omega.$$

El sistema que se quiere resolver numéricamente con la discretización realizada en el capítulo anterior, asociándole un sistema lineal como (2.53), observese que la fuente es cero, i.e.  $g_1(x, y) = 0$ . Estamos suponiendo que no sabemos que valor tiene  $g_1(x, y)$  y también que no se conoce a  $w(x, y)$  en  $\Omega$ , son las incógnitas del problema. La solución real es  $w(x, y) = x + y$ .

Se obtiene el siguiente resultado para  $g_1(x, y) = 0$ .

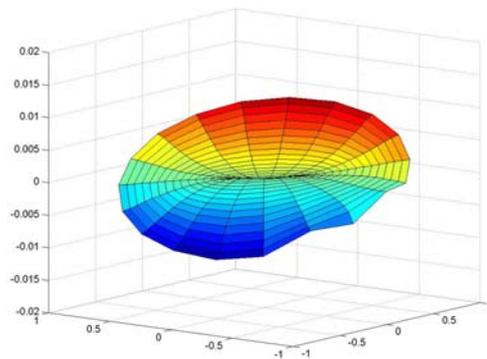


Fig 11: Superficie aproximada

Observamos que la superficie se encuentra acotada entre -0.02 y 0.02, lo cual nos dice que los valores aproximados para  $g_1(x, y)$  son cercanos a cero.

Para ver que tan cerca están veamos el siguiente histograma que muestra de manera acumulada estos valores.

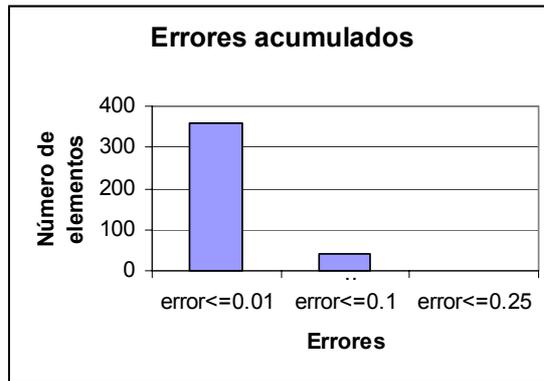


Figura 12

Vemos que la mayoría de estos valores son menores que 0.01 lo que quiere decir que están un poco más cerca de cero. Si observamos la tabla de los errores notamos que son pequeños así que la solución que se ha encontrado es buena. Notese que el valor del número de condición de  $M$  es grande, esto significa que la matriz es mal condicionada lo cual va traer una inestabilidad numérica y una dificultad en encontrar una solución adecuada al problema, este número lo estamos comparando con el inverso de  $\sqrt{EPS}$  de la maquina utilizada el cual vale:  $9,5 \times 10^7$ .

Número de condición de $M$	Error promedio	0.0036
1.1509e+020	RMS	0.0050

En la gráfica (13) podemos observar que se reproduce el valor aproximado a la densidad  $f$  que se encontro en el problema directo del mismo sistema

(vease figura (8)), y notamos que las dos soluciones se empalman perfectamente. Esto nos dice que el sistema resuelve muy bien para la función  $w(x, y)$ .

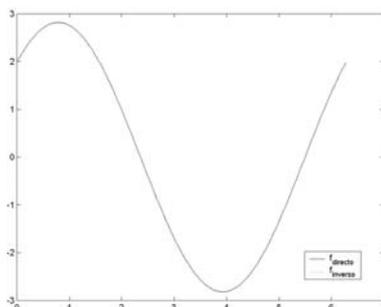


Figura 13: Valores de f

Para este problema se dividió el círculo en 200 arcos y el disco en 200 elementos produciendo una matriz de  $401 \times 401$ . Se usaron los métodos de regularización descritos en el capítulo anterior y los resultados mostrados aquí corresponden al parámetro ( $\alpha_M$ ) encontrado con el "Método de Discrepancia de Morozov" (MDM), el otro fue encontrado con el método de la Curva L" (MCL) ( $\alpha_L$ ), en la siguiente tabla se muestran los valores obtenidos para estos parámetros con los dos métodos:

$\alpha_M$	0.0025
$\alpha_L$	$9 \times 10^{-10}$

Observese que el parámetro que corresponde al método de la curva L nos da un valor muy pequeño, esto lo que ocasiona es una solución muy suave en comparación con la solución real.

