



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

---

# Enfoque del método de Stein para la valuación de CDOs sintéticas

**T E S I S**

Que para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias**  
con Especialidad en  
**Probabilidad y Estadística**

Presenta

Oscar Ramses Cecilio Ayala

Director de Tesis:

Dr. Daniel Hernández Hernández

---

Autorización de la versión final



*Dedicado a*

*mi familia.*



# Agradecimientos

Agradezco sinceramente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT) por el apoyo y patrocinio brindado para realizar mis estudios de maestría y este proyecto de tesis.

Especialmente a mi tutor y director de tesis Dr. Daniel Hernández Hernández, por el tiempo, la paciencia y el soporte que me otorgó para llevar a cabo este trabajo. También agradezco a la Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska y al Dr. Erick Treviño Aguilar por revisar y corregir detalles de mi trabajo para su mejor comprensión.

Agradezco todos los apoyos recibidos por parte de familia; a mis padres y hermanos, amigos y profesores que a lo largo de estos dos años me enseñaron a superarme cada día a través de mi trabajo y que siempre estuvieron para darme ánimos cuando los necesitaba.

¡Muchas gracias a todos!



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Fundamentos del método de Stein</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.1.1. Marco teórico y Notación . . . . .	2
1.1.2. Medidas de probabilidad . . . . .	2
1.2. Aproximación Normal . . . . .	5
1.3. Idea general . . . . .	8
1.4. Transformación de cero sesgo . . . . .	10
1.4.1. Propiedades acerca de la transformación de cero sesgo . . . . .	11
1.4.2. Límites de estimación para la distribución normal . . . . .	15
1.4.3. Corrección de primer orden para la aproximación normal . . . . .	18
1.5. Apéndice: Cotas superiores para la distribución normal y $\mathbf{f}_h^{(k)}$ . . . . .	23
<b>2. Estructura y análisis de las obligaciones colateralizadas por deuda</b>	<b>29</b>
2.1. Introducción . . . . .	29
2.2. Derivados . . . . .	30
2.2.1. Derivados de uso común . . . . .	31
2.3. Riesgo de mercado . . . . .	33
2.4. Riesgo de crédito y contraparte . . . . .	34
2.5. Derivados de crédito . . . . .	36

2.5.1.	Swaps de incumplimiento crediticio . . . . .	37
2.5.2.	CDS sobre índices de cartera . . . . .	41
2.6.	Productos de correlación . . . . .	42
2.6.1.	Cestas por incumplimiento . . . . .	42
2.6.2.	Obligación colateralizada por deuda . . . . .	43
2.6.3.	CDOs sintéticas . . . . .	45
2.6.4.	Principios básicos para la valoración de tramos sintéticos de las CDOs . . . . .	46
2.6.5.	Valuación a la par de un tramo sintético de una CDO . . . . .	53
2.6.6.	CDOs y cópulas . . . . .	54
<b>3.</b>	<b>Método de Stein en la valuación de tramos de CDOs sintéticas</b>	<b>59</b>
3.1.	Introducción . . . . .	59
3.2.	Aproximación Normal de primer orden . . . . .	60
3.2.1.	Estimación de orden cero para la función indicadora . . . . .	61
3.2.2.	Estimación de primer orden de la función call . . . . .	65
3.3.	Aplicación a tramos de CDOs sintéticas . . . . .	67
3.3.1.	Approximación Normal . . . . .	68
3.3.2.	Valuación de CDOs sintéticas . . . . .	69
3.4.	Conclusión . . . . .	70
3.5.	Apéndice: Cotas superiores para $\mathbf{f}_h^{(k)}$ con las funciones indicadora y call . . . . .	71
	<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>



# Introducción

En el Teorema Central del Límite (TCL) es uno de los temas principales en la teoría de probabilidad. En esencia establece que una aproximación normal se puede aplicar a la suma de variables aleatorias independientes y varianzas  $\sigma^2 > 0$  finita.

En 1972, Charles Stein en [24], propuso un enfoque totalmente diferente para probar convergencia a la normalidad. Sin embargo, las ideas presentadas en [24] permitieron trabajar en aproximaciones de otras variables aleatorias con distribuciones distintas a la normal, como la Poisson, la Binomial, etc. Stein se basa en la caracterización de la distribución normal  $N(0, \sigma^2)$ , ésta establece que  $W \sim N(0, \sigma^2)$  si y sólo si

$$\mathbb{E} [Wf(W) - \sigma^2 f'(W)] = 0$$

para cualquier función  $f$  absolutamente continua. Dada una función  $h$ , se define  $\Phi_\sigma(h) := \mathbb{E} [h(Z)]$  donde  $Z \sim N(0, \sigma^2)$ . Entonces, es natural que dada una función  $h$  se defina la ecuación (ecuación de Stein)

$$\omega f(\omega) - \sigma^2 f'(\omega) = h(\omega) - \Phi_\sigma(h).$$

Al resolver para  $f$ , se puede obtener una cota para  $\mathbb{E} [h(W)] - \Phi_\sigma(h)$ . En particular si  $W$  es la suma de variables aleatorias independientes,  $\mathbb{E} [h(W)]$  puede ser aproximada por  $\Phi_\sigma(h)$ .

El trabajo está dividido en 3 capítulos cuya estructura es la siguiente. En el Capítulo 1 se dará una explicación detallada de los fundamentos del método de Stein para el caso Normal, donde se define una transformación de cero sesgo para ajustar distribuciones no normales a una distribución normal. Abordaremos un caso particular donde  $W$  es una suma de variables aleatorias independientes, la función  $h$  es absolutamente continua y se aproxima  $\mathbb{E} [h(W)]$  con  $\Phi_{\sigma_W}(h)$ .

También se mejora esta aproximación con un término de corrección explícito tal que el error después de la corrección es de orden  $O(1/n)$  incluso en el caso asimétrico. Estos resultados son presentados en [8].

El objetivo del Capítulo 2, es desarrollar la teoría financiera de los derivados de crédito y enfocarnos en el caso particular de las CDOs sintéticas; definición, etapas y valuación. Los conceptos y definiciones que mencionamos en éste capítulo fueron estudiados de los textos de O'Kane [18], Mounfield [17], McDonald [16] y Hull [12].

En el Capítulo 3, se propone el método de aproximación de Stein explicado en el Capítulo 1 para la valuación de las CDOs sintéticas. En la valuación de un tramo de CDO sintética el término principal a estimar es  $\mathbb{E}[(l(t) - k)^+]$ , donde  $k$  es constante y

$$l(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (1 - R_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$$

es la pérdida porcentual del portafolio de referencia al tiempo  $t$ . Aquí  $\tau_i$  es el tiempo de incumplimiento del deudor  $i$ , y  $R_i$  su tasa de recuperación.

El propósito de este último capítulo es generar un análisis para el caso particular de la aproximación normal y el término de corrección desarrollados en el Capítulo 1 considerando la función call  $h(x) = (x - k)^+$  y expresar el mecanismo de valuación de tramos de CDOs sintéticas.

# Capítulo 1

## Fundamentos del método de Stein

### 1.1. Introducción

El método de Stein es una forma de obtener estimaciones explícitas de la exactitud de la aproximación de una distribución por otra. Esto se logra comparando las esperanzas, como indica el título de Stein en [25], *Approximate Computation of Expectations*. Se calcula un límite superior en la diferencia entre las esperanzas de cualquiera, dentro de una familia de funciones de prueba bajo las dos distribuciones; cada familia de funciones de prueba determina una métrica asociada. Cualquiera de estas cotas superiores obtenidas corresponde a la distancia entre las dos distribuciones con respecto a la métrica asociada.

En términos generales, el método de Stein tiene dos componentes: la primer componente es un marco para convertir el problema de delimitar el error en la aproximación de una distribución de interés por otra distribución bien entendida (por ejemplo, la normal o la Poisson) en un problema de limitar la esperanza de un cierto funcional de la variable aleatoria de interés. La segunda componente del método de Stein es una colección de técnicas para acotar la esperanza que aparece en el primer componente.

El propósito de este capítulo es intentar esclarecer el funcionamiento de estas dos componentes a un nivel básico, con el fin de ayudar a presentar el método de Stein de una manera más accesible para los no iniciados. Se espera capturar los conceptos fundamentales en un lenguaje uniforme

para facilitar la entrada a la vasta literatura sobre el método de Stein y sus aplicaciones.

Iniciaremos este capítulo con una discusión de las bases necesarias y la notación que utilizaremos a lo largo de este trabajo de tesis.

### 1.1.1. Marco teórico y Notación

Este documento está dirigido a una audiencia que ha visto la teoría de la probabilidad al nivel de maestría en el CIMAT. No dependemos en gran medida de los conceptos teóricos de teoría de la medida, pero la comprensión de conceptos como las  $\sigma$ -álgebras es útil. Además, los conceptos básicos de la teoría de cadenas de Markov, como la reversibilidad, se asumen.

Para un conjunto  $A$ , escribiremos  $\mathbb{1}_{(\cdot \in A)}$  para denotar la función indicadora que es uno en  $A$ , y cero en otro caso. Escribimos  $g(n) \asymp f(n)$  si  $g(n)/f(n)$  converge a una constante positiva cuando  $n \rightarrow \infty$ , y  $g(n) = O(f(n))$  si  $g(n) \cdot f(n)$  es acotado cuando  $n \rightarrow \infty$ . Para una función  $f$  con dominio  $D$ , denotamos  $\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$ .

Dado que el método de Stein se refiere principalmente a limitar la distancia entre las distribuciones de probabilidad en una métrica dada, ahora discutimos las métricas que usamos.

### 1.1.2. Medidas de probabilidad

Para dos medidas de probabilidad  $\mu$  y  $\nu$ , la métrica que asociamos es de la forma

$$d_{\mathcal{H}}(\mu, \nu) = \sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \int h(x) d\mu(x) - \int h(x) d\nu(x) \right|, \quad (1.1)$$

donde  $\mathcal{H}$  es una familia de funciones “prueba”. Para dos variables aleatorias  $W$  y  $Z$ , con funciones de distribución  $\mu$  y  $\nu$  respectivamente, escribiremos  $d_{\mathcal{H}}(W, Z)$  en vez de  $d_{\mathcal{H}}(\mu, \nu)$ . En este caso,

$$d_{\mathcal{H}}(\mu, \nu) = \sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbb{E}[h(W)] - \mathbb{E}[h(Z)]|.$$

Como ejemplos de métricas tenemos:

1. Tomando  $\mathcal{H} = \{\mathbb{1}_{(\cdot \leq x)} : x \in \mathbb{R}\}$  en (1.1), obtenemos la métrica de *Kolmogorov*, la cual denotamos por  $d_K$ . La métrica de Kolmogorov es la distancia máxima entre funciones de dis-

tribución, entonces una sucesión de distribuciones que converge a una distribución fija en esta métrica implica convergencia débil (convergencia en distribución).

2. Tomando  $\mathcal{H} = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : |h(x) - h(y)| \leq |x - y|\}$  en (1.1), obtenemos la métrica de *Wasserstein*, la cual denotamos por  $d_W$ . La métrica de Wasserstein es una métrica común que ocurre en muchos contextos y es la métrica principal que utilizamos para la aproximación por distribuciones continuas.
3. Tomando  $\mathcal{H} = \{\mathbb{1}_{(\cdot \in A)} : A \in \text{Borel}(\mathbb{R})\}$  en (1.1), obtenemos la métrica de *variación total*, la cual denotamos por  $d_{TV}$ . Se utiliza la métrica de variación total para la aproximación por distribuciones discretas.

**Proposición 1.1.1.** *Con las notaciones de las métricas anteriores, tenemos las siguientes relaciones:*

1. Para variables aleatorias  $W$  y  $Z$ ,  $d_K(W, Z) \leq d_{TV}(W, Z)$ .
2. Si la variable aleatoria  $Z$  tiene densidad con respecto a la medida de Lebesgue acotada por  $C$ , entonces para cualquier variable aleatoria  $W$ ,

$$d_K(W, Z) \leq \sqrt{2Cd_W(W, Z)}.$$

3. Para variables aleatorias  $W$  y  $Z$  que toman valores en un espacio discreto  $\Omega$ ,

$$d_{TV}(W, Z) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |\mathbb{P}(W = \omega) - \mathbb{P}(Z = \omega)|.$$

**Demostración:** El primer punto se sigue de que el supremo en el lado derecho de la desigualdad es sobre un conjunto mayor. Para el segundo punto, consideramos las funciones  $h_x(\omega) = \mathbb{1}_{(\omega \leq x)}$ , y el suavizamiento  $h_{x,\varepsilon}(\omega)$  definido para ser uno si  $\omega \leq x$ , cero si  $\omega \geq x + \varepsilon$ , y lineal entre  $x$  y  $x + \varepsilon$ .

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h_x(W)] - \mathbb{E}[h_x(Z)] &= \mathbb{E}[h_x(W)] - \mathbb{E}[h_{x,\varepsilon}(Z)] + \mathbb{E}[h_{x,\varepsilon}(Z)] - \mathbb{E}[h_x(Z)] \\
&\leq \mathbb{E}[h_x(W)] - \mathbb{E}[h_{x,\varepsilon}(Z)] + C\varepsilon/2 \\
&\leq \mathbb{E}[h_{x,\varepsilon}(W)] - \mathbb{E}[h_{x,\varepsilon}(Z)] + C\varepsilon/2 \\
&\leq d_W(W, Z)/\varepsilon + C\varepsilon/2,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que la función  $\varepsilon h_{x,\varepsilon}(\cdot)$  pertenece a la familia de funciones prueba de la métrica de Wasserstein.

Tomando  $\varepsilon = \sqrt{2d_W(W, Z)/C}$ , demuestra la mitad de la desigualdad deseada y un argumento similar produce la otra mitad.

Por último, supongamos que  $W$  y  $Z$  toman valores en un espacio discreto  $\Omega$ . Consideremos el conjunto  $B := \{\omega \in \Omega : \mathbb{P}(W = \omega) \geq \mathbb{P}(Z = \omega)\}$  y sea  $A \subset \Omega$ . Entonces

$$\mathbb{P}(W \in A) - \mathbb{P}(Z \in A) \leq \mathbb{P}(W \in A \cap B) - \mathbb{P}(Z \in A \cap B) \leq \mathbb{P}(W \in B) - \mathbb{P}(Z \in B). \quad (1.2)$$

Por un razonamiento análogo,

$$\mathbb{P}(Z \in A) - \mathbb{P}(W \in A) \leq \mathbb{P}(Z \in B^c) - \mathbb{P}(W \in B^c). \quad (1.3)$$

Observemos que

$$\mathbb{P}(W \in B) - \mathbb{P}(Z \in B) + \mathbb{P}(Z \in B) + \mathbb{P}(W \in B^c) = 1$$

y

$$\mathbb{P}(Z \in B^c) - \mathbb{P}(W \in B^c) + \mathbb{P}(W \in B^c) + \mathbb{P}(Z \in B) = 1.$$

Entonces, los términos en los lados derechos de (1.2) y (1.3) son el mismo. Así, cuando tomamos  $A = B$  (o  $B^c$ ),  $|\mathbb{P}(W \in A) - \mathbb{P}(Z \in A)|$  es igual a su cota superior. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
d_{TV}(W, Z) &= \frac{1}{2} [\mathbb{P}(W \in B) - \mathbb{P}(Z \in B) + \mathbb{P}(Z \in B^c) - \mathbb{P}(W \in B^c)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |\mathbb{P}(W = \omega) - \mathbb{P}(Z = \omega)|. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Observación 1.1.2.** *La demostración del tercer punto en la Proposición 1.1.1 también muestra que*

$$d_{TV}(W, Z) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in B} [\mathbb{P}(W = \omega) - \mathbb{P}(Z = \omega)],$$

*la cuál es una identidad útil.*

Debido a su importancia en nuestro marco, reiteramos la implicación del segundo punto en la Proposición 1.1.1 de que una aproximación en la métrica de Wasserstein entre una distribución dada y la distribución normal o exponencial produce inmediatamente una aproximación en la métrica de Kolmogorov.

## 1.2. Aproximación Normal

El objetivo principal de esta sección es obtener un límite para el error en la aproximación normal a la distribución de una variable aleatoria en un entorno bastante abstracto.

El método de Stein se basa en la siguiente caracterización de la distribución normal  $N(0, \sigma^2)$  que introduce Stein en [24].

**Lema 1.2.1.** *Si  $W$  tiene una distribución normal  $N(0, \sigma^2)$ , entonces*

$$\mathbb{E}[W f(W)] = \sigma^2 \mathbb{E}[f'(W)], \quad (1.4)$$

*para toda función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  absolutamente continua tal que  $\mathbb{E}|f'(W)| < \infty$ . Recíprocamente, si se cumple (1.4) para toda función  $f$  que sea acotada, continuamente diferenciable y tal que  $\mathbb{E}|f'(W)| < \infty$ , entonces  $W$  tiene una distribución normal  $N(0, \sigma^2)$ .*

La igualdad (1.4) es útil para caracterizar una distribución normal de media cero. Como veremos más adelante, esto es posible considerando métricas donde tomamos una familia de funciones prueba de interés.

Antes de probar el Lema 1.2.1 presentamos el siguiente lema, pues usaremos la identidad (1.5).

**Lema 1.2.2.** Si  $Z \sim N(0, \sigma^2)$ . Para un valor fijo  $x \in \mathbb{R}$  y  $N_\sigma(x) := \mathbb{P}(Z \leq x)$ , la única solución acotada de la ecuación

$$\omega f(\omega) - \sigma^2 f'(\omega) = \mathbb{1}_{(\omega \leq x)} - N_\sigma(x), \quad (1.5)$$

está dada por  $f(\omega) := f_x(\omega)$ , donde

$$f_x(\omega) = \begin{cases} -\sqrt{2\pi} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma} N_\sigma(\omega) [1 - N_\sigma(x)] & \text{si } \omega \leq x, \\ -\sqrt{2\pi} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma} N_\sigma(x) [1 - N_\sigma(\omega)] & \text{si } \omega > x. \end{cases} \quad (1.6)$$

**Demostración:** Multiplicando ambos lados de (1.5) por el factor  $e^{-\omega^2/2\sigma^2}$  tenemos,

$$\frac{d}{d\omega} \left( -\sigma^2 e^{-\omega^2/2\sigma^2} f(\omega) \right) = e^{-\omega^2/2\sigma^2} (\mathbb{1}_{(\omega \leq x)} - N_\sigma(x)).$$

Integrando y considerando la solución homogénea, se tiene que

$$f_x(\omega) = -\frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\omega} (\mathbb{1}_{(t \leq x)} - N_\sigma(x)) e^{-t^2/2\sigma^2} dt - \frac{ce^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2},$$

es la solución general de (1.5) para alguna constante  $c$ . Considerando la solución con  $c = 0$ ,

$$\begin{aligned} f_x(\omega) &= -\frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\omega} (\mathbb{1}_{(t \leq x)} - N_\sigma(x)) e^{-t^2/2\sigma^2} dt \\ &= \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{\omega}^{\infty} (\mathbb{1}_{(t \leq x)} - N_\sigma(x)) e^{-t^2/2\sigma^2} dt \\ &= \begin{cases} -\frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} [1 - N_\sigma(x)] \int_{-\infty}^{\omega} e^{-t^2/2\sigma^2} dt & \text{si } \omega \leq x, \\ \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} [-N_\sigma(x)] \int_{\omega}^{\infty} e^{-t^2/2\sigma^2} dt & \text{si } \omega > x, \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} [1 - N_\sigma(x)] \sigma \sqrt{2\pi} N_\sigma(\omega) & \text{si } \omega \leq x, \\ -\frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} N_\sigma(x) \sigma \sqrt{2\pi} [1 - N_\sigma(\omega)] & \text{si } \omega > x, \end{cases} \end{aligned}$$

que es (1.6). Para mostrar que (1.6) es acotada, usamos la siguiente desigualdad que se incluye en el Apéndice de este capítulo como Lema 1.5.1,

$$1 - N_\sigma(\omega) \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sigma}{\omega \sqrt{2\pi}} \right\} e^{-\omega^2/2\sigma^2}, \quad \omega > 0,$$



obteniendo que  $\|f_x\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}}$ .

La solución general de la ecuación (1.5) está dada por  $f_x(\omega)$  más un término  $ce^{\omega^2/2\sigma^2}$  de la solución a la ecuación homogénea. Claramente, la única solución acotada se obtiene tomando  $c = 0$ .

■

***Demostración del Lema 1.2.1:*** Primero demostraremos la primer parte del Lema 1.2.1. Sea  $Z$  una variable aleatoria con distribución normal  $N(0, \sigma^2)$  y sea  $f$  una función absolutamente continua tal que  $\mathbb{E}|f'(Z)| < \infty$ . Entonces tenemos el siguiente cálculo (justificado por el teorema de Fubini) que es básicamente integración por partes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sigma^2 f'(Z)] &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2\sigma^2} f'(t) dt \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f'(t) \int_t^\infty \frac{\omega}{\sigma^2} e^{-\omega^2/2\sigma^2} d\omega dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f'(t) \int_{-\infty}^t \left(-\frac{\omega}{\sigma^2} e^{-\omega^2/2\sigma^2}\right) d\omega dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \omega e^{-\omega^2/2\sigma^2} \left[ \int_0^\omega f'(t) dt \right] d\omega + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 (-\omega) e^{-\omega^2/2\sigma^2} \left[ \int_\omega^0 f'(t) dt \right] d\omega \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \omega [f(\omega) - f(0)] e^{-\omega^2/2\sigma^2} d\omega \\
&= \mathbb{E}[Zf(Z)].
\end{aligned}$$

Para la segunda parte del lema, supongamos que  $W$  es una variable aleatoria tal que  $\mathbb{E}[Wf(W) - \sigma^2 f'(W)] = 0$  para toda función  $f$  absolutamente continua tal que  $\|f'\| < \infty$ . La función  $f_x$  que satisface (1.5) es una función acotada, continua y continuamente diferenciable tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$0 = \mathbb{E}[Wf_x(W) - \sigma^2 f'_x(W)] = \mathbb{P}(W \leq x) - N_\sigma(x),$$

lo cual implica que  $W$  tiene distribución normal  $N(0, \sigma^2)$ . ■

El Lema 1.2.2 tiene como consecuencia directa el siguiente corolario.

**Corolario 1.2.3.** *Si  $f_x$  es como la definimos en el Lema 1.2.2, entonces para cualquier variable aleatoria  $W$ ,*

$$|\mathbb{P}(W \leq x) - N_\sigma(x)| = |\mathbb{E}[W f_x(W) - \sigma^2 f'_x(W)]|. \quad (1.7)$$

Es importante notar que el Lema 1.2.1 sugiere que (1.7) puede ser una igualdad muy útil. Esto es, el lado izquierdo de (1.7) es cero para todo  $x \in \mathbb{R}$  si y sólo si,  $W$  tiene distribución normal  $N(0, \sigma^2)$ . El Lema 1.2.1 indica que el lado derecho de (1.7) también tiene esta propiedad.

