

C I M A T

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Análisis de la Estabilidad de los Sistemas
Mecánicos del Tipo Sobolev Generalizados

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A :

Alma Lucía González Correa

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Lázaro Raúl Felipe Parada

Junio de 2004

Guanajuato, Gto., México



CIMAT
BIBLIOTECA

Contenido

1	Definiciones Preliminares	1
1.1	Conceptos generales en la teoría de operadores lineales	1
1.2	Vectores propios y subespacios invariantes	3
1.3	Propiedades del operador de proyección	4
1.4	Espacios con producto interno indefinido	5
1.5	Espacios de Pontriaguin	6
1.6	Ecuaciones diferenciales lineales en espacios de Hilbert	7
1.7	Resultados básicos de la teoría de polinomios	9
2	El modelo matemático del sistema físico	11
3	Construcción de un Q-producto interno	17
4	Acotación del grado de inestabilidad	23
4.1	Descomposición fundamental de $S_2 \times \mathbb{C}^2$	23
4.2	Análisis de los valores propios de A	25
4.3	Análisis de los valores propios complejos	29

5	Restricción caso de una cavidad elipsoidal	35
5.1	Cálculo del operador A	35
5.2	Existencia de un subespacio invariante de dimensión finita	43
6	Análisis del polinomio característico	49
6.1	Cálculo del discriminante	49
6.2	Análisis del signo del discriminante	53
7	Conclusiones	61

Agradecimientos

Agradezco al CIMAT y al CONACYT por haberme dado la magnífica oportunidad de estudiar una maestría de excelencia, la cual me permitió recibir conocimientos provenientes directamente de importantes personalidades dentro de la investigación científica. Agradezco de forma especial al Dr. Raúl Felipe por haber aceptado ser mi asesor de tesis, haberme guiado con tanta paciencia y dedicarme su valioso tiempo. Así mismo, extiendo mis agradecimientos al Dr. Fausto Antonio Ongay Larios y al Dr. Fernando Galaz Fontés, por haber aceptado ser sinodales de este trabajo de tesis y aportar tan valiosos comentarios. Finalmente, agradezco a mis compañeros y amigos que conocí durante este proceso y con quienes tuve el placer de convivir, ellos hicieron de mi estancia en el CIMAT una experiencia muy agradable.

Capítulo 1

Definiciones Preliminares

En esta primera parte introducimos los conceptos básicos que serán usados más tarde en el desarrollo del trabajo. Estos son resultados conocidos que pueden encontrarse en la literatura.

1.1 Conceptos generales en la teoría de operadores lineales

Definición 1 Sea V un espacio vectorial y $A : D(A) \subset V \rightarrow V$. Se define lo siguiente:

1. A es un operador lineal si su dominio $D(A)$ es un subespacio lineal y si

$$A(af + bg) = aAf + bAg,$$

para todo $f, g \in V$ y para todo par de números complejos a y b . El subespacio de V formado al aplicar el operador A a todos los elementos de su dominio, se llama rango de A y la denotamos por $R(A)$.

2. Sea $B : D(B) \subset V \rightarrow V$ un operador lineal. Si $D(A) \subset D(B)$ y si

$$Bf = Af$$

para cada $f \in D(A)$, entonces B es llamado una extensión de A y escribimos $A \subset B$.

3. Un operador lineal A es acotado si

$$\sup_{f \in D(A), f \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} < \infty. \quad (1.1)$$

Si A es acotado, entonces el número (1.1) es llamado la *norma del operador* A , y es denotado por $\|A\|$.

4. Si para todo $x_1, x_2 \in D(A)$ con $x_1 \neq x_2$, implica $Ax_1 \neq Ax_2$, entonces A tiene un operador inverso $A^{-1} : R(A) \rightarrow D(A)$, definido de la siguiente manera, si $Ax = y$, entonces $A^{-1}y = x$. En este caso decimos que A es *invertible*. Si A es invertible y $D(A) = R(A) = V$, entonces se dice que A es *completamente invertible*.

Definición 2 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert, $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal.

1. El operador A es *cerrado* si las relaciones

$$f_n \in D(A), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Af_n = g$$

implican que

$$f \in D(A), \quad y \quad g = Af.$$

2. El operador A admite *cerradura* \bar{A} si satisface lo siguiente: si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(A)$ son dos sucesiones que convergen al mismo límite y si $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Ay_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen, entonces éstas últimas convergen al mismo límite.

3. Si A admite cerradura, entonces el operador \bar{A} , que llamamos la *cerradura de A* , tiene por dominio al conjunto

$$D(\bar{A}) = \{x \in H : \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(A), \quad x_n \rightarrow x \text{ y } \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ converge}\},$$

y se define como $\bar{A}x = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$. Puede verificarse fácilmente que \bar{A} está bien definido y que $A \subset \bar{A}$.

4. Si $\overline{D(A)} = H$, entonces el operador lineal A^* cuyo dominio es

$$D(A^*) = \{g \in H : \exists g^* \in H \text{ para el cual } \langle Af, g \rangle = \langle f, g^* \rangle, \forall f \in D(A)\};$$

y definido por $A^*g = g^*$ para todo $g \in D(A^*)$, es llamado el *operador adjunto* de A . Como g^* es único, entonces A^* está bien definido.

5. Si $\overline{D(A)} = H$ y $A^* = A$, entonces se dice que A es un operador *auto-adjunto*.

6. Decimos que A es *simétrico* si $D(A)$ es denso en H y si para todo par de elementos $f, g \in D(A)$, se cumple,

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle.$$

Es claro que si A es simétrico, se tiene $A \subset A^*$.

1.2 Vectores propios y subespacios invariantes

Definición 3 Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal cerrado, con $D(A)$ denso.

1. Un vector $f \neq 0$ tal que

$$Af = \lambda f$$

se llama *vector propio* de A y el número $\lambda \in \mathbb{C}$ es su *valor propio correspondiente*. Un vector $f \neq 0$ es llamado un *vector radical* del operador A correspondiente al valor propio λ_0 , si $(A - \lambda_0 I)^n f = 0$ para algún entero positivo n .

2. El conjunto de todos los vectores radicales del operador A , correspondientes al mismo valor propio λ_0 , junto con el vector 0 , forma un subespacio lineal \mathfrak{S}_{λ_0} , el cual es llamado *variedad radical*.

3. La dimensión de \mathfrak{S}_{λ_0} se llama la *multiplicidad algebraica* del valor propio λ_0 . Si $\nu_{\lambda_0} < \infty$, entonces $\mathfrak{S}_{\lambda_0} \subset H$ es un subconjunto cerrado; en este caso le llamamos *subespacio radical* de λ_0 .

4. El subespacio propio $\wp_{\lambda_0}(A)$ consistente del vector nulo junto con los vectores propios de A correspondientes al valor propio λ_0 está contenido en \mathfrak{S}_{λ_0} , esto es, $\wp_{\lambda_0}(A) \subset \mathfrak{S}_{\lambda_0}$. La dimensión del espacio $\wp_{\lambda_0}(A)$ es llamada la *multiplicidad propia* de λ_0 . Así, la multiplicidad propia de cualquier valor propio no excede su multiplicidad algebraica.

5. Decimos que un valor propio es *simple* si su multiplicidad propia coincide con su multiplicidad algebraica.

6. Sea λ un parámetro con valores en \mathbb{C} y consideremos la ecuación

$$Au - \lambda u = v.$$

Los valores de λ para los cuales el operador resolvente $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ existe, es acotado y está definido en todo H , son llamados **puntos regulares** del operador A . Todos los demás valores de λ que no son puntos regulares, forman el **espectro** del operador A , y lo denotamos por $\sigma(A)$. El conjunto de valores propios de A es un subconjunto de $\sigma(A)$ que denotamos por $\sigma_p(A)$ y se le conoce como el **espectro discreto** de A .

Definición 4 Sea V un espacio vectorial y $A : D(A) \subset V \rightarrow V$ un operador lineal. Un subespacio $S \subset V$ es llamado **subespacio invariante** del operador A , si para todo $f \in D(A) \cap S$, se cumple $Af \in S$.

1.3 Propiedades del operador de proyección

Sea G un subespacio de un espacio vectorial H con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y sea $F \subset V$ tal que

$$H = G \oplus F, \quad (1.2)$$

esto es, cada vector $h \in H$ puede ser expresado de forma única como

$$h = g + f$$

donde $g \in G$ y $f \in F$.

Definición 5 El vector g es llamado la **proyección** del vector h sobre G . El operador, definido en todo el espacio H , que mapea cada $h \in H$ en su proyección sobre el subespacio G , es llamado el **operador de proyección**, y lo denotamos por P . Entonces

$$Ph = g.$$

De la definición de un operador de proyección, es fácil ver que $P^2 = P$.

Definición 6 Si en (1.2), F y G son subespacios ortogonales de H , entonces P se llama **proyección ortogonal** de H sobre G . El operador de proyección ortogonal cumple las siguientes propiedades: $P^* = P$ y P es acotado con $\|P\| \leq 1$.

1.4 Espacios con producto interno indefinido

Definición 7 Sea V un espacio vectorial. Una aplicación $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, es un **producto interno indefinido** sobre V si satisface lo siguiente:

1. $[\cdot, \cdot]$ es lineal con respecto al primer argumento, es decir, $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha [x, z] + \beta [y, z]$, para todo $x, y \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. $[x, y] = \overline{[y, x]}$, para todo $x, y \in V$.

De las condiciones 1 y 2 en la definición 7 se observa que $[x, x]$ es real pero no necesariamente mayor o igual que cero.

Definición 8 A un espacio vectorial, junto con un producto interno indefinido $(V, [\cdot, \cdot])$ le llamamos **espacio con producto interno indefinido**. Un vector $x \neq 0$ para el cual $[x, x] = 0$, se llama **vector isotrópico** de V .

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $Q : H \rightarrow H$ un operador lineal tal que $Q^* = Q$ y Q^{-1} existe. Definimos entonces

$$[x, y] = \langle Qx, y \rangle. \quad (1.3)$$

Veamos que (1.3) es un producto interno indefinido,

1. $[\alpha x + \beta y, z] = \langle Q(\alpha x + \beta y), z \rangle = \langle \alpha Qx + \beta Qy, z \rangle = \alpha \langle Qx, z \rangle + \beta \langle Qy, z \rangle = \alpha [x, z] + \beta [y, z]$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $x, y, z \in H$.
2. Usando el hecho de que $Q^* = Q$ se observa que $[x, y] = \langle Qx, y \rangle = \langle x, Qy \rangle = \overline{\langle Qy, x \rangle} = \overline{[y, x]}$.

Definición 9 Al producto interno indefinido dado como en (1.3), le llamamos **Q-producto interno**. Decimos que x e y son **Q-ortogonales** si $[x, y] = 0$.

Sea A una aplicación lineal con $\overline{D(A)} = H$. El operador adjunto de A con respecto al Q-producto interno se llamará **Q-adjunto**, y será denotado por A_Q^* . Decimos que A es **Q-autoadjunto**, si $A_Q^* = A$.

Si el operador A es simétrico con respecto al Q-producto interno, diremos que A es **Q-simétrico**.

1.5 Espacios de Pontriaguin

Sea $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno indefinido. Definimos

$$\mathfrak{B}_{++} = \{x \in V : [x, x] > 0\} \cup \{0\}$$

$$\mathfrak{B}_{--} = \{x \in V : [x, x] < 0\} \cup \{0\}.$$

Definición 10 Decimos que V es un espacio de Krein si existen subespacios $V_+ \subset \mathfrak{B}_{++}$ y $V_- \subset \mathfrak{B}_{--}$ tales que:

1. $[V_+, V_-] = 0$.
2. V_+ es completo respecto a la norma $\|\cdot\|_+ = \sqrt{[\cdot, \cdot]}$ y V_- es completo respecto a la norma $\|\cdot\|_- = \sqrt{-[\cdot, \cdot]}$.
3. $V = V_- \oplus V_+$, es decir, todo $v \in V$ puede escribirse de forma única como $v = x + y$, donde $x \in V_+$, $y \in V_-$, y $[x, y] = 0$. A una descomposición de este tipo, también se le conoce como *descomposición fundamental* del espacio V .

Definición 11 Se define el rango de indefinición $\kappa(V)$ del espacio V , como

$$\kappa(V) = \min \{ \dim V_+, \dim V_- \}.$$

A un espacio de Krein con rango de indefinición $\kappa(V) < \infty$, lo llamamos espacio de Pontriaguin de orden κ y lo denotamos por Π_κ .

Ejemplo. Para ilustrar estas definiciones, veamos el siguiente ejemplo. Tomemos $V = \mathbb{C}^2$ sobre el campo de los números complejos. Consideremos el operador

$$Q = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

claramente $D(Q) = \mathbb{C}^2$, Q es invertible y $Q = Q^*$.

En \mathbb{C}^2 el Q -producto interno indefinido está dado como sigue. Sean $x = \begin{pmatrix} w_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} w_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, entonces

$$[x, y] = \langle Qx, y \rangle = i(z_1 \bar{w}_2 - w_1 \bar{z}_2),$$

donde $\langle x, y \rangle = w_1 \bar{w}_2 + z_1 \bar{z}_2$ es el producto interno usual en \mathbb{C}^2 .

1.6. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES EN ESPACIOS DE HILBERT

Sea el vector $u = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$[u, u] = \langle Qu, u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 > 0.$$

Por otro lado, para el vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ se tiene

$$[v, v] = \langle Qv, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = -2 < 0.$$

Evidentemente, los vectores u y v son Q -ortogonales, y además resultan ser linealmente independientes. Se tiene que $\dim \mathbb{C}^2 = 2$. Denotemos por \mathbb{C}_+^2 y \mathbb{C}_-^2 el espacio generado por los vectores $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ respectivamente, es decir,

$$\mathbb{C}_+^2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathbb{C}_-^2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

Resulta entonces que

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_+^2 \oplus \mathbb{C}_-^2.$$

Partiendo del hecho de que, tanto $(\mathbb{C}_+^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ como $(\mathbb{C}_-^2, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ son completos, es fácil demostrar que $(\mathbb{C}_+^2, [\cdot, \cdot])$ y $(\mathbb{C}_-^2, -[\cdot, \cdot])$ también lo son. Luego, como $[\mathbb{C}_+^2, \mathbb{C}_-^2] = 0$, entonces $(\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot])$ es un espacio de Pontriaguin de orden 1.

1.6 Ecuaciones diferenciales lineales en espacios de Hilbert

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dR}{dt} = iAR, \tag{1.4}$$

en donde A es un operador lineal, con dominio $D(A)$ denso en un espacio de Hilbert H .

Definición 12 Una solución de la ecuación (1.4) sobre el intervalo $[0, \infty)$ es una función $R(t)$ que cumple con las siguientes condiciones:

1. $R(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, \infty)$.

- ii. Para cada valor $t \in [0, \infty)$, existe la derivada $R'(t)$ ¹.
- iii. Se satisface $R'(t) = iAR(t)$, para todo $t \in [0, \infty)$.

Definición 13 El problema de Cauchy sobre $[0, \infty)$, significa encontrar una solución de la ecuación (1.4) sobre $[0, \infty)$, que satisfaga la condición inicial

$$R(0) = R_0 \in D(A). \quad (1.5)$$

Si en la ecuación (1.4), el operador A es cerrado, entonces para cualquier $R_0 \in D(A)$, existe una solución única del problema de Cauchy la cual es continuamente diferenciable sobre $[0, \infty)$.

Una parte importante en el estudio de la estabilidad de las soluciones para la ecuación (1.4) (donde A es un operador lineal cerrado), es el estudio de la ubicación del espectro discreto del operador A .

El interés por este tipo de problemas consiste en lo siguiente: existe una clase de soluciones de la ecuación (1.4) llamadas soluciones elementales que son de la forma

$$R(t) = \exp(i\lambda t) \left(\frac{t^p}{p!} R_0 + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} R_1 + \dots + R_p \right) \quad (1.6)$$

donde los $R_k \neq 0$, $R_k \in D(A)$, para $k = 0, 1, \dots, p$. Es fácil ver que una función vectorial de la forma (1.6) es una solución de (1.4) si y sólo si λ es un valor propio de A correspondiente al vector propio R_0 , es decir $AR_0 = \lambda R_0$ y además cada R_k es un vector radical de A correspondiente a λ . Es decir,

$$AR_k = \lambda R_k - iR_{k-1} \quad (1.7)$$

para $k = 1, \dots, p$. Para cada valor propio λ , la cantidad de soluciones de la forma (1.6) depende de la multiplicidad algebraica de λ .

Por otra parte, es claro que si $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\text{Im}(\lambda) < 0$ ó $\lambda \in \mathbb{R}$ y su multiplicidad algebraica es mayor que 1, entonces la función $R(t)$ no está acotada en la norma de H cuando $t \rightarrow \infty$. En este sentido diremos que la solución de (1.4) es **inestable**.

Aunque es cierto que pueden existir soluciones de (1.4) que no son de la forma (1.6), el hecho de saber el aporte del espectro discreto, a través de las soluciones elementales, constituye un paso importante, pues en ocasiones las soluciones elementales son densas en el conjunto de todas las soluciones.