### Iteraciones

Se usó un método iterativo para ver si la solución regularizada encontrada se podía mejorar y se obtuvo la siguiente superficie para  $g_1(x, y) = 0$ ,

figura (14), notese que la solución encontrada con iteraciones esta más cerca de cero que la solución regularizada.

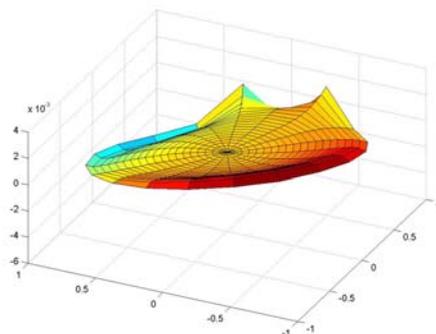


Fig 14: Superficie aproximada

Si observamos el histograma (15) nos damos cuenta de que estos valores son menores que  $1 \times 10^{-2}$  mientras que con la otra solución sólo la mitad eran menores que este valor.

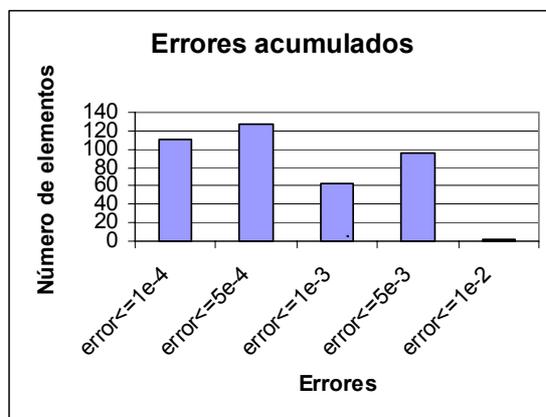


Figura 15

En la siguiente tabla vemos que el error es mucho más pequeño que el obtenido con la solución regularizada así que se obtuvo un mejor resultado con

las iteraciones. Cabe notar que estamos partiendo de la solución regularizada para realizar estas iteraciones.

Error promedio	0.0006
RMS	0.0010

## 4.2. Fuente lineal ( $x + y$ )

Sea

$$\Delta w(x, y) = x + y, \quad x, y \in \Omega,$$

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial n} = \frac{1}{3}(x^3 + y^3), \quad x, y \in \partial\Omega,$$

$$w(x, y) = \frac{1}{6}(x^3 + y^3), \quad x, y \in \partial\Omega.$$

El sistema que se quiere resolver y observemos que  $g_1(x, y) = x + y$  no es constante, usando el planteamiento desarrollado en el capítulo anterior obtenemos un sistema lineal como (2.53), resolviéndolo nos da los siguientes resultados.

Observando la gráfica de los resultados obtenidos (figura (16)) y comparandola con los valores reales de la función (figura (17)), vemos que hay ciertas diferencias, para saber que tan buena o mala fué la aproximación vamos a observar la gráfica de las curvas de nivel para comparar ambas superficies.