La estrategia para delimitar la distancia máxima entre la función de distribución de una variable aleatoria  $W$  y la de la normal  $N(0, \sigma^2)$  es ahora bastante obvia: Se desea acotar  $\mathbb{E}[W f_x(W) - \sigma^2 f'_x(W)]$ , con  $f_x$  solución de (1.5).

### 1.3. Idea general

Recordemos que para dos variables aleatorias  $W$  y  $Z$ , y alguna familia de funciones “prueba”  $\mathcal{H}$ , tenemos la métrica

$$d_{\mathcal{H}}(W, Z) = \sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbb{E}[h(W)] - \mathbb{E}[h(Z)]|. \quad (1.8)$$

Notemos que tal métrica sólo depende de las distribuciones de  $W$  y  $Z$ . Para  $h \in \mathcal{H}$ , sea  $f_h$  la solución de

$$\omega f_h(\omega) - \sigma^2 f'_h(\omega) = h(\omega) - \Phi_\sigma(h)$$

donde  $\Phi_\sigma(h) := \mathbb{E}(h(Z))$  y  $Z \sim N(0, \sigma^2)$ . El siguiente resultado se sigue de la identidad anterior.

**Proposición 1.3.1.** *Si  $W$  es una variable aleatoria y  $Z$  tiene la distribución normal  $N(0, \sigma^2)$ , entonces*

$$d_{\mathcal{H}}(W, Z) = \sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbb{E}[W f_h(W) - \sigma^2 f'_h(W)]|. \quad (1.9)$$

La idea principal de este resultado es acotar el lado derecho de (1.9) usando la estructura de  $W$  y propiedades de las soluciones  $f_h$  en cada  $h$ . Las propiedades de las soluciones  $f_h$  las enunciamos en el siguiente lema citado en [5]; las demostraciones detalladas de (1.12) y (1.13) son aplazadas al Apéndice ya que son algo técnicas.

**Lema 1.3.2.** *Sea  $f_h$  la solución de*

$$\omega f_h(\omega) - \sigma^2 f_h'(\omega) = h(\omega) - \Phi_\sigma(h), \quad (1.10)$$

la cual está dada por

$$\begin{aligned} f_h(\omega) &= \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{\omega}^{\infty} (h(t) - \Phi_\sigma(h)) e^{-t^2/2\sigma^2} dt \\ &= -\frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\omega} (h(t) - \Phi_\sigma(h)) e^{-t^2/2\sigma^2} dt. \end{aligned} \quad (1.11)$$

1. Si  $h$  es acotada, entonces

$$\|f_h\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}} \|h(\cdot) - \Phi_\sigma(h)\|, \quad y \quad \|f_h'\| \leq \frac{2}{\sigma^2} \|h(\cdot) - \Phi_\sigma(h)\|. \quad (1.12)$$

2. Si  $h$  es absolutamente continua, entonces

$$\|f_h\| \leq 2 \|h'\|, \quad \|f_h'\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \|h'\|, \quad y \quad \|f_h''\| \leq \frac{2}{\sigma^2} \|h'\|. \quad (1.13)$$

**Demostración:** Multiplicando ambos lados de (1.10) por el factor  $e^{-\omega^2/2\sigma^2}$  tenemos,

$$\frac{d}{d\omega} \left( -\sigma^2 e^{-\omega^2/2\sigma^2} f(\omega) \right) = e^{-\omega^2/2\sigma^2} (h(\omega) - \Phi_\sigma(h)).$$

Integrando y considerando la solución homogénea, se tiene que

$$f_h(\omega) = -\frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\omega} (h(t) - \Phi_\sigma(h)) e^{-t^2/2\sigma^2} dt - \frac{c e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2},$$

es la solución general de (1.10) para alguna constante  $c$ . Considerando la solución con  $c = 0$ ,

$$\begin{aligned} f_h(\omega) &= -\frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\omega} (h(t) - \Phi_\sigma(h)) e^{-t^2/2\sigma^2} dt \\ &= \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{\omega}^{\infty} (h(t) - \Phi_\sigma(h)) e^{-t^2/2\sigma^2} dt. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

La conveniencia de tratar con el lado derecho de (1.9) es que implica sólo una variable aleatoria  $W$ , en lugar de las dos variables  $W$  y  $Z$  que se involucran en el lado izquierdo. Esta idea simple pero profunda dio nacimiento al campo del método de Stein, que sigue vivo como campo activo de investigación dentro de la teoría de la probabilidad después de cuarenta y cinco años de su creación.

## 1.4. Transformación de cero sesgo

Stein [24] observó que una variable  $Z$  sigue una distribución normal  $N(0, \sigma^2)$  si y sólo si

$$\mathbb{E}[Zf(Z)] = \sigma^2 \mathbb{E}[f'(Z)] \quad (1.14)$$

para cualquier función  $f$  absolutamente continua tal que  $\mathbb{E}|f'(Z)| < \infty$  (Lema 1.2.1). En un contexto más general, Goldstein y Reinert [10] definieron, para cualquier variable aleatoria  $X$  de media cero con segundo momento finito, la distribución de cero sesgo como sigue.

**Definición 1.4.1** (Goldstein y Reinert). *Sea  $X$  una variable aleatoria de media cero y varianza finita  $\sigma^2 > 0$ . Decimos que una variable aleatoria  $X^*$  tiene distribución  $X$ -cero sesgo si*

$$\mathbb{E}[Xf(X)] = \sigma^2 \mathbb{E}[f'(X^*)] \quad (1.15)$$

para toda función  $f$  absolutamente continua tal que (1.15) está bien definido.

Es conveniente considerar (1.15) como una transformación que mapea la distribución de  $X$  a la de  $X^*$ . De hecho, la caracterización en el Lema 1.2.1 puede ser reformulada diciendo que la distribución normal es punto fijo de la transformación de cero sesgo. Existe la unicidad del punto fijo de la transformación de cero sesgo, es decir, el hecho de que  $X^*$  tenga la misma distribución que  $X$  sólo cuando  $X$  es normal, lo que proporciona una razón probabilística para una aproximación normal a retener.

La ecuación de Stein para la distribución normal  $N(0, \sigma^2)$  es

$$xf_h(x) - \sigma^2 f'_h(x) = h(x) - \Phi_\sigma(h) \quad (1.16)$$

donde  $\Phi_\sigma(h) = \mathbb{E}(h(Z))$  con  $Z \sim N(0, \sigma^2)$ . Combinando (1.15) y (1.16), el error de la aproximación normal de  $\mathbb{E}(h(X))$  es

$$\mathbb{E}[h(X)] - \Phi_\sigma(h) = \mathbb{E}[Xf_h(X) - \sigma^2 f'_h(X)] = \sigma^2 \mathbb{E}[f'_h(X^*) - f'_h(X)] \quad (1.17)$$

donde  $f_h$  es la solución de (1.16) mencionada en el Lema 1.3.2.

### 1.4.1. Propiedades acerca de la transformación de cero sesgo

La transformación de cero sesgo en algún sentido ajusta las distribuciones no normales a una distribución normal, la transformación las mueve más cerca de la normalidad. Por ejemplo, sea  $\xi \in \{0, 1\}$  una variable aleatoria Bernoulli con probabilidad de éxito  $p \in (0, 1)$ . Sea  $X = \xi - p$  una variable aleatoria de media cero y varianza  $\sigma^2 = p(1 - p)$ . Entonces, sustituyendo en el lado izquierdo de (1.15) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Xf(X)] &= \mathbb{E}[(\xi - p)f(\xi - p)] \\
 &= p(1 - p)f(1 - p) - (1 - p)pf(-p) \\
 &= \sigma^2[f(1 - p) - f(-p)] \\
 &= \sigma^2 \int_{-p}^{1-p} f'(u) du \\
 &= \sigma^2 \mathbb{E}[f'(U)],
 \end{aligned}$$

con  $U \sim U(-p, 1 - p)$ . Entonces

$$(\xi - p)^* \stackrel{d}{=} U, \quad \text{donde } U \sim U(-p, 1 - p).$$

Como lo sugiere el ejemplo de Bernoulli, la siguiente proposición muestra que la distribución de sesgo cero existe y es absolutamente continua para cada  $X$  que tiene una media de cero y varianza positiva finita.

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $X$  una variable aleatoria de media cero y varianza finita  $\sigma^2 > 0$ . Entonces, existe una única distribución para la variable aleatoria  $X^*$  que satisface*

$$\sigma^2 \mathbb{E}[f'(X^*)] = \mathbb{E}[Xf(X)] \tag{1.18}$$

para toda función  $f$  absolutamente continua tal que  $\mathbb{E}|Xf(X)| < \infty$ .

Además, la distribución de  $X^*$  es absolutamente continua con densidad

$$p^*(x) = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X>x)}] / \sigma^2 = -\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X\leq x)}] / \sigma^2 \tag{1.19}$$

y función de distribución

$$G^*(x) = \mathbb{E} [X (X - x) \mathbb{1}_{(X \leq x)}] / \sigma^2. \quad (1.20)$$

**Demostración:** Primeramente, por lo que se refiere con (1.19), notemos que la segunda igualdad se sigue de que  $\mathbb{E}(X) = 0$ . También se sigue que  $p^*(x)$  es no negativa, en efecto, usando la primer igualdad cuando  $x \geq 0$ , y la segunda cuando  $x < 0$ .

Para probar que podemos escribir  $\mathbb{E}[Xf(X)]$  como la esperanza del lado izquierdo de (1.18), en términos de una variable aleatoria  $X^*$  absolutamente continua con densidad  $p^*(x)$ , tomamos  $f(x) = \int_0^x g(u) du$ , donde  $g$  es una función no negativa integrable en dominios compáctos.

Entonces, por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \sigma^2 \int_0^\infty f'(u) \frac{\mathbb{E} [X \mathbb{1}_{(X > u)}]}{\sigma^2} du &= \int_0^\infty g(u) \mathbb{E} [X \mathbb{1}_{(X > u)}] du \\ &= \mathbb{E} \left[ X \int_0^\infty g(u) \mathbb{1}_{(X > u)} du \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ X \int_0^{X \vee 0} g(u) du \right] \\ &= \mathbb{E} [Xf(X) \mathbb{1}_{(X \geq 0)}]. \end{aligned}$$

Con un argumento análogo sobre  $(-\infty, 0]$  se obtiene que

$$\sigma^2 \int_{-\infty}^\infty f'(u) \frac{\mathbb{E} [X \mathbb{1}_{(X > u)}]}{\sigma^2} du = \mathbb{E} [Xf(X)], \quad (1.21)$$

donde ambas partes pueden ser  $+\infty$ . Si  $f(x) = \int_0^x g(u) du$  con  $\mathbb{E} |Xf(X)| < \infty$ , tomando la diferencia de las partes positiva y negativa de  $g$ , muestra que (1.21) se sigue satisfaciendo sobre esta clase más grande de funciones, como lo hace para  $f$  que cumple las condiciones del teorema escribiendo  $f(x) = \int_0^x g(u) du + f(0)$  y usando que  $X$  es de media cero. Tomando  $f(x) = x$  se tiene que  $p^*(x)$  integra uno y por lo tanto es una densidad, de donde el lado izquierdo de (1.21) puede ser escrito como  $\sigma^2 \mathbb{E} [f'(X^*)]$  para  $X^*$  con densidad  $p^*(x) = \mathbb{E} [X \mathbb{1}_{(X > x)}] / \sigma^2$ . La distribución de  $X^*$  claramente es única, en efecto, como  $\sigma^2 \mathbb{E} [f'(X^*)] = \mathbb{E} [Xf(X)] = \sigma^2 \mathbb{E} [f'(Y^*)]$  para toda  $f$  continuamente diferenciable con soporte compácto, entonces  $X^* \stackrel{d}{=} Y^*$ .

Integrando la densidad  $p^*$  para obtener la distribución  $G^*$ , tenemos

$$\begin{aligned} G^*(x) &= -\frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left[ X \int_{-\infty}^x \mathbb{1}_{(X \leq u)} du \right] \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left[ X \int_X^x du \mathbb{1}_{(X \leq x)} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} [X(X-x) \mathbb{1}_{(X \leq x)}]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La ecuación (1.18) también especifica una relación entre los momentos de  $X$  y  $X^*$ . Una de las más útiles de estas relaciones es la que resulta de aplicar (1.18) con  $f(x) = \left[\frac{1}{k+1}\right] |x|^{k+1}$ , para la cual  $f'(x) = |x|^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [ |X^*|^k ] &= \mathbb{E} [ f'(X^*) ] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} [ X f(X) ] \\ &= \frac{\mathbb{E} [ |X|^{k+2} ]}{\sigma^2 (k+1)}. \end{aligned}$$

Si tomamos  $f(x) = \left[\frac{1}{k+1}\right] x^{k+1}$ , entonces,  $f'(x) = x^k$ , obteniendo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [ (X^*)^k ] &= \mathbb{E} [ f'(X^*) ] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} [ X f(X) ] \\ &= \frac{\mathbb{E} [ X^{k+2} ]}{\sigma^2 (k+1)}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Recuerde que nos interesa la diferencia  $X - X^*$ . Las estimaciones son fáciles cuando  $X$  y  $X^*$  son independientes, en este caso utilizamos un término simétrico  $X^s$  como se observa en el siguiente resultado.

**Proposición 1.4.3.** *Supongamos que  $X$  y  $X^*$  son independientes. Sea  $f$  una función par localmente integrable y  $F$  la función primitiva de  $f$  definida por  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Entonces*

$$\mathbb{E} [ f(X^* - X) ] = \frac{1}{2\sigma^2} \mathbb{E} [ X^s F(X^s) ], \tag{1.23}$$

donde  $X^s = X - \tilde{X}$  y  $\tilde{X}$  es una copia independiente de  $X$ . En particular

$$\mathbb{E}[|X^* - X|] = \frac{1}{4\sigma^2} \mathbb{E}[|X^s|^3], \quad \mathbb{E}[|X^* - X|^k] = \frac{1}{2(k+1)\sigma^2} \mathbb{E}[|X^s|^{k+2}]. \quad (1.24)$$

**Demostración:** Por definición, para cualquier  $K \in \mathbb{R}$ ,

$$\sigma^2 \mathbb{E}[f(X^* - K)] = \mathbb{E}[XF(X - K)].$$

Como  $X^*$  es independiente de  $X$ , si  $\tilde{X}$  es una copia independiente de  $X$ , entonces

$$\mathbb{E}[f(X^* - X)] = \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}[\tilde{X}F(\tilde{X} - X)].$$

Como  $f$  es una función par,  $F$  es una función impar, y por lo tanto

$$\mathbb{E}[\tilde{X}F(\tilde{X} - X)] = \mathbb{E}[XF(X - \tilde{X})] = -\mathbb{E}[XF(\tilde{X} - X)],$$

lo cual implica (1.23). Para obtener (1.24), tomamos  $f(x) = |x|^k$ , para la cual  $F(x) = \text{sgn}(x) \frac{|x|^{k+1}}{k+1}$ .

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X^* - X|^k] &= \frac{1}{2\sigma^2} \mathbb{E}[X^s F(X^s)] \\ &= \frac{1}{2(k+1)\sigma^2} \mathbb{E}[|X^s| \cdot |X^s|^{k+1}] = \frac{1}{2(k+1)\sigma^2} \mathbb{E}[|X^s|^{k+2}]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

En particular, cuando  $k = 1$ ,  $\mathbb{E}[|X^* - X|] = \frac{1}{4\sigma^2} \mathbb{E}[|X^s|^3]$ . ■

La Proposición 1.4.3 ofrece una manera de estimar  $|X^* - X|$ . Cálculos similares producen estimaciones para  $\mathbb{P}(|X^* - X| \leq \epsilon)$ , dando una medida de la diferencia entre  $X$  y  $X^*$ .

**Corolario 1.4.4.** *Supongamos que  $X$  y  $X^*$  son independientes. Entonces, para cualquier  $\epsilon > 0$ ,*

$$\mathbb{P}(|X^* - X| \leq \epsilon) \leq \frac{\epsilon}{\sigma\sqrt{2}} \wedge 1, \quad \mathbb{P}(|X^* - X| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{4\sigma^2\epsilon} \mathbb{E}[|X^s|^3].$$

**Demostración:** Observemos que la segunda desigualdad es inmediata por la desigualdad de Markov,

$$\mathbb{P}(|X^* - X| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}[|X^* - X|] = \frac{1}{4\sigma^2\epsilon} \mathbb{E}[|X^s|^3].$$



Para obtener la primer desigualdad, aplicamos la Proposición 1.4.3 con la función par  $f(x) = \mathbb{1}_{(|x| \leq \varepsilon)}$ , para la cual  $F(x) = \operatorname{sgn}(x)(|x| \wedge \varepsilon)$ . Entonces,

$$\mathbb{P}(|X^* - X| \leq \varepsilon) = \frac{1}{2\sigma^2} \mathbb{E}[X^s F(X^s)] = \frac{1}{2\sigma^2} \mathbb{E}[|X^s| (|X^s| \wedge \varepsilon)].$$

Como  $|X^s| \wedge \varepsilon \leq \varepsilon$  y  $\mathbb{E}[|X^s|]^2 \leq \mathbb{E}[|X^s|^2] = 2\sigma^2$ , tenemos que,

$$\mathbb{P}(|X^* - X| \leq \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} (2\sigma^2)^{1/2} = \frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}.$$

La primer desigualdad del Corolario 1.4.4 tiene sentido cuando  $\varepsilon$  es pequeño; en otro caso, la probabilidad siempre está acotada por uno. ■

### 1.4.2. Límites de estimación para la distribución normal

Como mencionabamos al principio del capítulo, el método de Stein es una forma de obtener estimaciones explícitas de la exactitud de la aproximación de una distribución por otra. Para el caso de la aproximación normal, podemos encontrar buenos estudios como en Chen y Shao [6] y Raič [21]. Las estimaciones de errores de aproximación se basan, en general, en una comparación de esperanzas, por ejemplo, bajo la distancia de Wasserstein para funciones uniformemente de Lipschitz y bajo la distancia de Kolmogorov para funciones indicadoras.

En el contexto de la transformación de cero sesgo, usando (1.24), obtenemos un resultado directo de estimación de Stein.

**Proposición 1.4.5.** *Si  $h$  es una función absolutamente continua, entonces*

$$|\mathbb{E}[h(X)] - \Phi_\sigma(h)| \leq \frac{\|h'\|}{2\sigma^2} \mathbb{E}[|X^s|^3]. \quad (1.26)$$

**Demostración:** De (1.17) se tiene que

$$|\mathbb{E}[h(X)] - \Phi_\sigma(h)| = \sigma^2 \mathbb{E}[|f'_h(X^*) - f'_h(X)|] \leq \sigma^2 \|f''_h\| \mathbb{E}[|X^* - X|],$$

por lo que (1.26) se sigue de (1.13) y (1.24). ■

La cota superior de (1.26) depende en la estimación de  $\mathbb{E}[|X^* - X|]$ , para la cual hemos supuesto que  $X^*$  es independiente de  $X$  en la Proposición 1.4.3.

En el caso general cuando  $X^*$  y  $X$  no son independientes, la cota inferior de este término está dada (ver [11]) por

$$\mathbb{E}[|X^* - X|] = \|F - F^*\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |F(t) - F^*(t)| dt,$$

donde  $F$  y  $F^*$  son las funciones de distribución de  $X$  y  $X^*$  respectivamente. El ínfimo es obtenido cuando  $X = F^{-1}(U)$  y  $X^* = (F^*)^{-1}(U)$ , donde  $U \sim U(0, 1)$  es una variable aleatoria uniforme, lo cual significa que las variables  $X$  y  $X^*$  están fuertemente correlacionadas.

Cuando se trata de variables aleatorias dependientes, un ejemplo típico es la suma de variables aleatorias independientes. Presentamos aquí una construcción de cero sesgo introducida en Goldstein y Reinert [10] utilizando un índice aleatorio para elegir a uno de los sumandos.

**Proposición 1.4.6** (Goldstein y Reinert). *Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes, de media cero y varianzas finitas  $\sigma_i^2 > 0$ , y supongamos que  $X_i^*$  tiene la distribución  $X_i$ -cero sesgo. Asumamos que  $(\overline{X}, \overline{X}^*) = (X_1, \dots, X_n, X_1^*, \dots, X_n^*)$  son variables aleatorias independientes. Sea  $W = X_1 + \dots + X_n$ , y denotemos por  $\sigma_W^2$  su varianza. Consideramos una variable aleatoria  $I$  en  $\{1, \dots, n\}$ , tal que  $\mathbb{P}(I = i) = \sigma_i^2 / \sigma_W^2$  y que sea independiente de  $(\overline{X}, \overline{X}^*)$ . Entonces,*

$$W^* \stackrel{d}{=} W - X_I + X_I^*, \tag{1.27}$$

donde  $W^*$  tiene distribución  $W$ -cero sesgo.

En otras palabras, al reemplazar la variable  $X_I$  por  $X_I^*$  en la suma  $W = \sum_{i=1}^n X_i$ , obtenemos una variable con la distribución  $W$ -cero sesgo.

**Demostración:** Probaremos el resultado por verificación. Sea  $W^*$  una variable aleatoria con distribución  $W$ -cero sesgo. Entonces, para toda función  $f$  absolutamente continua tal que las

siguientes esperanzas existen,

$$\begin{aligned}
\sigma_W^2 \mathbb{E} [f' (W^*)] &= \mathbb{E} [W f (W)] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n X_i f (W) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [X_i f (W - X_i + X_i)] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [\sigma_i^2 f' (W - X_i + X_i^*)] \\
&= \sigma_W^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [f' (W - X_i + X_i^*)] \mathbb{P} (I = i) \\
&= \sigma_W^2 \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n f' (W - X_i + X_i^*) \mathbb{1}_{(I=i)} \right] \\
&= \sigma_W^2 \mathbb{E} [f' (W - X_I + X_I^*)],
\end{aligned}$$

donde la independencia es usada en la cuarta y sexta igualdad. La igualdad entre las esperanzas de  $W^*$  y  $W - X_I + X_I^*$  sobre esta clase de funciones es suficiente para garantizar (1.27). ■

Aplicando la técnica de esperanza condicional, obtenemos el siguiente resultado que sigue siendo válido cuando reemplazamos  $W$  por  $W^*$ .