¹ si $\lim_{\Delta t \rightarrow +0} \left\| \frac{x(t-\Delta t) - x(t)}{\Delta t} - y \right\| = \lim_{\Delta t \rightarrow -0} \left\| \frac{x(t-\Delta t) - x(t)}{\Delta t} - y \right\| = 0$, se define $x'(t) = y$.

1.7 Resultados básicos de la teoría de polinomios

Esta parte se incluye porque en la parte final de la tesis, es necesario analizar el comportamiento de las raíces del polinomio característico que resulta de una matriz de 3×3 .

Cálculo de las raíces de un polinomio de grado tres. Sea dada la ecuación cúbica

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0 \quad (1.8)$$

con coeficientes complejos. Sustituyendo en (1.8) una nueva variable dada por

$$y = x - \frac{a}{3} \quad (1.9)$$

resulta la ecuación

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1.10)$$

donde

$$p = -\frac{1}{3}a^2 + b \quad \text{y} \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c.$$

Hallando las raíces de (1.10), en virtud de la relación (1.9), se obtienen también las raíces de la ecuación (1.8).

Cuando los coeficientes de (1.8) son reales, la expresión

$$D = -4p^3 - 27q^2 \quad (1.11)$$

desempeña un papel fundamental para conocer el tipo de las raíces de (1.10) y por tanto las de (1.8). A D se le denomina **discriminante** de (1.10).

El signo del discriminante proporciona la siguiente información:

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación (1.10) tiene tres raíces reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces todas las raíces de la ecuación (1.10) son reales, siendo dos de ellas iguales entre sí.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación (1.10) tiene tres raíces reales distintas.

Capítulo 2

El modelo matemático del sistema físico

En esta tesis haremos uso de una parte del trabajo hecho por Fidel Olivé en su tesis de maestría 'Sobre la Estabilidad de un Sistema Mecánico de Tipo Sobolev'. De allí tomaremos la modelación física de los sistemas mecánicos de tipo Sobolev generalizados, y el análisis del sistema linealizado. Partiremos por tanto de la ecuación de evolución obtenida por él en su enfoque operacional. Pero antes, se definirán las funciones y parámetros que intervienen. Éstos pueden ser consultados en su tesis [1] para más detalles.

El objetivo es analizar la estabilidad de las soluciones del siguiente problema de Cauchy

$$\frac{dR}{dt} = iAR, \quad R(0) = R_0 \quad (2.1)$$

que resulta de linealizar las ecuaciones que modelan un sistema mecánico del tipo Sobolev. Éste consiste de un cuerpo rígido con un punto fijo en su base y una cavidad interior Ω , completamente llena de un fluido ideal de densidad constante ρ . El fluido y el cuerpo rígido rotan bajo la acción de fuerzas externas con velocidades angulares $\omega_1(t)$ y $\omega_2(t)$ respectivamente. Además supondremos que tanto el cuerpo rígido como el fluido son simétricos con respecto a un eje vertical y que la cavidad interior tiene un orden de simetría de orden $m \geq 3$ y satisface que $(-y, x, 0)^T \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$, donde $\mathbf{n} = (\cos n_x, \cos n_y, \cos n_z)^T$ es el vector normal exterior a $\partial\Omega$. La rotación tanto del trompo como del fluido se hace alrededor de este eje.

Para describir el operador A necesitamos las siguientes construcciones. Sea Ω el interior de un sólido de revolución del espacio \mathbb{R}^3 y $\bar{\Omega}$ su cerradura. La frontera de Ω , denotada por $S = \partial\Omega$, es de la forma

$$\partial\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$$

donde $F \in C^1(\bar{\Omega})$ y $\nabla F \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in \partial\Omega$.

Denotamos por $L^2(\Omega)$ al espacio usual de funciones complejas en Ω , las cuales son cuadrado integrables sobre Ω . Este espacio está dotado del producto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u\bar{v}dV. \quad (2.2)$$

Definimos $\bar{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Para todo $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \bar{L}^2(\Omega)$ se introduce el siguiente producto interno

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^3 (u_i, v_i).$$

Sea

$$M_S = \left\{ \mathbf{u} \in \bar{C}^\infty(\bar{\Omega}) \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}, \quad (2.3)$$

donde $\bar{C}^\infty(\bar{\Omega}) = (C^\infty(\bar{\Omega}))^3$ y $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$.

Denotamos por S_2 la cerradura de M_S en $\bar{L}^2(\Omega)$ y por G_2 la cerradura en $\bar{L}^2(\Omega)$ del conjunto formado por la totalidad de las funciones de la forma $\nabla\varphi$, donde $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Es sabido que¹,

$$\bar{L}_2(\Omega) = S_2 \oplus G_2. \quad (2.4)$$

Denotemos por P_0 al operador de proyección ortogonal de $\bar{L}^2(\Omega)$ en S_2 .

Sea $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^T$ y B el operador definido por

$$B\mathbf{u} = iP_0(\mathbf{u} \times \mathbf{k}), \forall \mathbf{u} \in S_2. \quad (2.5)$$

Este operador es lineal, continuo y su dominio es el espacio entero S_2 . Introducimos ahora el operador C , con dominio M_S , de la siguiente forma,

$$C\mathbf{u} = iP_0 \left(x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right). \quad (2.6)$$

Se puede verificar sin problema que el operador C es lineal.

Proposición 14 El operador B dado en (2.5) es autoadjunto.

¹Consultar Ralston, [2].

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, dos vectores de S_2 . Entonces

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{u} \times \mathbf{k}), \mathbf{v} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{\Omega} (u_2\bar{v}_1 - u_1\bar{v}_2) dV \quad (2.7) \\ &= - \int_{\Omega} (u_1\bar{v}_2 - u_2\bar{v}_1) dV = - \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= - \langle \mathbf{u}, (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) \rangle. \end{aligned}$$

Luego usando el hecho de que P_0 es autoadjunto, que $P_0\mathbf{v} = \mathbf{v}$ y de (2.7) resulta

$$\begin{aligned} \langle B\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle iP_0(\mathbf{u} \times \mathbf{k}), \mathbf{v} \rangle = i \langle (\mathbf{u} \times \mathbf{k}), P_0\mathbf{v} \rangle = i \langle (\mathbf{u} \times \mathbf{k}), \mathbf{v} \rangle \\ &= -i \langle \mathbf{u}, (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) \rangle = \bar{i} \langle P_0\mathbf{u}, (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, iP_0(\mathbf{v} \times \mathbf{k}) \rangle = \langle \mathbf{u}, B\mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Así ha quedado demostrado que B es simétrico, y como está definido en todo el espacio de Hilbert S_2 , entonces es autoadjunto. ■

Proposición 15 El operador C dado en (2.6) es simétrico.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el vector \mathcal{V} cuya i -ésima componente es $f\bar{g}$ con $f, g \in M_S$ y cero en las demás, con $i = 1, 2, 3$. Entonces al aplicar el teorema de la divergencia se tiene

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{V} dV = \int_{\Omega} \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \bar{g} \right) dV = \int_{\partial\Omega} f\bar{g} \cos n_{x_i} dS = \int_{\partial\Omega} \mathcal{V} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.8)$$

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores en M_S , entonces

$$\left\langle y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \mathbf{v} \right\rangle = \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \left(y \frac{\partial u_k}{\partial x} - x \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) \bar{v}_k dV. \quad (2.9)$$

Aplicando a cada término de (2.9) la igualdad mostrada en (2.8), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \left(y \frac{\partial u_k}{\partial x} - x \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) \bar{v}_k dV &= - \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} u_k \left(y \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x} - x \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial y} \right) dV \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 \int_{\partial\Omega} (x \cos n_y - y \cos n_x) u_k \bar{v}_k dS. \end{aligned}$$

Puesto que la cavidad Ω satisface $(-y, x, 0)^T \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces

$$\sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \left(y \frac{\partial u_k}{\partial x} - x \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) \bar{v}_k dV = - \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} u_k \left(y \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x} - x \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial y} \right) dV.$$

Por lo que

$$\left\langle y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \mathbf{v} \right\rangle = - \left\langle \mathbf{u}, x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right\rangle. \quad (2.10)$$

Ahora, al igual que en la demostración anterior, $P_0 \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2$ y P_0 es autoadjunto. Entonces al aplicar (2.10) resulta

$$\begin{aligned} \langle C\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \left\langle iP_0 \left(x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right), \mathbf{v} \right\rangle = i \left\langle \left(x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right), P_0 \mathbf{v} \right\rangle \\ &= i \left\langle \left(x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right), \mathbf{v} \right\rangle = i \left\langle \mathbf{u}, - \left(x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) \right\rangle \\ &= -i \left\langle P_0 \mathbf{u}, \left(x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}, iP_0 \left(x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, C\mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $D(C)$ es un subconjunto denso en el espacio de Hilbert S_2 , queda demostrado el lema. ■

Del cálculo vectorial, recordamos que si $u \in C^\infty(\Omega)$, entonces $\Delta u = \text{div}(\nabla u)$ y $\frac{\partial \psi}{\partial n} = (\nabla u) \cdot \mathbf{n}$.

Teorema 16 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto conexo y sean f y g funciones integrables sobre Ω y $\partial\Omega$ respectivamente. Una condición necesaria y suficiente para que el problema de Neumann,

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{sobre } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g && \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.11)$$

tenga solución, es que

$$\int_{\Omega} f dV = \int_{\partial\Omega} g dS. \quad (2.12)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede encontrarse en [3]. ■

Este teorema impone una restricción sobre las funciones f y g . Observemos que la solución al problema de Neumann (2.11), es única salvo una constante aditiva.

Sea ψ la solución del siguiente problema de Neumann:

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= 0, && \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} &= \mu && \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

donde

$$\mu = z(\cos n_x + i \cos n_y) - (x + iy) \cos n_z.$$

Nótese que ψ existe, pues aplicando el teorema de Green encontramos que se satisface la condición (2.12). Esto es,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mu dS &= \int_{\partial\Omega} (z, iz, -(x + iy)) \cdot (\cos n_x, \cos n_y, \cos n_z) dS \\ &= \int_{\partial\Omega} (z, iz, -(x + iy)) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \text{div} (z, iz, -(x + iy)) dV = 0. \end{aligned}$$

Se define entonces $d = \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}^2$ y $\gamma = \nabla \bar{\psi}$.

En la modelación realizada por F. Olivé se encuentra que el operador A en (2.1) es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \omega_1 C - (\omega_1 + 2\omega_2)B & \mathbf{0} & \vec{a}_{13} \\ f_N(\cdot) & 0 & \alpha \\ a_{31}(\cdot) & -if_5 & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

El dominio de A es $D(A) = D(C) \times \mathbb{C}^2 = M_s \times \mathbb{C}^2$. Tomaremos el producto interno en $S_2 \times \mathbb{C}^2$ como

$$\langle R_1, R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + z_1 \bar{z}_2 + w_1 \bar{w}_2. \quad (2.14)$$

En (2.13), $\mathbf{0}$ es el elemento neutro de S_2 , $f_N(\cdot)$ es el funcional nulo y α es una constante por determinar. Asumimos

$$\vec{a}_{13} = i\alpha \left[\omega_1 iP_0 \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) - (\omega_1 + 2\omega_2) iP_0 (\gamma \times \mathbf{k}) \right] \quad (2.15)$$

$$a_{31}(\cdot) = -if_6 \langle \cdot \times \mathbf{k}, \gamma \rangle - if_7 \left\langle \left(x \frac{\partial \cdot}{\partial y} - y \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right), \gamma \right\rangle$$

$$a_{33} = if_2 \left\langle \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right), \gamma \right\rangle - if_3 \langle \gamma \times \mathbf{k}, \gamma \rangle - if_4$$

con

$$\begin{aligned} f_2 &= -\frac{\rho\omega_1}{2I_{\perp} + \rho d}, & f_3 &= -\frac{\rho(\omega_1 + 2\omega_2)}{2I_{\perp} + \rho d}, & (2.16) \\ f_4 &= \frac{2i\omega_2(I_{\parallel} - 2I_{\perp})}{2I_{\perp} + \rho d}, & f_5 &= -\frac{2i}{(2I_{\perp} + \rho d)} [gMl_1 + \omega_2^2(I_{\parallel} - I_{\perp})], \\ f_6 &= -\frac{i\rho(\omega_1 + 2\omega_2)}{(2I_{\perp} + \rho d)\alpha}, & f_7 &= \frac{i\rho\omega_1}{(2I_{\perp} + \rho d)\alpha} \end{aligned}$$

en donde I_{\parallel} , I_{\perp} son los momentos de inercia del trompo en la dirección paralela y en la dirección perpendicular al eje de giro respectivamente, g es la fuerza debida a la gravedad, M la masa del trompo, l_1 es la distancia al origen del centro de masa del trompo.

Observación 17 Tomando en cuenta que el operador C es simétrico en S_2 entonces éste admite cerradura \bar{C} , el cual también es un operador simétrico. Luego, como B es autoadjunto y acotado, el operador $K = \omega_1 C - (\omega_1 + 2\omega_2)B$ también admite cerradura dada por $\bar{K} = \omega_1 \bar{C} - (\omega_1 + 2\omega_2)B$. De esta forma, puede verse que es posible expresar la cerradura del operador A , con sólo tomar la cerradura de C en la primera componente de A .

Puesto que \bar{A} es una extensión del operador A , entonces para analizar las soluciones de (2.1), es suficiente con estudiar las soluciones del sistema

$$\frac{dR}{dt} = i\bar{A}R. \quad (2.17)$$

Capítulo 3

Construcción de un Q-producto interno

En esta tesis tenemos el propósito de hacer un estudio de la estabilidad en torno de la solución nula del sistema dado en (2.17), considerando que la velocidad de rotación de trompo y del líquido ω_2 y ω_1 , son constantes pero no necesariamente iguales.

Partiremos de la construcción del operador \bar{A} . Lo primero que deseamos es encontrar un operador Q con el cual definir un Q-producto interno en $S_2 \times \mathbb{C}^2$, de modo que el operador A sea Q-simétrico.

El objetivo es demostrar que el espacio $S_2 \times \mathbb{C}^2$ es un espacio de Pontriaguin de orden 1, y de esta forma, garantizar que el operador A al ser simétrico en este espacio, tiene a lo sumo dos valores propios complejos. Así, la solución del sistema (2.17) debida a los valores propios reales de A es estable. Por tanto sólo será necesario enfocarnos al análisis de la estabilidad de las soluciones correspondientes de esos dos valores propios complejos, conforme se hacen variar las velocidades de rotación del trompo y del líquido.

Recordemos que el operador \bar{A} es de la forma

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \omega_1 \bar{C} - (\omega_1 + 2\omega_2)B & 0 & \bar{a}_{13} \\ f_N(\cdot) & 0 & \alpha \\ a_{31}(\cdot) & -if_5 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Empezamos proponiendo un operador Q como

$$Q = \begin{pmatrix} c_1 I & 0 & 0 \\ f_N(\cdot) & c_2 & 0 \\ f_N(\cdot) & 0 & c_3 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Notemos que el operador $Q : S_2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow S_2 \times \mathbb{C}^2$ es autoadjunto y será completamente invertible cuando $c_1, c_2, c_3 \neq 0$.

Por definición, \bar{A} será Q-simétrico si satisface

$$\langle Q\bar{A}R_1, R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} = [\bar{A}R_1, R_2] = [R_1, \bar{A}R_2] = \langle QR_1, \bar{A}R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} \quad (3.2)$$

en donde $R_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \in D(A)$.