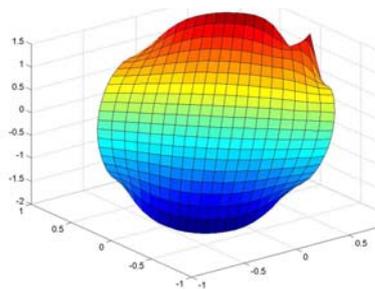


Fig 16:Superficie aproximada

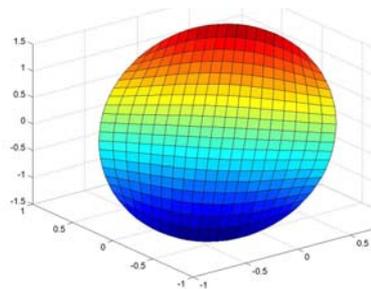


Fig 17:Superficie real

En la gráfica (18), nos damos cuenta de que en la mayor parte del dominio la aproximación se acerca bastante a los valores reales de la función, observando que en las orillas se nota una diferencia entre ambas. Esto se debe a que la discretización hecha para  $\Omega$  tiene ciertos problemas en la frontera.

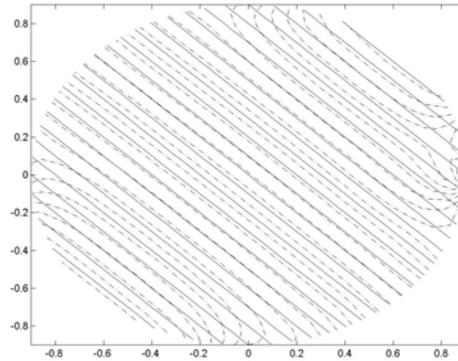


Figura 18: Curvas de nivel de las superficies real (línea sólida) vs aproximada (línea punteada)

En el histograma se puede ver que tan cerca esta la aproximación de los valores reales, vemos que la mayor parte de los valores aproximados están a menos de 0.25 de los valores reales y que más de la mitad de los valores aproximados es menor -el error- a 0.1, así que sí están cerca.

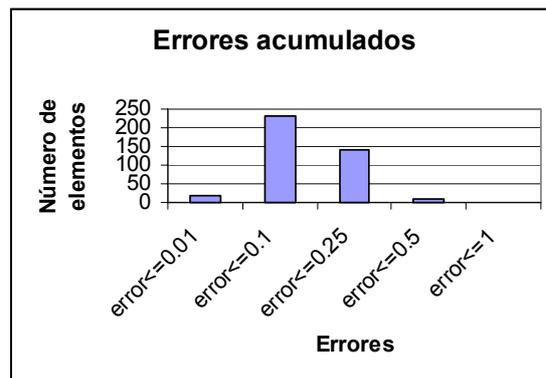


Figura 19

En las siguientes tablas nos damos cuenta de que nuevamente el número de condición de la matriz es muy grande por lo tanto es una matriz mal condicionada. Vemos que los errores obtenidos son menores que 0.1, lo cual nos dice que la aproximación es relativamente buena.

Número de condición de $M$	Error promedio	0.0970
1.0612e+020	RMS	0.0825

En este caso los resultados mostrados corresponden al parámetro de regularización encontrado con el método de la curva L ( $\alpha_L$ ), así que se mostrarán las gráficas que corresponden a la curvatura (figura (20)), en donde el punto de curvatura máximo es el que se toma como parámetro de regularización, y a las funciones que nos ayudan a encontrar el parámetro (figura (21)).

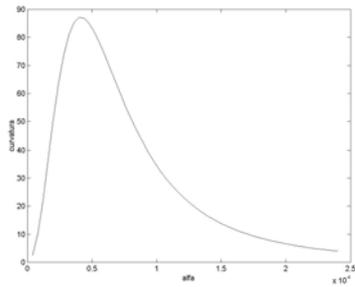


Fig. 20: Curvatura vs alfa

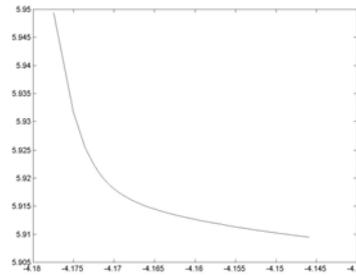


Fig. 21: Curva L

En la siguiente tabla se muestran los valores obtenidos para los dos parámetros de regularización. Notese que el obtenido con MDM es mucho más pequeño que el obtenido con MCL lo que produce una solución muy suave.

