CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

Operadores Multilineales p-Sumantes

Tesis

que como requisito parcial

para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

PRESENTA:

Jorge Carlos Angulo López

Directora de Tesis:

Dra. Maite Fernández Unzueta

29 de Octubre de 2010 Guanajuato, Gto. México

A mi Familia

Índice general

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a la Dra. Maite Fernández Unzueta por haber aceptado ser mi asesora teniendo muy poco conocimiento, por no decir nulo, sobre mi persona. Quiero agradecerle no sólo la libertad que me brindó para llevar a cabo este trabajo, sino también que su visión crítica me ayudo a darme cuenta que siempre se puede dar un poco más.

Al Dr. Fernando Galaz Fontes y a la Dra. Berta Gamboa de Buen por las correcciones hechas a este trabajo, siempre con la intención de perfeccionarlo.

Al Dr. Carlos Bosch Giral y al Dr. Salvador Pérez Esteva por haber aceptado ser parte del grupo de sinodales y por sus comentarios acerca de este trabajo.

Agradezco al CONACyT por la beca de doctorado otorgada y por el apoyo brindado a través del proyecto P48363-F. De igual manera agradezco al CIMAT por haberme apoyado económicamente en el proceso final de escritura de este trabajo y durante el período de revisión del mismo.

A todos mis amigos quienes hicieron que mi estancia en el CIMAT fuera mucho más agradable y placentera.

A mi esposa Cris quien hace más de cinco años aceptó sin dudar en acompañarme en esta experiencia, sacrificando no sólo el alejarse de la familia sino también el crecer profesionalmente y sin la cual todo esto no hubiera sido posible. También quiero agradecer a mi familia; a mis padres Gaspar y Oliva, a mis hermanos Alfonso y Carolina por su cariño, su comprensión y por apoyarme cuando decidí hace ya algunos años estudiar Matemáticas.

Introducción

El estudio de los operadores lineales absolutamente p-sumantes tiene su origen en la tesis doctoral de A. Grothendieck [Gro] de 1955. Sin embargo fue hasta 1967 que A. Pietsch [Pie] logró aislar claramente esta clase de operadores lineales y establecer muchas de sus propiedades fundamentales.

Desde entonces la clase de los operadores lineales absolutamente p-sumantes ha mostrado su importancia gracias a su variedad de aplicaciones; desde ser una útil herramienta para enfrentar muchas preguntas fundamentales sobre los espacios de funciones continuas y los espacios de funciones p-integrables (véase por ejemplo el trabajo de J. Lindenstrauss y A. Pelczyńsky de 1968 "Absolutely Summing Operators in $\mathcal{L}_p$-Spaces and their Application"), hasta hacer serias incursiones en otras áreas del Análisis, como lo muestra el trabajo de A. Pelczyńsky "Banach Spaces of Analytic Functions and Absolutely Summing Operators".

A principio de los 80's se comenzó con el desarrollo del concepto de operador multilineal absolutamente p-sumante, motivado, según algunos autores, por el hecho de que los operadores lineales absolutamente p-sumantes fueron protagonistas del resurgimiento general de la teoría de los espacios de Banach a finales de los 60's, así como por el desarrollo exitoso de la teoría de ideales de operadores lineales (véase por ejemplo el trabajo de A. Pietsch[Pie1] "Operator Ideals").

Las primeras generalizaciones multilineales del concepto de operador lineal absolutamente p-sumante aparecen en el artículo de A. Pietsch [Pie2] de 1983, el cual es considerado, por varios autores, el punto de partida de la teoría multilineal absolutamente p-sumante. En este artículo se introducen dos clases de operadores multilineales p-sumantes: los operadores multilineales *absolutamente p-sumantes* y los operadores multilineales *p-dominados*.