Observemos que

$$Q\bar{A}R_1 = \begin{pmatrix} c_1\omega_1\bar{C}\mathbf{u}_1 - c_1(\omega_1 + 2\omega_2)B\mathbf{u}_1 + \vec{a}_{13}c_1w_1 \\ c_2\alpha w_1 \\ c_3a_{31}(\mathbf{u}_1) - ic_3f_5z_1 + c_3a_{33}w_1 \end{pmatrix}$$

Luego, usando el producto interno dado en (2.14), llegamos a

$$\langle Q\bar{A}R_1, R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} = c_1\omega_1 \langle \bar{C}\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle - c_1(\omega_1 + 2\omega_2) \langle B\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \quad (3.3)$$

$$+ c_1w_1 \langle \vec{a}_{13}, \mathbf{u}_2 \rangle + c_2\alpha w_1 \bar{z}_2 + c_3(a_{31}(\mathbf{u}_1) - if_5z_1 + a_{33}w_1) \bar{w}_2.$$

Ahora haremos uso de las definiciones (2.15) para obtener una expresión más concreta de (3.3). Así, usando que $P_0^* = P_0$, $P_0\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2$, y las igualdades mostradas en (2.7) y (2.10), resulta

$$\langle \vec{a}_{13}, \mathbf{u}_2 \rangle = \alpha \left\langle -\omega_1 P_0 \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + (\omega_1 + 2\omega_2) P_0(\gamma \times \mathbf{k}), \mathbf{u}_2 \right\rangle \quad (3.4)$$

$$= -\alpha\omega_1 \left\langle P_0 \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right), \mathbf{u}_2 \right\rangle + \alpha(\omega_1 + 2\omega_2) \langle P_0(\gamma \times \mathbf{k}), \mathbf{u}_2 \rangle$$

$$= -\alpha\omega_1 \left\langle \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right), \mathbf{u}_2 \right\rangle + \alpha(\omega_1 + 2\omega_2) \langle (\gamma \times \mathbf{k}), \mathbf{u}_2 \rangle$$

$$= \alpha\omega_1 \left\langle \gamma, \left(x \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x} \right) \right\rangle - \alpha(\omega_1 + 2\omega_2) \langle \gamma, (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{k}) \rangle,$$

$$a_{31}(\mathbf{u}_1) = -if_6 \langle \mathbf{u}_1, \gamma \times \mathbf{k} \rangle - if_7 \left\langle \mathbf{u}_1, \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \right\rangle. \quad (3.5)$$

Volviendo al cálculo de $\langle Q\bar{A}R_1, R_2 \rangle$, al sustituir (3.4) y (3.5) en (3.3), se obtiene

$$\langle Q\bar{A}R_1, R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} = c_1\omega_1 \langle \bar{C}\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle - c_1(\omega_1 + 2\omega_2) \langle B\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \quad (3.6)$$

$$+ \alpha c_1 \omega_1 \omega_1 \left\langle \gamma, \left(x \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x} \right) \right\rangle - \alpha c_1 \omega_1 (\omega_1 + 2\omega_2) \langle \gamma, (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{k}) \rangle$$

$$+ c_2 \alpha \omega_1 \bar{z}_2 - ic_3 f_6 \bar{w}_2 \langle (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{k}), \gamma \rangle$$

$$- ic_3 f_7 \bar{w}_2 \left\langle \left(x \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} \right), \gamma \right\rangle - ic_3 f_5 z_1 \bar{w}_2 + c_3 a_{33} \omega_1 \bar{w}_2.$$

Por el otro lado,

$$QR_1 = \begin{pmatrix} c_1 \mathbf{u}_1 \\ c_2 z_1 \\ c_3 w_1 \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{A}R_2 = \begin{pmatrix} \omega_1 \bar{C}\mathbf{u}_2 - (\omega_1 + 2\omega_2)B\mathbf{u}_2 + \vec{a}_{13}w_2 \\ \alpha w_2 \\ a_{31}\mathbf{u}_2 - if_5z_2 + a_{33}w_2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\langle QR_1, \bar{A}R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} = \langle c_1 \mathbf{u}_1, \omega_1 \bar{C}\mathbf{u}_2 - (\omega_1 + 2\omega_2)B\mathbf{u}_2 + \vec{a}_{13}w_2 \rangle \quad (3.7)$$

$$+ \alpha c_2 z_1 \bar{w}_2 + c_3 w_1 (\overline{a_{31}\mathbf{u}_2} - \overline{if_5z_2} + \overline{a_{33}w_2}).$$

Calculemos ahora $\langle \mathbf{u}_1, \vec{a}_{13} \rangle$ y $\overline{a_{31}\mathbf{u}_2}$ aplicando (2.7) y (2.10)

$$\overline{a_{31}(\mathbf{u}_2)} = if_6 \langle \gamma, (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{k}) \rangle + if_7 \left\langle \gamma, \left(x \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x} \right) \right\rangle \quad (3.8)$$

$$\langle \mathbf{u}_1, \vec{a}_{13} \rangle = -\alpha\omega_1 \left\langle \mathbf{u}_1, P_0 \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \right\rangle + \alpha(\omega_1 + 2\omega_2) \langle \mathbf{u}_1, P_0(\gamma \times \mathbf{k}) \rangle$$

$$= \alpha\omega_1 \left\langle \left(x \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} \right), \gamma \right\rangle - \alpha(\omega_1 + 2\omega_2) \langle (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{k}), \gamma \rangle. \quad (3.9)$$

Entonces sustituyendo (3.8) y (3.9) en (3.7), nos queda

$$\langle QR_1, \bar{A}R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} = c_1 \omega_1 \langle \mathbf{u}_1, \bar{C}\mathbf{u}_2 \rangle - c_1(\omega_1 + 2\omega_2) \langle \mathbf{u}_1, B\mathbf{u}_2 \rangle \quad (3.10)$$

$$+ \alpha c_1 \omega_1 \bar{w}_2 \left\langle \left(x \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} \right), \gamma \right\rangle - \alpha(\omega_1 + 2\omega_2) c_1 \bar{w}_2 \langle (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{k}), \gamma \rangle$$

$$+ \alpha c_2 z_1 \bar{w}_2 + ic_3 \omega_1 \bar{f}_6 \langle \gamma, (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{k}) \rangle + ic_3 \omega_1 \bar{f}_7 \left\langle \gamma, \left(x \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x} \right) \right\rangle$$

$$- ic_3 \omega_1 f_5 \bar{z}_2 + c_3 \omega_1 a_{33} \bar{w}_2.$$

Nosotros buscamos que $\langle QR_1, \bar{A}R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} = \langle Q\bar{A}R_1, R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2}$. Entonces al comparar los coeficientes de $\left\langle \left(x \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} \right), \gamma \right\rangle$, $\langle (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{k}), \gamma \rangle$, $z_1 \bar{w}_2$,

$\langle \gamma, (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{k}) \rangle$, $\langle \gamma, (x \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x}) \rangle$ y $w_1 \bar{z}_2$, en las ecuaciones (3.6) y (3.10), llegamos a

$$\begin{aligned} \alpha c_1 \omega_1 &= -ic_3 f_7 & (3.11) \\ \alpha(\omega_1 + 2\omega_2)c_1 &= ic_3 f_6 \\ \alpha c_2 &= -ic_3 f_5. \end{aligned}$$

Aquí estamos haciendo uso del hecho que $B = B^*$ y \bar{C} es simétrico. Tomando en cuenta las igualdades dadas en (2.16) y sustituyendo en (3.11), obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha c_1 \omega_1 &= -ic_3 \left(\frac{i\rho\omega_1}{(2I_\perp + \rho d)\alpha} \right) \\ \alpha(\omega_1 + 2\omega_2)c_1 &= ic_3 \left(-\frac{i\rho(\omega_1 + 2\omega_2)}{(2I_\perp + \rho d)\alpha} \right) \\ \alpha c_2 &= -ic_3 \left(-\frac{2i}{(2I_\perp + \rho d)\alpha} \right) [gMl_1 + \omega_2^2 (I_\parallel - I_\perp)]. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \alpha^2 c_1 &= c_3 \frac{\rho}{(2I_\perp + \rho d)} \\ \alpha^2 c_2 &= -c_3 \frac{2}{(2I_\perp + \rho d)} [gMl_1 + \omega_2^2 (I_\parallel - I_\perp)]. \end{aligned}$$

De todos los cálculos anteriores, finalmente hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas c_1 , c_2 , c_3 y α , y como es sabido, éste no tiene solución única, así que podemos encontrar una solución, eligiendo

$$\alpha = 1 \quad \text{y} \quad c_2 = -[gMl_1 + \omega_2^2 (I_\parallel - I_\perp)].$$

Por lo tanto,

$$c_3 = \frac{1}{2}(2I_\perp + \rho d), \quad c_1 = \frac{1}{2}\rho.$$

La matriz Q candidata a definir una métrica indefinida en $S_2 \times \mathbb{C}^2$ con respecto a la cual \bar{A} es Q -simétrico es entonces

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\rho I & 0 & 0 \\ f_N(\cdot) & -[gMl_1 + \omega_2^2 (I_\parallel - I_\perp)] & 0 \\ f_N(\cdot) & 0 & \frac{1}{2}(2I_\perp + \rho d) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Observación 18 Notemos que en el operador Q siempre se cumple $c_1, c_3 > 0$ mientras que c_2 puede ser positivo, negativo o cero.

La observación anterior es muy importante, ya que esta elección de las constantes nos permitirá, más adelante, ver el espacio $S_2 \times \mathbb{C}^2$ como un espacio de Pontriaguin de orden 1.

Para definir un Q -producto interno todavía falta verificar bajo qué condiciones el operador Q es invertible. Observemos que $c_1, c_3 \neq 0$, pues $\frac{1}{2}\rho, \frac{1}{2}(2I_\perp + \rho d) \neq 0$; sin embargo c_2 puede ser cero, por lo tanto, para asegurar la invertibilidad de Q , a partir de este momento nos restringiremos al caso en que $gMl_1 + \omega_2^2 (I_\parallel - I_\perp) > 0$, así siempre se tendrá $c_2 < 0$.

Toda la discusión anterior puede ser resumida en el siguiente lema.

Lema 19 Para que el operador \bar{A} sea Q -simétrico (con \bar{A} y Q definidos como en (2.13) y (3.1)), es suficiente que $\alpha = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}\rho$, $c_2 = -[gMl_1 + \omega_2^2 (I_\parallel - I_\perp)] \neq 0$ y $c_3 = \frac{1}{2}(2I_\perp + \rho d)$.

Capítulo 4

Acotación del grado de inestabilidad

4.1 Descomposición fundamental de $S_2 \times \mathbb{C}^2$

En esta sección veremos que con el Q-producto interno definido en el capítulo anterior, el espacio $(S_2 \times \mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot])$ es un espacio de Pontriaguin de orden 1.

Definamos

$$G_+ = S_2 \times \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad G_- = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces considerando $R_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \in G_+$ tal que $R_+ \neq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} [R_+, R_+] &= \langle QR_+, R_+ \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\rho\mathbf{u} \\ 0 \\ \frac{1}{2}(2I_\perp + \rho d)w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \right\rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} \\ &= \left\langle \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}, \mathbf{u} \right\rangle + \frac{1}{2}(2I_\perp + \rho d)w\bar{w} \\ &= \frac{1}{2}\rho\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2}(2I_\perp + \rho d)|w|^2 > 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, considerando $R_- = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \in G_-$, tal que $R_- \neq 0$, resulta

$$\begin{aligned} [R_-, R_-] &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -[gMl_1 + \omega_2^2(I_{\parallel} - I_{\perp})]z \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} \\ &= -[gMl_1 + \omega_2^2(I_{\parallel} - I_{\perp})]z\bar{z} \\ &= -[gMl_1 + \omega_2^2(I_{\parallel} - I_{\perp})]\|z\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Hemos demostrado que, efectivamente, los subespacios G_+ y G_- están incluidos en \mathfrak{B}_{++} y \mathfrak{B}_{--} respectivamente. Además es evidente que, sobre el campo de los números complejos, $\dim G_- = 1$.

Solo queda verificar que se satisfagan las tres condiciones para un espacio de Krein.

1. Claramente se cumple que $[G_+, G_-] = 0$.

2. Sea $R_n^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n \\ 0 \\ w_n \end{pmatrix} \in G_+$ una sucesión de Cauchy, puesto que $R_n^+ \in$

$S_2 \times \mathbb{C}^2$ y ya que $S_2 \times \mathbb{C}^2$ es un espacio completo con el producto interno dado en (2.14), entonces existe un vector $R \in S_2 \times \mathbb{C}^2$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n^+ - R\|_{S_2 \times \mathbb{C}^2} \rightarrow 0$. Necesariamente este vector será de la forma

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \\ w \end{pmatrix}. \text{ Entonces tenemos que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle R_n^+ - R, R_n^+ - R \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} \rightarrow 0$$

o bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|^2 dV + |w_n - w|^2 \right) \rightarrow 0.$$

Observemos que en la suma anterior, cada término es mayor o igual que cero, por tanto

$$\int_{\Omega} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|^2 \rightarrow 0, \quad |w_n - w|^2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Evidentemente también se cumple,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_1 \int_{\Omega} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|^2 &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_3 |w_n - w|^2 &= 0; \end{aligned} \quad (4.1)$$

para cualesquiera números reales c_1 y c_3 . Entonces si al espacio G_+ le asociamos la norma $\|\cdot\|_+ = [\cdot, \cdot]_{S_2 \times \mathbb{C}^2}^{\frac{1}{2}} = \langle Q \cdot, \cdot \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2}^{\frac{1}{2}}$, resulta que R_n^+ sigue convergiendo a R , pues usando (4.1), se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{+n} - R_+\|_+ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Q(R_{+n} - R_+), R_{+n} - R_+ \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2}^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_1 \int_{\Omega} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 dV + c_3 |w_n - w|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Claramente $R_+ \in G_+$, por lo tanto concluimos que G_+ es completo con la norma $\|\cdot\|_+$. De forma análoga se puede probar la completitud para G_- con la norma $\|\cdot\|_- = (-[\cdot, \cdot])^{\frac{1}{2}}$.

3. Finalmente, notemos que todo $R \in S_2 \times \mathbb{C}^2$ puede ser escrito de forma única como sigue: $R = R_+ + R_-$ con $R_+ \in G_+$ y $R_- \in G_-$. Por tanto

$$G_+[+]G_- = S_2 \times \mathbb{C}^2.$$

Así concluimos que $S_2 \times \mathbb{C}^2$ es un espacio Π_1 .

4.2 Análisis de los valores propios de A

Habiendo probado que el espacio $S_2 \times \mathbb{C}^2$ es un espacio de Pontriaguin de orden 1, deduciremos una serie de propiedades acerca de los valores propios complejos del operador A . Estos resultados no aparecen en la literatura, y se cumplen para cualquier operador simétrico con respecto a un producto interno indefinido en un espacio Π_1 .

Veremos algunas propiedades de los vectores propios correspondientes a valores propios no reales de un operador A , simétrico con respecto a un producto interno indefinido. En lo que sigue, no es necesario que el espacio con producto interno indefinido $(V, [\cdot, \cdot])$, sobre el cual estamos tomando $D(A)$, sea un espacio de Pontriaguin.

Lema 20 Sea $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y $A: D(A) \subset V \rightarrow V$, un operador lineal simétrico. Sean $x, y \in D(A)$ tales que $x, y \neq 0$, $Ax = \lambda x$ y $Ay = \mu y$, con $\bar{\lambda} \neq \mu$. Entonces $[x, y] = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Por la simetría de A con respecto al producto interno indefinido, se tiene

$$\lambda [x, y] = [Ax, y] = [x, Ay] = \bar{\mu} [x, y].$$

Esto significa que $(\lambda - \bar{\mu}) [x, y] = 0$. Pero por hipótesis $\bar{\lambda} \neq \mu$, por tanto $[x, y] = 0$. ■

Corolario 21 Sea $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y $A : D(A) \subset V \rightarrow V$, un operador lineal simétrico. Sea $x \in D(A)$ tal que $x \neq 0$, $Ax = \lambda x$ con $\lambda \notin \mathbb{R}$. Entonces $[x, x] = 0$.

Lema 22 Sea $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y $A : D(A) \subset V \rightarrow V$, un operador lineal simétrico. Supongamos que $x, y \in D(A)$ son tales que $x \neq 0$, $Ax = \lambda x$ con $\lambda \notin \mathbb{R}$ y $Ay = \lambda y + x$. Entonces $y \neq 0$, $[y, y] = 0$ y $[x, y] = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $y \neq 0$, se tendría $x = 0$, lo cual niega que $x \neq 0$. Por la simetría de A y por el lema anterior,

$$\begin{aligned} \lambda [x, y] &= [Ax, y] = [x, Ay] \\ &= [x, \lambda y + x] = \bar{\lambda} [x, y] + [x, x] = \bar{\lambda} [x, y]. \end{aligned}$$

Esto significa que $(\lambda - \bar{\lambda}) [x, y] = 0$. De las hipótesis se tiene $\lambda \neq \bar{\lambda}$, y por tanto

$$[x, y] = 0. \quad (4.2)$$

Por último, usando (4.2) se tiene por un lado

$$[Ay, y] = [\lambda y + x, y] = [\lambda y, y] + [x, y] = \lambda [y, y]$$

y por otro lado, usando de nuevo (4.2)

$$[y, Ay] = [y, \lambda y + x] = [y, \lambda y] + [y, x] = \bar{\lambda} [y, y].$$

Por la simetría de A , se cumple

$$\lambda [y, y] = [Ay, y] = [y, Ay] = \bar{\lambda} [y, y],$$

de modo que $(\lambda - \bar{\lambda}) [y, y] = 0$, como $\lambda \neq \bar{\lambda}$, entonces $[y, y] = 0$. ■

Observación 23 Sea $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y sea A un operador lineal simétrico. Si $Ax = \lambda x$ y $Ay = \lambda y + x$ con $x \neq 0$, entonces $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente independiente. En efecto, pues de lo contrario tendríamos $y = mx$ y por tanto $A mx = \lambda mx + x = (\lambda m + 1)x$, esto significa que x sería un vector propio de A correspondiente al valor propio $\frac{\lambda m + 1}{m}$, lo cual es imposible.

Con lo que se ha visto hasta ahora, ya es posible establecer y demostrar el lema de Sobolev, que será una pieza fundamental para lograr los objetivos de este trabajo. El lema puede ser aplicado para espacios Π_n , pero para nosotros sólo será necesario considerarlo en un espacio Π_1 .

Lema 24 (de Sobolev) En un espacio Π_1 no existen dos vectores x e y linealmente independientes tales que $[x, x] = 0$, $[y, y] = 0$ y $[x, y] = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que si x e y cumplen las condiciones del lema entonces las combinaciones lineales de ellos son vectores isotrópicos, esto es, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene

$$[\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y] = 0.$$

Además, si $V = V_+ [+] V_-$ es un Π_1 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\dim V_+ = 1$. Sean $x, y \in V$ dos vectores linealmente independientes, éstos pueden ser escritos en la forma

$$\begin{aligned} x &= \varrho(x)v_+ + v_-(x), \\ y &= \varrho(y)v_+ + v_-(y) \end{aligned}$$

donde $\varrho(x), \varrho(y) \in \mathbb{C}$, $v_+ \in V_+$ y $v_-(x), v_-(y) \in V_-$. Nótese que tanto $\varrho(x)$ como $\varrho(y)$ son distintos de cero, pues de lo contrario se tendría $x \in V_-$ ó $y \in V_-$ lo que implica que $x = 0$ ó $y = 0$, pero esto niega el hecho de que x e y sean linealmente independientes.