$\alpha_M$	1.0930e-012
$\alpha_L$	4e-5

A continuación veremos la gráfica de la aproximación a la densidad  $f$  (figura (22)) y los valores que se encontraron en el problema directo para la

misma densidad. Observemos que los valores se parecen pero el del problema inverso es más suave que el del problema directo y esto se debe a la malla que se está empleando así como al valor del parámetro de regularización.

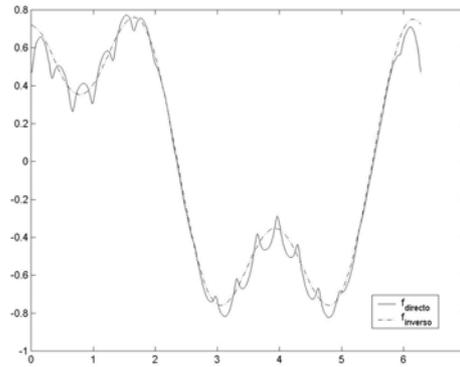


Figura 22: Valores de  $f$

### Iteraciones

Aquí se inició la iteración con la solución real perturbada un 5% y vemos que se llega a la solución exacta. No se pudo realizar ninguna iteración iniciando con la solución regularizada ya que en el primer paso el error aumentaba. En la figura (25) vemos la superficie obtenida con el método de iteración mixto.

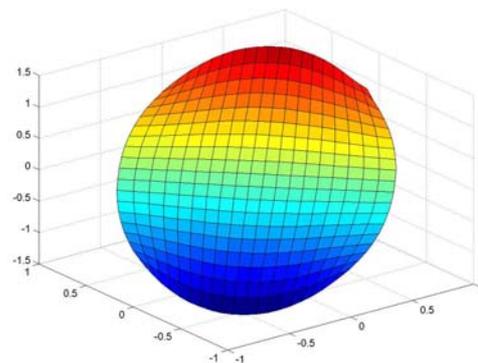


Figura 23: Superficie aproximada

Observamos en las curvas de nivel (figura (24)), que la solución obtenida es bastante buena.

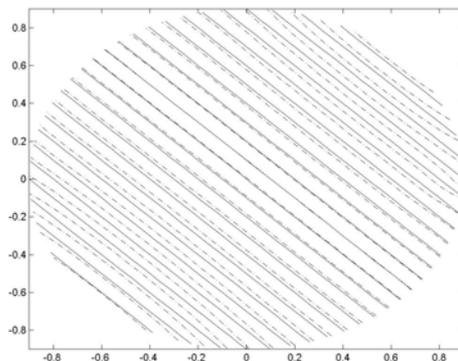


Figura 24: Curvas de nivel comparando la superficie aproximada (línea punteada) con la superficie real (línea sólida)

En el histograma se puede ver que los valores de las iteraciones se acercaron a menos de 0.1 de los valores reales.

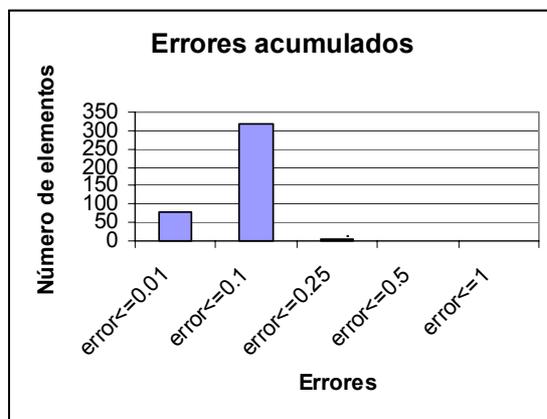


Figura 25

En la siguiente tabla se observa que los errores son más pequeños que el 5% con el cual se inicio, así que el método iterativo redujo el error.