**Proposición 1.4.7.** *Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones tal que la varianza de  $f (W)$  existe, y para cada  $i = 1, \dots, n$ , la varianza de  $g (X_i, X_i^*)$  también existe. Entonces*

$$|Cov [f (W), g (X_I, X_I^*)]| \leq \frac{Var [f (W)]^{\frac{1}{2}}}{\sigma_W^2} \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i^4 Var [g (X_i, X_i^*)] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.28)$$

En particular, para cualquier  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left| Cov \left[ \mathbb{1}_{\{a \leq W \leq b\}}, \mathbb{1}_{\{|X_I - X_I^*| \leq \varepsilon\}} \right] \right| \leq \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^4}{\sigma_W^4} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.29)$$

**Demostración:** Primero observemos que

$$Cov [f (W), g (X_I, X_I^*)] = Cov \left[ f (W), \mathbb{E} \left[ g (X_I, X_I^*) | \bar{X}, \bar{X}^* \right] \right].$$

Como  $(X_i, X_i^*)$  son mutuamente independientes, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[ f(W), \mathbb{E} \left[ g(X_I, X_I^*) \mid \bar{X}, \bar{X}^* \right] \right] &\leq \text{Var} [f(W)]^{\frac{1}{2}} \text{Var} \left[ \mathbb{E} \left[ g(X_I, X_I^*) \mid \bar{X}, \bar{X}^* \right] \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \text{Var} [f(W)]^{\frac{1}{2}} \left( \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_W^2} g(X_i, X_i^*) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sigma_W^2} \text{Var} [f(W)]^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i^4 \text{Var} [g(X_i, X_i^*)] \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Finalmente, sólo basta observar que  $\text{Var} [\mathbb{1}_{\{a \leq W \leq b\}}] \leq \frac{1}{4}$  y  $\text{Var} [\mathbb{1}_{\{|X_I - X_I^*| \leq \varepsilon\}}] \leq \frac{1}{4}$ . ■

**Observación 1.4.8.** (1) La desigualdad (1.29) otorga el orden de la  $\text{Cov} [\mathbb{1}_{\{a \leq W \leq b\}}, \mathbb{1}_{\{|X_I - X_I^*| \leq \varepsilon\}}]$ , el cuál es esencial para los cálculos en el Teorema 1.4.9 y en la Proposición 3.2.2 que veremos más adelante.

(2) Para probar (1.28),  $X_i^*$  debe ser independiente de  $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ . Sin embargo,  $X_i^*$  y  $X_i$  no necesariamente son independientes.

### 1.4.3. Corrección de primer orden para la aproximación normal

En un contexto clásico, la esperanza  $\mathbb{E}[h(W)]$ , donde  $W$  es la suma de variables aleatorias independientes, puede ser aproximada por la aproximación normal  $\Phi_{\sigma_W}(h)$ . El error  $\epsilon_0(h, W) = \mathbb{E}[h(W)] - \Phi_{\sigma_W}(h)$  de esta aproximación directa es de orden  $O(1/\sqrt{n})$  por la desigualdad de Berry-Esseen, usando la distancia de Wasserstein, e.g. Petrov [19], Chen y Shao [6], excepto en el caso simétrico, donde Diener y Diener [7] establecieron la convergencia de orden  $O(1/n)$ .

En esta parte, mejoraremos esta aproximación proponiendo un término de corrección  $C_h$  tal que el error corregido  $\epsilon_1(h, W) = \mathbb{E}[h(W)] - \Phi_{\sigma_W}(h) - C_h$  es de orden  $O(1/n)$  incluso en el caso asimétrico.

**Teorema 1.4.9.** Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes tal que  $\mathbb{E}[X_i^4]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , existe. Sea  $W = \sum_{i=1}^n X_i$  y  $\sigma_W^2 = \text{Var}(W)$ . Para cualquier función  $h$  tal que  $h''$  es acotada, la

aproximación normal  $\Phi_{\sigma_W}(h)$  de  $\mathbb{E}[h(W)]$  tiene una corrección

$$C_h = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^3)}{2\sigma_W^2} \Phi_{\sigma_W} \left( \left( \frac{x^2}{3\sigma_W^2} - 1 \right) xh(x) \right). \quad (1.30)$$

El error corregido de la aproximación está acotado por

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[h(W)] - \Phi_{\sigma_W}(h) - C_h| \\ & \leq \|f_h^{(3)}\| \left( \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^4] + \frac{1}{4\sigma_W^2} \left| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^3] \right| \left| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3] + \sigma_W \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^6} \right) \right). \end{aligned}$$

**Demostración:** Aplicando (1.17) a  $W$  y tomando la expansión de Taylor de primer orden en  $W$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(W)] - \Phi_{\sigma_W}(h) &= \sigma_W^2 \mathbb{E}[f_h'(W^*) - f_h'(W)] \\ &= \sigma_W^2 \mathbb{E}[f_h''(W)(W^* - W)] + \sigma_W^2 \mathbb{E}\left[f_h^{(3)}(\xi W + (1 - \xi)W^*) \xi (W^* - W)^2\right] \end{aligned} \quad (1.31)$$

donde  $\xi$  es una variable aleatoria uniforme en  $[0, 1]$  independiente de todo  $X_i$  y  $X_i^*$ . Como  $f_h^{(3)}$  es acotada, el segundo término de (1.31) es de orden  $\mathbb{E}[(W^* - W)^2]$ . Luego, por la Proposición 1.4.6 y (1.24), tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_W^2 \mathbb{E}\left[f_h^{(3)}(\xi W + (1 - \xi)W^*) \xi (W^* - W)^2\right] &\leq \sigma_W^2 \|f_h^{(3)}\| \mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}[(W^* - W)^2] \\ &= \frac{\sigma_W^2 \|f_h^{(3)}\|}{2} \mathbb{E}[(X_I^* - X_I)^2] \\ &= \frac{\sigma_W^2 \|f_h^{(3)}\|}{2} \frac{1}{\sigma_W^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \mathbb{E}[(X_i^* - X_i)^2] \\ &= \frac{\|f_h^{(3)}\|}{2} \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^4] \\ &= \frac{\|f_h^{(3)}\|}{12} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^4]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Para el término  $\mathbb{E}[f_h''(W)(W^* - W)]$  en (1.31), hacemos la siguiente descomposición donde aproximamos  $f_h''(W)$  por  $\Phi_{\sigma_W}(f_h'')$ . Como  $X_I^*$  es independiente de  $W$  y  $\mathbb{E}[X_I] = 0$ , entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f_h''(W)(W^* - W)] &= \mathbb{E}[f_h''(W)] \mathbb{E}[X_I^* - X_I] + Cov[f_h''(W), X_I^* - X_I] \\ &= \Phi_{\sigma_W}(f_h'') \mathbb{E}[X_I^*] + (\mathbb{E}[f_h''(W)] - \Phi_{\sigma_W}(f_h'')) \mathbb{E}[X_I^*] - Cov[f_h''(W), X_I]. \end{aligned}$$

Aquí el término  $\Phi_{\sigma_W}(f_h'') \mathbb{E}[X_I^*]$  es el candidato a ser la corrección  $C_h$ . Por la Proposición 1.4.5, (1.22) y (1.24),

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[X_I^*] (\mathbb{E}[f_h''(W)] - \Phi_{\sigma_W}(f_h''))| &\leq \frac{1}{\sigma_W^2} \left| \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \mathbb{E}[X_i^*] \right| \frac{\|f_h^{(3)}\|}{2\sigma_W^2} \mathbb{E}[|W^s|^3] \\
&= \frac{\|f_h^{(3)}\|}{2\sigma_W^4} \left| \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[X_i^3]}{2} \right| 4\sigma_W^2 \mathbb{E}[|W^* - W|] \\
&= \frac{\|f_h^{(3)}\|}{4\sigma_W^4} \left| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^3] \right| 4\sigma_W^2 \mathbb{E}[|X_I^* - X_I|] \\
&= \frac{\|f_h^{(3)}\|}{4\sigma_W^4} \left| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^3] \right| 4\sigma_W^2 \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_W^2} \mathbb{E}[|X_i^* - X_i|] \\
&= \frac{\|f_h^{(3)}\|}{4\sigma_W^4} \left| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^3] \right| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3]. \tag{1.33}
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la Proposición 1.4.7

$$\begin{aligned}
|Cov[f_h''(W), X_I]| &\leq \frac{1}{\sigma_W^2} \sqrt{Var[f_h''(W)]} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^4 Var(X_i)} \\
&= \frac{1}{\sigma_W^2} \sqrt{Var[f_h''(W)]} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^6} \\
&\leq \frac{\|f_h^{(3)}\|}{\sigma_W} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^6}, \tag{1.34}
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que

$$Var[f_h''(W)] = Var[f_h''(W) - f_h''(0)] \leq \mathbb{E}[(f_h''(W) - f_h''(0))^2] \leq \|f_h^{(3)}\|^2 \sigma_W^2.$$

Combinando (1.32), (1.33) y (1.34), si tomamos el corrector  $C_h = \sigma_W^2 \Phi_{\sigma_W}(f_h'') \mathbb{E}[X_I^*]$ , se deduce la cota del error corregido

$$\frac{\|f_h^{(3)}\|}{12} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^4] + \frac{\|f_h^{(3)}\|}{4\sigma_W^2} \left| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^3] \right| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3] + \sigma_W \|f_h^{(3)}\| \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^6}.$$

Por último, de (1.14) y (1.16) se sigue que

$$\begin{aligned}
C_h &= \sigma_W^2 \Phi_{\sigma_W}(f_h'') \mathbb{E}[X_I^*] \\
&= \Phi_{\sigma_W}(x f_h') \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_W^2} \mathbb{E}[X_i^*] \\
&= \Phi_{\sigma_W} \left[ \frac{x^2 f_h - xh + x \Phi_{\sigma_W}(h)}{\sigma_W^2} \right] \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_W^2} \mathbb{E}[X_i^*] \\
&= \frac{1}{\sigma_W^2} \Phi_{\sigma_W} \left[ \left( \frac{x^2}{3\sigma_W^2} - 1 \right) xh(x) \right] \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_W^2} \frac{\mathbb{E}[X_i^3]}{2\sigma_i^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^3]}{2\sigma_W^4} \Phi_{\sigma_W} \left[ \left( \frac{x^2}{3\sigma_W^2} - 1 \right) xh(x) \right], \tag{1.35}
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad considera que

$$\Phi_{\sigma_W}[x \Phi_{\sigma_W}(h)] = 0$$

y que por el Lema 1.3.2,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\sigma_W} [x^2 f_h] &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\infty} x^2 f_h(x) \frac{1}{\sigma_W \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_W^2}} dx \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\infty} x^2 \left[ \frac{e^{x^2/2\sigma_W^2}}{\sigma_W^2} \int_x^{\infty} (h(t) - \Phi_{\sigma_W}(h)) e^{-t^2/2\sigma_W^2} dt \right] \frac{1}{\sigma_W \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_W^2}} dx \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sigma_W^3 \sqrt{2\pi}} (h(t) - \Phi_{\sigma_W}(h)) e^{-t^2/2\sigma_W^2} \left[ \int_{-\alpha}^t x^2 dx \right] dt \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sigma_W^3 \sqrt{2\pi}} (h(t) - \Phi_{\sigma_W}(h)) e^{-t^2/2\sigma_W^2} \left[ \int_0^t x^2 dx + \int_{-\alpha}^0 x^2 dx \right] dt \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\alpha}^{\infty} \frac{t^3}{3\sigma_W^3 \sqrt{2\pi}} h(t) e^{-t^2/2\sigma_W^2} dt - \int_{-\alpha}^{\infty} \frac{t^3}{3\sigma_W^3 \sqrt{2\pi}} \Phi_{\sigma_W}(h) e^{-t^2/2\sigma_W^2} dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sigma_W^3 \sqrt{2\pi}} (h(t) - \Phi_{\sigma_W}(h)) e^{-t^2/2\sigma_W^2} dt \cdot \int_{-\alpha}^0 x^2 dx \right\} \quad (\text{tiende a 0 por L'Hôpital}) \\
&= \Phi_{\sigma_W} \left[ \frac{t^3}{3\sigma_W^2} h(t) \right] - \Phi_{\sigma_W} \left[ \frac{t^3}{3\sigma_W^2} \Phi_{\sigma_W}(h) \right] \\
&= \Phi_{\sigma_W} \left[ \frac{t^3}{3\sigma_W^2} h(t) \right]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

El término de corrección  $C_h$  depende de dos partes. Por un lado, depende en los terceros momentos de  $X_1, \dots, X_n$ . Por otro lado, el término de la esperanza normal depende solamente de la función  $h$ . Esto hace que los cálculos sean más sencillos incluso en el caso no homogéneo.

En el caso simétrico,  $\mathbb{E}[X_I^*] = 0$ , entonces  $C_h = 0$  para cualquier función  $h$ . Así, el término de corrección  $C_h$  puede ser visto como un corrector asimétrico ya que después de la corrección, la aproximación asimétrica tiene el mismo orden que la aproximación en el caso simétrico.



## 1.5. Apéndice: Cotas superiores para la distribución normal y $f_h^{(k)}$

Aquí probaremos la desigualdad que se utilizó en la demostración del Lema 1.2.2 y completaremos las demostraciones de (1.12) y (1.13) en el Lema 1.3.2.

**Lema 1.5.1 (Límite superior para función de distribución Normal).** *Si  $N_\sigma(\omega)$  es la función de distribución de una variable aleatoria Normal de media cero y varianza  $\sigma^2 > 0$ . Entonces se satisface la siguiente desigualdad,*

$$1 - N_\sigma(\omega) \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sigma}{\omega\sqrt{2\pi}} \right\} e^{-\omega^2/2\sigma^2}, \quad \omega > 0. \quad (1.36)$$

**Demostración:** Sea  $\omega > 0$ . Usando el cambio de variable  $u = t^2/2\sigma^2$ , donde  $du = (t/\sigma^2) dt$ , se tiene que,

$$\begin{aligned} 1 - N_\sigma(\omega) &= \int_{\omega}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2} dt \\ &\leq \int_{\omega}^{\infty} \frac{t}{\sigma\omega\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2} dt \\ &= \int_{\omega^2/2\sigma^2}^{\infty} \frac{\sigma}{\omega\sqrt{2\pi}} e^{-u} du \\ &= -\frac{\sigma}{\omega\sqrt{2\pi}} e^{-u} \Big|_{u=\omega^2/2\sigma^2}^{u=\infty} = \frac{\sigma}{\omega\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/2\sigma^2}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si se hace el cambio de variable  $u = t - \omega$ ,

$$\begin{aligned}
1 - N_\sigma(\omega) &= \int_\omega^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(u+\omega)^2/2\sigma^2} du \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(-u^2 - u\omega - \omega^2)/2\sigma^2} du \\
&\leq \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(-u^2 - \omega^2)/2\sigma^2} du = \frac{1}{2} e^{-\omega^2/2\sigma^2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Aquí probaremos el Lema 1.3.2 dando las propiedades básicas de la solución a la ecuación de Stein (1.10). Partes de la prueba se deben a Stroock [26] y Raič [20].

***Demostración del Lema 1.3.2:*** Sea  $\bar{h} = h - \Phi_\sigma(h)$ . Usando que  $f_h$  es solución de

$$\omega f_h(\omega) - \sigma^2 f_h'(\omega) = \bar{h}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (1.37)$$

y que  $\Phi_\sigma(h)$  es constante, se tiene que

$$\omega f_h'(\omega) - \sigma^2 f_h''(\omega) = h'(\omega) - f_h(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.38)$$

Si  $h$  es absolutamente continua, sean  $c_0 = \|\bar{h}\|$  y  $c_1 = \|h'\|$ . Como  $\bar{h}$  y  $f_h$  no cambian si reemplazamos  $h$  por  $h - h(0)$ , supondremos que  $h(0) = 0$ . Por lo tanto,  $|h(t)| \leq c_1 |t|$  y tomando  $u = t/\sigma$ ,

$$\begin{aligned}
\Phi_\sigma(h) &\leq c_1 \mathbb{E}[|Z|] \\
&= c_1 2 \int_0^\infty \frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2} dt \\
&= c_1 2\sigma \int_0^\infty \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \\
&= c_1 \sqrt{2\sigma^2/\pi} \left( -e^{-u^2/2} \right) \Big|_{u=0}^{u=\infty} \\
&= c_1 \sqrt{2\sigma^2/\pi}.
\end{aligned}$$

Primero probaremos las cotas en  $f_h$ . De la expresión (1.11) para  $f_h$  se sigue que

$$\begin{aligned} |f_h(\omega)| &\leq \begin{cases} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{\omega}^{\infty} |\bar{h}(t)| e^{-t^2/2\sigma^2} dt & \text{si } \omega \leq 0, \\ \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\omega} |\bar{h}(t)| e^{-t^2/2\sigma^2} dt & \text{si } \omega \geq 0, \end{cases} \\ &\leq \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \min \left\{ c_0 \int_{|\omega|}^{\infty} e^{-t^2/2\sigma^2} dt, c_1 \int_{|\omega|}^{\infty} \left( |t| + \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) e^{-t^2/2\sigma^2} dt \right\} \\ &\leq \min \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}} c_0, 2c_1 \right\}. \end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se obtiene teniendo en cuenta (1.36), que

$$\frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{|\omega|}^{\infty} e^{-t^2/2\sigma^2} dt = \sigma \sqrt{2\pi} \cdot \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{|\omega|}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2} dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}},$$

y que  $\int_{|\omega|}^{\infty} t e^{-t^2/2\sigma^2} dt = \sigma^2 e^{-\omega^2/2\sigma^2}$ .

Obsérvese que la primera cota en el mínimo se aplica si  $h$  es solamente acotado, dando así la primera desigualdad en (1.12), mientras que si  $h$  es absolutamente continua la segunda cota se mantiene, dando la primera desigualdad en (1.13).

Ahora veremos las cotas de  $f'_h$  solución de (1.37). Primero, para  $\omega \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \sigma^2 |f'_h(\omega)| &\leq |h(\omega) - \Phi_{\sigma}(h)| + \omega \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{\omega}^{\infty} |\bar{h}(t)| e^{-t^2/2\sigma^2} dt \\ &\leq c_0 + c_0 \omega \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{\omega}^{\infty} e^{-t^2/2\sigma^2} dt \\ &\leq c_0 + c_0 \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{\omega}^{\infty} t e^{-t^2/2\sigma^2} dt = 2c_0. \end{aligned}$$

Se aplica un argumento similar para  $\omega \leq 0$ , demostrando así la segunda desigualdad en (1.12).

Para probar la segunda desigualdad en (1.13), cuando  $h$  es absolutamente continua escribimos,

$$\begin{aligned}
h(\omega) - \Phi_\sigma(h) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} [h(\omega) - h(u)] e^{-u^2/2\sigma^2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\omega} \int_u^{\omega} h'(t) e^{-u^2/2\sigma^2} dt du - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\omega}^{\infty} \int_{\omega}^u h'(t) e^{-u^2/2\sigma^2} dt du \\
&= \int_{-\infty}^{\omega} h'(t) N_\sigma(t) dt - \int_{\omega}^{\infty} h'(t) (1 - N_\sigma(t)) dt, \tag{1.39}
\end{aligned}$$

de donde se deduce que,

$$\begin{aligned}
f_h(\omega) &= -\frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\omega} [h(x) - \Phi_\sigma(h)] e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\
&= -\frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\omega} \left( \int_{-\infty}^x h'(t) N_\sigma(t) dt - \int_x^{\infty} h'(t) (1 - N_\sigma(t)) dt \right) e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\
&= -\sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\omega} h'(t) N_\sigma(t) [N_\sigma(\omega) - N_\sigma(t)] dt \\
&\quad + \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} h'(t) [1 - N_\sigma(t)] N_\sigma(t \wedge \omega) dt \\
&= -\sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\omega} h'(t) N_\sigma(t) [N_\sigma(\omega) - N_\sigma(t)] dt \\
&\quad + \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} N_\sigma(\omega) \int_{\omega}^{\infty} h'(t) [1 - N_\sigma(t)] dt \\
&\quad + \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\omega} h'(t) [1 - N_\sigma(t)] N_\sigma(t) dt \\
&= \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} [1 - N_\sigma(\omega)] \int_{-\infty}^{\omega} h'(t) N_\sigma(t) dt \\
&\quad + \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} N_\sigma(\omega) \int_{\omega}^{\infty} h'(t) [1 - N_\sigma(t)] dt. \tag{1.40}
\end{aligned}$$

Luego, de (1.37), (1.39) y (1.40),

$$\begin{aligned}\sigma^2 f'_h(\omega) &= \omega f_h(\omega) - h(\omega) + \Phi_\sigma(h) \\ &= \left( \omega \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} [1 - N_\sigma(\omega)] - 1 \right) \int_{-\infty}^{\omega} h'(t) N_\sigma(t) dt \\ &\quad + \left( \omega \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} N_\sigma(\omega) + 1 \right) \int_{\omega}^{\infty} h'(t) [1 - N_\sigma(t)] dt.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\|f'_h\| &\leq \frac{\|h'\|}{\sigma^2} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left( \left| \omega \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} [1 - N_\sigma(\omega)] - 1 \right| \int_{-\infty}^{\omega} N_\sigma(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \left| \omega \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} N_\sigma(\omega) + 1 \right| \int_{\omega}^{\infty} [1 - N_\sigma(t)] dt \right).\end{aligned}$$

Por integración por partes,

$$\int_{-\infty}^{\omega} N_\sigma(t) dt = \omega N_\sigma(\omega) + \frac{\sigma^2 e^{-\omega^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad y \quad (1.41)$$

$$\int_{\omega}^{\infty} [1 - N_\sigma(t)] dt = -\omega (1 - N_\sigma(\omega)) + \frac{\sigma^2 e^{-\omega^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \quad (1.42)$$

Así,

$$\begin{aligned}\|f'_h\| &\leq \frac{\|h'\|}{\sigma^2} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left\{ \left| \omega \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} [1 - N_\sigma(\omega)] - 1 \right| \left( \omega N_\sigma(\omega) + \frac{\sigma^2 e^{-\omega^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left| \omega \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} N_\sigma(\omega) + 1 \right| \left( -\omega (1 - N_\sigma(\omega)) + \frac{\sigma^2 e^{-\omega^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Se puede comprobar que el término dentro de las llaves alcanza su valor máximo de  $\sqrt{2\sigma^2/\pi}$  con  $\omega = 0$ .