Haciendo uso de la ortogonalidad de V_+ y V_- tenemos que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} &[\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y] \\ &= |\alpha \varrho(x) + \beta \varrho(y)|^2 [v_+, v_+] + [\alpha v_-(x) + \beta v_-(y), \alpha v_-(x) + \beta v_-(y)] = 0. \end{aligned}$$

Pero al escoger $\alpha = \varrho(y)$ y $\beta = -\varrho(x)$, de lo anterior resulta que

$$[\varrho(y)v_-(x) - \varrho(x)v_-(y), \varrho(y)v_-(x) - \varrho(x)v_-(y)] = 0. \quad (4.3)$$

¹El caso contrario es análogo al considerar el producto interno indefinido $-[\cdot, \cdot]$.

Ya que $\alpha v_-(x) + \beta v_-(y) \in V_-$, entonces para que se cumpla (4.3) es necesario que

$$\varrho(y)v_-(x) - \varrho(x)v_-(y) = 0.$$

Esto implica que

$$v_-(x) = \frac{\varrho(x)}{\varrho(y)}v_-(y)$$

por tanto

$$\begin{aligned} x &= \varrho(x)v_+ + \frac{\varrho(x)}{\varrho(y)}v_-(y), \\ y &= \varrho(y)v_+ + v_-(y) \end{aligned}$$

lo que significa que $\varrho(y)x = \varrho(x)y$, lo cual contradice la hipótesis de que x e y son linealmente independientes. ■

Corolario 25 Si A es un operador lineal simétrico en un espacio Π_1 , entonces tanto en $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ como en $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\}$, existe a lo sumo un valor propio de A .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\lambda, \mu \in \mathbb{C}_+$ son valores propios de A , es decir existen vectores linealmente independientes x e y tales que $Ax = \lambda x$ y $Ay = \mu y$, entonces por el lema 20 y el corolario 21, x e y contradicen el lema de Sobolev.

Corolario 26 Si A es un operador lineal simétrico en un espacio Π_1 y $\lambda \notin \mathbb{R}$ es un valor propio, entonces λ es simple, es decir, $\dim(\varphi_\lambda(A)) = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Si suponemos por contradicción que $\lambda \notin \mathbb{R}$ no es simple, es decir, que existe $y \neq 0$ tal que $Ay = \lambda y + x$, donde x es el vector propio de A correspondiente a λ . Entonces por el lema 22 y la observación 23 llegamos a una contradicción del lema de Sobolev.

Resumiendo lo anterior llegamos al siguiente teorema

Teorema 27 El operador A definido en (2.13) tiene a lo sumo dos valores propios no reales y la suma de sus multiplicidades algebraicas es menor o igual que 2.

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de forma inmediata a partir de los corolarios 25 y 26.

4.3 Análisis de los valores propios complejos

Ya que el espacio sobre el cual estamos trabajando $S_2 \times \mathbb{C}^2$ es un Π_1 , y el operador A es Q -simétrico, entonces el operador A posee, a lo más, un valor propio no real con parte imaginaria positiva; y a lo más, un valor propio no real con parte imaginaria negativa. Este hecho, simplificará significativamente el análisis de la solución debida a los valores propios del sistema (2.1), como se verá mas adelante.

Nosotros desearíamos probar que para el operador A de (2.13), aparecen los dos valores propios no reales y que éstos son complejos conjugados. Sin embargo esto no se ha podido demostrar en el caso general, pero a continuación veremos bajo qué condiciones se puede obtener ese resultado.

Primero, definimos una forma cuadrática adecuada J , con la cual sea posible introducir un nuevo producto interno $J(R_1, R_2)$. Después definiremos un operador A^J , que llamaremos el J -adjunto de A , el cual nos servirá para demostrar que, si el número no real λ es un valor propio tanto de A^J como de A , entonces su conjugado $\bar{\lambda}$ también será un valor propio de ambos operadores.

En nuestro espacio $S_2 \times \mathbb{C}^2$, tiene sentido hablar del conjugado de un vector $R \in S_2 \times \mathbb{C}^2$, que denotaremos por \bar{R} , pues todo $R = (u, z, w)$ puede descomponerse como $R = R_r + iR_i = (u_r, z_r, w_r)^T + i(u_i, z_i, w_i)^T$, donde $R_r, R_i \in S_2 \times \mathbb{R}^2$. Entonces es posible definir de forma única el vector \bar{R} como $\bar{R} = R_r - iR_i$.

Observación 28 El operador A definido en (2.13) cumple que si $R \in D(A)$, entonces $\bar{R} \in D(A)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $R = (u, z, w) \in D(A)$, entonces $u \in \bar{C}^\infty(\Omega)$, $\text{div } u = 0$ y $u \cdot n = 0$. Por lo tanto $u_r, u_i \in \bar{C}^\infty(\Omega)$. Entonces al descomponer $\text{div}(u)$ se tiene, $\text{div}(u_r + iu_i) = \text{div}u_r + i\text{div}u_i = 0 + i0$ por lo que necesariamente $\text{div}u_r = 0$ y $\text{div}u_i = 0$. Luego, descomponiendo la componente normal de u , resulta $(u_r + iu_i) \cdot n = u_r \cdot n + iu_i \cdot n = 0 + i0$ y ya que $n \in \mathbb{R}^3$, de nuevo se tendrá $u_r \cdot n = 0$ y $u_i \cdot n = 0$. Por lo tanto resulta que $\bar{u} \in M_S$. De aquí, es fácil ver que el vector $\bar{R} = (\bar{u}, \bar{z}, \bar{w})$ pertenece a $D(A)$. ■

Definición 29 Sobre $S_2 \times \mathbb{C}^2$ definimos la siguiente forma cuadrática con el producto interno dado en (1.3)

$$J(R_1, R_2) = [R_1, \bar{R}_2]. \quad (4.4)$$

Sea A un operador lineal con $\overline{D(A)} = S_2 \times \mathbb{C}^2$. El adjunto de A según J o el J -adjunto lo denotamos por A^J . Su dominio es

$$D(A^J) = \{R \in S_2 \times \mathbb{C}^2 : \exists R^J \in S_2 \times \mathbb{C}^2 \text{ t.q. } J(AP, R) = J(P, R^J), \forall P \in D(A)\}.$$

Se define entonces,

$$A^J R = R^J. \quad (4.5)$$

Observemos que R^J es único, también es fácil ver que $D(A^J)$ es un subespacio vectorial. Sean $R_1, R_2 \in D(A^J)$, entonces existen $R_1^J, R_2^J \in S_2 \times \mathbb{C}^2$ tales que

$$J[AR, R_1] = J[R, R_1^J], \quad J[AR, R_2] = [R, R_2^J] \quad \forall R \in D(A).$$

Ahora para $a, b \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} J[AR, aR_1 + bR_2] &= [AR, \overline{aR_1 + bR_2}] = a[AR, \overline{R_1}] + b[AR, \overline{R_2}] \\ &= a[R, \overline{R_1^J}] + b[R, \overline{R_2^J}] = [R, \overline{aR_1^J + bR_2^J}] \\ &= J[R, aR_1^J + bR_2^J]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$aR_1 + bR_2 \in D(A^J)$$

y

$$A^J(aR_1 + bR_2) = aR_1^J + bR_2^J = aA^J(R_1) + bA^J(R_2),$$

con lo que se demuestra la linealidad de A^J .

En el siguiente lema veremos de qué manera puede ser definido explícitamente el operador A^J .

Lema 30 El operador A dado en (2.13), satisface

$$A^J R = \overline{AR} \quad (4.6)$$

para todo $R \in D(A)$.

DEMOSTRACIÓN: De (4.4), resulta que para todo $R, S \in D(A)$,

$$J[AS, R] = [AS, \overline{R}] = [S, \overline{AR}] = [S, \overline{(\overline{AR})}] = J[S, \overline{AR}].$$

Por tanto se tiene $A^J R = \overline{AR}$, como se quería. ■

Lema 31 Sea A el operador dado en (2.13), A^J el J -adjunto de A definido en (4.5), $\lambda \notin \mathbb{R}$ un valor propio de A y Ω una cavidad para la cual el vector $\vec{a}_{13} \in R(\omega_1 C - (\omega_1 + 2\omega_2)B - \lambda I)^2$. Entonces existe un vector $\hat{R} \in D(A^J) \cap D(A)$, tal que $\hat{R} \neq 0$ y

$$A^J \hat{R} = \lambda \hat{R}.$$

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis existe $R = (v, X, Y)^T \neq 0$ tal que $AR = \lambda R$. Obtenemos entonces el siguiente sistema de ecuaciones con solución diferente de la trivial

$$\begin{aligned} \omega_1 C v - (\omega_1 + 2\omega_2) B v + \vec{a}_{13} Y - \lambda v &= 0 & (4.7) \\ Y - \lambda X &= 0 \\ a_{31}(v) - i f_5 X + a_{33} Y - \lambda Y &= 0. \end{aligned}$$

Definimos el operador $K = \omega_1 C - (\omega_1 + 2\omega_2)B$. Como los operadores A y B son simétricos; por tanto K también lo es, de modo que todos sus valores propios son reales. Entonces $\lambda \notin \mathbb{R}$ no es un valor propio de K , y por lo tanto la resolvente $(K - \lambda I)^{-1}$ existe.

La primera ecuación de (4.7) equivale a

$$(K - \lambda I) v = -Y \vec{a}_{13},$$

por lo que podemos asegurar que \vec{a}_{13} pertenece al rango de $(K - \lambda I)$ y por tanto al dominio de $(K - \lambda I)^{-1}$. Entonces

$$v = -Y(K - \lambda I)^{-1} \vec{a}_{13}.$$

Entonces se cumple la primera ecuación de (4.7). Las dos ecuaciones restantes se expresan como

$$\begin{aligned} Y - \lambda X &= 0 \\ (-h(\lambda) + a_{33} - \lambda) Y - i f_5 X &= 0 \end{aligned}$$

donde $h(\lambda) = a_{31} ((K - \lambda I)^{-1} \vec{a}_{13})$. El sistema tiene por determinante

$$\Delta(\lambda) = -i f_5 + \lambda(-h(\lambda) + a_{33} - \lambda) = 0$$

pues X e Y son distintas de cero, ya que de lo contrario se tendría $R = 0$, y se contradice la hipótesis de ser un vector propio de A .

Por otra parte, nosotros deseamos encontrar un vector $\hat{R} = (u, Z, W)^T \neq 0$ tal que $A^J \hat{R} = \lambda \hat{R}$. Esto puede escribirse también como $A \hat{R} = A^J \hat{R} = \lambda \hat{R}$, y al desarrollar se tiene

$$\begin{aligned} \omega_1 C \bar{u} - (\omega_1 + 2\omega_2) B \bar{u} + \vec{a}_{13} \bar{W} - \lambda \bar{u} &= 0 & (4.8) \\ \bar{W} - \lambda \bar{Z} &= 0 \\ a_{31}(\bar{u}) - i f_5 \bar{Z} + a_{33} \bar{W} - \lambda \bar{W} &= 0. \end{aligned}$$

²Más adelante se verá que en realidad existe una cavidad que cumple con esta hipótesis.

De forma similar, como $\bar{\lambda} \notin \mathbb{R}$, entonces $(\omega_1 C - (\omega_1 + 2\omega_2)B - \bar{\lambda}I)^{-1} = (K - \bar{\lambda}I)^{-1}$ existe. Luego por hipótesis $\vec{a}_{13} \in D(K - \bar{\lambda}I)^{-1}$, así \vec{u} tiene la forma

$$\vec{u} = -\bar{W}(K - \bar{\lambda}I)^{-1} \vec{a}_{13}.$$

El sistema (4.8) se reduce entonces al sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \bar{W} - \bar{\lambda}\bar{Z} &= 0 \\ (-h(\bar{\lambda}) + a_{33} - \bar{\lambda})\bar{W} - if_5\bar{Z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

El objetivo es encontrar números W, Z tal que (4.9) tenga solución distinta de la trivial, o equivalentemente, que el determinante de (4.9) sea igual a cero, esto es,

$$\Delta(\bar{\lambda}) = -if_5 + \bar{\lambda}(-h(\bar{\lambda}) + a_{33} - \bar{\lambda}) = 0.$$

Para esto, demostraremos que $\Delta(\bar{\lambda}) = \overline{\Delta(\lambda)}$, para lo cual es suficiente probar que $h(\bar{\lambda}) = \overline{h(\lambda)}$ ya que a_{33} y $-if_5$ son reales.

Observemos que todo $\mathbf{v} \in D(a_{31}) = M_S$ puede expresarse como $\mathbf{v} = P_0(\mathbf{v})$. Entonces de (2.15), (2.7) y (2.10), y teniendo en cuenta que el operador P_0 es simétrico, resulta

$$\begin{aligned} a_{31}(\mathbf{v}) &= -if_6 \langle P_0(\mathbf{v}) \times \mathbf{k}, \gamma \rangle - if_7 \left\langle \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) P_0(\mathbf{v}), \gamma \right\rangle \\ &= \frac{\rho(\omega_1 + 2\omega_2)}{2I_{\perp} + \rho d} \langle P_0(\mathbf{v}), \gamma \times \mathbf{k} \rangle - \frac{\rho\omega_1}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle P_0(\mathbf{v}), x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right\rangle \\ &= \frac{-\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle \mathbf{v}, P_0 \left(\omega_1 \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) - (\omega_1 + 2\omega_2)(\gamma \times \mathbf{k}) \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

y haciendo

$$\Phi(\gamma) = P_0 \left(\omega_1 \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) - (\omega_1 + 2\omega_2)(\gamma \times \mathbf{k}) \right)$$

obtenemos

$$a_{31}(\mathbf{v}) = \frac{-\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \langle \mathbf{v}, \Phi(\gamma) \rangle.$$

Entonces desarrollando $h(\lambda)$ y $h(\bar{\lambda})$ se tiene

$$h(\lambda) = a_{31} \left((K - \lambda I)^{-1} \vec{a}_{13} \right) = \frac{-\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle (K - \lambda I)^{-1} \vec{a}_{13}, \Phi(\gamma) \right\rangle \quad (4.10)$$

$$h(\bar{\lambda}) = a_{31} \left((K - \bar{\lambda}I)^{-1} \vec{a}_{13} \right) = \frac{-\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle (K - \bar{\lambda}I)^{-1} \vec{a}_{13}, \Phi(\gamma) \right\rangle.$$

Por otra parte, de (2.15) resulta

$$\vec{a}_{13}(\gamma) = - \left[\omega_1 P_0 \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) - (\omega_1 + 2\omega_2) P_0(\gamma \times \mathbf{k}) \right] = -\Phi(\gamma).$$

Por tanto, al sustituir en (4.10) se obtiene

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= \frac{\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle (K - \lambda I)^{-1} \Phi(\gamma), \Phi(\gamma) \right\rangle \\ h(\bar{\lambda}) &= \frac{\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle (K - \bar{\lambda}I)^{-1} \Phi(\gamma), \Phi(\gamma) \right\rangle. \end{aligned}$$

Observemos que usando la simetría de K resulta

$$\begin{aligned} h(\bar{\lambda}) &= \frac{\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle (K - \bar{\lambda}I)^{-1} \Phi(\gamma), (K - \lambda I)(K - \lambda I)^{-1} \Phi(\gamma) \right\rangle \\ &= \frac{\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle (K - \bar{\lambda}I)^{-1} \Phi(\gamma), K(K - \lambda I)^{-1} \Phi(\gamma) \right\rangle \\ &\quad - \bar{\lambda} \frac{\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle (K - \bar{\lambda}I)^{-1} \Phi(\gamma), (K - \lambda I)^{-1} \Phi(\gamma) \right\rangle, \\ &= \frac{\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle K(K - \bar{\lambda}I)^{-1} \Phi(\gamma), (K - \lambda I)^{-1} \Phi(\gamma) \right\rangle \\ &\quad - \frac{\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle \bar{\lambda} (K - \bar{\lambda}I)^{-1} \Phi(\gamma), (K - \lambda I)^{-1} \Phi(\gamma) \right\rangle \\ &= \frac{\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle (K - \bar{\lambda}I)(K - \bar{\lambda}I)^{-1} \Phi(\gamma), (K - \lambda I)^{-1} \Phi(\gamma) \right\rangle \\ &= \frac{\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \left\langle \Phi(\gamma), (K - \lambda I)^{-1} \Phi(\gamma) \right\rangle \\ &= \frac{\rho}{2I_{\perp} + \rho d} \overline{\left\langle (K - \lambda I)^{-1} \Phi(\gamma), \Phi(\gamma) \right\rangle} = \overline{h(\lambda)}; \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el lema. ■

Corolario 32 Bajo las hipótesis de lema 31, si $\lambda \notin \mathbb{R}$ es un valor propio de A , entonces $\bar{\lambda}$ también lo será. ■

DEMOSTRACIÓN: La demostración se sigue de forma inmediata a partir de los lemas 30 y 31. ■

Capítulo 5

Restricción caso de una cavidad elipsoidal

5.1 Cálculo del operador A

El problema que nos ocupa fue analizado por primera vez por el matemático ruso S. L. Sobolev en 1960. Él consideró que la velocidad ω_1 del líquido era cero y encontró que la mejor cavidad Ω a considerarse es precisamente la de un elipsoide de revolución, puesto que en esta región el sistema tiene un número finito de zonas de inestabilidad y que el sistema es estable cuando el trompo gira a gran velocidad. Con este antecedente, nosotros consideramos adecuado restringir el problema a este caso, para ver en qué varían los resultados cuando se incluye la velocidad de rotación del fluido.