Error promedio	0.0293
RMS	0.0254

### 4.3. Fuente exponencial ( $e^x - 4 \cos(2y)$ )

Sea

$$\Delta w(x, y) = e^x - 4 \cos(2y), \quad \forall x, y \in \Omega,$$

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial n} = xe^x - 2 \operatorname{sen}(2y), \quad \forall x, y \in \partial\Omega,$$

$$w(x, y) = e^x + \cos(2y), \quad \forall x, y \in \partial\Omega.$$

el sistema que se quiere resolver de manera numérica con la formulación descrita anteriormente. Obteniendo los siguientes resultados al resolver el sistema lineal asociado.

En las figuras (26) y (27) se observan las superficies aproximada y real respectivamente, notese que ambas superficies difieren en forma, para ver que tan diferentes son veamos sus curvas de nivel.

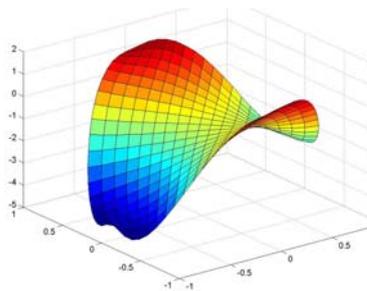


Fig 26:Superficie aproximada

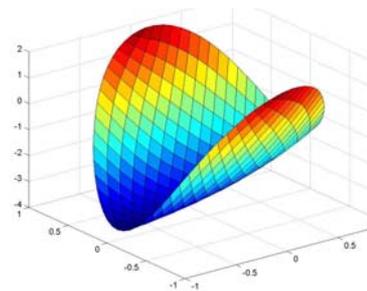


Fig 27:Superficie real

En la figura (28) se aprecia que existe una gran diferencia entre ambas superficies, este resultado para la aproximación de  $g_1(x, y)$  no es bueno.

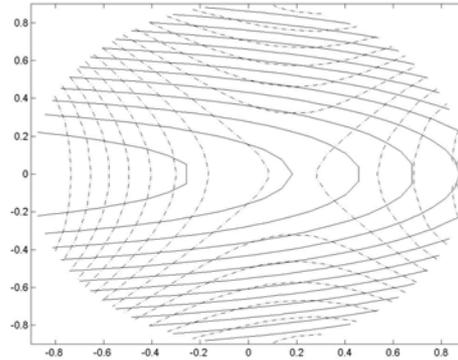


Fig 28:Curvas de nivel, superficie real (línea sólida) vs superficie aproximada (línea punteada)

En cambio para los valores de la aproximación de la densidad  $f$ , vemos que esta solución sí se acerca y sigue el mismo comportamiento que la solución encontrada en el problema directo.

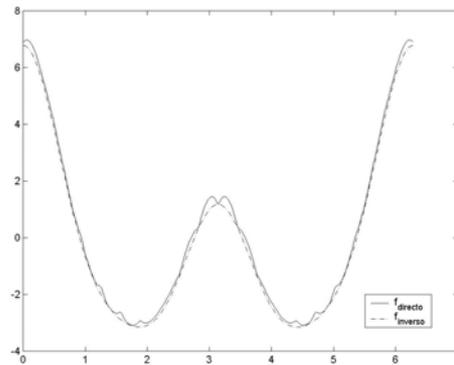


Figura 29:Valores de  $f$

En la siguiente tabla vemos que el error ya no es pequeño como en los ejemplos anteriores.

Número de condición de $M$	Error promedio	0.7431
1.0612e+020	RMS	0.6037

Notese en el siguiente histograma (30) que los valores aproximados (la mayor parte de ellos) están separados a lo más por una unidad. Esto nos dice que están alejados de los valores reales.