Ahora probaremos la última desigualdad en (1.13). Por (1.38) se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma^2 f''_h(\omega) &= \omega f'_h(\omega) + f_h(\omega) - h'(\omega) \\ &= \left( 1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2} \right) f_h(\omega) - \frac{\omega}{\sigma^2} (h(\omega) - \Phi_\sigma(h)) - h'(\omega).\end{aligned} \quad (1.43)$$

Por (1.43),(1.40),(1.39),(1.41) y (1.42) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma^2 |f_h''(\omega)| &\leq |h'(\omega)| + \left| \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2}\right) f_h(\omega) - \frac{\omega}{\sigma^2} (h(\omega) - \Phi_\sigma(h)) \right| \\
&= |h'(\omega)| + \left| \left[ \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} [1 - N_\sigma(\omega)] - \frac{\omega}{\sigma^2} \right] \int_{-\infty}^{\omega} h'(t) N_\sigma(t) dt \right. \\
&\quad \left. + \left[ \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} N_\sigma(\omega) + \frac{\omega}{\sigma^2} \right] \int_{\omega}^{\infty} h'(t) [1 - N_\sigma(t)] dt \right| \\
&\leq |h'(\omega)| + c_1 \left| \left[ \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} [1 - N_\sigma(\omega)] - \frac{\omega}{\sigma^2} \right] \int_{-\infty}^{\omega} N_\sigma(t) dt \right. \\
&\quad \left. + \left[ \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} N_\sigma(\omega) + \frac{\omega}{\sigma^2} \right] \int_{\omega}^{\infty} [1 - N_\sigma(t)] dt \right| \\
&= |h'(\omega)| \\
&\quad + c_1 \left| \left[ \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} [1 - N_\sigma(\omega)] - \frac{\omega}{\sigma^2} \right] \left( \omega N_\sigma(\omega) + \frac{\sigma^2 e^{-\omega^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[ \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{\omega^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} N_\sigma(\omega) + \frac{\omega}{\sigma^2} \right] \left( -\omega (1 - N_\sigma(\omega)) + \frac{\sigma^2 e^{-\omega^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) \right| \right| \\
&= |h'(\omega)| + c_1 \leq 2c_1
\end{aligned}$$

como se quería. ■

# Capítulo 2

## Estructura y análisis de las obligaciones colateralizadas por deuda

### 2.1. Introducción

En este capítulo se van a introducir y describir en detalle las obligaciones sintéticas colateralizadas por deuda (o CDOs sintéticas para abreviar). Las CDOs sintéticas son un sofisticado ejemplo de una clase de activos más general conocida como derivados de crédito. En su forma más simple, los derivados de crédito facilitan la transferencia del riesgo de crédito entre diferentes contrapartes de una operación. El concepto de riesgo está relacionado con la posibilidad de que ocurra un evento que se traduzca en pérdidas para los inversionistas, deudores o entidades financieras. El riesgo es producto de la incertidumbre que existe sobre el valor de los activos financieros, ante movimientos adversos de los factores que determinan su precio; a mayor incertidumbre mayor riesgo. Estos riesgos son divididos en dos categorías: riesgo de crédito y riesgo de mercado.

El riesgo de crédito existe cuando se da la posibilidad de que el deudor de un contrato financiero de crédito es incapaz de pagar su deuda, haciendo que la otra parte del contrato incurra en una pérdida. El riesgo de crédito se define como,

*“El riesgo de que una contraparte no cumpla con sus obligaciones de deuda pendientes, tales como pagar cupones o reembolsar capital sobre los bonos emitidos”.*

La justificación para la negociación de derivados de crédito es permitir que este riesgo se transfiera eficientemente entre las contrapartes, de aquellos que no quieren o no pueden sostenerlo, a quienes lo quieran. El propósito de este capítulo es presentar algunos conceptos básicos para comprender ciertos instrumentos financieros importantes que se analizarán en detalle en el transcurso del mismo. En particular, pretendemos dar un repaso a los conceptos financieros que subyacen a la teoría de las CDO sintéticas hasta llegar a casos particulares de CDOs sintéticas y su valuación.

Al final del capítulo se presenta un glosario de palabras importantes utilizadas en este contexto financiero, que puede ser revisado en cualquier momento de duda sobre términos no definidos en el transcurso de la lectura.

Para el desarrollo del capítulo fueron necesarias principalmente las lecturas de O'Kane [18], Mounfield [17], McDonald [16] y Hull [12].

## 2.2. Derivados

Los derivados surgen con la finalidad de que las empresas y los inversionistas puedan cubrirse y anticiparse ante los movimientos del mercado. Son productos financieros que han tenido impacto en inversiones, estrategia empresarial, la gestión de operaciones y la comercialización. El uso de una cobertura por derivados es una forma de gestionar las exposiciones al riesgo que surgen entre activos (bienes, instrumentos u operaciones que generan ingresos) y pasivos (bienes, servicios u operaciones que pierden dinero).

**Definición 2.2.1.** *Un derivado es un producto financiero (o contrato financiero) que "deriva" su valor del rendimiento de un activo denominado subyacente a lo largo del tiempo: por ejemplo, acciones, bonos, materias primas, índices bursátiles, etc.*

*Un derivado se negocia entre dos partes a las que se hace referencia como las contrapartes. Estas contrapartes están sujetas a un conjunto de términos y condiciones previamente acordados que determinan sus derechos y obligaciones.*

Los derivados pueden negociarse dentro o fuera de una bolsa y se conocen como:



- **Derivados negociados en bolsa (ETDs):** Contratos estandarizados negociados en un mercado reconocido, siendo las contrapartes el tenedor y el canje. Los términos del contrato no son negociables y sus precios están a disposición del público.
- **Derivados de venta libre (OTCs):** Contratos a medida negociados fuera de bolsa con términos y condiciones específicos determinados y acordados por el comprador y el vendedor (contrapartes). Como resultado, los derivados OTC son más ilíquidos, por ejemplo, contratos a plazo y swaps.

### 2.2.1. Derivados de uso común

Básicamente, existen cuatro tipos de derivados financieros: **futuros, a plazo, opciones y swaps**. No obstante, entre ellos se pueden combinar para formar instrumentos más complejos y que atiendan de mejor forma las necesidades financieras de los usuarios. A continuación se ofrece una explicación de cada uno de los derivados.

#### Contratos de futuros

Un *contrato de futuros* es un acuerdo para comprar o vender un activo en una fecha específica en el futuro a un precio determinado. Las bolsas de futuros permiten negociar entre sí a las personas que desean comprar o vender activos en el futuro.

El negociante que aceptó comprar tiene lo que se conoce como una *posición larga en un contrato de futuros*; el negociante que aceptó vender tiene lo que se conoce como una *posición corta en un contrato de futuros*. El precio recibe el nombre de *precio de futuros*.

Un precio de futuros contrasta con el *precio spot* (al contado). El precio spot es para una entrega inmediata o casi inmediata. El precio de futuros es el precio de entrega en alguna fecha futura. Por lo general, ambos precios son diferentes.

#### Contratos a plazo

Un *contrato a plazo* es similar a un contrato de futuros en cuanto a que es un acuerdo para comprar o vender un activo en una fecha futura específica a cierto precio. No obstante, en tanto que los contratos de futuros se negocian en bolsas, los contratos a plazo se negocian en el mercado *over-the-counter* (OTC).

### Contratos de opciones

Hay dos tipos básicos de opciones: de compra y de venta.

- **Call** - Una *opción de compra* otorga al tenedor el derecho pero no la obligación de comprar un activo en una fecha específica a cierto precio.
- **Put** - Una *opción de venta* otorga al tenedor el derecho pero no la obligación de vender un activo en una fecha específica a cierto precio.

El precio establecido en el contrato se conoce como *precio de ejercicio* o *precio strike*; la fecha estipulada en el contrato se conoce como *fecha de vencimiento*. Una *opción europea* se ejerce sólo en la fecha de vencimiento y una *opción americana* se puede ejercer en cualquier momento de su vida.

Se debe destacar que una opción otorga al tenedor el derecho de hacer algo. El tenedor no tiene que ejercer este derecho. Esto distingue a las opciones de los contratos de futuros (o a plazo). No cuesta nada participar en un contrato de futuros. Por el contrario, un inversionista debe pagar un precio por adelantado, que se conoce como *prima de la opción*, para participar en un contrato de opciones.

### Swaps

Los swaps ocupan una posición muy importante en el mercado de derivados OTC. Un swap es un acuerdo entre dos empresas para intercambiar flujos de efectivo en el futuro. El acuerdo define las fechas de pago de los flujos de efectivo y cómo deben calcularse. Por lo general, el cálculo de los flujos de efectivo implica el valor futuro de una tasa de interés, un tipo de cambio u otra variable de mercado. En tanto que un contrato a plazo equivale al intercambio de flujos de efectivo únicamente en una fecha futura, por lo común los swaps dan lugar a intercambios de flujo de efectivo que ocurren en varias fechas futuras.

Generalmente, dos empresas no financieras, no establecen contacto directamente para acordar un swap, sino que cada una trata con un intermediario financiero, como un banco u otra institución financiera.

- *Creadores de mercado*

En la práctica es poco probable que dos empresas establezcan contacto con una institución financiera y que, al mismo tiempo, deseen tomar posiciones opuestas exactamente en el mismo swap. Por esta razón, muchas instituciones financieras importantes actúan como creadores de mercado de swaps. Esto significa que están dispuestas a participar en un swap sin tener un swap de compensación con una contraparte. Los creadores de mercado deben cuantificar y cubrir cuidadosamente los riesgos que asumen. Los bonos, los acuerdos de interés futuro y los futuros sobre tasas de interés son ejemplos de los instrumentos que utilizan los creadores de mercado de swaps con fines de cobertura.

- *Confirmaciones*

Una *confirmación* es el acuerdo legal subyacente a un swap, que firman los representantes de las dos partes.

La confirmación especifica los pagos de los flujos de efectivo y la convención que se usará. Por ejemplo, si se usa la convención del siguiente día hábil y el calendario determina cuáles días son hábiles y cuáles son festivos; si una fecha de pago cae en un fin de semana o en un día festivo, el pago se realiza al siguiente día hábil.

## 2.3. Riesgo de mercado

El riesgo de mercado se refiere a la sensibilidad de un activo o cartera a los movimientos globales de precios de mercado tales como tipos de interés, inflación, renta variable, moneda y propiedad. Los fondos de pensiones están fuertemente expuestos a los riesgos de tipos de interés y de tasa de inflación, ya que éstos determinan el valor actual de los pasivos del plan; normalmente estos riesgos se denominan riesgos "no recompensados", ya que estos son intrínsecos a los pasivos. Si bien el riesgo de mercado no puede eliminarse completamente mediante la diversificación, puede reducirse mediante la cobertura. El uso de swaps de tasas de interés e inflación puede producir posiciones compensatorias por las que los riesgos están cubiertos.

Al establecer una cobertura por derivados, es esencial que los planes de pensiones midan su exposición al riesgo de mercado y al apalancamiento.

## 2.4. Riesgo de crédito y contraparte

Además del riesgo de mercado, los derivados tienen riesgo de crédito y de contraparte. El riesgo de contraparte se refiere a la estabilidad financiera de cada parte involucrada. La evaluación del riesgo de contraparte es muy importante ya que la expectativa es que ambas partes sean capaces de cumplir las obligaciones del contrato financiero.

El riesgo de crédito es el caso particular cuando el contrato es uno de crédito, y el deudor no puede pagar su deuda. Consideremos el caso de una institución financiera que participa en contratos de compensación con dos empresas. Si las dos empresas incumplen sus pagos, la institución financiera permanece totalmente cubierta. Sin embargo, existe la posibilidad de que una parte experimente dificultades financieras e incumpla sus pagos. Aún así, la institución financiera debe cumplir el contrato que tiene con la otra parte.

### Crédito

Un crédito es, en sentido amplio, una cesión temporal de un bien económico con la esperanza de recuperarlo en un momento futuro.

Los créditos presentan un conjunto de elementos comunes entre los que destacan los siguientes:

1. La existencia de dos partes: una que cede temporalmente un bien, denominada acreedor, y otra que lo recibe, denominada deudor.
2. El objeto de la cesión es un bien económico, de naturaleza real o financiera, que en la mayoría de las ocasiones es dinero o algo que le resulta equivalente.
3. El acreedor tiene la esperanza de recuperar el bien en un momento futuro, el cual puede estar determinado o no.
4. El crédito es el establecimiento de una remuneración a favor del acreedor cuya finalidad es compensarle por la renuncia temporal al bien cedido.

### Activos financieros

Los activos financieros pueden definirse como “los títulos emitidos por las unidades económicas de gasto, que constituyen un medio de mantener riqueza para quienes los poseen y un pasivo para quienes los generan”.

#### **Activos expuestos al riesgo de crédito**

Los activos financieros expuestos al riesgo de crédito son todos aquéllos activos financieros en los que la entidad financiera tiene una incertidumbre de carácter objetivo sobre la pérdida que le puede ocasionar el incumplimiento por parte del deudor de las obligaciones establecidas en el activo financiero.

La naturaleza del activo financiero es de gran importancia en la medición del riesgo de crédito porque de ella depende la cuantía de la exposición al riesgo de crédito y la pérdida que experimenta la entidad financiera en el supuesto de que se produzca el impago del deudor.

A efectos de la medición del riesgo de crédito, los activos financieros que componen la estructura económica de la entidad financiera pueden clasificarse atendiendo a diversos criterios de clasificación entre los que destacan, por un lado, su pertenencia a la cartera de inversión o a la de negociación, y, por otro, su representación o no en el balance de situación de la entidad.

#### **Pérdida asociada al riesgo de crédito**

El riesgo de crédito de los activos financieros que componen la cartera de inversión tiene su origen en la incertidumbre existente sobre un único suceso, que es el impago, el cual puede producir una disminución en el valor económico de los activos financieros.

En cambio, el riesgo de crédito de los activos financieros que componen la cartera de negociación procede de la incertidumbre existente sobre varios sucesos que afectan al valor económico del activo financiero y que son, principalmente, la disminución de la categoría crediticia del deudor y el incremento del diferencial entre el tanto de rentabilidad que proporciona el activo financiero y el que proporcionan los activos financieros libres de riesgo.

#### **Elementos de medición del riesgo de crédito**

Los factores que se deben tomar en cuenta al medir riesgo de crédito son: las probabilidades de incumplimiento que se miden a partir de los cambios en la calidad crediticia del deudor, las correlaciones entre incumplimientos en una cartera, la exposición de cada deudor (lo que debe en

caso de incumplir) y la tasa de recuperación en caso de incumplimiento de los deudores.

## 2.5. Derivados de crédito

Los derivados de crédito han revolucionado el comercio y la gestión del riesgo de crédito. Han facilitado a los bancos, que históricamente han sido los depósitos de riesgo de crédito, cubrir y diversificar su riesgo crediticio. Los derivados de crédito han permitido también la creación de productos que pueden adaptarse al perfil riesgo-rendimiento de los inversores específicos. Como resultado, los derivados de crédito han aportado algo nuevo tanto a los inversionistas como a los inversores, lo que ha sido un factor importante en el crecimiento del mercado de derivados de crédito.

Desde su inicio a mediados de la década de 1990, el tamaño del mercado de derivados de crédito ha crecido a un ritmo asombroso y ahora supera el tamaño del mercado de bonos de crédito. Además de su tamaño, lo asombroso del mercado de derivados de crédito es la amplitud y liquidez que ha alcanzado. Esto se ha debido en gran medida a los esfuerzos de la comunidad financiera que ha tratado de estructurar los productos de una manera que maximice la comerciabilidad y la estandarización y, por tanto, la liquidez.

Los derivados de crédito forman parte de la familia de productos derivados financieros, es decir, son instrumentos cuyo valor depende del comportamiento de un activo financiero, o de una variable económico-financiera observable y medible. Estos permiten la negociación y transmisión separada de los distintos atributos económicos que componen un activo financiero sin necesidad de la transmisión del activo en sí. Más recientemente, el mercado de derivados de crédito se ha convertido en un mercado impulsado por los inversores, centrado en el desarrollo de productos que presentan un atractivo perfil riesgo-rendimiento.

### **Características de los derivados de crédito**

Como comentábamos, los derivados de crédito han experimentado un gran desarrollo en los últimos años, en complejidad y tamaño.

Para entender el atractivo de este mercado, enumeramos algunos de sus usos principales:

- Para cubrir una exposición de crédito existente o como una forma de expresar una opinión negativa sobre el mercado de crédito.
- La mayoría de los derivados de crédito no están financiados. Esto significa que a diferencia de un bono, el inversor en un derivado de crédito no tiene que financiar ningún pago inicial.
- Permiten una mejor diversificación del riesgo de crédito, ya que la amplitud y liquidez del mercado de derivados de crédito es mayor que la del mercado de bonos corporativos.
- Agregan transparencia a la fijación de precios del riesgo de crédito ampliando la gama de créditos comerciales y su liquidez.
- Permiten la creación de nuevas clases de activos que están expuestos a nuevos riesgos como la volatilidad del crédito y la correlación de crédito. Estos pueden utilizarse para diversificar las carteras de inversión.

Los derivados de crédito son contratos en los que el beneficio depende de la solvencia de una o más partes. En esta sección explicamos cómo funcionan los derivados de crédito y analizamos algunos asuntos de valuación.

**Definición 2.5.1.** *Un derivado de crédito es un contrato bilateral que transfiere el riesgo de crédito entre dos contrapartes. Se trata básicamente de un seguro contra el impago de un crédito (un bono por ejemplo), donde el comprador de protección paga una prima al vendedor a cambio de recibir un pago en caso de que se produzca el impago de ese crédito.*

La figura del “comprador de protección” paga una cantidad a la otra contrapartida, el “vendedor de protección”, y el comprador recibe a cambio el derecho a recibir un pago, que sólo ocurrirá en el caso que se produzca un evento de crédito (impago, quiebra, reestructuración, etc.) del activo de referencia o la entidad de referencia del derivado de crédito.

### 2.5.1. Swaps de incumplimiento crediticio

El derivado de crédito más popular es un *swap/permuta de incumplimiento de crédito* (CDS, por sus siglas en inglés). Éste es un contrato similar a una fianza en donde una de las partes compra

protección frente a un riesgo de crédito, a cambio de pagos periódicos al vendedor hasta el final de la vida del CDS o hasta que ocurra un *evento de crédito*. El vendedor se compromete a realizar un determinado pago, acordado para el supuesto de que ocurra un determinado evento de crédito sobre el activo de referencia. Si no ocurre ningún evento de crédito durante el tiempo de vida del CDS, la entidad vendedora de protección no realiza ningún pago. Los eventos de crédito están definidos en el contrato, pero, por lo general, suelen ser impagos, reestructuraciones y situaciones de insolvencia del emisor del activo de referencia.

Para el vendedor de protección, supone una posición sintética de exposición al riesgo de crédito frente al activo de referencia, sin necesidad de adquirir el activo. Por ejemplo, suponga que la empresa A y C tienen obligaciones pactadas, tal que la empresa A tiene como contraparte a la empresa C (*entidad de referencia*). Para evitar los efectos negativos del potencial incumplimiento de la empresa C, la empresa A se dirige al mercado de derivados de crédito y le compra a la empresa B un CDS sobre la empresa C. La empresa A realiza pagos periódicos (primas) a la empresa B hasta su vencimiento o hasta que ocurre el evento de crédito. A cambio, la empresa B realiza un pago contingente en caso de que ocurra el evento de crédito por parte de la empresa C. Al ocurrir el evento crédito, la empresa A tiene el derecho de vender al emisor del CDS los títulos (bonos o deuda) de la entidad de referencia a valor par de su valor nominal; mientras que la empresa B tiene la obligación de comprar los bonos a dicho valor. Al valor nominal de los bonos se le conoce como *nocional principal* del CDS.

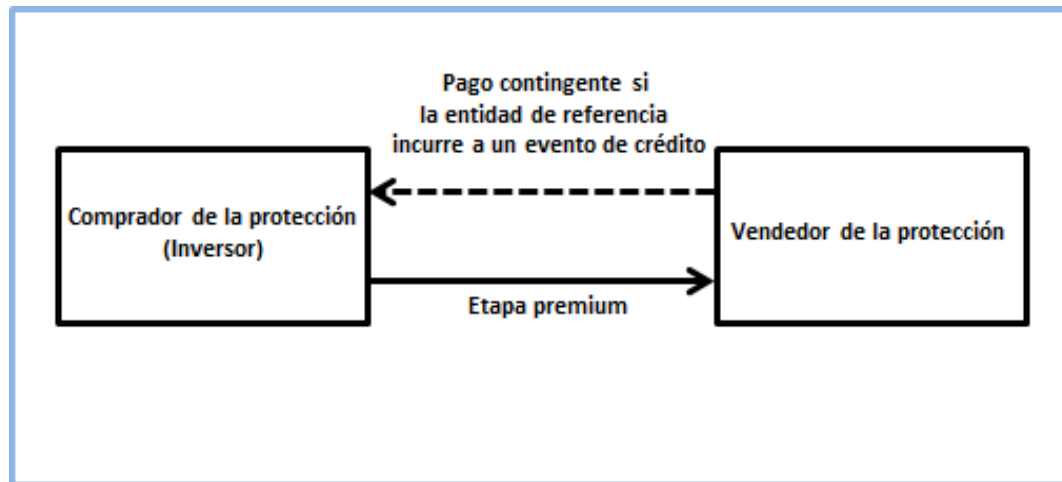
La unidad en que se miden estos contratos se denomina *spread*. Si la deuda de una compañía tiene un spread de 852 *puntos base* (**pb**), quiere decir que el costo de asegurar un millón de dólares sobre la deuda de esa empresa sería de 85 mil 200 dólares por año ( $1\text{pb} = 0.01\%$ ).

### Mecanismo de un contrato CDS

Los bonos y préstamos específicos que se protegen son conocidos como *obligaciones de entrega* y el emisor es conocido como la *entidad de referencia*. No hay un costo inicial al entrar en un CDS. En cambio, como se puede observar en el ejemplo anterior, tenemos dos etapas en un CDS como se muestra en la Figura 2.5. Estas son:



- **Etapa de protección:** La etapa de protección es el pago contingente hecho por el vendedor de protección al comprador de protección para compensar el valor de una *obligación de entrega* después de un evento de crédito.
- **Etapa premium (de primas):** La etapa premium es la serie de pagos hechos por el comprador del CDS al vendedor del CDS para pagar por la protección que se proporciona. Los pagos terminan al vencimiento del contrato o inmediatamente después de un evento de crédito. Los tamaños de los pagos de primas se especifican en términos de un *spread de swap de incumplimiento de crédito*.



**Figura 2.5** *Mecanismo de un CDS*

**Definición** El *evento de crédito* es el término legal para el evento que desencadena el pago de la etapa de protección. Se trata de un evento que es similar al incumplimiento, pero, no es exactamente el mismo que el caso de incumplimiento.

En la Tabla 2.5 se proporciona una descripción de los eventos de crédito más comunes. El mercado generalmente los divide en eventos de crédito duros y suaves. Los eventos de crédito duros son aquellos que harían que toda la deuda de la entidad de referencia se hiciera inmediatamente exigible y por lo tanto se negociara al mismo precio. La reestructuración es el único evento de

crédito suave. Tras un evento de reestructuración, la deuda puede continuar operando con una estructura a plazo de precios.