Además de estas dos primeras generalizaciones multilineales, en los últimos años han aparecido otras más. Entre éstas podemos mencionar a los operadores multilineales *múltiples p-sumantes* introducidos de manera independiente por F. Bombal et al. en [BPGV] y por M.C. Matos en [Mat2] (en este último artículo con el nombre de operadores multilineales completamente p-sumantes); a los operadores multilineales *fuertemente p-sumantes* introducidos por V. Dimant en [Dim] y al ideal de composición $\Pi_p \circ \mathcal{L}$ introducido por G. Botelho et al. en [BPR].

La razón principal por la cual han aparecido varias generalizaciones multilineales radica en el hecho de que cada una de éstas tiene un comportamiento que podría decirse no es completamente satisfactorio, en el sentido de que aunque satisfacen algunos de los análogos multilineales de los resultados conocidos de la teoría lineal p-sumante, dejan de satisfacer otros.

Un ejemplo de esto es la clase de los operadores multilineales p-dominados introducida en [Pie2], cuyo nombre se debe al hecho de que satisface un análogo multilineal del llamado "Teorema de Dominación" de la teoría lineal p-sumante (véase el Teorema 1.19 y [Mat1, Teorema 2.2]). Sin embargo, esta misma clase no satisface el análogo multilineal del llamado "Teorema de Grothendieck", una propiedad fundamental de la teoría lineal p-sumante (véase el Teorema 1.13 y [MT, Pags. 207,208]).

Teniendo en cuenta que las topologías débiles asociadas a las transformaciones no lineales, no son en general, vectoriales mi asesora la Dra. Maite Fernández Unzueta concibió una nueva generalización del concepto de operador lineal absolutamente p-sumante. El objetivo general de esta tesis es el de desarrollar el estudio de los operadores multilineales que quedan definidos por esta generalización. En adelante nos referiremos a ellos como **operadores multilineales p-sumantes** (Definición 2.1).

Probaremos que esta nueva clase es, en principio, una generalización más satisfactoria que las previamente mencionadas, ya que ésta, a diferencia de las otras, satisface en su gran mayoría análogos multilineales de las primeras propiedades elementales y fundamentales de la teoría lineal p-sumante. En la sección 1.3 hacemos una recopilación de estas propiedades.

Cabe mencionar que para las otras generalizaciones multilineales p-sumantes no se tienen análogos multilineales para todas las propiedades presentadas en la sección 1.3, esto ya sea porque se ha demostrado que no las satisfacen o porque hasta ahora no se tiene conocimiento sobre si éstas se cumplen o no. En [Per1] puede encontrarse, por ejemplo, una recopilación de algunas de las propiedades multilineales que satisfacen y dejan de satisfacer algunas de estas generalizaciones ya conocidas.

Como este trabajo consiste en estudiar esta nueva clase de operador multilineal continuo, en el capítulo I recolectamos los resultados básicos sobre la teoría multilineal de operadores necesarios para el claro entendimiento del mismo. En la primera sección del capítulo establecemos la notación que usaremos a lo largo de todo el trabajo. En la segunda sección enunciamos los resultados bien conocidos acerca del producto tensorial entre espacios de Banach que nos serán de utilidad. En la última sección, hacemos una breve recopilación sobre los resultados básicos de la teoría de los operadores lineales absolutamente p-sumantes, con la intención no sólo de proveer una referencia rápida sobre esta teoría bien conocida, sino también con la intención de mostrar cómo la teoría multilineal generada por esta nueva noción de operador multilineal p-sumante se desarrolla a la par que su análoga lineal.

Es en el capítulo II donde se inicia el estudio del concepto de **operador multilineal p-sumante**. Comenzamos este capítulo dando varias caracterizaciones para esta nueva clase (Proposición 2.5) que resultan ser herramientas útiles al momento de establecer las propiedades elementales de los operadores multilineales p-sumantes. También, mostramos la posición de esta nueva clase con respecto de las clases multilineales p-sumantes mencionadas anteriormente (Teorema 2.19). Finalmente vemos, utilizando una generalización de las normas tensoriales Chevet-Saphar, la importante relación que existe entre la clase de los operadores multilineales p-sumantes y la teoría de normas tensoriales de orden arbitrario (Teorema 2.27).