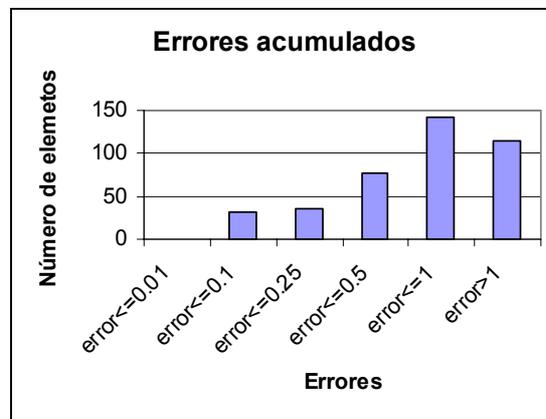


Figura 30

Los resultados mostrados en esta parte corresponden a la regularización hecha con MDM. En la siguiente tabla se muestran los valores del parámetro de regularización obtenido con los dos métodos descritos anteriormente.

$\alpha_M$	7.1861e-004
$\alpha_L$	3e-8

En este caso la "mejor" solución se obtuvo con PDM.

### Iteraciones (5% de error en la solución)

Se propone una solución con un 5% de error y se utiliza como punto de partida para realizar un proceso iterativo obteniéndose los siguientes resultados. En las figuras (31) y (32) se comparan las superficies aproximada y real, respectivamente, notándose que la superficie aproximada se parece mucho a la superficie real

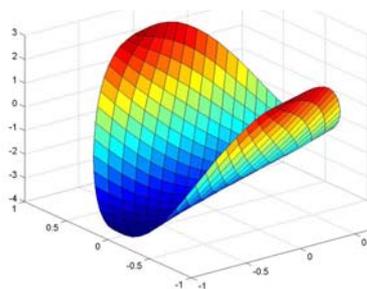


Fig 31:Superficie aproximada

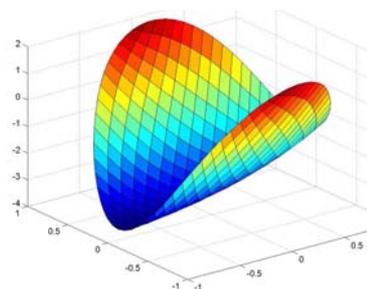


Fig 32:Superficie real

En las curvas de nivel (figura (33)) nos damos cuenta que la solución iterada se aproxima bastante bien a la solución real.

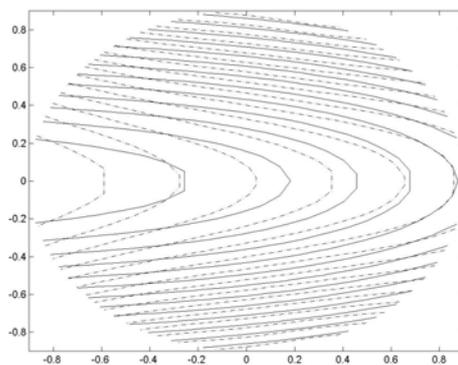


Fig 33: Curvas de nivel, superficie real (línea sólida) vs aproximada (línea punteada)

En la siguiente tabla vemos que los errores son pequeños y eso nos dice que la aproximación es buena.

Número de condición de $M$	Error promedio	0.1751
1.0612e+020	RMS	0.1409

En el siguiente histograma vemos que el 75 % de los valores aproximados está a menos de 0.25 de los valores reales.



Figura 34

En la siguiente gráfica vemos la comparación entre los valores de la densidad  $f$  obtenidos con el problema directo y con el problema inverso iterado, observamos que se aproximan bastante bien estos valores.