Evento de crédito	Duro o suave	Descripción
Bancarrota	Duro	El corporativo se convierte en insolvente o no puede pagar sus deudas. El evento de bancarrota no es relevante para bonos soberanos.
Impago	Duro	Incumplimiento de la entidad de referencia de hacer los debidos pagos, teniendo en cuenta algún período de gracia.
Obligación cruzada predeterminada	Duro	La obligación se ha declarado debida y pagadera antes del vencimiento. Distinto al impago.
Aceleración de la obligación	Duro	La obligación se ha declarado debida y pagadera antes de lo que hubieran sido debido a impago u otro y se produce de forma inmediata.
Rechazo/ moratoria	Duro	Una entidad de referencia o autoridad gubernamental rechaza o cuestiona la validez de las obligaciones. Se especifica un umbral de requisito predeterminado.
Reestructuración	Suave	Cambios en las obligaciones de deuda del acreedor de referencia, pero excluyendo aquellas que no están asociadas al deterioro del crédito, como una renegociación de condiciones más favorables.

**Tabla 2.5** Descripción de los eventos de crédito más utilizados

Hay dos maneras de efectuar el pago de la etapa de protección. Estas son:

1. **Liquidación física:** El comprador de protección tiene el derecho de vender o entregar el activo de crédito incumplido al vendedor de protección a cambio del valor nominal total de la deuda. Como el evento de crédito reducirá el valor de mercado secundario para el préstamo o bono, esto normalmente dará lugar a pérdidas para el vendedor de protección.
2. **Liquidación en efectivo:** El vendedor de protección es responsable de la diferencia entre el valor nominal y el valor de recuperación del activo de crédito. Sin embargo, la liquidación en efectivo es menos común debido a las dificultades asociadas con la fijación de precios de los activos de crédito en dificultades.

### Tasa de recuperación

Cuando una empresa quiebra, los prestamistas a quienes la empresa debe dinero reclaman los activos de ésta. En ocasiones hay una reorganización en la que estos acreedores acuerdan un pago parcial de sus reclamaciones. En otros casos, el liquidador vende los activos y los ingresos se usan para satisfacer las reclamaciones tan pronto como sea posible. Por lo general, algunas reclamaciones tienen prioridades sobre otras y se satisfacen de manera más completa.

Por lo común, la tasa de recuperación de un bono se define como el valor del bono inmediatamente después de un incumplimiento, como un porcentaje de su valor nominal. Dada la forma de definir las tasas de recuperación, el beneficio obtenido de un CDS se expresa en términos de la tasa de recuperación. Este beneficio es  $L(1 - R)$  donde  $L$  es el principal nominal y  $R$  es la tasa de recuperación.

### 2.5.2. CDS sobre índices de cartera

Los CDSs en índices de cartera (CDSI) han transformado los mercados de derivados de crédito ofreciendo un producto altamente líquido que los inversores pueden utilizar para asumir o cubrir el riesgo de una amplia cartera de exposiciones de crédito. A diferencia de un CDS, que es un derivado de crédito extrabursátil (OTC), un CDSI es una seguridad crediticia completamente estandarizada y, por lo tanto, puede ser más líquido y operar con menor diferencial. Esto significa que puede ser más barato cubrir una cartera de CDSs con un CDSI de lo que sería comprar muchos CDSs de un sólo nombre para lograr un efecto similar.

Un CDS en índices de cartera es un contrato bilateral de venta libre. Cada parte en el contrato es un comprador o un vendedor del CDSI. Es importante señalar que la terminología del CDS en índice es diferente del mercado de CDSs. Un comprador del CDSI significa un comprador de riesgo de crédito - la parte que recibe la propagación (spread). Esto es diferente del mercado de CDS en el que el comprador a menudo se supone que es un comprador de protección que es efectivamente ir corto al riesgo de crédito.

## 2.6. Productos de correlación

Tras el swap de incumplimiento de crédito y el CDS en índices de cartera, el tercer logro significativo del mercado de derivados de crédito ha sido crear un mercado líquido en la correlación de incumplimiento de crédito.

Cuando hablamos de correlación de incumplimiento de crédito, generalmente queremos decir el riesgo de que dos o más créditos incumplan conjuntamente con una probabilidad mayor que si fueran independientes. Esto puede ser el resultado de alguna característica común que estos créditos pueden compartir, como estar en un sector industrial común o en una región común. En algunos casos, podríamos tener una correlación negativa por incumplimiento, lo que significa que la probabilidad de que ambos créditos incumplan es menor que si fueran independientes. Esto podría ocurrir si las perspectivas futuras de una empresa pudieran mejorarse por incumplimiento de un competidor. Sin embargo, como la correlación por incumplimiento representa un promedio sobre escenarios futuros, generalmente encontramos que los efectos de correlación positiva compensan los efectos de correlación negativa.

El objetivo de esta sección es describir primero la mecánica de los dos productos principales, las cestas por incumplimiento o *default baskets* y los tramos de CDOs sintéticos, y explicar por qué están expuestos a la correlación de incumplimientos.

### 2.6.1. Cestas por incumplimiento

Las cestas por incumplimiento eran inicialmente el producto dominante de los derivados de crédito que fue vendido a los inversionistas. Esta posición ha sido tomada desde entonces por los CDOs sintéticos. A pesar de esto, las cestas por incumplimiento siguen existiendo gracias a sus características únicas que las hacen atractivas para ciertos tipos de inversores de crédito.

Una cesta por incumplimiento es un contrato que es casi idéntico a un CDS. La diferencia es que el evento que provoca que la etapa de protección se dispare y que la etapa de primas termine es el  $m$ -ésimo evento de crédito en una cesta de  $M$  créditos, donde  $M$  es típicamente entre 5 y 10. Si  $m = 1$ , entonces, el contrato es llamado *first-to-default* (FTD) basket. Si  $m = 2$ , tenemos un

contrato *second-to-default* (STD) basket y así. La cesta de créditos de referencia se elige al inicio del contrato y permanece fija durante la vigencia del contrato.

Al igual que con un CDS estándar, la cesta consta de una etapa premium y una etapa de protección. La prima es típicamente un flujo de pagos trimestrales calculados usando una convencción real de 360 días. Esto continúa hasta el vencimiento  $T$  del contrato, o hasta el momento del evento de crédito  $m$ -ésimo en la cesta, lo que ocurra primero. Denotamos el reparto fijo de la cesta  $m$ -to-default con  $S_m$ .

En la etapa de protección, el pago se realiza sólo después del  $m$ -ésimo evento de crédito, siempre que este  $m$  se produzca antes del vencimiento del contrato  $T$ . Nosotros indexamos los créditos en la cesta con  $i = 1, \dots, M$  y denotamos el índice del  $m$ -ésimo incumplimiento de crédito con  $i(m)$ . Suponiendo un valor nominal de contrato de \$1, el tamaño del pago después del  $m$ -ésimo incumplimiento es dado por

$$(1 - R_{i(m)})$$

donde  $R_{i(m)}$  es el valor esperado de la tasa de recuperación asociada con el crédito  $i(m)$ . Es importante señalar que el valor nominal de la pérdida es el valor nominal del contrato. Es el mismo valor que si tuvieramos un CDS en el crédito  $i(m)$  con el mismo valor nominal que la cesta.

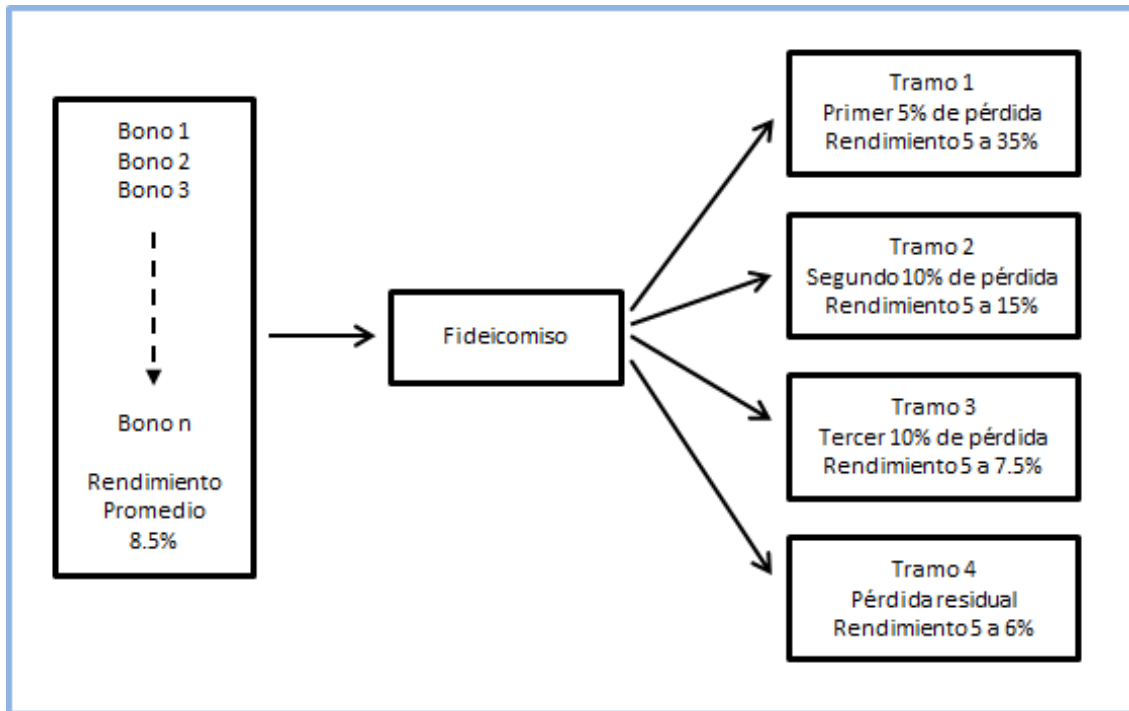
### 2.6.2. Obligación colateralizada por deuda

Las obligaciones colateralizadas por deuda (CDOs) son títulos cuyos pagos están vinculados a la incidencia de incumplimiento de una cartera subyacente de activos con riesgo de crédito. Esto se hace de una manera que transforma el riesgo de crédito de la cartera subyacente en un conjunto de títulos con diferentes perfiles de crédito.

En un tradicional flujo de efectivo de la CDO, los títulos de la CDO se venden a los inversores en forma financiada a un *precio de par* (cuando el precio efectivo coincide con su valor nominal). El producto de la venta se utiliza para comprar la cartera colateral de activos con riesgo de crédito, normalmente bonos y préstamos, que luego se vende en una estructura conocida como *vehículo de propósito especial* o SPV. El SPV emite los títulos de las CDOs. Nótese que el término CDO se utiliza de dos maneras: puede usarse para referirse a toda la estructura que consiste en SPV

y títulos emitidos, y también para hacer referencia a un título específico emitido por la CDO, es decir, una CDO emite un conjunto de CDOs.

Una CDO es una manera de crear títulos con diversas características de riesgo a partir de una cartera de instrumentos de deuda. La Figura 2.6.1 ilustra un ejemplo en el que se crean cuatro tipos de títulos (o tramos) a partir de una cartera de bonos. El primer tramo tiene 5 % del principal total del bono y absorbe todas las pérdidas de crédito de la cartera durante la vida de la CDO hasta que éstas lleguen a 5 % del principal total del bono. El segundo tramo tiene 10 % del principal y absorbe todas las pérdidas durante la vida de la CDO que excedan a 5 % del principal, hasta un máximo de 15 % de éste. El tercer tramo tiene 10 % del principal y absorbe todas las pérdidas que excedan a 15 % del principal hasta un máximo de 25 % de éste. El cuarto tramo tiene 75 % del principal y absorbe todas las pérdidas que excedan al 25 % del principal.



**Figura 2.6.1** *Obligación colateralizada por deuda*

Los rendimientos presentados en la Figura 2.6.1 son las tasas de interés pagadas a los tenedores de tramos. Estas tasas se pagan sobre el saldo del principal restante en el tramo después de pagar

las pérdidas. Considere el tramo 1. Inicialmente, el rendimiento de 35% se paga sobre el monto total que invirtieron los tenedores del tramo 1. No obstante, después de experimentar pérdidas equivalentes a 1% del principal total del bono, los tenedores del tramo 1 han perdido 20% de su inversión y sólo se paga el rendimiento sobre 80% del monto original invertido. En ocasiones, al tramo 1 se le denomina “basura tóxica” o tramo *equity*. Una pérdida por incumplimiento de 2.5% sobre la cartera de bonos se traduce en una pérdida de 50% del principal del tramo. En contraste, el tramo 4 recibe generalmente una calificación AAA. Los incumplimientos sobre la cartera de bonos deben exceder a 25% antes de que los tenedores de este tramo sean responsables de cualesquier pérdidas de crédito.

Normalmente, el creador de la CDO mantiene el tramo 1 y vende en el mercado los tramos restantes. Una CDO proporciona una manera de crear una deuda de alta calidad a partir de una deuda de calidad promedio (o incluso de baja calidad). El riesgo para el comprador de los tramos 2, 3 o 4 depende de la correlación de incumplimiento entre los emisores de los instrumentos de deuda que integran la cartera. Cuanto menor sea la correlación, mayor será la calificación otorgada a los tramos 2, 3 y 4.

Los títulos emitidos de la CDO suelen dividirse en tres tramos conocidos como *senior*, *mezzanine* y *equity*. El tramo senior recibe calificaciones principalmente de AA y AAA, el tramo mezzanine recibe calificaciones de BBB y A, por último, el tramo equity, recibe calificaciones menores a BB. Usando un mecanismo llamado *subordinación estructural*, el cupón programado y los pagos de capital sobre los diferentes títulos se pagan de acuerdo con un conjunto de reglas conocidas como cascada o *waterfall*. Los pagos de intereses y principal de los valores senior se pagan primero. A continuación, es el turno de los titulares de valores mezzanine para recibir su cupón y principal. Y posteriormente, se paga al tramo equity.

### 2.6.3. CDOs sintéticas

La CDO de la Figura 2.6.1 se denomina CDO líquida (*cash CDO*). Una estructura alternativa es una CDO sintética (*synthetic CDO*) donde el creador de la CDO vende una cartera de CDSs a terceros. Luego pasa el riesgo de incumplimiento a los titulares de los tramos sintéticos de la CDO.

Las CDOs líquidas son las originales y las más habituales, y están respaldadas por un conjunto de instrumentos de deuda del mercado monetario. Las CDOs sintéticas son CDOs donde el inversor tiene una exposición económica a un conjunto de instrumentos de deuda a través de instrumentos derivados en vez de por la compra de instrumentos de deuda del mercado monetario. Dicho de otra manera, cuando la SPV es la propietaria de la deuda subyacente, se denomina CDO líquida. Por otro lado, si la SPV no adquiere la cartera de renta fija subyacente y utiliza un derivado de crédito para transferir el riesgo de crédito de esa cartera, estamos ante una CDO sintética. Entonces, una CDO sintética es clasificada como un derivado de crédito.

Como en la Figura 2.6.1, el primer tramo podría ser responsable de los beneficios sobre los CDS hasta alcanzar 5% del principal nocional total, el segundo tramo podría ser responsable de los beneficios entre 5% y 15% del principal nocional total, etc. El ingreso de los swaps de incumplimiento de crédito se distribuye entre los tramos de manera que refleje el riesgo que asumen. Por ejemplo, el primer tramo podría obtener más puntos base que el segundo tramo, y así sucesivamente. Al igual que en una CDO líquida, éste se pagaría sobre un principal que disminuye a medida que ocurren los incumplimientos que son responsabilidad del tramo.

#### 2.6.4. Principios básicos para la valoración de tramos sintéticos de las CDOs

Ahora procedemos a presentar el enfoque general para valorar un tramo de CDO sintética con vencimiento  $T$ . Asumimos que hay  $i = 1, \dots, n$  deudores en la cartera subyacente. Sea  $N_i$  el valor nocional del deudor  $i$ , y su tasa de recuperación  $R_i$ . El valor nocional total de la cartera está dado por

$$N = \sum_{i=1}^n N_i. \quad (2.1)$$

Si denotamos los tiempos de incumplimiento de los deudores por  $\{\tau_i : i = 1, \dots, n\}$ , el proceso de pérdida total (acumulada) de la cartera al tiempo  $t$ ,  $L(t)$  está dado por

$$L(t) = \sum_{i=1}^n N_i (1 - R_i) \mathbb{1}_{(\tau_i < t)}. \quad (2.2)$$



El proceso de pérdida porcentual  $l(t)$  está dado por

$$l(t) = \frac{L(t)}{N}. \quad (2.3)$$

### Waterfall de un tramo de una CDO sintética

El mecanismo para introducir la subordinación estructural en un tramo de una CDO sintética no es una cascada en el sentido tradicional. No existen reglas que determinen cómo deben pagarse los flujos de intereses y de capital de la cartera de referencia a los tramos senior, mezzanine y equity. En cambio, tenemos una función de pago simple que define cómo la pérdida fraccional en el tramo depende del porcentaje acumulado de pérdidas por defecto  $l(T)$  en la cartera de referencia. Primero tenemos que definir otras dos cantidades:

1.  $k_\ell$ : Este es el punto de unión, también conocido como *subordinación* o *strike inferior* del tramo. Esta es la pérdida porcentual en la cartera de referencia por debajo de la cual la pérdida del tramo es cero. Tan pronto como  $l(T) > k_\ell$ , la pérdida del tramo no es cero.
2.  $k_u$ : Este es el punto de separación, también conocido como *strike superior* del tramo. La cantidad  $k_u - k_\ell$  es el ancho del tramo o *nocional porcentual del tramo*. Si  $l(T) \geq k_u$ , la pérdida del tramo es del 100 %.

Entre estos dos límites de pérdida del 0% del tramo en  $l(T) = k_\ell$  y pérdida del 100% del tramo en  $l(T) = k_u$ , la pérdida del tramo es una función lineal de  $l(T)$ . Si definimos la pérdida fraccional del tramo al tiempo  $t$  como  $l^{k_\ell, k_u}(t)$ , entonces el pago toma la forma que se muestra en la Figura 2.6.2. Matemáticamente, este pago se define como sigue

$$l^{k_\ell, k_u}(t) = \frac{(l(t) - k_\ell)^+ - (l(t) - k_u)^+}{k_u - k_\ell}. \quad (2.4)$$

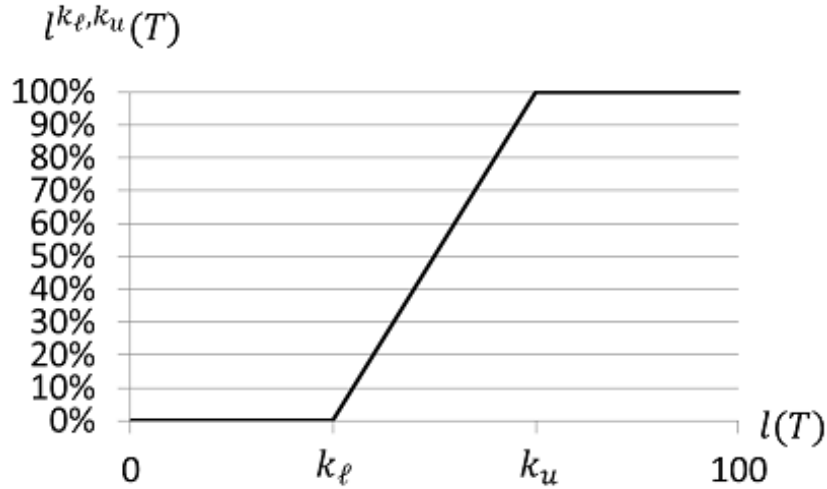


Figura 2.6.2 Pérdida fraccional del tramo al tiempo  $T$

Ahora veremos cómo la evolución a través del tiempo de  $l^{k_\ell, k_u}(t)$  determina los pagos en las etapas de protección y premium del tramo de CDO sintética.

### La etapa premium

La etapa premium es la serie de flujos de efectivo a los tiempos  $\{t_1, \dots, t_M = T\}$  ( $t = 1$  representa un año), realizada por el comprador de protección del tramo  $(k_\ell, k_u)$  al vendedor de la misma. Primero definamos el notional del tramo al tiempo  $t$  como

$$N^{k_\ell, k_u}(t) = N [k_u - k_\ell - (k_u - k_\ell) l^{k_\ell, k_u}(t)]. \quad (2.5)$$

Sea  $\pi^{k_\ell, k_u}$  el *spread* anual del tramo por \$1 de valor notional y  $D(t)$  el factor de descuento con la tasa de interés libre de riesgo al tiempo  $t$ . Entonces en cada tiempo  $t_j$  ( $j = 1, \dots, M$ ), el vendedor recibe el cupón

$$\pi^{k_\ell, k_u} \left[ D(t_j) (t_j - t_{j-1}) N^{k_\ell, k_u}(t_j) + \alpha \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1}) D(t) dN^{k_\ell, k_u}(t) \right],$$

donde  $\alpha = 1$  si una entidad incumple antes de la fecha de pago y se paga la prima devengada; y  $\alpha = 0$  en otro caso. El valor del notional del tramo en la fecha de pago  $t_j$  presenta decrementos

al ir ocurriendo los impagos que afecten al tramo. Los cupones en la etapa premium se pagan sobre el notional del tramo de acuerdo con un calendario que es típicamente trimestral y utiliza una convención de conteo de 360 días por año. Como resultado, el valor absoluto de los pagos de primas disminuye conforme  $l^{k_\ell, k_u}(t)$  incrementa.

Los pagos de las primas también tienen en cuenta el momento del incumplimiento de los créditos de la cartera de referencia. Como resultado, una pérdida por incumplimiento que se produce inmediatamente antes de un pago de prima no tiene efecto sobre la prima pagada. Sin embargo, si el incumplimiento y la pérdida se produjeron al comienzo del período de devengo, el cupón entero se basa en el notional reducido. Si se produce una pérdida entre los períodos de pago de la prima, el siguiente cupón se calcula sobre la exposición nominal proporcional durante el período del cupón. Como una aproximación, podemos suponer que las pérdidas se producen a mitad del período, de modo que el tramo notional durante este período es el promedio del notional principal y final. Entonces, la aproximación del cupón al tiempo  $t_j$  está dada por

$$\pi^{k_\ell, k_u} \left[ D(t_j) (t_j - t_{j-1}) N^{k_\ell, k_u}(t_j) + \frac{\alpha}{2} (N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})) (t - t_{j-1}) D(t_j) \right]. \quad (2.6)$$

### La etapa de protección

La etapa de protección consiste en los pagos de pérdidas realizados por el inversor al distribuidor para cubrir pérdidas por incumplimiento en el tramo. El tamaño de la pérdida es simplemente el cambio en el valor de la función de pérdida del tramo  $l^{k_\ell, k_u}(t)$ , que sólo cambiará si hay un evento de crédito en la cartera de referencia de tal modo que  $k_\ell < l(t) \leq k_u$ . El pago de la protección al tiempo  $t_j$  está dado por

$$D(t_j) (N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})). \quad (2.7)$$

Si suponemos que la cartera de referencia consta de  $n$  créditos que tienen todos el mismo valor nominal y tasa de recuperación  $R$ , entonces por (2.3), el porcentaje de pérdida en la cartera para cada incumplimiento viene dado por  $u = (1 - R)/n$ . Por lo tanto, el número de incumplimientos en la cartera antes de que ocurra una pérdida en el tramo es  $m = \lceil k_\ell/u \rceil$ , donde  $\lceil x \rceil$  es el primer entero mayor o igual a  $x$ . Igualmente, el número de incumplimientos requeridos para reducir el notional del tramo a cero viene dado por  $m = \lceil k_u/u \rceil$ .