Primero se hará el cálculo de todos los términos involucrados en la modelación física del sistema que dependen directamente de Ω . Finalmente obtendremos un operador A más específico con el cual será más sencillo deducir los resultados.

Supongamos que la región Ω ocupada por el líquido es la parte interior de un elipsoide de revolución. Evidentemente el elipsoide de revolución tiene un orden de simetría $m \geq 3$ y además se cumple $(-y, x, 0)^T \cdot \mathbf{n} = 0$. Entonces,

$$\Omega = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} < 1, a > 0, c > 0, a \neq c \right\},$$

donde l denota la distancia al origen del centro de masa del elipsoide, que se encuentra justo en el centro del elipsoide.

Para $s_1, s_2, h \in \mathbb{C}$, definimos $\varphi(s_1, s_2, h) \in \bar{C}^\infty(\Omega)$ como el campo vectorial dado por

$$\varphi(s_1, s_2, h) = \begin{pmatrix} s_1(z-h) \\ is_1(z-h) \\ s_2(x+iy) \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Tomando en cuenta (2.4), queremos construir una función $P_\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tal que

$$\varphi(s_1, s_2, h) = P_0(\varphi(s_1, s_2, h)) + \nabla P_\varphi, \quad (5.2)$$

donde $P_0(\varphi(s_1, s_2, h)) \in S_2$ y $\nabla P_\varphi \in G_2$, es decir, tal que $\varphi - \nabla P_\varphi \in S_2$. Ya que $\text{div}(\varphi(s_1, s_2, h)) = 0$, entonces $\varphi - \nabla P_\varphi$ debe satisfacer las siguientes condiciones

$$-\text{div}(\varphi - \nabla P_\varphi) = \text{div}(\nabla P_\varphi) = \Delta P_\varphi = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

$$(\varphi - \nabla P_\varphi) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Esto se reduce a resolver el siguiente problema de Neumann para P_φ

$$\begin{aligned} \Delta P_\varphi &= 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial P_\varphi}{\partial n} &= \varphi(s_1, s_2, h) \cdot \mathbf{n} & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.3)$$

En este caso, es claro que el problema tiene solución única salvo una constante aditiva, pues se satisface la condición (2.12) con $f = 0$ y $g = \varphi(s_1, s_2, h) \cdot \mathbf{n}$; para verificarlo aplicamos el teorema de la divergencia y resulta

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(s_1, s_2, h) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \text{div}(\varphi) dV = \int_{\Omega} 0 dV = 0.$$

A continuación haremos el cálculo exacto de $P_0(\varphi)$ para el caso en que Ω es un elipsoide de revolución.

Lema 33 El operador P_0 aplicado a $\varphi(s_1, s_2, h)$ da como resultado, el siguiente vector

$$P_0(\varphi(s_1, s_2, h)) = \frac{s_1 - s_2}{a^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2(z-l) \\ ia^2(z-l) \\ -c^2(x+iy) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

DEMOSTRACIÓN: El elipsoide de revolución $\partial\Omega$ puede ser parametrizado en la forma

$$x = a \cos \theta \cos \phi, \quad y = a \sin \theta \cos \phi, \quad z = c \sin \phi + l \quad (5.5)$$

donde $a > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, y $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Calculamos ahora los cosenos directores y obtendremos

$$\cos n_x + i \cos n_y = \frac{c \cos \phi e^{i\theta}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}}, \quad \cos n_z = \frac{a \sin \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}}. \quad (5.6)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \varphi(s_1, s_2, h) \cdot \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} s_1(z-h) \\ is_1(z-h) \\ s_2(x+iy) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos n_x \\ \cos n_y \\ \cos n_z \end{pmatrix} \\ &= s_1(z-h)(\cos n_x + i \cos n_y) + s_2(x+iy) \cos n_z. \end{aligned}$$

Al evaluar en $\partial\Omega$, mediante las relaciones (5.5) y (5.6) llegamos a

$$\begin{aligned} \varphi(s_1, s_2, h) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} &= \frac{s_1(c \sin \phi + l - h)c \cos \phi e^{i\theta}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}} + \frac{s_2 a^2 e^{i\theta} \cos \phi \sin \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}} \\ &= \frac{s_1 c^2 + s_2 a^2}{a^2 + c^2} \left[\frac{(a^2 + c^2) e^{i\theta} \sin \phi \cos \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}} \right] + \frac{s_1(l-h)c e^{i\theta} \cos \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}} \\ &= \frac{s_1 c^2 + s_2 a^2}{a^2 + c^2} [\nabla(x+iy)(z-l)] \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} + [\nabla(x+iy) s_1(l-h)] \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Así hemos demostrado que

$$\varphi(s_1, s_2, h) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = [\nabla(x+iy)(m(z-l) + s_1(l-h))] \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} \quad (5.7)$$

donde $m = \frac{s_1 c^2 + s_2 a^2}{a^2 + c^2}$.

Tomemos

$$P_\varphi = m(x+iy)(z-l) + s_1(x+iy)(l-h).$$

Se tiene entonces que

$$\frac{\partial P_\varphi}{\partial n} = \nabla P_\varphi \cdot \mathbf{n} = \varphi \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Además P_φ es un polinomio de orden uno con respecto a x, y, z , y por tanto $\Delta P_\varphi = 0$. Esto prueba que P_φ resuelve (5.3).

Al regresar al cálculo de $P_0(\varphi(s_1, s_2, h)) = \varphi(s_1, s_2, h) - \nabla P_\varphi$, se obtiene

$$\begin{aligned} P_0(\varphi) &= \begin{pmatrix} s_1(z-h) \\ is_1(z-h) \\ s_2(x+iy) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m(z-l) + s_1(l-h) \\ mi(z-l) + is_1(l-h) \\ m(x+iy) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (s_1-m)(z-l) \\ i(s_1-m)(z-l) \\ (s_2-m)(x+iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(s_1-s_2)a^2}{a^2+c^2}(z-l) \\ i \frac{(s_1-s_2)a^2}{a^2+c^2}(z-l) \\ \frac{(s_2-s_1)c^2}{a^2+c^2}(x+iy) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definamos

$$\xi = (x + iy)(m(z - l) + l).$$

Entonces

$$\nabla \xi \times \mathbf{k} = mi \begin{pmatrix} z-l \\ i(z-l) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} il \\ -l \\ 0 \end{pmatrix} = mi\varphi(1, 0, l) + \begin{pmatrix} il \\ -l \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$P_0(\nabla \xi \times \mathbf{k}) = miP_0(\varphi(1, 0, l)) + P_0(\nabla(ilx - ly)).$$

Ahora utilizando el lema 33, y el hecho de que $P_0(\nabla(lx + iy)) = 0$, resulta

$$P_0(\nabla \xi \times \mathbf{k}) = \frac{mi}{a^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2(z-l) \\ ia^2(z-l) \\ -c^2(x+iy) \end{pmatrix}.$$

Definición 34 Sea

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} a^2(z-l) \\ ia^2(z-l) \\ -c^2(x+iy) \end{pmatrix} \in \overline{L^2}(\Omega). \quad (5.8)$$

Lema 35 El vector \mathbf{u}_0 definido en (5.8) tiene las siguientes propiedades:

(i) $\mathbf{u}_0 \in M_S$.

(ii) Es un vector propio del operador B .

(iii) Es un vector propio de \overline{C} .

(iv) Es un vector propio del operador $\omega_1 \overline{C} - (\omega_1 + 2\omega_2)B$.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Es evidente que $\mathbf{u}_0 \in \overline{C^\infty}(\Omega)$ y $\text{div} \mathbf{u}_0 = 0$. Veamos que $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} |_{\partial\Omega} = 0$.

De las relaciones (5.5) y (5.6) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} &= a^2(z-l)(\cos nx + i \cos ny) |_{\partial\Omega} - c^2(x+iy) \cos nz |_{\partial\Omega} \\ &= a^2 c \sin \phi \left(\frac{c \cos \phi e^{i\theta}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}} \right) - \frac{a^2 c^2 e^{i\theta} \sin \phi \cos \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Desarrollando, de (5.1) y el lema 33 resulta

$$\begin{aligned} P_0(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{k}) &= P_0 \begin{pmatrix} a^2 i(z-l) \\ -a^2(z-l) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= iP_0(\varphi(a^2, 0, l)) = \frac{a^2 i}{a^2 + c^2} \mathbf{u}_0. \end{aligned}$$

Luego

$$B\mathbf{u}_0 = iP_0(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{k}) = -\frac{a^2}{a^2 + c^2} \mathbf{u}_0,$$

de donde \mathbf{u}_0 es un vector propio de B , con $\sigma = -\frac{a^2}{a^2 + c^2}$ como el valor propio correspondiente.

(iii) Recordemos que $M_S \subset D(\overline{C})$ y que $\mathbf{u}_0 \in M_S$, entonces

$$\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -ic^2 x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c^2 y \end{pmatrix} = -ic^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x + iy \end{pmatrix}.$$

Por el lema 36, esto implica

$$P_0(0, 0, -ic^2(x+iy)) = P_0(\varphi(0, -ic^2, l)) = \frac{ic^2}{a^2 + c^2} \mathbf{u}_0,$$

de donde

$$\overline{C}\mathbf{u}_0 = iP_0 \left(x \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} \right) = \tau \mathbf{u}_0.$$

Luego, $\tau = -\frac{c^2}{a^2 + c^2}$ es un valor propio de \overline{C} y \mathbf{u}_0 es el vector propio asociado.

(iv) Se sigue de forma inmediata de los incisos (ii) y (iii), así encontramos que $(\omega_1 \overline{C} - (\omega_1 + 2\omega_2)B)\mathbf{u}_0 = \eta \mathbf{u}_0$, con $\eta = \omega_1 \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} + 2\omega_2 \frac{a^2}{a^2 + c^2}$. ■

Observación 36 Puede verificarse a partir de la observación 28 que si $\mathbf{u} \in M_S$, entonces $\overline{\mathbf{u}} \in M_S$. Además, siguiendo el mismo procedimiento utilizado en la demostración del lema 33, se verifica que $P_0(\overline{\varphi(s_1, s_2, h)}) = \overline{P_0(\varphi(s_1, s_2, h))}$, y tomando en cuenta la linealidad de P_0 encontramos que

$$P_0(\overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{k}) = \overline{P_0(\mathbf{u} \times \mathbf{k})}, \quad (5.9)$$

$$P_0 \left(x \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial y} - y \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x} \right) = \overline{P_0 \left(x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)}. \quad (5.10)$$

Corolario 37 El vector $\bar{\mathbf{u}}_0 = \begin{pmatrix} a^2(z-l) \\ -ia^2(z-l) \\ -c^2(x-iy) \end{pmatrix} \in M_S$ es un vector propio de los operadores B y C .

DEMOSTRACIÓN: De la observación 28 es claro que $\bar{\mathbf{u}}_0 \in M_S$. Ahora aplicando (5.9) y (5.10) se tiene

$$B\bar{\mathbf{u}}_0 = iP_0(\bar{\mathbf{u}}_0 \times \mathbf{k}) = -iP_0(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{k}) = -\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}\mathbf{u}_0\right) = \frac{a^2}{a^2+c^2}\bar{\mathbf{u}}_0.$$

$$\overline{C\bar{\mathbf{u}}_0} = -iP_0\left(x\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} - y\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x}\right) = -\left(\frac{c^2}{a^2+c^2}\mathbf{u}_0\right) = \frac{c^2}{a^2+c^2}\bar{\mathbf{u}}_0. \quad \blacksquare$$

Lema 38 En el caso en que Ω es un elipsoide de revolución, se tiene que

$$\gamma = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + c^2} \begin{pmatrix} z-l \\ -i(z-l) \\ x-iy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ -il \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $\gamma = \overline{\nabla\psi}$, donde ψ es la solución del problema de Neumann

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= 0 && \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} &= \mu && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde

$$\mu = z(\cos n_x + i \cos n_y) - (x+iy)\cos n_z.$$

Luego usando (5.1) y (5.7) se tiene

$$\begin{aligned} \mu &= (z, iz, -(x+iy)) \cdot (\cos n_x, \cos n_y, \cos n_z) \\ &= \phi(1, -1, 0) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla[(x+iy)(m(z-l)+l)] \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla\psi \cdot \mathbf{n}, \end{aligned}$$

con $m = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + c^2}$. Entonces

$$\psi = (x+iy) \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2 + c^2} (z-l) + l \right),$$

y por tanto,

$$\bar{\gamma} = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + c^2} \begin{pmatrix} z-l \\ i(z-l) \\ x+iy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ il \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Procederemos ahora a hacer los cálculos de las componentes \vec{a}_{13} , $a_{31}(\cdot)$ y a_{33} que aparecen en el operador A . Usando (5.4) y (5.9), resulta

$$\begin{aligned} \overline{P_0(\gamma \times \mathbf{k})} &= P_0 \left[\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2 + c^2} \begin{pmatrix} z-l \\ i(z-l) \\ x+iy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ il \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{c^2 - a^2}{a^2 + c^2} iP_0 \begin{pmatrix} (z-l) \\ i(z-l) \\ 0 \end{pmatrix} + P_0 \begin{pmatrix} il \\ -l \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{c^2 - a^2}{a^2 + c^2} iP_0(\varphi(1, 0, l)) + P_0(\nabla(ilx - ly)) \\ &= \frac{mi}{a^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2(z-l) \\ a^2i(z-l) \\ -c^2(x+iy) \end{pmatrix} = -\frac{mi}{a^2 + c^2}\mathbf{u}_0. \end{aligned}$$

Entonces

$$P_0(\gamma \times \mathbf{k}) = -\frac{mi}{a^2 + c^2}\bar{\mathbf{u}}_0.$$

Por otra parte,

$$x\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial y} - y\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial x} = mx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} - my \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = mi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x+iy \end{pmatrix}.$$

Empleando ahora (5.10), obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{P_0\left(x\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial y} - y\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial x}\right)} &= miP_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x+iy \end{pmatrix} = miP_0(\varphi(0, 1, l)) \\ &= \frac{-mi}{a^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2(z-l) \\ a^2i(z-l) \\ -c^2(x+iy) \end{pmatrix} = -\frac{mi}{a^2 + c^2}\mathbf{u}_0. \end{aligned}$$

De modo que

$$P_0\left(x\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial y} - y\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial x}\right) = \frac{mi}{a^2 + c^2}\bar{\mathbf{u}}_0.$$

Al sustituir en las fórmulas definidas en (2.15) con $\alpha = 1$, obtenemos

$$\vec{a}_{13} = -\omega_1 \left(\frac{mi}{a^2 + c^2}\bar{\mathbf{u}}_0 \right) + (\omega_1 + 2\omega_2) \left(-\frac{mi}{a^2 + c^2}\bar{\mathbf{u}}_0 \right) = -\frac{2(\omega_1 + \omega_2)mi}{a^2 + c^2}\bar{\mathbf{u}}_0.$$

$$\begin{aligned}
a_{31}(\cdot) &= if_6 \langle \cdot, \gamma \times \mathbf{k} \rangle + if_7 \left\langle \cdot, \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \right\rangle \\
&= if_6 \langle \cdot, P_0(\gamma \times \mathbf{k}) \rangle + if_7 \left\langle \cdot, P_0 \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \right\rangle \\
&= if_6 \left\langle \cdot, -\frac{mi}{a^2 + c^2} \bar{\mathbf{u}}_0 \right\rangle + if_7 \left\langle \cdot, \left(\frac{mi}{a^2 + c^2} \bar{\mathbf{u}}_0 \right) \right\rangle \\
&= \frac{m}{a^2 + c^2} (-f_6 + f_7) \langle \cdot, \bar{\mathbf{u}}_0 \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{33} &= if_2 \left\langle \left(x \frac{\partial \gamma}{\partial y} - y \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right), \gamma \right\rangle - if_3 \langle \gamma \times \mathbf{k}, \gamma \rangle - if_4 \\
&= if_2 \left\langle -mi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x - iy \end{pmatrix}, m \begin{pmatrix} z - l \\ -i(z - l) \\ x - iy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ -il \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\quad - if_3 \left\langle -m \begin{pmatrix} i(z - l) \\ (z - l) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} il \\ l \\ 0 \end{pmatrix}, m \begin{pmatrix} z - l \\ -i(z - l) \\ x - iy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ -il \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle - if_4 \\
&= m^2 f_2 \int_{\Omega} |x - iy|^2 dV + f_3 \int_{\Omega} (2m^2 (z - l)^2 dV + 4ml(z - l)dV + l^2) dV - if_4
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de f_2 , f_3 , f_4 , f_6 y f_7 dados en (2.16), llegamos

$$\begin{aligned}
a_{31}(\cdot) &= \frac{2mi\rho(\omega_1 + \omega_2)}{(a^2 + c^2)(2I_{\perp} + \rho d)} \langle \cdot, \bar{\mathbf{u}}_0 \rangle \\
a_{33} &= m^2 \left(-\frac{\rho\omega_1}{2I_{\perp} + \rho d} \right) \int_{\Omega} |x - iy|^2 dV + \frac{2\omega_2(I_{\parallel} - 2I_{\perp})}{2I_{\perp} + \rho d} \\
&\quad + \left(-\frac{\rho(\omega_1 + 2\omega_2)}{2I_{\perp} + \rho d} \right) \int_{\Omega} (2m^2 (z - l)^2 dV + 4ml(z - l)dV + l^2) dV \\
&= -\frac{\rho\omega_1}{2I_{\perp} + \rho d} \int_{\Omega} (m^2 |x - iy|^2 + 2m^2 (z - l)^2 + 4ml(z - l) + l^2) dV \\
&\quad + 2\frac{\omega_2}{2I_{\perp} + \rho d} \left[-\rho \int_{\Omega} (2m^2 (z - l)^2 + 4ml(z - l)dV + l^2) dV + (I_{\parallel} - 2I_{\perp}) \right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz \bar{A} queda como