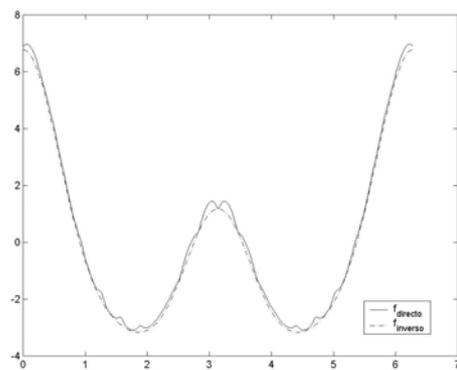


Figura 35: Valores de  $f$

# Capítulo 5

## Conclusión y Trabajo Futuro

En este trabajo se utilizó la representación en potencial de capa simple para atacar el problema inverso que surge de la ecuación del potencial, como una manera alternativa de formular este tipo de problemas a los que se usan en la literatura en base a la función de Green. Tal función tiene una dependencia muy fuerte del dominio, en cambio la representación en capa simple únicamente requiere que el dominio sea suave a tramos. Se mostró (en el capítulo 4) que esta formulación da resultados satisfactorios. Como era de esperarse la solución depende mucho de como se elija el parámetro de regularización. Hay que destacar que la parte que corresponde a la solución del problema directo, en el problema inverso, es más fuerte en el sentido de que en todos los ejemplos esta solución coincide con la obtenida en el problema directo. Mientras que no en todos los ejemplos se logró encontrar  $g_1(x, y)$  que se aproximara a la función real.

Se encontró una diferencia entre las submatrices que corresponden a los valores  $f$ ,  $c$  y a los valores de  $g_1(x, y)$ , lo que nos llevo a implementar el método de iteración mixto para separar estas submatrices y resolver por una parte para  $f$ ,  $c$  y por otra para  $g_1(x, y)$  de manera acoplada. Queda como trabajo futuro llevar esta formulación a  $\mathbb{R}^3$  que es en donde se encuentra el problema de EEG y encontrar una mejor discretización para el dominio. Desde el punto de vista teórico queda por desarrollar el análisis del sistema de ecuaciones integrales (2.49).

## AGRADECIMIENTOS

A CONACyT por su apoyo con la beca 1803054.

Al Dr. Miguel Angel Moreles Vazquez por su apoyo y paciencia.

Al Dr. Salvador Botello Rionda.

Al Dr. Francisco Sánchez Sánchez.

A CIMAT por las instalaciones prestadas estos dos años.

# Bibliografía

- [1] S. Baillet, J. c. Mosher y R. M. Leahy, *Electromagnetic Brain Mapping*, IEEE Signal Porcessing Magazine, Noviembre (2001), pp. 14-30.
- [2] D. Colton y R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer, Berlin (1992).
- [3] G. Chen y J. Zhou, *Boundary Element Methods*, Academic Press, USA (1992).
- [4] H. W. Engl, *Inverse Problems*, Aportaciones Matemáticas, 8 (1995).
- [5] O. Faugeras, F. Clément, R. Deriche, R. Keriven, T. Papadopoulo, J. Roberts, T. Viéville, F. Devernay, J. Gomes, G. Hermosillo, P. Kornprobst y D. Lingrand, *The inverse EEG and MEG problems: The adjoint state approach I: The continuous case*, INRIA, **No. 3673** (1999).
- [6] P. C. Hansen y D. P. O'Leary, *The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems*, SIAM Journal on Scientific Computing, **14** (1993), pp. 1487-1503.
- [7] L. Landweber, *An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind*, American Journal of Mathematics, **73** (1951), pp. 615-624.
- [8] V. A. Morozov, *On the solution of functional equations by the method of regularization*, Soviet Mathematics Doklady, **7** (1966), pp. 414-417.
- [9] J. G. Nagy y K. M. Palmer, *Steepest Descent, CG and Iterative Regularization of Ill-Posed Problems*, BIT Numerical Mathematics, **43** (2003), pp. 1003-1017.

- [10] R. D. Pascual-Marqui, *Review of Methods for Solving the EEG Inverse Problem*, International Journal of Bioelectromagnetism, **Vol. 1**, No. 1, pp. 75-86.
- [11] C. R. Vogel, *Computational Methods for Inverse Problems*, SIAM Frontiers in Applied Mathematics (2002).
- [12] J.H. Wilkinson: *The algebraic eigenvalue problem*; Oxford University Press; London. (1965).