Finalmente, es importante dejar claro que la cartera de referencia es simplemente una lista de entidades de referencia cuyos defectos afectan los pagos del tramo de la CDO sintética a través de la cascada. Se puede considerar como una cartera virtual de referencia.

**Ejemplo 2.6.1.** *Consideremos una cartera de referencia que consiste de 100 créditos, cada uno con una exposición de valor nominal de 10 millones de dólares, de manera que el nocional total de la cartera de referencia es de 1000 millones de dólares. También un tramo con un punto de unión al 3%, un ancho del 4%, un spread de 250pb y un vencimiento de cinco años.*

*Ahora consideramos los pagos si tenemos una serie de incumplimientos semestrales durante la vida del contrato. Se supone que los incumplimientos se producen inmediatamente antes de las fechas de pago de la prima ( $\alpha = 0$  en (2.6)). Asumimos una tasa de recuperación del 30% sobre el incumplimiento de cada crédito. Elegimos un escenario sin factor de descuento ( $D(t) = 1$ ), simplemente para permitirnos ver la mecánica de la CDO sintética. Los flujos de efectivo en este escenario se exponen en la Tabla 2.6.1.*

*La primer columna a destacar es la pérdida de cartera. Suponiendo 100 créditos y una tasa de recuperación del 30%, cada incumplimiento da lugar a una pérdida del  $(100\% - 30\%) / 100 = 0.70\%$  en la cartera de referencia. Por lo tanto, la pérdida acumulada aumenta en 0.70% a medida que se produce cada incumplimiento. Las pérdidas no afectan al nocional del tramo hasta que el número de incumplimientos sea igual a 5. En este punto, la pérdida acumulada de la cartera es del 3.5% y la pérdida del tramo es igual al  $(3.5\% - 3.0\%) / 4\% = 12.5\%$ . Por lo tanto, el nocional del tramo cae de 40 millones a  $40 \times (1.0 - 0.125) = 35.00$  millones, y el pago de cupones trimestrales se calcula sobre este nocional nuevo. El pago de la pérdida equivale a  $12.5\% \times \$40m = \$5m$ .*

**Tabla 2.6.1** *Pagos de pérdidas en el ejemplo anterior de tramo de CDO sintético*

Fecha de Pago	Número de incumplimientos	Pérdida de cartera (%)	Nocional del tramo (\$m)	Etapas premium	Etapas de protección
20 Mar 2017		0.00	40	250,000	
20 Jun 2017	1	0.70	40	250,000	
20 Sep 2017		0.70	40	250,000	
20 Dic 2017	2	1.40	40	250,000	
20 Mar 2018		1.40	40	250,000	
20 Jun 2018	3	2.10	40	250,000	
22 Sep 2018		2.10	40	250,000	
22 Dic 2018	4	2.80	40	250,000	
20 Mar 2019		2.80	40	250,000	
22 Jun 2019	5	3.50	35	218,750	-5,000,000
21 Sep 2019		3.50	35	218,750	
21 Dic 2019	6	4.20	28	175,000	-7,000,000
22 Mar 2020		4.20	28	175,000	
21 Jun 2020	7	4.90	21	131,250	-7,000,000
20 Sep 2020		4.90	21	131,250	
20 Dic 2020	8	5.60	14	87,500	-7,000,000
21 Mar 2021		5.60	14	87,500	
20 Jun 2021	9	6.30	7	43,750	-7,000,000
20 Sep 2021		6.30	7	43,750	
20 Dic 2021	10	7.00	0	0	-7,000,000
20 Mar 2022		7.00	0	0	

### Tramo senior

Las reglas de pago descritas anteriormente sólo se aplican a los tramos cuyo strike superior  $k_u$  está por debajo de la pérdida máxima de la cartera. Para los tramos con un  $k_u$  por encima de la pérdida máxima de cartera, la regla de pago debe adaptarse ligeramente. Para ver por qué, consideremos el caso de una cartera de 100 créditos, cada uno con nominal de 1 millón de dólares. Supongamos también que en esta cartera hemos emitido un tramo senior con  $k_\ell = 10\%$  y  $k_u = 100\%$ . Supongamos un escenario en el cual todos los 100 de los créditos de la cartera incumplen con un 40% de recuperación resultando una pérdida en la cartera del  $l(t) = 60\%$ . Si usamos las reglas anteriores, la pérdida del tramo es

$$\frac{(60\% - 10\%)^+ - (60\% - 100\%)^+}{100\% - 10\%} = \frac{50\%}{90\%} = 56\%.$$

No es una pérdida del 100% como podríamos esperar. De acuerdo con esta regla, el inversionista senior debe seguir recibiendo un pago de la prima del 44% del valor nominal original del tramo. Esto no tiene sentido ya que todos los créditos de la cartera han incumplido.

La solución es asegurar que el valor nocional del tramo senior se reduzca en una cantidad  $R/n$  después de cualquier incumplimiento en la cartera. Esto no significa que el inversionista senior pague una pérdida. Sin embargo, sí significa que los pagos de primas posteriores se reducirán. Al revisar el ejemplo, esto significaría que el strike superior  $k_u$  del tramo se reduciría de 100% a  $100\% - 40\% = 60\%$ . La pérdida del tramo es entonces

$$\frac{(60\% - 10\%)^+ - (60\% - 60\%)^+}{60\% - 10\%} = \frac{50\%}{50\%} = 100\%.$$

En la práctica, el efecto de este ajuste sólo se debe tener en cuenta para los tramos senior que tienen un punto de separación por encima de la pérdida máxima de la cartera. Tenga en cuenta que es bastante inusual encontrarse con tramos de este tipo. Sin embargo, si hacemos el comercio de un tramo, este efecto no debe ser ignorado.

### 2.6.5. Valuación a la par de un tramo sintético de una CDO

Sea  $B^{k_\ell, k_u}(t)$  el valor al tiempo  $t$  de los pagos de la etapa premium en el tramo  $(k_\ell, k_u)$ . Por lo visto anteriormente, el valor presente de los pagos de la etapa premium puede ser calculado como

$$\begin{aligned} B^{k_\ell, k_u}(0) &= \pi^{k_\ell, k_u} \mathbb{E} \left\{ \sum_{j=1}^M \left[ D(t_j) (t_j - t_{j-1}) N^{k_\ell, k_u}(t_j) + \alpha \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1}) D(t) dN^{k_\ell, k_u}(t) \right] \right\} \\ &\approx \pi^{k_\ell, k_u} \mathbb{E} \left\{ \sum_{j=1}^M \left[ D(t_j) (t_j - t_{j-1}) N^{k_\ell, k_u}(t_j) + \frac{\alpha}{2} (N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})) (t - t_{j-1}) D(t_j) \right] \right\} \end{aligned}$$

Sea  $A^{k_\ell, k_u}(t)$  el valor al tiempo  $t$  de los pagos de la etapa de protección en el tramo  $(k_\ell, k_u)$ .

Entonces,

$$A^{k_\ell, k_u}(0) = \sum_{j=1}^M D(t_j) \mathbb{E} [N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})].$$

El valor mark-to-market del tramo es  $MTM = \text{Etapa premium} - \text{Etapa de protección}$ . La idea principal de la valuación de CDOs sintéticas es calcular el spread  $\pi^{k_\ell, k_u}$  al momento en que se estipula la CDO sintética (en el momento cero) tal que hace cero el valor  $MTM$  del tramo, es decir,  $MTM = 0 \Rightarrow \text{Etapa premium} = \text{Etapa de protección}$ :

$$\begin{aligned} \pi^{k_\ell, k_u} \mathbb{E} \left\{ \sum_{j=1}^M \left[ D(t_j) (t_j - t_{j-1}) N^{k_\ell, k_u}(t_j) + \frac{\alpha}{2} (N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})) (t - t_{j-1}) D(t_j) \right] \right\} \\ = \sum_{j=1}^M D(t_j) \mathbb{E} [N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})]. \end{aligned}$$

Así llegamos a que,

$$\pi^{k_\ell, k_u} = \frac{\sum_{j=1}^M D(t_j) \mathbb{E} [N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})]}{\mathbb{E} \left\{ \sum_{j=1}^M \left[ D(t_j) (t_j - t_{j-1}) N^{k_\ell, k_u}(t_j) + \frac{\alpha}{2} (N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})) (t - t_{j-1}) D(t_j) \right] \right\}}.$$

Para obtener el valor de estas esperanzas, hay que observar en (2.5) que  $N^{k_\ell, k_u}(t)$  es puramente una función de la pérdida en el tramo  $l^{k_\ell, k_u}(t)$  (2.4). Por lo tanto, podemos reducir el problema de preciación a calcular esperanzas de la forma  $\mathbb{E} [(l(t) - k)^+]$  de la pérdida porcentual de cartera de referencia  $l(t)$ .

### 2.6.6. CDOs y cópulas

Ahora que hemos presentado en este capítulo lo que son las CDOs sintéticas, los tramos de CDOs sintéticas, su mecanismo, sus etapas y la forma de valuarlos. Llegamos a que el problema depreciación se puede reducir a calcular esperanzas de la forma  $\mathbb{E}[(l(t) - k)^+]$ , donde el proceso de pérdida porcentual de la cartera de referencia  $l(t)$  se presenta como una suma de variables aleatorias. Nuestro objetivo es poder obtener una aproximación por medio del método de Stein de las cantidades de la forma  $\mathbb{E}[(l(t) - k)^+]$ . Y un requisito en el método de Stein es tener una suma de variables aleatorias independientes.

Las CDOs son productos de correlación de crédito. Al trabajar con CDOs sintéticas se debe contar con una variedad de supuestos con respecto a las probabilidades de incumplimiento, las tasas de recuperación y el modelo de correlación.

Para reflejar relaciones de dependencia entre las variables, comúnmente se utiliza una cópula.

**Definición 2.6.2.** *Una cópula  $C$ , es una función de distribución multivariante cuyas distribuciones marginales se distribuyen uniformemente entre  $[0, 1]$ .*

**Teorema 2.6.3** (de Sklar). *Sea  $F$  una función de distribución  $n$ -dimensional con marginales  $F_1, \dots, F_n$ . Entonces, existe una cópula  $n$ -dimensional  $C$  tal que  $\forall X \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

*Si  $F_1, \dots, F_n$  son todas continuas, entonces  $C$  es única y está determinado en  $\text{ran}(F_1) \times \dots \times \text{ran}(F_n)$ .*

La selección de una u otra función cópula  $C$  suele estar condicionada por la forma en que ésta establece la relación de dependencia entre las variables.

## Glosario

**A la par:** Este término se aplica sobre todo a acciones y valores de renta fija. Un título se emite o negocia a la par cuando el precio efectivo coincide con su valor nominal.



**Activo:** Los activos, son el conjunto de sus bienes (inmuebles, mercaderías, . . . ) y derechos de cobro (lo que le deben).

**Activo libre de riesgo:** Activo financiero con un rendimiento conocido y cierto, emitido por una entidad u organismo sobre cuya capacidad para cumplir con sus obligaciones de pago no existen dudas. Tradicionalmente, el activo sin riesgo se asocia a la deuda pública a corto plazo emitida por los países desarrollados.

**Apalancamiento:** En términos generales, se refiere al efecto que el endeudamiento tiene sobre la rentabilidad. En los mercados de valores, hace referencia al hecho de que con pequeñas cantidades de dinero puede realizarse una inversión que se comporta como otra de un volumen muy superior.

**Bono:** Valor mobiliario que representa una parte proporcional de un préstamo. La sociedad emisora se compromete a retribuir a los tenedores de los valores con un interés que puede ser fijo o variable, y a devolver el capital aportado, en la fecha establecida para el vencimiento de los títulos. Los bonos los pueden emitir entidades públicas y privadas.

**Cobertura:** Operación con la que se pretende disminuir un riesgo realizando una inversión que lo contrarreste.

**Colateral:** Activo que sirve de garantía para respaldar la concesión de un crédito o una emisión de bonos.

**Contraparte:** Parte contraria que participa en una transacción financiera. En el caso de un comprador de un bien, su contraparte es el vendedor y viceversa.

**Corto:** Estar corto, se refiere a un proceso de venta anticipada cuando se espera que los precios bajen.

**Cupón:** Es el interés nominal que tiene derecho a recibir aquellos titulares de valores de renta fija. Normalmente se suele pagar tanto trimestral, semestral o anualmente, y de igual manera puede ser tanto variable como fijo.

**Devengo:** Es un derecho ganado que todavía no ha sido cobrado o una obligación contraída que todavía no ha sido pagada.

**Entidad soberana:** Es aquella que puede tomar sus propias decisiones sin pedirle autorización a nadie, es decir, es una entidad que solo depende de ella y de nadie más al momento de tomar

sus decisiones.

**Índice:** Tamaño o medida de una parte en relación con el todo. Por ejemplo, tamaño de un sector de la economía, el del valor de un grupo de acciones o de la bolsa en su totalidad, la cantidad de personas que trabajan, etc.

**Largo:** Un inversionista está largo cuando compra acciones y las conserva con la esperanza de que su precio suba.

**Liquidez:** Es la facilidad con que un activo (divisas, valores, depósitos, bienes muebles o inmuebles) puede convertirse en dinero.

**Mercado OTC:** Los mercados OTC son mercados extrabursátiles donde se negocian distintos instrumentos financieros directamente entre dos partes. Para ello se utilizan los contratos OTC, en los que las partes acuerdan la forma de liquidación de un instrumento. Los contratos OTC pueden formalizarse entre un banco de inversión y un cliente (normalmente una empresa que necesita financiación) o entre entidades financieras.

**Mercado primario:** Aquel en el que las entidades, empresas o bancos que necesitan financiación rápida, emiten nuevos valores de deuda como los bonos o valores de riesgo como las acciones.

**Mercado secundario:** Es un sector del mercado financiero dedicado a la compraventa de valores que ya han sido emitidos en una primera oferta pública o privada, en lo que se denomina el mercado primario.

**Nominal:** Cantidad nominal de un instrumento financiero que se utiliza para el cálculo de los pagos realizados en ese instrumento, sobre todo para los instrumentos que no tienen un valor nominal bien definido o valor nominal.

**Obligación:** Activo financiero que representa una deuda a largo plazo de una sociedad con el propietario de la obligación. Es decir, la sociedad que emite las obligaciones se compromete a pagar a quienes las adquieren, los obligacionistas, un interés determinado, así como a devolver el capital inicial prestado en la fecha establecida para el vencimiento de los títulos. Algunas obligaciones son convertibles, ya que pueden ser convertidas en acciones.

**Pasivo:** Contiene las deudas de la empresa, así como las obligaciones actuales que surgen de transacciones financieras pasadas.

**Periodo de gracia:** Se refiere al plazo especial que se concede a los prestatarios para comenzar a pagar su primer vencimiento.

**Precio de reembolso:** El que recibe el inversor en el momento de la amortización o vencimiento de un valor. Viene determinado en las condiciones iniciales de la emisión, y aunque suele coincidir con el valor nominal, puede ser superior o inferior, según los casos.

**Principal:** Monto originario de una deuda o inversión, por oposición al interés que de este se devenga.

**Punto base:** Un punto base o punto básico (**pb**) es la centésima parte de un punto porcentual, es decir,  $1\text{pb} = 0.01\%$ . Denota el cambio de ratio en un instrumento financiero o la diferencia entre dos tipos de interés, incluyendo el rendimiento de valores de renta fija.

**Ratio bursátil:** Indicador que permite comparar el comportamiento de las acciones, bien del mismo sector o de sectores diferentes.

**Rentabilidad:** Porcentaje de beneficio o pérdida que se obtendría al término del plazo de inversión de un activo.

**Riesgo:** Medida de la incertidumbre en el resultado de una inversión. Cuanta más certidumbre exista sobre el resultado menos riesgo tiene la inversión. Cuanto mayor es la incertidumbre sobre el resultado futuro mayor riesgo existe.

**Spread:** Es la diferencia entre el precio de compra y el de venta de un activo financiero. En un CDS representa la cuota o la prima del seguro pagado para transferir el riesgo de crédito asociado a una garantía.

**Título:** Documento que incorpora la titularidad de un derecho sobre una parte del capital de una sociedad (acción) o de un derecho de crédito (obligación, deuda pública, cheque, letra de cambio, etc.).

**Valor:** Es la cuantificación monetaria de un determinado activo o bien. De manera más amplia se define como la medida de la utilidad o satisfacción que tiene o proporciona un bien o servicio.

**Valor nominal:** Valor que consta en el título. Es un valor teórico que el emisor establece como precio unitario del activo. En el caso de los bonos y obligaciones, el valor nominal suele coincidir con el valor de reembolso.

**Waterfall o cascada:** Forma en la que un fondo de capital privado reparte los flujos que generan las empresas en las que invierte.

# Capítulo 3

## Método de Stein en la valuación de tramos de CDOs sintéticas

### 3.1. Introducción

Continuando con lo visto en el Capítulo 2, en una CDO sintética es importante contar con un método rápido y robusto para calcular los precios de los tramos. El término principal a calcular es  $\mathbb{E}[(l(t) - k)^+]$ , donde  $l(t)$  es la pérdida porcentual en una cartera de activos financieros susceptibles al riesgo de crédito/incumplimiento al tiempo  $t$ . En efecto, por lo visto en el capítulo anterior, queremos conocer la pérdida fraccional del tramo  $(k_\ell, k_u)$  en los tiempos de primas  $t_j$ :

$$l^{k_\ell, k_u}(t_j) = \frac{(l(t_j) - k_\ell)^+ - (l(t_j) - k_u)^+}{k_u - k_\ell}.$$

En la valuación de los pagos en las etapas de protección y premium del tramo utilizamos los valores esperados  $\mathbb{E}[l^{k_\ell, k_u}(t_j)]$ , de aquí que principalmente es de interés contar con una aproximación a los términos de la forma  $\mathbb{E}[(l(t) - k)^+]$ .

En este capítulo, utilizamos la aproximación normal y el término de corrección desarrollados en el Capítulo 1 para mostrar una manera de estimar el valor esperado de las pérdidas en los tramos de CDOs sintéticas. Presentaremos el enfoque general para valorar un tramo de una CDO sintética con vencimiento  $T$ , asumiendo que hay  $n$  deudores en la cartera subyacente. Denotamos como  $N_i$

el valor notional del deudor  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), y como  $R_i$  su tasa de recuperación.

Suponemos que el peso de cada nombre es idéntico, el proceso de pérdida porcentual se representa como

$$l(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (1 - R_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}.$$

Hacemos  $\xi_i := \frac{1}{n} (1 - R_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq T\}}$ ,  $\mu_i := \mathbb{E}(\xi_i)$ , y  $\sigma_i^2 := \text{Var}(\xi_i)$ . Luego definimos  $W := \sum_{i=1}^n X_i$  con  $X_i = \xi_i - \mu_i$ , entonces  $W$  es una variable aleatoria de media cero y varianza  $\sigma_W^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ .

La variable  $W$  satisface que,

$$\mathbb{E}[(l(T) - k)^+] = \mathbb{E}\left[\left(W - \tilde{k}\right)^+\right]$$

con  $\tilde{k} = k - \sum_{i=1}^n \mu_i$ .

Nos concentramos en la función call  $h_k(x) = (x - k)^+$ , la cual es una función Lipschitz con  $h'_k(x) = \mathbb{1}_{\{x > k\}}$ . Observemos que  $h''_k$  sólo existe en sentido de distribución. Entonces no se satisfacen las condiciones del Teorema 1.4.9 y ya no podemos acotar el error a través de la norma  $\left\|f_{h_k}^{(3)}\right\|$ . Como no se puede aplicar directamente el Teorema 1.4.9, para este caso necesitamos un análisis más sutil para la estimación del error.

El contenido de este capítulo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 3.2 presentamos los resultados teóricos del método de Stein que se utilizan con la función call; la Sección 3.3 se enfoca en explicar de manera detallada la fijación de precios eficientes en un solo tramo de una CDO sintética. En la sección 3.4 expresamos a manera de conclusión observaciones y complementos a este trabajo. Al final se incluye un apéndice con resultados técnicos.

## 3.2. Aproximación Normal de primer orden

A continuación, probaremos que el termino de corrección dado en (1.30) sigue siendo válido para la función call. Primero estudiaremos la estimación de orden cero para la función de indicadora. Luego, por un método similar, deducimos la estimación de primer orden para la función call.

### 3.2.1. Estimación de orden cero para la función indicadora

En la Proposición 1.4.5, la aproximación de orden cero se aplica a una función absolutamente continua. Para la función indicadora también existe una estimación conocida como la desigualdad de Berry-Esséen.

Aquí introducimos un método de estimación basado en la transformación de cero sesgo. Empezamos introduciendo estimaciones para la variable cero sesgada  $W^*$  ya que la transformación de cero sesgo nos permite trabajar mejor con funciones regulares.

**Lema 3.2.1.** *Sean  $a$  y  $b$  dos números reales tales que  $a \leq b$ . Entonces*

1.  $\mathbb{P}(a \leq W^* \leq b) \leq \frac{b-a}{2\sigma_W}$  (a esta desigualdad le llamamos "de concentración").

2. Denotemos por  $\mathbb{1}_b(x) := \mathbb{1}_{\{x \leq b\}}$ . Entonces

$$|\mathbb{P}(W^* \leq b) - N_{\sigma_W}(b)| \leq c_b \mathbb{E}[|W^* - W|] = \frac{c_b}{4\sigma_W^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3],$$

donde  $N_\sigma$  es la función de distribución de  $N(0, \sigma^2)$  y  $c_b$  es una constante definida como  $c_b = \|f_{\mathbb{1}_b}\| + \|xf'_{\mathbb{1}_b}\|$ .

**Demostración:** (1) Sea  $f'(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$  y  $f(x)$  la primitiva de  $f'(x)$  dada por  $f(x) = \int_{(a+b)/2}^x f'(t) dt$ .