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \omega_1 \bar{C} - (\omega_1 + 2\omega_2)B & 0 & -\frac{2\alpha(\omega_1 + \omega_2)mi}{a^2 + c^2} \bar{\mathbf{u}}_0 \\ f_N(\cdot) & 0 & 1 \\ \frac{2mi\rho(\omega_1 + \omega_2)}{(a^2 + c^2)(2I_{\perp} + \rho d)} \langle \cdot, \bar{\mathbf{u}}_0 \rangle & \frac{2\hat{K}}{(2I_{\perp} + \rho d)} & \frac{\omega_1 \hat{K}_1 + \omega_2 \hat{K}_2}{2I_{\perp} + \rho d} \end{pmatrix},$$

donde

$$\hat{K} = [gMl_1 + \omega_2^2 (I_{\parallel} - I_{\perp})]$$

$$\hat{K}_1 = \rho \int_{\Omega} (m^2 |x - iy|^2 + 2m^2 (z - l)^2 + 4ml(z - l) + l^2) dV$$

$$\hat{K}_2 = 2 \left[-\rho \int_{\Omega} (2m^2 (z - l)^2 + 4ml(z - l)dV + l^2) dV + (I_{\parallel} - 2I_{\perp}) \right].$$

5.2 Existencia de un subespacio invariante de dimensión finita

En la sección anterior encontramos un vector propio $\bar{\mathbf{u}}_0$ del operador $\omega_1 \bar{C} - (\omega_1 + 2\omega_2)B$. Ahora se demostrará que tanto el conjunto G , generado por este vector, producto cartesiano con \mathbb{C}^2 , como el conjunto ortogonal G^{\perp} , son subespacios invariantes bajo el operador A . Además veremos que el operador A es simétrico en sentido usual, cuando nos restringimos al subespacio $G^{\perp} \cap D(\bar{A})$. De esta forma se puede asegurar que los valores propios de A en este subespacio, son reales y simples, por lo que la solución de (2.1) debida a estos valores propios, es estable, y por lo tanto sólo será necesario concentrarnos a estudiar el comportamiento de los valores propios cuando nos restringimos al subespacio G .

Más aún, también se verá que $\dim(G) = 3$, por lo que el operador A puede ser expresado explícitamente en forma de una matriz de 3×3 , y entonces se podrá comprobar que efectivamente, a lo más aparecerán dos valores propios complejos, y que en este caso serán conjugados.

Definimos $\mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{u}}_0$. El espacio $S_2 \times \mathbb{C}^2$ puede descomponerse en la siguiente suma directa ortogonal

$$S_2 \times \mathbb{C}^2 = (\text{gen} \{ \mathbf{v}_0 \} \times \mathbb{C}^2) \oplus \left((\text{gen} \{ \mathbf{v}_0 \})^{\perp} \times \{ (0, 0) \} \right).$$

En efecto, basta notar que

$$(\text{gen} \{ \mathbf{v}_0 \} \times \mathbb{C}^2)^{\perp} = (\text{gen} \{ \mathbf{v}_0 \})^{\perp} \times \{ (0, 0) \}.$$

Lema 39 Los subespacios $G = \text{gen}\{\mathbf{v}_0\} \times \mathbb{C}^2$ y $G^\perp = (\text{gen}\{\mathbf{v}_0\})^\perp \times \{(0,0)\}$ son subespacios invariantes de \bar{A} .

DEMOSTRACIÓN: Primero, notemos que el dominio de \bar{A} es $D(\bar{A}) = D(\bar{C}) \times \mathbb{C}^2$, y por tanto $G \subset D(\bar{A})$. Veremos que $\bar{A}(G) \subset G$.

Sea $(\alpha \mathbf{v}_0, w, z)^T \in G$ entonces

$$\begin{aligned} \bar{A} \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{v}_0 \\ w \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_1 \bar{C} \mathbf{v}_0 - (\omega_1 + 2\omega_2) B \mathbf{v}_0 - \frac{2\alpha(\omega_1 + \omega_2) m i}{a^2 + c^2} \alpha \mathbf{v}_0 z \\ z \\ \frac{2m i \rho(\omega_1 + \omega_2)}{(a^2 + c^2)(2I_\perp + \rho d)} \|\alpha \mathbf{v}_0\|^2 - \frac{2\bar{K} w}{(2I_\perp + \rho d)} + \frac{(\omega_1 \bar{K}_1 + \omega_2 \bar{K}_2) z}{2I_\perp + \rho d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[(\omega_1 \bar{\tau} - (\omega_1 + 2\omega_2) \sigma) - \frac{2\alpha(\omega_1 + \omega_2) m i}{a^2 + c^2} z \right] \alpha \mathbf{v}_0 \\ z \\ \frac{2m i \rho(\omega_1 + \omega_2)}{(a^2 + c^2)(2I_\perp + \rho d)} \|\alpha \mathbf{v}_0\|^2 - \frac{2\bar{K} w}{(2I_\perp + \rho d)} + \frac{(\omega_1 \bar{K}_1 + \omega_2 \bar{K}_2) z}{2I_\perp + \rho d} \end{pmatrix} \in G. \end{aligned}$$

Ahora probaremos que $\bar{A}(G^\perp \cap D(\bar{A})) \subset G^\perp$. Sea $(\mathbf{v}, 0, 0)^T \in G^\perp \cap D(\bar{A})$. Entonces $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = 0$. Usando la simetría de \bar{C} y B , obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}(\mathbf{v}, 0, 0)^T, (\mathbf{v}_0, w, z)^T \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} &= \left\langle \begin{pmatrix} \omega_1 \bar{C} \mathbf{v} - (\omega_1 + 2\omega_2) B \mathbf{v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ w \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} \\ &= \omega_1 \langle \bar{C} \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle - (\omega_1 + 2\omega_2) \langle B \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle \\ &= \omega_1 \langle \mathbf{v}, \bar{C} \mathbf{v}_0 \rangle - (\omega_1 + 2\omega_2) \langle \mathbf{v}, B \mathbf{v}_0 \rangle \\ &= -\omega_1 \bar{\tau} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle + \bar{\sigma} (\omega_1 + 2\omega_2) \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = 0, \end{aligned}$$

de modo que $\bar{A}(\mathbf{v}, 0, 0)^T \in G^\perp$. ■

Lema 40 Sean \bar{A} , G y G^\perp definidos como antes. Entonces $\sigma_p(\bar{A}) = \sigma_p(\bar{A}|_G) \cup \sigma_p(\bar{A}|_{G^\perp \cap D(\bar{A})})$.

DEMOSTRACIÓN: Hemos visto que el espacio $S_2 \times \mathbb{C}^2$ puede ser descompuesto en suma directa ortogonal de los espacios G y G^\perp . Entonces para todo $R \in D(\bar{A})$ se tiene que

$$R = R_1 + R_2$$

con $R_1 \in G$ y $R_2 \in G^\perp \cap D(\bar{A})$. Sea $\lambda \in \sigma(\bar{A})$ y sea R su vector propio asociado. Esto es, $\bar{A}R = \lambda R$, por tanto

$$\bar{A}R_1 + R_2 = \lambda(R_1 + R_2).$$

Si consideramos que $R_1 = 0$ ó $R_2 = 0$, entonces se obtiene de forma inmediata que $\lambda \in \sigma_p(\bar{A}|_G)$ ó $\lambda \in \sigma_p(\bar{A}|_{G^\perp \cap D(\bar{A})})$.

Supongamos entonces que $R_1, R_2 \neq 0$, así por la linealidad de \bar{A}

$$\begin{aligned} \bar{A}R_1 + \bar{A}R_2 &= \lambda R_1 + \lambda R_2 \\ \bar{A}R_1 - \lambda R_1 &= -\bar{A}R_2 + \lambda R_2; \end{aligned}$$

Hemos visto que G y G^\perp son invariantes bajo el operador \bar{A} , de modo que $\bar{A}R_1 \in G$ y $\bar{A}R_2 \in G^\perp$, lo cual significa que

$$\begin{aligned} -\bar{A}R_2 + \lambda R_2 &= \bar{A}R_1 - \lambda R_1 \in G \\ \bar{A}R_1 - \lambda R_1 &= -\bar{A}R_2 + \lambda R_2 \in G^\perp, \end{aligned}$$

sin embargo se tiene que $G \cap G^\perp = \{0\}$, por lo que,

$$\bar{A}R_1 - \lambda R_1 = -\bar{A}R_2 + \lambda R_2 = 0,$$

esto es,

$$\bar{A}R_1 = \lambda R_1 \quad \text{y} \quad \bar{A}R_2 = \lambda R_2.$$

Por lo tanto $\lambda \in \sigma_p(\bar{A}|_G)$ y $\lambda \in \sigma_p(\bar{A}|_{G^\perp \cap D(\bar{A})})$. Así $\sigma_p(\bar{A}) \subset \sigma_p(\bar{A}|_G) \cup \sigma_p(\bar{A}|_{G^\perp \cap D(\bar{A})})$.

Por otro lado, si $\lambda \in \sigma_p(\bar{A}|_G)$ entonces $\bar{A}R_1 = \lambda R_1$, pero $R_1 \in G \subset S_2 \times \mathbb{C}^2$, así que $\lambda \in \sigma_p(\bar{A})$. De forma similar probamos que si $\lambda \in \sigma_p(\bar{A}|_{G^\perp \cap D(\bar{A})})$ entonces $\lambda \in \sigma_p(\bar{A})$. De esta forma llegamos a que $\sigma_p(\bar{A}|_G) \cup \sigma_p(\bar{A}|_{G^\perp \cap D(\bar{A})}) \subset \sigma_p(\bar{A})$. Así obtenemos el resultado deseado. ■

En base al lema anterior, podremos estudiar los valores propios del operador \bar{A} , restringiéndonos a cada uno de los subespacios $G^\perp \cap D(\bar{A})$ y G .

Lema 41 El operador \bar{A} definido en (2.13) es simétrico en $G^\perp \cap D(\bar{A})$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $R_1, R_2 \in G^\perp \cap D(\bar{A})$, esto es, $R_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y

$R_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in (\text{gen}\{\mathbf{v}_0\})^\perp$. Entonces, utilizando el hecho de que

\bar{C} y B son simétricos en $D(\bar{C})$, resulta

$$\bar{A}R_1 = \begin{pmatrix} \omega_1 \bar{C} \mathbf{v}_1 - (\omega_1 + 2\omega_2) B \mathbf{v}_1 \\ 0 \\ \frac{2m i \rho(\omega_1 + \omega_2)}{(a^2 + c^2)(2I_\perp + \rho d)} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \bar{C} \mathbf{v}_1 - (\omega_1 + 2\omega_2) B \mathbf{v}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \langle \overline{A}R_1, R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} &= \langle \omega_1 \overline{C}v_1 - (\omega_1 + 2\omega_2)Bv_1, v_2 \rangle \\ &= \omega_1 \langle \overline{C}v_1, v_2 \rangle - (\omega_1 + 2\omega_2) \langle Bv_1, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \overline{A}R_1, R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} &= \omega_1 \langle v_1, \overline{C}v_2 \rangle - (\omega_1 + 2\omega_2) \langle v_1, Bv_2 \rangle \\ &= \langle v_1, \omega_1 \overline{C}v_2 - (\omega_1 + 2\omega_2)Bv_2 \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_1 \overline{C}v_2 - (\omega_1 + 2\omega_2)Bv_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2} = \langle R_1, \overline{A}R_2 \rangle_{S_2 \times \mathbb{C}^2}. \end{aligned}$$

Observación 42 Como consecuencia del lema anterior, el operador A restringido al subespacio $G^\perp \cap D(\overline{A})$, tiene todos sus valores propios reales y simples; sus vectores propios correspondientes a distintos valores propios son ortogonales.

Lema 43 Sea S un subespacio cerrado y $R(t)$ una función continuamente diferenciable en $[0, \infty)$ tal que $R(t) \in S$ para toda $t \geq 0$. Entonces $R'(t) \in S$ para todo $t \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN: Ya que S es un subespacio, entonces para cada $h \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $\frac{R(t+h) - R(t)}{h} \in S$. Ya que $R(t) \in C^1[0, \infty)$ entonces $R'(t)$ existe, luego como S es cerrado, obtenemos

$$R'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(t+h) - R(t)}{h} \in S.$$

Teorema 44 Consideremos el problema de Cauchy (2.1) con \overline{A} dada en (2.13). Si $R(t)$ es solución de (2.1) y $R(0) \in G$, entonces $R(t) \in G$, para todo $t \in [0, \infty)$.

DEMOSTRACIÓN: Al principio de esta sección hemos visto que $S_2 \times \mathbb{C}^2 = G \oplus G^\perp$, entonces todo $R(t) \in S_2 \times \mathbb{C}^2$ puede descomponerse en la siguiente forma

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t)$$

con $R_1(t) \in G$ y $R_2(t) \in G^\perp$. Veamos que tanto $R_1(t)$ como $R_2(t)$ son soluciones de (2.1). El lema anterior indica que $\frac{dR_1(t)}{dt} \in G$ y $\frac{dR_2(t)}{dt} \in G^\perp$, entonces por la linealidad de \overline{A} resulta

$$\frac{dR_1}{dt} + \frac{dR_2}{dt} = i\overline{A}R_1 + i\overline{A}R_2.$$

Tomando en cuenta que tanto G como G^\perp son subespacios invariantes bajo el operador \overline{A} entonces

$$i\overline{A}R_2 - \frac{dR_2}{dt} = \frac{dR_1}{dt} - i\overline{A}R_1 \in G \quad \text{y} \quad \frac{dR_1}{dt} - i\overline{A}R_1 = i\overline{A}R_2 - \frac{dR_2}{dt} \in G^\perp,$$

Como $G \cap G^\perp = \{0\}$, entonces

$$\frac{dR_1}{dt} - i\overline{A}R_1 = i\overline{A}R_2 - \frac{dR_2}{dt} = 0.$$

Por hipótesis $R(0) = R_1(0) + R_2(0) \in G$, por lo que necesariamente $R_2(0) = 0$. Observemos que $R(t) \equiv 0$ es solución de (2.1), entonces por el teorema de existencia y unicidad de soluciones, concluimos que $R_2(t) \equiv 0$ y en consecuencia

$$R(t) = R_1(t) \in G \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Por el teorema anterior, las soluciones del problema de Cauchy (2.1) en G son de la forma $R(t) = \begin{pmatrix} \xi(t)v_0 \\ w(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Sea $R(t) = \begin{pmatrix} \xi(t)v_0 \\ w(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in G$ una solución de (2.1). Entonces al desarrollar, nos queda

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \xi'(t)v_0 \\ w'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} \xi(t) (\omega_1 \overline{C}v_0 - (\omega_1 + 2\omega_2)Bv_0) - z(t) \frac{2\alpha(\omega_1 + \omega_2)mi}{a^2 + c^2} v_0 \\ \xi(t) \frac{2mi\rho(\omega_1 + \omega_2)}{(a^2 + c^2)(2I_\perp + \rho d)} \langle v_0, v_0 \rangle - \frac{2\tilde{K}}{(2I_\perp + \rho d)} w(t) + \frac{\omega_1 \tilde{K}_1 + \omega_2 \tilde{K}_2}{2I_\perp + \rho d} z(t) \\ [-\xi(t) (m\omega_1 + 2\omega_2 \frac{a^2}{a^2 + c^2}) - z(t) \frac{2\alpha(\omega_1 + \omega_2)mi}{a^2 + c^2}] v_0 \\ \xi(t) \frac{2mi\rho(\omega_1 + \omega_2)}{(a^2 + c^2)(2I_\perp + \rho d)} - \frac{2\tilde{K}}{(2I_\perp + \rho d)} w(t) + \frac{\omega_1 \tilde{K}_1 + \omega_2 \tilde{K}_2}{2I_\perp + \rho d} z(t) \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} \xi(t) \frac{2mi\rho(\omega_1 + \omega_2)}{(a^2 + c^2)(2I_\perp + \rho d)} - \frac{2\tilde{K}}{(2I_\perp + \rho d)} w(t) + \frac{\omega_1 \tilde{K}_1 + \omega_2 \tilde{K}_2}{2I_\perp + \rho d} z(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \xi'(t) \\ w'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -\left(m\omega_1 + 2\omega_2 \frac{a^2}{a^2+c^2}\right) & 0 & -\frac{2(\omega_1+\omega_2)mi}{a^2+c^2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2mi\rho(\omega_1+\omega_2)}{(a^2+c^2)(2I_\perp+\rho d)} & -\frac{2\hat{K}}{2I_\perp+\rho d} & \frac{\omega_1\hat{K}_1+\omega_2\hat{K}_2}{2I_\perp+\rho d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ w(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Así, obtuvimos que la matriz asociada al operador \bar{A} restringido al espacio G es

$$M = \begin{pmatrix} -\left(m\omega_1 + 2\omega_2 \frac{a^2}{a^2+c^2}\right) & 0 & -\frac{2(\omega_1+\omega_2)mi}{a^2+c^2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2mi\rho(\omega_1+\omega_2)}{(a^2+c^2)(2I_\perp+\rho d)} & -\frac{2\hat{K}}{2I_\perp+\rho d} & \frac{\omega_1\hat{K}_1+\omega_2\hat{K}_2}{2I_\perp+\rho d} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Nótese que en el caso del elipsoide de revolución que estamos analizando, sólo es necesario estudiar el problema (2.1) sobre G , pero sobre este subespacio de dimensión 3, el problema (2.1) se reduce a la ecuación

$$\frac{dr}{dt} = iMr, \quad r(0) = r_0 \in \mathbb{C}^3 \quad (5.13)$$

donde $r(t) = (\xi(t), w(t), z(t))^T \in \mathbb{C}^3$.