Dos importantes teoremas para los operadores multilineales p-sumantes son el objeto de estudio en el capítulo III: *el Teorema de Dominación* y *el Teorema de Factorización*. Además de estos, en este capítulo introducimos la propiedad Estrella y la propiedad Corchete (Definición 3.12 y Definición 3.13 respectivamente), éstas nos proporcionan una útil conexión entre la teoría de los operadores multilineales p-sumantes y la teoría de los operadores lineales absolutamente p-sumantes. Utilizando esta conexión mostramos que los operadores multilineales p-sumantes satisfacen versiones multilineales del Teorema Débil de Dvoretzky-Rogers (Proposición 3.18) y del Teorema de Lindenstrauss-Pelczyńsky (Proposición 3.19).

CAPÍTULO I

Preliminares

En este capítulo fijaremos la notación y recordaremos las nociones y los resultados de la teoría multilineal de operadores, del producto tensorial entre espacios de Banach y de los operadores lineales absolutamente p-sumantes necesarios para el correcto desarrollo de este trabajo.

1.1. Notación

Como es bastante usual, denotaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, por $\mathbb{R}$ a los números reales y por $\mathbb{C}$ a los complejos.

Durante todo este trabajo m siempre denotará un número natural.

Si $A_1, \ldots, A_m$ son conjuntos, entonces denotaremos a los elementos del producto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_m$ como $\mathbf{a}$ (forma abreviada) o como $\left(a^1, \ldots, a^m\right)$ (forma extendida).
Supongamos que $m \geq 2$ y sean $r \in \{1, \ldots, m-1\}$ y $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$. Denotaremos por

$$A_1 \times \overset{[i_1,\ldots,i_r]}{\cdots} \times A_m$$

el producto cartesiano de los conjuntos A_i para $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Un elemento típico de este conjunto se denotará por $(a^1, \overset{[i_1,\ldots,i_r]}{\ldots}, a^m)$.

En este trabajo $W, W_1, \ldots, W_m, X, X_0, \ldots, X_m, Y, Y_0$ y Z serán espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Los espacios de Hilbert serán denotados por $H, H_1, \ldots, H_m$, y si x y y son elementos del espacio de Hilbert H, entonces escribiremos su producto interno como $\langle x, y \rangle_H$.

Para cada espacio de Banach X, B_X será su bola unitaria, esto es,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Si A es un subconjunto de X, entonces $\langle A \rangle$ denotará el subespacio de X generado por A. Denotaremos por X^* el dual topológico de X y escribiremos x^* para referirnos a un elemento típico de este espacio. Consideraremos sobre X^* la norma uniforme, es decir,

$$\|x^*\| = \sup \{|x^*(x)| : x \in B_X\}.$$

Si $u\colon X \longrightarrow Y$ es un operador lineal continuo entre espacios de Banach, entonces denotaremos al operador adjunto de u por u^*. Es decir, u^* es el operador lineal continuo definido como

$$\begin{array}{rccc} u^* : & Y^* & \longrightarrow & X^* \\ & y^* & \longmapsto & y^* \circ u \end{array}$$

que satisface $\|u^*\| = \|u\|$.

Diremos que un operador lineal $u\colon X \longrightarrow Y$ entre espacios de Banach es una isometría, si se cumple que $\|u(x)\| = \|x\|$ para toda $x \in X$. Si éste resulta ser un operador sobreyectivo, entonces diremos que es un isomorfismo isométrico. Además, en este último caso diremos que X es isométricamente isomorfo a Y y escribiremos $X \overset{1}{\equiv} Y$.

Denotaremos por $X^{**} := (X^*)^*$ el doble dual de X. La correspondencia

$$x \mapsto (x^* \mapsto x^*(x))$$

establece un encaje isométrico $X \hookrightarrow X^{**}$ que llamaremos j_X.