Entonces  $|f(x)| \leq \frac{b-a}{2}$ . Por la Definición 1.4.1, se tiene que

$$\sigma_W^2 \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[a,b]}(W^*)] = \mathbb{E}[Wf(W)] \leq \sigma_W \frac{b-a}{2}.$$

(2) Consideremos la primitiva de  $\mathbb{1}_b$  dada por  $G_{\mathbb{1}_b}(x) = \int_b^x \mathbb{1}_b(t) dt = -(b-x)^+$ . Denotamos  $\tilde{G}_{\mathbb{1}_b}(x) = xG_{\mathbb{1}_b}(x)$ ; luego por (1.15) y (1.17),

$$\begin{aligned} \sigma_W^2 (\mathbb{E}[\mathbb{1}_b(W^*)] - \Phi_{\sigma_W}(\mathbb{1}_b)) &= \mathbb{E}[\tilde{G}_{\mathbb{1}_b}(W)] - \Phi_{\sigma_W}(\tilde{G}_{\mathbb{1}_b}) \\ &= \sigma_W^2 \mathbb{E}\left[f'_{\tilde{G}_{\mathbb{1}_b}}(W^*) - f'_{\tilde{G}_{\mathbb{1}_b}}(W)\right], \end{aligned}$$

así, por (1.24),

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(W^* \leq b) - N_{\sigma_W}(b)| &\leq \left\| f''_{\tilde{G}_{1_b}} \right\| \mathbb{E}[|W^* - W|] \\
&= \left\| f''_{\tilde{G}_{1_b}} \right\| \mathbb{E}[|X_I^* - X_I|] \\
&= \left\| f''_{\tilde{G}_{1_b}} \right\| \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_W^2} \mathbb{E}[|X_i^* - X_i|] \\
&= \left\| f''_{\tilde{G}_{1_b}} \right\| \frac{1}{4\sigma_W^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3].
\end{aligned}$$

Notese que  $f'_{\tilde{G}_{1_b}}(x) = x f_{1_b}(x)$ . Por lo tanto  $\left\| f''_{\tilde{G}_{1_b}} \right\| \leq \|f_{1_b}\| + \|x f'_{1_b}\| = c_b$ . Daremos la estimación de  $c_b$  en el Corolario 3.5.5 del Apéndice ■

La desigualdad de concentración muestra que  $\mathbb{P}(a \leq W \leq b)$  puede ser acotada por arriba por un término lineal en  $b - a$ . Daremos una prueba de esta desigualdad usando la transformación de cero sesgo.

El objetivo es acotar  $\mathbb{P}(a \leq W \leq b)$  por  $\mathbb{P}(a - \varepsilon \leq W^* \leq b + \varepsilon)$  para un pequeño error adecuado  $\varepsilon$ .

**Proposición 3.2.2.** *Sean  $a$  y  $b$  dos números reales tal que  $a \leq b$ . Entonces*

$$\mathbb{P}(a \leq W \leq b) \leq \frac{b - a}{\sigma_W} + \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3]}{\sigma_W^3} + \frac{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^4)^{\frac{1}{2}}}{2\sigma_W^2}. \quad (3.1)$$

**Demostración:** Por (1) en el Lema 3.2.1, para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $W^*$  satisface la desigualdad de concentración

$$\mathbb{P}(a - \varepsilon \leq W^* \leq b + \varepsilon) \leq \frac{1}{\sigma_W} \left( \varepsilon + \frac{b - a}{2} \right) := C_\varepsilon.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a - \varepsilon \leq W^* \leq b + \varepsilon) &\geq \mathbb{P}(a \leq W \leq b, |X_I - X_I^*| \leq \varepsilon) \\
&= \mathbb{P}(a \leq W \leq b) \mathbb{P}(|X_I - X_I^*| \leq \varepsilon) + Cov \left[ \mathbb{1}_{\{a \leq W \leq b\}}, \mathbb{1}_{\{|X_I - X_I^*| \leq \varepsilon\}} \right].
\end{aligned}$$

Por la Proposición 1.4.7

$$Cov \left[ \mathbb{1}_{\{a \leq W \leq b\}}, \mathbb{1}_{\{|X_I - X_I^*| \leq \varepsilon\}} \right] \geq -\frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^4}{\sigma_W^4} \right)^{\frac{1}{2}} := -B.$$



Observemos que  $B$  no depende de  $a, b$  y  $\epsilon$ . Por la desigualdad de Markov,

$$A_\epsilon := \mathbb{P}(|X_I - X_I^*| \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}[|W - W^*|].$$

Entonces  $A_\epsilon \mathbb{P}(a \leq W \leq b) \leq B + C_\epsilon$ . Finalmente, elegimos  $\epsilon$  tal que  $\epsilon = 2\mathbb{E}[|W - W^*|]$ . Luego  $A_\epsilon \geq \frac{1}{2}$ , y por la Proposición 1.4.3

$$\begin{aligned} C_\epsilon &= \frac{b-a}{2\sigma_W} + \frac{2\mathbb{E}[|W - W^*|]}{\sigma_W} \\ &= \frac{b-a}{2\sigma_W} + \frac{2\mathbb{E}[|X_I - X_I^*|]}{\sigma_W} \\ &= \frac{b-a}{2\sigma_W} + \frac{2}{\sigma_W} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_W^2} \mathbb{E}[|X_i - X_i^*|] \\ &= \frac{b-a}{2\sigma_W} + \frac{1}{2\sigma_W^3} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3], \end{aligned}$$

que implica (3.1). ■

En la demostración del resultado que queremos, también utilizamos la cota superior de  $\mathbb{P}(a \leq W^{(i)} \leq b)$ . Donde  $W^{(i)} := W - X_i$  también es una suma de variables aleatorias y (3.1) puede ser aplicado.

**Corolario 3.2.3.** *Para cualesquiera  $a$  y  $b$  dos números reales tal que  $a \leq b$  tenemos que*

$$\mathbb{P}(a \leq W^{(i)} \leq b) \leq 2 \left( \frac{b-a}{\sigma_W} + \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3]}{\sigma_W^3} + \frac{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^4)^{\frac{1}{2}}}{2\sigma_W^2} \right) + \frac{8\sigma_i}{\sigma_W}. \quad (3.2)$$

**Demostración:** Para todo  $\epsilon > 0$ ,  $\mathbb{P}(a \leq W^{(i)} \leq b, |X_i| \leq \epsilon) \leq \mathbb{P}(a - \epsilon \leq W \leq b + \epsilon)$ . Como  $W^{(i)}$  y  $X_i$  son independientes, por la desigualdad de Markov se tiene que

$$\mathbb{P}(a \leq W^{(i)} \leq b) \leq \frac{\mathbb{P}(a - \epsilon \leq W \leq b + \epsilon)}{1 - \frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{\epsilon}}.$$

Elegimos  $\epsilon = 2\mathbb{E}[|X_i|]$  y aplicamos la Proposición 3.2.2 para obtener el resultado. ■

Ahora veremos la desigualdad de concentración para la función indicadora. Utilizaremos la distancia entre  $W$  y  $W^*$ , junto con lo anterior para encontrar esta nueva desigualdad.

**Proposición 3.2.4.** Sea  $\mathbb{1}_b(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq b\}}$ , entonces

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(W \leq b) - N_{\sigma_W}(b)| &\leq \frac{c_b}{4\sigma_W^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3] + \sum_{i=1}^n \frac{2\sigma_i^3}{\sigma_W^3} \left( \frac{\mathbb{E}[|X_i^s|^3]}{4\sigma_i^3} + 4 \right) \\ &\quad + \frac{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^4)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_W^2} + \frac{2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3]}{\sigma_W^3}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $c_b = \|f_{\mathbb{1}_b}\| + \|xf'_{\mathbb{1}_b}\|$ .

**Demostración:** Descomponemos  $\mathbb{1}_b(W) - N_{\sigma_W}(b)$  como la suma de dos términos

$$\mathbb{1}_b(W) - N_{\sigma_W}(b) = (\mathbb{1}_b(W) - \mathbb{1}_b(W^*)) + (\mathbb{1}_b(W^*) - N_{\sigma_W}(b)).$$

La esperanza del segundo término del lado derecho ya ha sido estimada en el Lema 3.2.1. Para estimar la esperanza del primer término de la derecha, utilizamos la siguiente identidad:

$$|\mathbb{1}_{\{x+y \leq b\}} - \mathbb{1}_{\{x+z \leq b\}}| = \mathbb{1}_{\{b - \max(y,z) < x \leq b - \min(y,z)\}}.$$

Así,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} [|\mathbb{1}_b(W^{(I)} + X_I) - \mathbb{1}_b(W^{(I)} + X_I^*)|] \\ &= \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{\{b - \max(X_I, X_I^*) < W^{(I)} \leq b - \min(X_I, X_I^*)\}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{\{b - \max(X_I, X_I^*) < W^{(I)} \leq b - \min(X_I, X_I^*)\}} \mid I, X_I, X_I^* \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{P}(b - \max(X_I, X_I^*) < W^{(I)} \leq b - \min(X_I, X_I^*) \mid I, X_I, X_I^*) \right] \end{aligned}$$

Luego, por (3.2)

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \mathbb{P}(b - \max(X_I, X_I^*) < W^{(I)} \leq b - \min(X_I, X_I^*) \mid I, X_I, X_I^*) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ 2 \left( \frac{|X_I - X_I^*|}{\sigma_W} + \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3]}{\sigma_W^3} + \frac{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^4)^{\frac{1}{2}}}{2\sigma_W^2} \right) + \frac{8\sigma_I}{\sigma_W} \right] \\ &= 2 \left( \frac{1}{\sigma_W} \frac{1}{4\sigma_W^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3] + \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3]}{\sigma_W^3} + \frac{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^4)^{\frac{1}{2}}}{2\sigma_W^2} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_W^2} \frac{8\sigma_i}{\sigma_W}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.2.2. Estimación de primer orden de la función call

Como mencionabamos anteriormente, en la función call  $h_k(x) = (x - k)^+$ ,  $h_k''$  sólo existe en sentido de distribución y no se puede aplicar directamente el Teorema 1.4.9 acotando el error a través de la norma  $\|f_{h_k}^{(3)}\|$ . Entonces, debemos reescribir  $f_{h_k}''$  usando funciones más regulares por la ecuación de Stein.

**Proposición 3.2.5.** *Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes de media cero tal que  $\mathbb{E}[X_i^4]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , existe. Entonces*

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbb{E}[(W - k)^+] - \Phi_{\sigma_W}((x - k)^+) - \frac{k \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^3]}{3 \cdot 2\sigma_W^2} \cdot \frac{e^{-k^2/2\sigma_W^2}}{\sigma_W \sqrt{2\pi}} \right| \\
& \leq \frac{1}{2\sigma_W^2} \left| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^3] \right| \left( \frac{c_k}{2\sigma_W^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3] + B(W, k) \right) \\
& + \text{Var}[f_{h_k}''(W)]^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i^6 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{c_k}{6\sigma_W^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^4] + \frac{1}{\sigma_W^3} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mathbb{E}[|X_i^s|^4]}{3} + 2\sigma_i \mathbb{E}[|X_i^s|^3] \right) \\
& + \frac{1}{4\sigma_W^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3] \left( \frac{2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3]}{\sigma_W^3} + \frac{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^4)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_W^2} \right), \tag{3.4}
\end{aligned}$$

donde  $c_k = 2\|f_{h_k}'\| + \|xf_{h_k}''\|$  y  $B(W, k)$  es la cota superior de la aproximación normal de cero orden para la función indicadora  $\mathbb{1}_{\{W \leq k\}}$  dada en (3.3).

**Demostración:** De manera similar a la demostración del Teorema 1.4.9, descomponemos el error de aproximación corregido en la suma de tres términos. Aquí reemplazamos el término de la derivada de tercer orden por el término (3.7) que aparece a continuación, es decir,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[h_k(W)] - \Phi_{\sigma_W}(h_k) - \sigma_W^2 \mathbb{E}[X_I^*] \Phi_{\sigma_W}(f_{h_k}'') \\
& = \sigma_W^2 \mathbb{E}[X_I^*] (\mathbb{E}[f_{h_k}''(W)] - \Phi_{\sigma_W}(f_{h_k}'')) \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$- \sigma_W^2 \text{Cov}[f_{h_k}''(W), X_I] \tag{3.6}$$

$$+ \sigma_W^2 \mathbb{E}[f_{h_k}'(W^*) - f_{h_k}'(W) - f_{h_k}''(W)(X_I^* - X_I)]. \tag{3.7}$$

Debemos estimar cada término por separado.

Comenzaremos con el corrector  $C_{h_k} = \sigma_W^2 \mathbb{E}[X_I^*] \Phi_{\sigma_W}(f''_{h_k})$ , que en (1.35) demostramos que

$$C_{h_k} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^3]}{2\sigma_W^4} \Phi_{\sigma_W} \left[ \left( \frac{x^2}{3\sigma_W^2} - 1 \right) x h_k(x) \right].$$

En el caso particular considerando la función call,

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma_W} \left[ \left( \frac{x^2}{3\sigma_W^2} - 1 \right) x h_k(x) \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x^2}{3\sigma_W^2} - 1 \right) (x^2 - xk) \mathbb{1}_{\{x>k\}} \frac{e^{-x^2/2\sigma_W^2}}{\sigma_W \sqrt{2\pi}} dx \\ &= \int_k^{\infty} \left( \frac{x^4}{3\sigma_W^2} - x^2 - \frac{x^3 k}{3\sigma_W^2} + xk \right) \frac{e^{-x^2/2\sigma_W^2}}{\sigma_W \sqrt{2\pi}} dx \\ &= \left( \frac{-x^3 e^{-x^2/2\sigma_W^2}}{3\sigma_W \sqrt{2\pi}} + \frac{x^2 k e^{-x^2/2\sigma_W^2}}{3\sigma_W \sqrt{2\pi}} - \frac{k \sigma_W e^{-x^2/2\sigma_W^2}}{3\sqrt{2\pi}} \right) \Bigg|_{x=k}^{x=\infty} \\ &= \frac{k^3 e^{-k^2/2\sigma_W^2}}{3\sigma_W \sqrt{2\pi}} - \frac{k^2 k e^{-k^2/2\sigma_W^2}}{3\sigma_W \sqrt{2\pi}} + \frac{k \sigma_W e^{-k^2/2\sigma_W^2}}{3\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{k \sigma_W e^{-k^2/2\sigma_W^2}}{3\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Para acotar (3.5). Como  $f''_{h_k}$  no es diferenciable, usamos la ecuación de Stein

$$f'_h(x) = (x f_h(x) - h(x) + \Phi_{\sigma_W}(h)) / \sigma_W^2$$

para obtener

$$f''_{h_k}(x) = (f_{h_k}(x) + x f'_{h_k}(x) - h'_k(x)) / \sigma_W^2.$$

Sea  $g = f_{h_k} + x f'_{h_k}$ , luego como  $h'_k(x) = \mathbb{1}_{\{x>k\}} = 1 - \mathbb{1}_{\{x \leq k\}}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_W^2 |\mathbb{E}[f''_{h_k}(W)] - \Phi_{\sigma_W}(f''_{h_k})| &\leq |\mathbb{E}[g(W)] - \Phi_{\sigma_W}(g)| + |\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{W \leq k\}}] - N_{\sigma_W}(k)| \\ &\leq \frac{\|g'\|}{2\sigma_W^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^3|] + B(W, k) \end{aligned}$$

donde  $B(W, k)$  es el error en (3.3). Notemos que  $\|g'\| \leq 2 \|f'_{h_k}\| + \|x f''_{h_k}\| =: c_k$ . Daremos la estimación de  $c_k$  en el Corolario 3.5.7 en el Apéndice.

Por la Proposición 1.4.7, (3.6) es estimado por

$$\sigma_W^2 |Cov[f''_{h_k}(W), X_I]| \leq Var[f''_{h_k}(W)]^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i^6 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como  $f''_{h_k}$  es acotada, entonces también lo es  $Var [f''_{h_k}]$ .

Para (3.7), nuevamente usamos la ecuación de Stein para reescribir  $f'_{h_k}$ . Sea  $G(x) = xf_{h_k}(x)$  y observemos que  $G' = g$ , entonces

$$\begin{aligned} & \sigma_W^2 \mathbb{E} [|f'_{h_k}(W^*) - f'_{h_k}(W) - f''_{h_k}(W)(X_I^* - X_I)|] \\ & \leq \sigma_W^2 \mathbb{E} [|G(W^*) - G(W) - g(X_I^* - X_I)|] \\ & + \mathbb{E} [|h_k(W^*) - h_k(W) - h'_k(X_I^* - X_I)|]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

El primer término de (3.8) es acotado por  $\frac{1}{2}c_k \mathbb{E} [(X_I^* - X_I)^2]$ . Para el segundo término de (3.8), nótese que la función call satisface

$$|h_k(x+a) - h_k(x+b) - (a-b)h'_k(x+b)| \leq \mathbb{1}_{\{k-\max(a,b) \leq x \leq k-\min(a,b)\}} |a-b|.$$

Por lo tanto, usando la desigualdad de concentración, (3.2) y (1.25)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [|h_k(W^*) - h_k(W) - h'_k(X_I^* - X_I)|] \\ & \leq \mathbb{E} [|X_I^* - X_I| \mathbb{1}_{\{k-\max(X_I^*, X_I) \leq W^{(I)} \leq k-\min(X_I^*, X_I)\}}] \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{2\sigma_i^3}{\sigma_W^3} \mathbb{E} [|X_i^* - X_i| \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{k-\max(X_i^*, X_i) \leq W^{(i)} \leq k-\min(X_i^*, X_i)\}} | \bar{X}, \bar{X}^*]]] \\ & \leq \frac{1}{\sigma_W^3} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mathbb{E} [|X_i^s|^4]}{3} + 2\sigma_i \mathbb{E} [|X_i^s|^3] \right) \\ & + \frac{1}{4\sigma_W^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [|X_i^s|^3] \left( \frac{2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [|X_i^s|^3]}{\sigma_W^3} + \frac{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^4)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_W^2} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, combinando todas las estimaciones anteriores se obtiene (3.4). ■

### 3.3. Aplicación a tramos de CDOs sintéticas

Como mencionamos en la introducción del capítulo, en esta sección explicamos la aproximación normal para calcular la pérdida fraccional de tramos de CDO. Suponiendo una CDO con vencimiento  $T$ , que hay  $n$  deudores en la cartera subyacente y que el peso de cada nombre es idéntico. La

pérdida porcentual acumulada en la cartera hasta el tiempo  $T$  es,

$$l(T) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (1 - R_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq T\}},$$

donde  $\tau_i$  denota el tiempo de impago del  $i$ -ésimo nombre y  $R_i$  es su tasa de recuperación.

En cada tramo de una CDO existe una barrera superior  $k_u$  y una barrera inferior  $k_\ell$ . Como la etapa premium de un tramo de una CDO sintética se determina a partir de la pérdida esperada del tramo, el problema de valuación se puede reducir a calcular la esperanza de la función call, es decir,  $\mathbb{E}[(l(T) - k)^+]$  donde  $0 \leq k \leq 1$ .

En casos reales es común considerar un modelo de factor (cópula) para describir la correlación entre los tiempos de impagos de los individuos. Para ser más precisos, los tiempos  $\tau_i$  se suponen correlacionados por medio de un factor común  $U$ , y condicionando en  $U$  las indicadoras de los impagos  $\mathbb{1}_{\{\tau_i \leq T\}}$  son independientes. Si además suponemos que las tasas de recuperación  $R_i$  son independientes entre si, entonces  $l(T)$  es una suma de variables aleatorias condicionalmente independientes.

En este caso, para calcular  $\mathbb{E}[h_k(l(T))]$ , primero condicionamos la esperanza dado el factor  $U$ , es decir,  $H(U) = \mathbb{E}[h_k(l(T))|U]$ . Luego integramos con respecto a la densidad de  $U$  para obtener que

$$\mathbb{E}[h_k(l(T))] = \int_{\mathbb{R}} H(u) p_U(u) du,$$

donde  $p_U(u)$  es función de densidad de  $U$ .

En la práctica, la distribución condicional de cada tiempo  $\tau_i$  está dada como la función  $F^i(u)$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} F^i(u) du = p_i$ , donde  $p_i$  es la probabilidad de impago antes del tiempo  $T$ , es decir,  $p_i = \mathbb{P}(\tau_i \leq T)$ . La función  $F^i$  depende de  $p_i$  y también del factor de correlación.

### 3.3.1. Aproximación Normal

Para utilizar la aproximación Normal descrita anteriormente, debemos centralizar las variables del sumando de la pérdida porcentual acumulada.

Hacemos  $\xi_i := \frac{1}{n} (1 - R_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq T\}}$ , denotamos por  $\mu_i := \mathbb{E}(\xi_i)$ , y  $\sigma_i^2 := Var(\xi_i)$  la media y

la varianza de  $\xi_i$  respectivamente. Definimos  $W := \sum_{i=1}^n X_i$  con  $X_i = \xi_i - \mu_i$ , entonces  $W$  es de media cero y varianza  $\sigma_W^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ .

Luego,

$$\mathbb{E} [(l(T) - k)^+] = \mathbb{E} \left[ (W - \tilde{k})^+ \right]$$

con  $\tilde{k} = k - \sum_{i=1}^n \mu_i$ . Si las variables aleatorias  $X_i$  son independientes entre si, lo cual es cierto condicionando en el factor  $U$ , podemos aplicar la Proposición 3.2.5 para obtener la aproximación de primer orden de la esperanza deseada:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(l(T) - k)^+] &= \mathbb{E} \left[ (W - \tilde{k})^+ \right] \\ &\approx \Phi_{\sigma_W} \left( (x - \tilde{k})^+ \right) + \frac{\tilde{k}}{3} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E} [X_i^3]}{2\sigma_W^2} \cdot \frac{e^{-\tilde{k}^2/2\sigma_W^2}}{\sigma_W \sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

En este caso condicionado, los  $X_i$  y  $\tilde{k}$  dependen en el factor  $U$ .

### 3.3.2. Valuación de CDOs sintéticas

Como lo mencionamos en el Capítulo 2, para valuar una CDO sintética, se igualan las etapas premium y de protección:

$$\begin{aligned} \text{Etapa premium} &= \pi^{k_\ell, k_u} \mathbb{E} \left\{ \sum_{j=1}^M \left[ D(t_j) (t_j - t_{j-1}) N^{k_\ell, k_u}(t_j) + \alpha \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1}) D(t) dN^{k_\ell, k_u}(t) \right] \right\} \\ &\approx \pi^{k_\ell, k_u} \mathbb{E} \left\{ \sum_{j=1}^M [D(t_j) (t_j - t_{j-1}) N^{k_\ell, k_u}(t_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2} (N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})) (t - t_{j-1}) D(t_j)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{Etapa de protección} = \sum_{j=1}^M D(t_j) \mathbb{E} [N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})],$$

donde  $D(t)$  es el factor de descuento y  $N^{k_\ell, k_u}(t)$  es el notional del tramo  $(k_\ell, k_u)$  al tiempo  $t$ . Para obtener el spread del tramo,

$$\pi^{k_\ell, k_u} = \frac{\sum_{j=1}^M D(t_j) \mathbb{E} [N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})]}{\mathbb{E} \left\{ \sum_{j=1}^M \left[ D(t_j) (t_j - t_{j-1}) N^{k_\ell, k_u}(t_j) + \frac{\alpha}{2} (N^{k_\ell, k_u}(t_j) - N^{k_\ell, k_u}(t_{j-1})) (t - t_{j-1}) D(t_j) \right] \right\}}.$$

Los términos a aproximar son los de la forma

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [N^{k_\ell, k_u}(t)] &= N [k_u - k_\ell - (k_u - k_\ell) \mathbb{E} (l^{k_\ell, k_u}(t))] \\ &= N \left[ k_u - k_\ell - (k_u - k_\ell) \mathbb{E} \left( \frac{(l(t) - k_\ell)^+ - (l(t) - k_u)^+}{k_u - k_\ell} \right) \right] \\ &= N [k_u - k_\ell - \mathbb{E} ((l(t) - k_\ell)^+) + \mathbb{E} ((l(t) - k_u)^+)] \\ &= N \left[ k_u - k_\ell - \mathbb{E} \left( (W - \tilde{k}_\ell)^+ \right) + \mathbb{E} \left( (W - \tilde{k}_u)^+ \right) \right]. \end{aligned}$$

### 3.4. Conclusión

El swap de incumplimiento de crédito, CDS, es el más popular de los derivados de crédito y se utiliza como un seguro contra el riesgo de incumplimiento de una contraparte. Una obligación colateralizada por deuda, CDO, se conforma por una cartera o portafolio de instrumentos de deuda donde los flujos se reparten a diferentes categorías de inversionistas. En caso de que se utilice un CDS para “asegurar” una CDO, se denomina CDO sintética.