Capítulo 6

Análisis del polinomio característico

6.1 Cálculo del discriminante

En esta sección calcularemos el polinomio característico de la matriz M , y con ayuda de su discriminante obtendremos información acerca de sus raíces.

Puesto que en (5.12) se observa que las componentes de la matriz M definida en (5.12) dependen de ω_1 y ω_2 , entonces al calcular su polinomio característico $P(\lambda)$ se encontrará que sus coeficientes serán funciones continuas de ω_1 y ω_2 , en consecuencia sus raíces variarán en dependencia de estos dos parámetros. Así para cada punto del plano $\omega_1\omega_2$ obtendremos distintas raíces para $P(\lambda)$.

La idea fundamental será recorrer todos los puntos del plano $\omega_1\omega_2$ a través de rectas que pasan por el origen, es decir estudiaremos la ubicación de las raíces de $P(\lambda, \omega_1, \omega_2)$ en cada punto de una recta fija de la forma $\omega_1 = k\omega_2$, donde k es una constante que se precisará más adelante.

Al calcular el polinomio característico de la matriz M dada en (5.12), resulta

$$\begin{aligned} P(\lambda, \omega_1, \omega_2) = & -\lambda^3 + \left[-\left(m\omega_1 + 2\omega_2 \frac{a^2}{a^2+c^2}\right) + \frac{\omega_1\hat{K}_1 + \omega_2\hat{K}_2}{2I_\perp + \rho d} \right] \lambda^2 \quad (6.1) \\ & + \left[-\frac{2\hat{K}}{2I_\perp + \rho d} + \left(m\omega_1 + 2\omega_2 \frac{a^2}{a^2+c^2}\right) \frac{\omega_1\hat{K}_1 + \omega_2\hat{K}_2}{2I_\perp + \rho d} + \frac{4m^2\rho(\omega_1 + \omega_2)^2}{(a^2+c^2)^2(2I_\perp + \rho d)} \right] \lambda \\ & - \left(m\omega_1 + 2\omega_2 \frac{a^2}{a^2+c^2}\right) \frac{2\hat{K}}{2I_\perp + \rho d}. \end{aligned}$$

Lema 45 El sistema (5.13) es inestable cuando $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$.

DEMOSTRACIÓN: Fácilmente se observa que para $\omega_1 = \omega_2 = 0$, el polinomio (6.1) se reduce a

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{2\hat{K}}{2I_{\perp} + \rho d} \lambda$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{2\hat{K}}{2I_{\perp} + \rho d}}$ y $\lambda_3 = i\sqrt{\frac{2\hat{K}}{2I_{\perp} + \rho d}}$, pues $\frac{2\hat{K}}{2I_{\perp} + \rho d} > 0$. Por lo tanto entre las soluciones del sistema (5.13) aparecerá una de la forma $k \exp(i\lambda_2 t)$, la cual causa inestabilidad. ■

Para analizar la estabilidad del sistema en todos los puntos del plano $\omega_1 \omega_2$ haremos el cambio

$$\omega_1 = (\tan \theta) \omega_2, \quad \text{con } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}. \quad (6.2)$$

Así, para cada θ fijo, los puntos $(\omega_1, \omega_2) = (\omega_2 \tan \theta, \omega_2)$ estarán situados sobre una y sólo una recta que pasa por el origen cuya pendiente es $\tan \theta$, aquí θ es el ángulo que se mide apartir de la parte positiva del eje ω_2 hasta la recta $\omega_1 = \omega_2 \tan \theta$. De esta forma recorreremos la mitad del plano $\omega_1 \omega_2$, el análisis de las raíces del polinomio característico considerando la mitad restante se verá más adelante.

El polinomio característico se convierte en.

$$\begin{aligned} & P(\lambda, \omega_2, \theta) \\ &= -\lambda^3 + \omega_2 \left(-m \tan \theta - 2 \frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{\tan \theta \hat{K}_1 + \hat{K}_2}{2I_{\perp} + \rho d} \right) \lambda^2 - \frac{2\hat{K}}{2I_{\perp} + \rho d} \lambda \\ &+ \omega_2^2 \left(\left(m \tan \theta + 2 \frac{a^2}{a^2 + c^2} \right) \frac{\tan \theta \hat{K}_1 + \hat{K}_2}{2I_{\perp} + \rho d} + \frac{4m^2 \rho (\tan \theta + 1)^2}{(a^2 + c^2)^2 (2I_{\perp} + \rho d)} \right) \lambda \\ &- \omega_2 \left(m \tan \theta + 2 \frac{a^2}{a^2 + c^2} \right) \frac{2\hat{K}}{2I_{\perp} + \rho d}. \end{aligned}$$

Para simplificar la escritura definimos

$$E(\theta) = m \tan \theta - 2 \frac{a^2}{a^2 + c^2} - \frac{\tan \theta \hat{K}_1 + \hat{K}_2}{2I_{\perp} + \rho d}, \quad (6.3)$$

$$F = \frac{2\hat{K}}{2I_{\perp} + \rho d},$$

$$G(\theta) = - \left(m \tan \theta + 2 \frac{a^2}{a^2 + c^2} \right) \frac{\tan \theta \hat{K}_1 + \hat{K}_2}{2I_{\perp} + \rho d} - \frac{4m^2 \rho (\tan \theta + 1)^2}{(a^2 + c^2)^2 (2I_{\perp} + \rho d)},$$

$$H(\theta) = \left(m \tan \theta + 2 \frac{a^2}{a^2 + c^2} \right) \frac{2\hat{K}}{2I_{\perp} + \rho d}.$$

Sustituyendo en (6.1), se obtiene

$$-P(\lambda) = \lambda^3 + \omega_2 E(\theta) \lambda^2 + (F + \omega_2^2 G(\theta)) \lambda + \omega_2 H(\theta). \quad (6.4)$$

Recordando la fórmula dada en (1.11), el discriminante de (6.4) es

$$\begin{aligned} D_6 &= -4 \left(-\frac{1}{3} \omega_2^2 E^2(\theta) + F + \omega_2^2 G(\theta) \right)^3 \\ &- 27 \left(\frac{2}{27} \omega_2^3 E^3(\theta) - \frac{1}{3} \omega_2 E(\theta) (F + \omega_2^2 G(\theta)) + \omega_2 H(\theta) \right)^2. \end{aligned}$$

Al desarrollar nos queda un polinomio en ω_2 :

$$D_6 = L\omega_2^6 + M\omega_2^4 + N\omega_2^2 - 4F^3 \quad (6.5)$$

en donde,

$$\begin{aligned} L &= E^2(\theta)G^2(\theta) - 4G^3(\theta) \\ M &= 2E^2FG - 12FG^2 - 4E^3H + 18EGH \\ N &= E^2F^2 - 27H^2 - 12F^2G + 18EFH. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Observación 46 El polinomio (6.5) contiene sólo potencias pares de ω_2 . Por tanto éste es simétrico respecto al cero del eje ω_2 , es decir, $D_6(-\omega_2) = D_6(\omega_2)$. Lo cual implica que si ω_{2_0} es una raíz del discriminante, entonces $-\omega_{2_0}$ también lo será.

También es claro que el cero no es una raíz de D_6 , puesto que $F \neq 0$. Al introducir la variable

$$\omega = \omega_2^2 \quad (6.7)$$

(6.5) se convierte en un polinomio de grado tres, es decir,

$$D_3 = L\omega^3 + M\omega^2 + N\omega + F^3. \quad (6.8)$$

Entonces, al encontrar las raíces de (6.8) obtendremos todas las raíces de

(6.5), mediante la relación $\omega_2 = \pm\sqrt{\omega}$.

Consideremos ahora θ fijo pero arbitrario, y sean $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2$ y $\hat{\omega}_3$ las raíces de D_3 ; en el caso en que ellas sean reales supondremos que $\hat{\omega}_1 \leq \hat{\omega}_2 \leq \hat{\omega}_3$.

Nosotros estamos interesados sólo en las raíces reales de (6.5), pues como sus coeficientes son reales, si ω_{2_0} es una raíz compleja, entonces también su conjugado $\overline{\omega_{2_0}}$ será una raíz, entonces D_6 podrá factorizarse en la siguiente forma

$$D_6 = L(\omega_2 - \omega_{2_0})(\omega_2 - \overline{\omega_{2_0}})D_0(\omega_2).$$

recordemos que ω_2 toma valores reales, pues representa la velocidad de rotación del trompo, por lo que

$$\begin{aligned} D_6 &= L(\omega_2 - \omega_{2_0})(\omega_2 - \overline{\omega_{2_0}})D_0(\omega_2) \\ &= L|\omega_2 - \omega_{2_0}|^2 D_0(\omega_2) \end{aligned}$$

así que ω_{2_0} no aporta información acerca del signo del discriminante.

Hagamos notar que a partir de la relación (6.7), si $\hat{\omega}_1$ es una raíz real negativa o compleja de (6.8), entonces las raíces $-\sqrt{\hat{\omega}_1}$ y $\sqrt{\hat{\omega}_1}$ de (6.5), serán complejas y conjugadas, y por tanto, no aportan información acerca del signo del discriminante. Por este motivo, sólo se analizará el comportamiento del discriminante en base a las raíces reales positivas de (6.8).

Sea

$$D_3(\omega) = L(\omega - \hat{\omega}_1)(\omega - \hat{\omega}_2)(\omega - \hat{\omega}_3) \quad (6.9)$$

la factorización de (6.8) en factores de grado 1.

Lema 47 En el polinomio (6.9), $L > 0$ para todo $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

DEMOSTRACIÓN: De (6.6) se tiene

$$L = [E^2(\theta) - 4G(\theta)]G^2(\theta)$$

así que el signo de L solo depende de $E^2(\theta) - 4G(\theta)$, y sustituyendo los valores de $E(\theta)$ y $G(\theta)$ de las ecuaciones (6.3) se obtiene

$$\begin{aligned} &E^2(\theta) - 4G(\theta) \\ &= \left(m \tan \theta + 2 \frac{a^2}{a^2 + c^2} - \frac{\tan \theta \hat{K}_1 + \hat{K}_2}{2I_{\perp} + \rho d} \right)^2 \\ &\quad - 4 \left[- \left(m \tan \theta + 2 \frac{a^2}{a^2 + c^2} \right) \frac{\tan \theta \hat{K}_1 + \hat{K}_2}{2I_{\perp} + \rho d} - \frac{4m^2 \rho (\tan \theta + 1)^2}{(a^2 + c^2)^2 (2I_{\perp} + \rho d)} \right]. \end{aligned}$$

Al desarrollar y reacomodar los términos, se encuentra que

$$E^2(\theta) - 4G(\theta) = \left(m \tan \theta + 2 \frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{\tan \theta \hat{K}_1 + \hat{K}_2}{2I_{\perp} + \rho d} \right)^2 + \frac{16m^2 \rho (\tan \theta + 1)^2}{(a^2 + c^2)^2 (2I_{\perp} + \rho d)}.$$

Luego, observemos que en el último de término, las expresiones $m^2 \rho (\tan \theta + 1)^2$, $(a^2 + c^2)^2$ y $(2I_{\perp} + \rho d)$ son positivas, de modo que $\frac{16m^2 \rho (\tan \theta + 1)^2}{(a^2 + c^2)^2 (2I_{\perp} + \rho d)} > 0$ y de esta forma $L > 0$. ■

Además, puede verse que los coeficientes del discriminante $D_3(\theta)$ son funciones continuas que dependen de θ . Así (por un teorema conocido), podemos asegurar que las raíces del polinomio (6.5) dependen continuamente de sus coeficientes, y por tanto, dependen continuamente de θ , el cual está considerado dentro del compacto $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, y por consiguiente, las raíces del discriminante alcanzan su valor máximo y mínimo en este intervalo.

6.2 Análisis del signo del discriminante

Con el propósito de poder analizar el signo del discriminante, a partir de este momento sólo consideraremos aquellos elipsoides en los que $c < a$, para garantizar $L > 0$.

Lema 48 En el polinomio (6.8) aparece un número impar de raíces reales positivas, esto es, una o tres raíces reales positivas.

DEMOSTRACIÓN: Demostraremos que todos los casos contrarios son imposibles.

- a. Supongamos que en (6.9) aparece una raíz real negativa $\hat{\omega}_1$ y dos complejas conjugadas $\hat{\omega}_2$ y $\hat{\omega}_2$. Entonces se tendría $D_3(\omega) = L(\omega - \hat{\omega}_1)(\omega - \hat{\omega}_2)(\omega - \overline{\hat{\omega}_2})$, entonces para $\omega = 0$, resulta, $D_3(0) = -L\hat{\omega}_1|\hat{\omega}_2|^2 > 0$, pero esto implicaría que el polinomio característico tiene tres raíces reales distintas en $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ y por tanto el sistema sería estable. Como ya hemos visto en el lema 52, esto no sucede así.
- b. Supongamos ahora que (6.8) tiene una raíz real negativa $\hat{\omega}_1$ y dos raíces reales positivas $\hat{\omega}_2$ y $\hat{\omega}_3$. Entonces al considerar $\omega = 0$, en (6.9) resulta $D_3(0) = L(-\hat{\omega}_1)(-\hat{\omega}_2)(-\hat{\omega}_3) > 0$, esto implica que (6.1) tiene tres raíces reales distintas en $(0, 0)$, por consiguiente que el sistema es estable en este punto, pero de nuevo, esto es imposible.
- c. El mismo procedimiento puede ser aplicado si se supone que las tres raíces de (6.8) son reales y negativas, al evaluar el discriminante (6.9) en $\omega = 0$ tenemos que $D_3(0) = L(-\hat{\omega}_1)(-\hat{\omega}_2)(-\hat{\omega}_3) > 0$ y al igual que los casos anteriores, el sistema sería estable en el origen, lo cual es una contradicción.

Por el lema anterior, sólo nos limitaremos a analizar la estabilidad en los siguientes casos:

Caso 1. Cuando $D_3(\omega)$ tiene una raíz real positiva $\hat{\omega}_1$, y las otras dos $\hat{\omega}_2$ y $\hat{\omega}_3$ son reales negativas o complejas conjugadas. Haremos el estudio del signo del discriminante de $P(\lambda)$, al rededor de la raíz $\hat{\omega}_1$.

Primero veamos qué sucede cuando ω se encuentra en el intervalo $0 \leq \omega < \hat{\omega}_1$, en este caso tendremos $\omega - \hat{\omega}_1 < 0$, y en el caso de que las otras dos sean reales negativas, se tiene $(\omega - \hat{\omega}_2) > 0, (\omega - \hat{\omega}_3) > 0$, mientras que cuando son complejas conjugadas $(\omega - \hat{\omega}_2)(\omega - \overline{\hat{\omega}_2}) = (\omega - \hat{\omega}_2)(\omega - \hat{\omega}_2) = |\omega - \hat{\omega}_2|^2 > 0$. Así en ambos casos se obtiene

$$D_3(\omega) = L(\omega - \hat{\omega}_1)(\omega - \hat{\omega}_2)(\omega - \hat{\omega}_3) < 0.$$

Este hecho da como resultado que el polinomio (6.4) tenga una raíz real y dos complejas conjugadas en este intervalo de ω . Entonces al regresar a nuestra variable original se deduce que, cuando ω_2 se encuentra en el intervalo $(-\sqrt{\hat{\omega}_1}, \sqrt{\hat{\omega}_1})$, el sistema (2.1) será inestable.