1.1.1. Espacios de Sucesiones y Espacios de Funciones

En [Car, DJT, EMT] se pueden encontrar las nociones y las propiedades elementales de los espacios de sucesiones y espacios de funciones que presentaremos en esta subsección.

Espacios de Sucesiones

Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces ℓ_p denotará al clásico espacio de Banach de sucesiones escalares p-sumables.
Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$.
Diremos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X es fuertemente p-sumable si la sucesión de escalares correspondiente $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece al espacio ℓ_p. Denotaremos

por $\ell_p^s(X)$ al espacio de Banach formado por tales sucesiones en X con la norma

$$\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^s = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^p\right)^{1/p}.$$

También, diremos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X es débilmente p-sumable si la sucesión de escalares $(x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece al espacio ℓ_p para todo $x^* \in X^*$. Denotaremos por $\ell_p^w(X)$ al espacio de Banach formado por tales sucesiones en X con la norma

$$\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^w = \sup\left\{\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)|^p\right)^{1/p} : x^* \in B_{X^*}\right\}.$$

En el caso $p=\infty$, $\ell_\infty^s(X)$ y $\ell_\infty^w(X)$ son iguales y ambos denotarán el espacio de Banach formado por todas las sucesiones acotadas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X con la norma

$$\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = \sup\left\{\|x_n\| : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces el espacio $\ell_p^s(X)$ es un subespacio lineal del espacio $\ell_p^w(X)$ y la inclusión es continua con norma 1, es decir,

$$\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^w \leq \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^s$$

para todo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p^s(X)$.

Espacios de Funciones

Si K es un espacio de Hausdorff compacto, entonces $C_{\mathbb{K}}(K)$ denotará el espacio de Banach formado por todas las funciones continuas $f\colon K \longrightarrow \mathbb{K}$ con la norma usual del supremo. Cuando no exista confusión sobre el recorrido de las funciones escribiremos solamente $C(K)$.

Si $1 \leq p \leq \infty$ y (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida positiva, entonces $L_p(\mu)$ denotará el espacio de Banach de funciones p-integrables. Si μ es la medida de contar sobre algún conjunto J, escribiremos ℓ_p^J en lugar de $L_p(\mu)$. Entonces, ℓ_∞^J consiste en todas las funciones acotadas $f\colon J \longrightarrow \mathbb{K}$ con $\|f\|_\infty = \sup\{|f(j)| : j\in J\}$.

Denotaremos por $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)$ al espacio de Banach formado por todos los operadores m-lineales continuos $T\colon X_1\times\cdots\times X_m \longrightarrow Y$ con la norma

$$\|T\| = \sup\left\{\left\|T\left(x^1,\ldots,x^m\right)\right\| : x^k \in B_{X_k}, k=1,\ldots,m\right\}.$$

En algunas ocasiones, cuando no exista confusión sobre el grado m, nos referiremos a los elementos de este espacio sólo como operadores multilineales.

En el caso en el que los espacios coincidan ($X = X_k$ para $k = 1, \ldots, m$) escribiremos $\mathcal{L}\left({}^m X; Y\right)$ en vez de $\mathcal{L}\left(X, \ldots, X; Y\right)$. Cuando el espacio Y sea el espacio de escalares $\mathbb{K}$, denotaremos por $\mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m\right)$ y por $\mathcal{L}\left({}^m X\right)$ a los espacios $\mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ y $\mathcal{L}\left({}^m X; Y\right)$ respectivamente. Además, en este último caso nos referiremos a los elementos de estos espacios como formas m-lineales o solamente formas multilineales (cuando no exista confusión sobre el grado m). Si $m = 1$ escribiremos $\mathcal{L}\left(X, Y\right)$ y X^* en vez de $\mathcal{L}\left({}^1 X; Y\right)$ y $\mathcal{L}\left({}^1 X\right)$ respectivamente.

Para un estudio detallado de la teoría general de los operadores multilineales recomendamos el libro de S. Dineen [Din].