Este instrumento tiene la característica de transferir el riesgo de contraparte hacia el mercado, en particular, a los inversionistas que hayan adquirido los distintos tramos de de la CDO sintética. En este trabajo se propuso un mecanismo alternativo a los existentes (método de simulación de Montecarlo, saddle-point y de Cópulas) para la valuación de las pérdidas esperadas de los tramos que conforman la CDO sintética, a fin de obtener su precio a la par. El método propuesto considera la posibilidad de valorar las pérdidas esperadas por medio de una aproximación normal más un término de corrección, tal que el error corregido es de orden  $O(1/n)$  incluso en el caso asimétrico. El principal beneficio de utilizar este método de valuación radica en su sencillez para ser implementado.



El trabajo de investigación complementario a este consiste en la aproximación Poisson, donde la teoría es muy parecida a la expuesta en este trabajo. Chen [4] presenta una ecuación de Stein para el caso Poisson, se utiliza una transformación de cero sesgo y similarmente al caso Normal se desarrolla una aproximación con un corrector de primer orden.

### 3.5. Apéndice: Cotas superiores para $f_h^{(k)}$ con las funciones indicadora y call

Aquí desarrollaremos cotas superiores de  $f_{\mathbb{1}_b}$  y  $xf'_{\mathbb{1}_b}$  para acotar la constante  $c_b$  en el Lema 3.2.1, y las cotas superiores de  $f'_{h_k}$  y  $xf''_{h_k}$  para acotar la constante  $c_k$  en la Proposición 3.2.5.

Para esto, necesitamos introducir la función auxiliar

$$\tilde{f}_h(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int h(t) e^{-t^2/2\sigma^2} dt, & x > 0, \\ -\frac{e^{x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^x h(t) e^{-t^2/2\sigma^2} dt, & x < 0, \end{cases}$$

Que también se puede escribir de la siguiente forma

$$\tilde{f}_h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \mathbb{E} \left[ h(Z+x) e^{-Zx/\sigma^2} \mathbb{1}_{\{Z>0\}} \right], & x > 0, \\ -\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \mathbb{E} \left[ h(Z+x) e^{-Zx/\sigma^2} \mathbb{1}_{\{Z<0\}} \right], & x < 0 \end{cases}$$

donde  $Z \sim N(0, \sigma^2)$ . Si  $\mathbb{E}[|h(Z)|] < \infty$ , tenemos que  $\tilde{f}_h(0+) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^2} \mathbb{E} [h(Z) \mathbb{1}_{\{Z>0\}}]$  y  $\tilde{f}_h(0-) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^2} \mathbb{E} [h(Z) \mathbb{1}_{\{Z<0\}}]$ . Estos dos límites coinciden si y sólo si,  $\Phi_\sigma(h) = \mathbb{E}[h(Z)] = 0$ . Además, si  $\Phi_\sigma(h) = 0$ , entonces  $\tilde{f}_h$  coincide con la solución  $f_h$  de la ecuación de Stein.

A continuación veremos propiedades de la función  $\tilde{f}_h$ .

**Lema 3.5.1.** Si  $|h(x)| \leq g(x)$  y si  $g(x)/|x|$  es decreciente cuando  $x > 0$  y creciente cuando  $x < 0$ , entonces

$$\left| \tilde{f}_h(x) \right| \leq \frac{g(x)}{|x|}.$$

**Demostración:** Cuando  $x > 0$ , tenemos que

$$\left| \tilde{f}_h(x) \right| \leq \frac{e^{x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_x^\infty g(t) e^{-t^2/2\sigma^2} dt = -e^{x^2/2\sigma^2} \int_x^\infty \frac{g(t)}{t} d\left(e^{-t^2/2\sigma^2}\right).$$

La desigualdad se consigue por ser  $\frac{g(t)}{t}$  decreciente. Cuando  $x < 0$ , la prueba es similar. ■

Enseguida daremos cotas para  $\tilde{f}_h$  y  $\tilde{f}'_h$  cuando  $h$  es una función acotada. La función indicadora  $\mathbb{1}_\alpha(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq \alpha\}}$  satisface la condición de ser acotada con  $c_0 = 1$ .

**Proposición 3.5.2.** *Sea  $h$  una función acotada y sea  $c_0 = \|h\|$ . Entonces, para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,*

$$\left| \tilde{f}_h(x) \right| \leq \sqrt{2\pi}c_0/2\sigma, \quad \left| \tilde{f}'_h(x) \right| \leq 2c_0/\sigma^2.$$

**Demostración:** Como  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \tilde{f}_1(x) = \pm\sqrt{2\pi}/2\sigma$  y  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \tilde{f}_1(x) = 0$ , sólo necesitamos demostrar que  $\tilde{f}_1$  es decreciente cuando  $x > 0$  y cuando  $x < 0$  respectivamente. Haciendo  $h = g \equiv 1$  en el Lema 3.5.1, obtenemos que  $\left| x\tilde{f}_1(x) \right| \leq 1$ . Entonces

$$\tilde{f}'_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} (x\tilde{f}_1(x) - 1) \leq 0, & x > 0, \\ -\frac{1}{\sigma^2} (1 - x\tilde{f}_1(x)) \leq 0, & x < 0. \end{cases}$$

Luego  $\left| \tilde{f}_1(x) \right| \leq \sqrt{2\pi}/2\sigma$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , lo cual implica la primer desigualdad. Para la segunda desigualdad, utilizando que  $\tilde{f}'_h(x) = \frac{1}{\sigma^2} (x\tilde{f}_h(x) - h(x))$ , junto con las desigualdades  $\left| x\tilde{f}_h(x) \right| \leq \left| c_0x\tilde{f}_1(x) \right| \leq c_0$  y  $|h(x)| \leq c_0$ , obtenemos que  $\left| \tilde{f}'_1(x) \right| \leq 2c_0/\sigma^2$ . ■

El siguiente Lema es útil para calcular  $\left\| x\tilde{f}_{\mathbb{1}_\alpha} \right\|$ . El argumento que utilizamos es que las funciones polinomiales crecen más lento que las funciones exponenciales.

**Lema 3.5.3.** *Sea  $Z \sim N(0, \sigma^2)$ . Entonces*

$$\begin{aligned} x\mathbb{E} \left[ e^{-Zx/\sigma^2} \mathbb{1}_{\{Z>0\}} \right] &\leq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} & \text{si } x > 0, \\ |x|\mathbb{E} \left[ e^{-Zx/\sigma^2} \mathbb{1}_{\{Z<0\}} \right] &\leq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} & \text{si } x \leq 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Para cualesquiera enteros no negativos  $\ell$  y  $m$  que satisfagan  $\ell \leq m$ ,

$$\begin{cases} \mathbb{E} \left[ x^\ell Z^m e^{-Zx/\sigma^2} \mathbb{1}_{\{Z>0\}} \right] \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\ell\sigma^2}{e} \right)^\ell \mathbb{E} \left[ |Z|^{m-\ell} \right], & x > 0; \\ \mathbb{E} \left[ |x|^\ell |Z|^m e^{-Zx/\sigma^2} \mathbb{1}_{\{Z<0\}} \right] \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\ell\sigma^2}{e} \right)^\ell \mathbb{E} \left[ |Z|^{m-\ell} \right], & x \leq 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

**Demostración:** Cuando  $x > 0$ , notemos que  $x\mathbb{E} \left[ e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right] = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} x \tilde{f}_1(x)$ , como en este caso  $c_0 = 1$ , se obtiene la primer desigualdad en (3.9), similarmente sucede con la segunda desigualdad.

Para (3.10), se considera la función  $f(y) = y^\ell e^{-\frac{y}{\sigma^2}}$ , la cual alcanza su máximo valor en  $y = \ell\sigma^2$  y  $|f(y)| \leq \left(\frac{\ell\sigma^2}{e}\right)^\ell$ . Entonces, cuando  $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ Z^\ell x^\ell Z^{m-\ell} e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right] &\leq \left(\frac{\ell\sigma^2}{e}\right)^\ell \mathbb{E} \left[ Z^{m-\ell} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\ell\sigma^2}{e}\right)^\ell \mathbb{E} \left[ |Z|^{m-\ell} \right]. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene la segunda desigualdad en (3.10). ■

**Proposición 3.5.4.** Para cualquier número real  $\beta \in [0, 1]$ ,

$$\left| x \tilde{f}'_{\mathbf{1}_\alpha - \beta}(x) \right| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma e} + \frac{|\alpha|}{\sigma^2}. \quad (3.11)$$

**Demostración:** Cuando  $x > 0$ ,

$$\tilde{f}_{\mathbf{1}_\alpha - \beta}(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \mathbb{E} \left[ (\mathbf{1}_\alpha(x+Z) - \beta) e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right].$$

Entonces,

$$\tilde{f}'_{\mathbf{1}_\alpha - \beta}(x) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^3} \mathbb{E} \left[ (\mathbf{1}_\alpha(x+Z) - \beta) Z e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right] + \mathbf{1}_{\{x \leq \alpha\}} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2 - \alpha^2}{2\sigma^2}}.$$

Utilizando el Lema 3.5.3 con  $\ell = m = 1$ , y que  $\|\mathbf{1}_\alpha - \beta\| \leq 1$ , se obtiene que

$$\left| x \mathbb{E} \left[ (\mathbf{1}_\alpha(x+Z) - \beta) Z e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right] \right| \leq \frac{\sigma^2}{2e}.$$

Además,  $x \mathbf{1}_{\{x \leq \alpha\}} e^{-\frac{x^2 - \alpha^2}{2\sigma^2}} \leq |\alpha|$ . Así, combinando estas dos desigualdades obtenemos (3.11). ■

Con estos resultados podemos calcular estimaciones sobre  $f_{\mathbf{1}_\alpha}$  usando la función auxiliar  $\tilde{f}_{\mathbf{1}_\alpha}$ .

**Corolario 3.5.5.** Considerando la función indicadora  $\mathbf{1}_\alpha(x) = \mathbf{1}_{\{x \leq \alpha\}}$ ,

$$\|f_{\mathbf{1}_\alpha}\| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma}, \quad \|f'_{\mathbf{1}_\alpha}\| \leq \frac{2}{\sigma^2}, \quad \|x f'_{\mathbf{1}_\alpha}\| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma e} + \frac{|\alpha|}{\sigma^2}.$$

**Demostración:** Notemos que

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{1}_\alpha}(x) &= \frac{e^{x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \int_x^\infty (\mathbb{1}_\alpha(t) - \Phi_\sigma(\mathbb{1}_\alpha)) e^{-t^2/2\sigma^2} dt \\ &= \tilde{f}_{\mathbb{1}_\alpha - N_\sigma(\alpha)}(x). \end{aligned}$$

Sea  $\bar{\mathbb{1}}_\alpha = \mathbb{1}_\alpha - N_\sigma(\alpha)$ . Como  $\|\bar{\mathbb{1}}_\alpha\| \leq 1$ , podemos aplicar la Proposición 3.5.2 para obtener las primeras dos desigualdades, y la tercer desigualdad se sigue de la Proposición 3.5.4. ■

Ahora consideremos funciones con derivada acotada, cuyo incremento es a lo más lineal. La función call satisface esta propiedad.

**Proposición 3.5.6.** *Sea  $h$  una función absolutamente continua en  $\mathbb{R}$ .*

1. *Sea  $c_1 = |h(0)|$  y suponga que  $c_0 = \|h'\| < \infty$ . Entonces*

$$\left| \tilde{f}_h(x) \right| \leq \frac{\sqrt{2\pi}c_1}{2\sigma} + 2c_0, \quad \left| \tilde{f}'_h(x) \right| \leq \frac{\sqrt{2\pi}c_0}{\sigma} \left(1 + \frac{1}{2e}\right) + \frac{c_1}{\sigma^2}.$$

2. *Si además,  $h'$  es localmente de variación finita y tiene un número finito de saltos, escribimos  $h'$  como  $h' = g_1 + g_2$ , donde  $g_1$  es la parte continua de  $h'$  y  $g_2$  es la parte de saltos puros de la forma*

$$g_2(x) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i (\mathbb{1}_{\mu_i} - \beta_i).$$

*Suponemos que  $c_3 = \|g'_1\| < \infty$  y  $c_4 = \|g_1\|$ . Entonces*

$$\begin{aligned} \left| x \tilde{f}''_h(x) \right| &\leq c_3 + \frac{\sqrt{2\pi}c_4}{2\sigma e} + \sum_{i=1}^N |\epsilon_i| \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma e} + \frac{|\mu_i|}{\sigma^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{e\sigma} \left( \frac{c_1}{\sigma} + \sqrt{2\pi}c_0 + \frac{2\sqrt{2\pi}c_0}{e} \right). \end{aligned}$$

**Demostración:** Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  tenemos que  $|h(x)| \leq c_1 + c_0|x|$ . Probaremos las desigualdades para el caso cuando  $x > 0$ , el caso  $x < 0$  se sigue por simetría.

1. Por (3.9) y (3.10) se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \tilde{f}_h(x) \right| &\leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \mathbb{E} \left[ (c_1 + c_0 Z + c_0 x) e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right] \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \left( \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{2} \mathbb{E} [|Z|] + c_0 \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \right) \leq \frac{\sqrt{2\pi} c_1}{2\sigma} + 2c_0 \end{aligned}$$

ya que  $\mathbb{E} [|Z|] = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$ . Tomando la derivada,

$$\tilde{f}'_h(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \mathbb{E} \left[ h'(Z+x) e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right] - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^3} \mathbb{E} \left[ Zh(Z+x) e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right]. \quad (3.12)$$

Por un argumento similar llegamos a que

$$\begin{aligned} \left| \tilde{f}'_h(x) \right| &\leq \frac{\sqrt{2\pi} c_0}{2\sigma} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^3} \mathbb{E} \left[ Z(c_1 + c_0 Z + c_0 x) e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right] \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi} c_0}{2\sigma} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^3} \left( \frac{c_0 \sigma^2}{2} + \frac{c_0 \sigma^2}{2e} + \frac{c_1 \sigma}{\sqrt{2\pi}} \right) = \frac{\sqrt{2\pi} c_0}{\sigma} \left( 1 + \frac{1}{2e} \right) + \frac{c_1}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

2. Primero, por (3.12)

$$\tilde{f}''_h(x) = \tilde{f}'_{h'}(x) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^3} \mathbb{E} \left[ Zh'(Z+x) e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right] + \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^5} \mathbb{E} \left[ Z^2 h(Z+x) e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right].$$

Por la linealidad de  $\tilde{f}_h$  con respecto a  $h$ , sabemos que

$$\tilde{f}'_{h'}(x) = \tilde{f}'_{g_1}(x) + \sum_{i=1}^N \epsilon_i \tilde{f}'_{\mathbf{1}_{\mu_i - \beta_i}}.$$

Entonces (3.12) y la Proposición 3.5.4 implican que

$$\begin{aligned} \left| x \tilde{f}'_{h'}(x) \right| &\leq \left| x \tilde{f}'_{g_1}(x) \right| + \sum_{i=1}^N |\epsilon_i| \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma e} + \frac{|\mu_i|}{\sigma^2} \right) \\ &\leq c_3 + \frac{\sqrt{2\pi} c_4}{2\sigma e} + \sum_{i=1}^N |\epsilon_i| \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma e} + \frac{|\mu_i|}{\sigma^2} \right). \end{aligned}$$

Calculando las cotas de los otros términos de una manera similar obtenemos que

$$\left| x \mathbb{E} \left[ Zh'(Z+x) e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right] \right| \leq \frac{c_0 \sigma^2}{2e}$$

y

$$\left| x \mathbb{E} \left[ Z^2 h(Z+x) e^{-Zx/\sigma^2} \mathbf{1}_{\{Z>0\}} \right] \right| \leq \frac{c_0 \sigma^4}{2e} + \frac{2c_0 \sigma^4}{e^2} + \frac{c_1 \sigma^3}{\sqrt{2\pi} e}.$$

Con estas desigualdades tenemos que

$$\begin{aligned} \left| x \widetilde{f''}_h(x) \right| &\leq c_3 + \frac{\sqrt{2\pi}c_4}{2\sigma e} + \sum_{i=1}^N |\epsilon_i| \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma e} + \frac{|\mu_i|}{\sigma^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{e\sigma} \left( \frac{c_1}{\sigma} + \sqrt{2\pi}c_0 + \frac{2\sqrt{2\pi}c_0}{e} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Aplicando esta proposición con la función call llegamos al siguiente resultado.

**Corolario 3.5.7.** *Sea  $h_k = (x - k)^+$ . Entonces*

$$\|f_{h_k}\| \leq 2 + \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} c_1,$$

donde  $c_1 = |(-k)^+ - \bar{c}|$  y  $\bar{c} = \Phi_\sigma((x - k)^+) = \sigma^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/2\sigma^2} - k(1 - \Phi_\sigma(k))$ . Además

$$\|f'_{h_k}\| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \left( 1 + \frac{1}{2e} \right) + \frac{c_1}{\sigma^2}$$

y

$$|x f''_{h_k}| \leq \frac{c_1}{e\sigma^2} + \frac{|k|}{\sigma^2} + \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sigma e} \left( 1 + \frac{1}{e} \right).$$

**Demostración:** Se tiene que  $f_{h_k} = \widetilde{f}_{\bar{h}_k}$  donde  $\bar{h}_k = h_k - \bar{c}$ . Como  $\|\bar{h}'_k\| = 1$  y  $c_1 = |\bar{h}_k(0)| = |(-k)^+ - \bar{c}|$ , aplicando la Proposición 3.5.6 obtenemos la primer desigualdad. En este caso como  $g_1(x) = \mathbb{1}_{\{x > k\}}$ ,

$$c_3 = \|g'_1\| = 0$$

y

$$c_4 = \|g_1\| = 1. \quad \blacksquare$$

# Bibliografía

- [1] Barbour, A. and Chen, L.: *An Introduction to Stein's Method, Lecture Notes Series, Vol. 4. Singapore University Press. National University of Singapore (2005).*
- [2] Barbour, A. and Chen, L.: *Stein's Method and Applications, Lecture Note Series, Vol. 5. Singapore University Press. National University of Singapore (2005).*
- [3] Chatterjee, S.: *A short survey of Stein's Method.* Stanford University (2014).
- [4] Chen, L.: *Poisson approximation for dependent trials.* University of Singapore (1975).
- [5] Chen, L., Goldstein, L. and Shao, Q.: *Probability and Its Applications. Normal Approximation by Stein's Method.* Springer Heidelberg Dordrecht London New York (2011).
- [6] Chen, L. and Shao, Q.: *Stein's Method for Normal Approximation. An Introduction to Stein's Method, Vol. IV,1-59, Lecture Notes Series, IMS. Singapore University Press and World Scientific Publishing.* National University of Singapore (2005).
- [7] Diener, F. and Diener, M.: *Asymptotics of price oscillations of a European call option in a tree model.* Math. Finance 14, 271–293 (2004).
- [8] El Karoui, N. and Jiao, Y.: *Stein's method and zero bias transformation for CDO tranche pricing.* (2008).
- [9] El Karoui, N., Jiao, Y. and Kurtz, D.: *Gauss and Poisson approximation: applications to CDOs tranche pricing.* (2008).

- 
- [10] Goldstein, L. and Reinert, G.: *Stein's Method and the Zero Bias Transformation with Application to Simple Random Sampling*. University of Southern California (1997).
- [11] Goldstein, L.:  *$L^1$  bounds in normal approximation*. *Ann. Probab. Vol. 35, 1888-1930*. University of Southern California (2007).
- [12] Hull, J.: *Options, futures and other derivatives. 8th Edition*. University of Toronto (2012).
- [13] Hull, J. and White, A.: *Valuation of a CDO and an  $n^{\text{th}}$  to default CDS without Monte Carlo simulation*. University of Toronto (2004).
- [14] Jones, S. and Hensher, D.: *Advances in Credit Risk Modelling and Corporate Bankruptcy Prediction*. Cambridge University Press (2008).
- [15] Lucas, D., Goodman, L. and Fabozzi, F.: *Collateralized Debt Obligations. Structures and Analysis 2nd Edition*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey (2006).
- [16] McDonald, R.: *Derivatives Markets. 2nd Edition*. Northwestern University (2006).
- [17] Mounfield, C.: *Synthetic CDOs. Modeling, Valuation and Risk Management*. Cambridge University Press (2009).
- [18] O'Kane, D.: *Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivatives*. John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester (2008).
- [19] Petrov, V.: *Sums of Independent Random Variables*. Springer-Verlag (1975).
- [20] Raič, M.: *A multivariate CLT for decomposable random vectors with finite second moment*. *Journal of Theoretical Probability*, 17, 573–603. University of Ljubljana, Slovenia (2004).
- [21] Raič, M.: *Normal approximations by Stein's method*. In: Mrvar, A. (ed.) *Proceedings of the Seventh Young Statisticians Meeting. Metodološki zvezki*, 21, 71–97. University of Ljubljana, Slovenia (2003).
- [22] Ross, N.: *Fundamentals of Stein's Method*. University of California (2011).



- 
- [23] Ross, S. and Peköz, E.: *A Second Course in Probability*. Boston, MA. Spring (2007).
- [24] Stein, C.: *A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. II: Probab. theory, 583–602*. Berkeley, California (1972).
- [25] Stein, C.: *Approximate Computation of Espectations*. Hayward, California (1986).
- [26] Stroock, D.: *Probability theory, an analytic view*. Cambridge University Press.(2000).
- [27] Tavakoli, J.: *Structure Finance & Collateralized Debt Obligations. New Developments in Cash & Syntetic Securitization*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey (2008).