Ahora veamos qué pasa si $\omega = \hat{\omega}_1$. Evidentemente en (6.9) resulta $D_3(\omega) = 0$, y por consiguiente (6.4) tendrá al menos dos raíces reales iguales, por lo que el sistema será inestable cuando $\omega_2 = -\sqrt{\hat{\omega}_1}$ y $\omega_2 = \sqrt{\hat{\omega}_1}$.

Por último consideremos $0 < \hat{\omega}_1 < \omega$, entonces $\omega - \hat{\omega}_1 > 0$, y $(\omega - \hat{\omega}_2)(\omega - \hat{\omega}_3) > 0$, tanto en el caso en que $\hat{\omega}_2$ y $\hat{\omega}_3$ sean negativas, como cuando son complejas. En consecuencia $D_3(\omega) > 0$, por lo que en esta región de ω , el polinomio característico tendrá tres raíces reales distintas y concluimos que el sistema será estable cuando $\omega_2 < -\sqrt{\hat{\omega}_1}$ y $\omega_2 > \sqrt{\hat{\omega}_1}$.

Para cada θ fijo, obtenemos una recta, sobre la cual encontraremos los puntos

$$(-\sqrt{\hat{\omega}_1}, -\sqrt{\hat{\omega}_1} \tan \theta) \text{ y } (\sqrt{\hat{\omega}_1}, \sqrt{\hat{\omega}_1} \tan \theta),$$

los cuales delimitan la zona de inestabilidad sobre esa recta. Veanse las figuras 1 y 2.

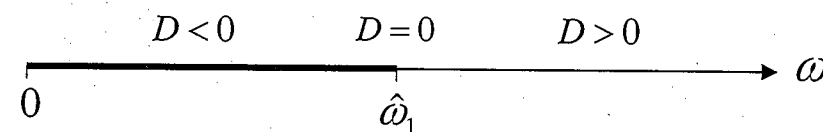


Figura 1

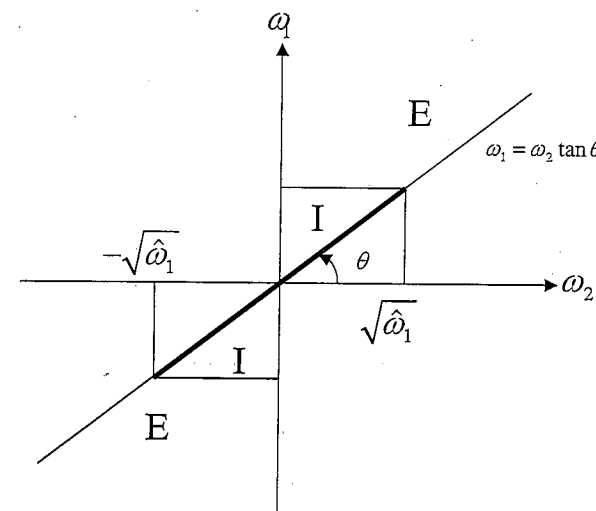


Figura 2

Si al recorrer el intervalo $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ siempre se obtiene una sola raíz real positiva del discriminante, entonces gracias al teorema que establece que las raíces de un polinomio dependen continuamente de sus coeficientes, se puede deducir que las raíces $-\sqrt{\hat{\omega}_1}$ y $\sqrt{\hat{\omega}_1}$ irán describiendo una curva continua que delimita la zona en la que las velocidades ω_1 y ω_2 hacen que el sistema sea inestable.

Caso 2. Supongamos ahora que (6.9) tiene tres raíces reales positivas, y que $0 < \hat{\omega}_1 \leq \hat{\omega}_2 \leq \hat{\omega}_3$. De nuevo analizaremos el comportamiento del discriminante alrededor de estas raíces.

Al considerar $0 \leq \omega \leq \hat{\omega}_1$, se tendrá $\omega - \hat{\omega}_1 \leq 0$, $\omega - \hat{\omega}_2 \leq 0$ y $\omega - \hat{\omega}_3 \leq 0$, es decir, $D_3(\omega) = L(\omega - \hat{\omega}_1)(\omega - \hat{\omega}_2)(\omega - \hat{\omega}_3) \leq 0$ y por tanto, entre las raíces de $P(\lambda)$ habrá dos complejas conjugadas o al menos dos raíces reales repetidas. Luego, al pasar a ω_2 se concluye que el sistema será inestable si ω_2 pertenece al intervalo cerrado $[-\sqrt{\hat{\omega}_1}, \sqrt{\hat{\omega}_1}]$.

De forma análoga, cuando $\hat{\omega}_1 < \omega < \hat{\omega}_2$ obtendremos $\omega - \hat{\omega}_1 > 0$, $\omega - \hat{\omega}_2 < 0$ y $\omega - \hat{\omega}_3 < 0$, por lo que $D_3(\omega) > 0$ y las raíces del polinomio característico serán reales y distintas. Por tanto el sistema será estable para ω_2 dentro de los intervalos $(-\sqrt{\hat{\omega}_2}, -\sqrt{\hat{\omega}_1})$ y $(\sqrt{\hat{\omega}_1}, \sqrt{\hat{\omega}_2})$.

Ahora, en el caso en que $\hat{\omega}_2 \leq \omega \leq \hat{\omega}_3$, encontramos que $\omega - \hat{\omega}_1 > 0$, $\omega - \hat{\omega}_2 \geq 0$ y $\omega - \hat{\omega}_3 \leq 0$, y de nuevo, $D_3(\omega) \leq 0$, de modo que el $P(\lambda)$ tendrá raíces complejas o reales repetidas. De manera que el sistema es inestable si ω_2 pertenece a los intervalos $[-\sqrt{\hat{\omega}_3}, -\sqrt{\hat{\omega}_2}]$ y $[\sqrt{\hat{\omega}_2}, \sqrt{\hat{\omega}_3}]$.

Por último, para $\omega > \hat{\omega}_3$ se tiene $\omega - \hat{\omega}_1 > 0$, $\omega - \hat{\omega}_2 > 0$ y $\omega - \hat{\omega}_3 > 0$, y resulta $D_3(\omega) > 0$ y por tanto, las raíces de (6.4) son reales y distintas. Entonces podemos asegurar que el sistema será estable siempre que $|\omega_2| > \sqrt{\hat{\omega}_3}$.

Estos resultados se ilustran en las figuras 3 y 4.

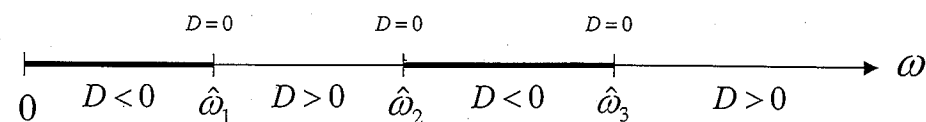


Figura 3

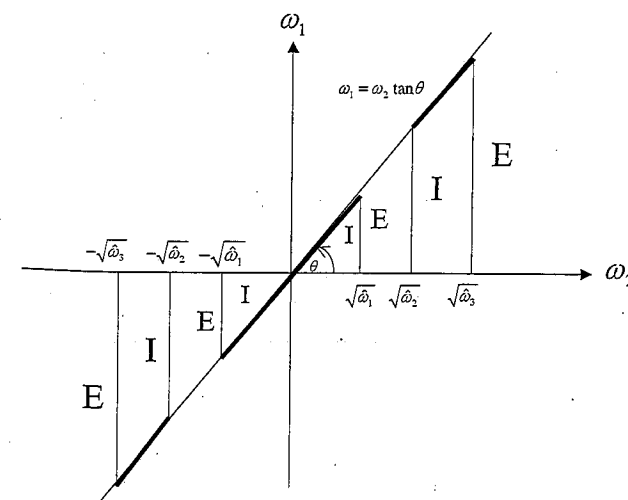


Figura 4

En la figura 6 se observa que si para algún ángulo θ el discriminante tiene tres raíces reales positivas, entonces encontraremos seis raíces de D_6 , y a su vez, seis puntos sobre la recta $\omega_1 = \omega_2 \tan \theta$. Estos definen las áreas sobre la recta $\omega_1 = \omega_2 (\tan \theta)$ en las que el sistema será inestable o estable.

Si al hacer variar θ en el intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, siempre encontramos tres raíces reales para D_3 , entonces iremos construyendo tres curvas continuas que definirán tres áreas del plano $\omega_2\omega_1$, que delimitan las zonas en las que el sistema será estable o inestable.

Para ver qué sucede con el resto del plano $\omega_2\omega_1$ es suficiente con observar que si ahora hacemos el cambio

$$\omega_2 = \left(\frac{1}{\tan \theta}\right) \omega_1, \quad \text{con } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (6.10)$$

el discriminante D_6 sería ahora un polinomio en ω_1 de grado 6, que sólo involucra las potencias pares de ω_1 , es decir

$$\tilde{D}_6 = \tilde{L}\omega_1^6 + \tilde{M}\omega_1^4 + \tilde{N}\omega_1^2 - 4F^3.$$

Por tanto el análisis se haría de forma de análoga y los resultados son similares. Además, haciendo los cálculos se encuentra también que $\tilde{L} > 0$.

Además puede verse que las rectas definidas con el cambio (6.2) y con el cambio (6.10) coinciden en los extremos, por lo que finalmente, para los casos 1

y 2 hemos obtenido curvas cerradas que delimitan las zonas en las que el sistema será estable o inestable. Obsérvense las figuras 5 y 6.

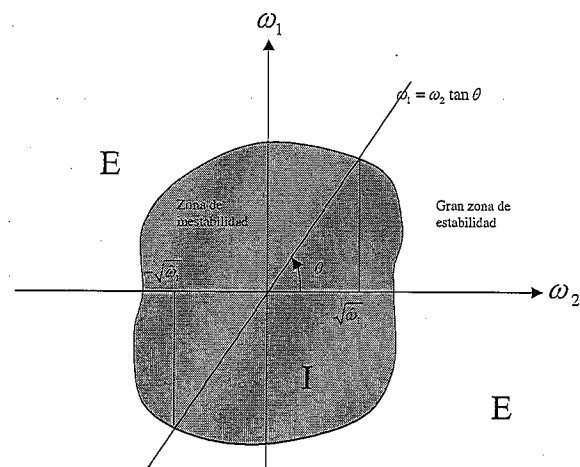


Figura 5

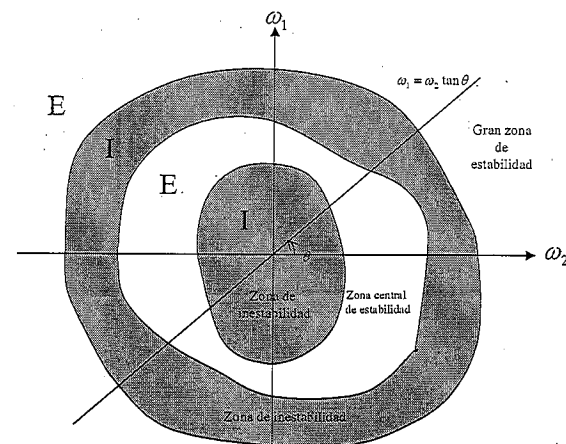


Figura 6

Nótese que las figuras 5 y 6 son casos extremos, en donde D_3 siempre tiene una raíz real positiva o tres reales positivas distintas, pero en realidad puede suceder algo más complicado, como se esboza en la figura 7 en el que se combinan los casos 1 y 2.

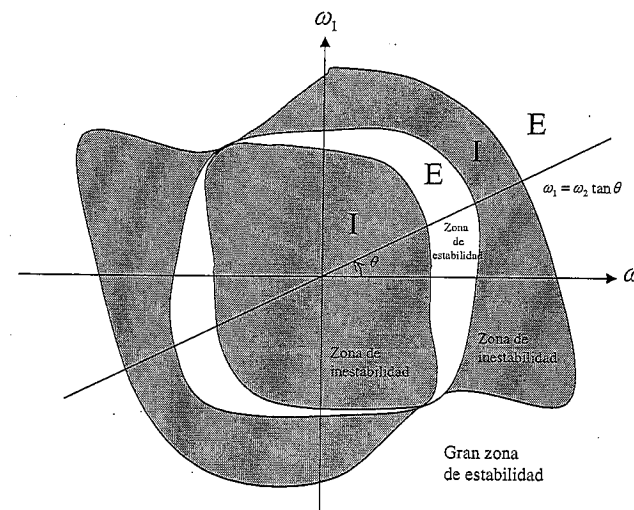


Figura 7

Todo el trabajo de esta tesis finalmente puede ser resumido como sigue.

Conclusión 49 *El plano de velocidades ω_1 y ω_2 (del fluido y del trompo respectivamente), del sistema Mecánico de Tipo Sobolev, restringido al caso en que la cavidad interior es un elipsoide de revolución, tendrá una gran zona de estabilidad no acotada.*

Capítulo 7

Conclusiones

Este trabajo de tesis constituye un paso más en el estudio de los sistemas mecánicos de tipo Sobolev. Este problema tiene una larga historia. Comenzó con el trabajo de S.L. Sobolev, a principios de 1940 [11], el cual, a pesar de ser relativamente poco conocido, ejerció gran influencia en el Análisis Funcional y en las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Posteriormente varios autores han contribuido al desarrollo de estos estudios, considerando los siguientes casos no tratados por Sobolev:

1. El líquido que llena la cavidad es viscoso.
2. En el trompo existen varias cavidades completamente llenas de fluido. Aquí se puede destacar el trabajo de M.Yu. Yurkin [14], quien encontró todas las geometrías para la frontera de la cavidad, que contiene el fluido para las cuales aparecen un número finito de zonas de inestabilidad, en el caso en que el líquido es ideal.

En su trabajo Sobolev considera el caso en que el trompo gira y el líquido se mantiene inmóvil, en este trabajo de tesis nosotros consideramos un problema más general, cuando el líquido también gira a una velocidad constante no necesariamente igual a la velocidad del trompo, incluso en direcciones opuestas. Los aportes fundamentales de esta tesis son:

- a) Para una amplia clase de cavidades, se logra acotar el grado de inestabilidad provocado por la aparición de valores propios no reales del operador A , usando la teoría de operadores sobre espacios de Pontriaguin.
- b) Se hace el estudio de un operador (el operador C) no estudiado por Sobolev, que obtuvo F. Olivé en su tesis de maestría [1]. Al considerar $\omega_1 = 0$, nuestras ecuaciones conciden con las de Sobolev.

- c) Se hace un análisis completo de la estabilidad (inestabilidad) provocada por el espectro discreto del operador asociado al sistema físico, en el caso en que la geometría es un elipsoide de revolución. En esta tesis se demuestra que existe un subespacio invariante de dimensión 3 en el espacio de fases, cuyo complemento ortogonal también es invariante y sobre el cual el operador es simétrico en sentido usual. Esto reduce el estudio de la estabilidad al estudio del polinomio característico de una matriz de orden 3.
- d) La idea fundamental entonces, fue la siguiente: el análisis de la estabilidad para todos los puntos (ω_1, ω_2) se realizó a través de rectas que pasan por el origen, esto permitió demostrar que en el caso del elipsoide de revolución existe una gran zona de estabilidad no acotada. Por este motivo, todo parece indicar que la geometría más estable, (para la cual aparecen menos regiones de inestabilidad) es un elipsoide de revolución.

Para concluir, señalemos que un problema abierto interesante sería extender el trabajo de M. Yu. Yurkin al caso en que también el líquido gira.

Bibliografía

- [1] Fidel Olivé Hernández, *Sobre la Estabilidad de un Sistema Mecánico de Tipo Sobolev*, 2003.
- [2] J.V. Ralston, *On Stationary Modes in Inviscid Rotating Fluids*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 44, 366-383 (1973).
- [3] V.P. Mijailov, *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, Moscú, Edit. Mir, 1978.
- [4] N.I. Akhiezer, I.M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Frederick Ungar Publishing Co., Vol. I, 1966.
- [5] J. Bognar, *Indefinite Inner Product Spaces*, Springer-Verlag, 1st. Ed. 1974.
- [6] Ju. L. Daleckii, M.G. Krein, *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*, Translations of Mathematical Monographs AMS, Vol. 43, 1974.
- [7] R. Felipe, A. Fraguera, *About the Stability of Sobolev System in the Case of Viscous Fluid*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 227, pp. 25-42, 1998.
- [8] R. Felipe, A. Bohigas, *Sobolev Systems with Several Ellipsoidal Cavities*, preprint of the ICTP, Trieste, Italy, 1992.
- [9] S.G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, Vol. 29, Translations of Mathematical Monographs (AMS), 1971.
- [10] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, 2nd. Ed. 1976.
- [11] S.L. Sobolev, *About the Movement of a Symmetric Top with a Cavity Filled with a Fluid*, Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. (3) (1960), 20-55.
- [12] V.I. Yudovich, *The Linearization Method in Hydrodynamical Stability Theory*, American Mathematical Society, 1989.
- [13] A. G. Kurosh, *Lectures on General Algebra*, Trad. K.A. Hirsch, New York: Chelsea, 1965.

- [14] M. Yu. Yurkin, *Stability of Small Oscillations of a Rotating Asymmetric Gyroscope Filled by a Fluid*, Journal of Doklady Mathematics, Vol. 58, No. 2, pp. 209-212, 1998.