Si A es un subconjunto de un espacio de Banach X, entonces $\mathcal{LIP}\left(A, Y\right)$ será el conjunto formado por todas las aplicaciones Lipschitz $f\colon A \longrightarrow Y$. Definimos por

$$\|f\|_{Lip(A,Y)} = \sup\left\{\frac{\|f(a) - f(a')\|}{\|a - a'\|} : a, a' \in A, a \neq a'\right\}.$$

Cuando no exista confusión sobre los conjuntos en consideración, solamente escribiremos $\|f\|_{Lip}$.
Si A es un subconjunto de un espacio de Banach X y $f \in \mathcal{LIP}\left(A, Y\right)$, entonces para cualesquiera $g \in \mathcal{LIP}\left(B, Y_0\right)$ y $h \in \mathcal{LIP}\left(C, Z\right)$, donde B es un subconjunto de Y tal que $f(A) \subset B$ y C es un subconjunto de Y_0 tal que $g(B) \subset C$, se tiene que $h \circ g \circ f \in \mathcal{LIP}\left(A, Z\right)$ y

$$\|h \circ g \circ f\|_{Lip} \leq \|h\|_{Lip} \cdot \|g\|_{Lip} \cdot \|f\|_{Lip}.$$

En el caso de que $A = X$ y la aplicación f es lineal, se tiene que $\|f\| = \|f\|_{Lip}$.

Además, si A es un subconjunto de X y $u\colon X \longrightarrow Y$ es un operador lineal continuo, entonces la función u restringida al conjunto A resulta ser un elemento de $\mathcal{LIP}\left(A, Y\right)$ tal que

$$\left\| u|_A \right\|_{Lip} \leq \|u\|.$$

Si A es un subconjunto de X tal que $0 \in A$, definimos por $\mathcal{LIP}_0\left(A, Y\right)$ al conjunto formado por todas las aplicaciones Lipschitz $f\colon A \longrightarrow Y$ tales que $f(0) = 0$. Entonces

$$\left(\mathcal{LIP}_0\left(A, Y\right), \|\cdot\|_{Lip(A,Y)}\right)$$

resulta ser un espacio de Banach (véase [Cob]).
En el libro de N. Weaver [Wea] se puede encontrar un estudio detallado de la teoría de las funciones Lipschitz.

1.1.2. Aplicaciones y Desigualdades

Aplicaciones

Dado un subconjunto A de X y una aplicación $f\colon A \longrightarrow Y$, denotaremos por $\hat{f}$ a la aplicación definida, del espacio de sucesiones en A, en el espacio de sucesiones en Y, como

$$\hat{f}\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Si $f_0\colon A \longrightarrow Y$ es una aplicación, entonces se tiene que

$$\hat{f} + \hat{f}_0 = \widehat{f + f_0}.$$

Si $g\colon B \longrightarrow Y_0$ y $h\colon C \longrightarrow Z$ son aplicaciones de tal manera que B es un subconjunto de Y tal que $f(A) \subset B$ y C es un subconjunto de Y_0 tal que $g(B) \subset C$, entonces se tiene que

$$\widehat{h \circ g \circ f} = \hat{h} \circ \hat{g} \circ \hat{f}.$$

En caso de que $A = X$ y la aplicación f resulte ser lineal, se tiene que la aplicación $\hat{f}$ también resulta serlo.

Supongamos que $m \geq 2$ y sean $r \in \{1, \ldots, m-1\}$ y $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$. Si $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ es un operador m-lineal continuo y $a^{i_k} \in X_{i_k}$ para $k = 1, \ldots, r$, entonces denotaremos por $T\left[a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}\right]$ al operador $(m-r)$-lineal definido como

$$\begin{array}{rccc} T\left[a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}\right]: & X_1 \times \overset{[i_1,\ldots,i_r]}{\cdots} \times X_m & \longrightarrow & Y \\ & \left(x^1, \overset{[i_1,\ldots,i_r]}{\ldots}, x^m\right) & \longmapsto & T\left(x^1, \ldots, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}, \ldots, x^m\right). \end{array}$$

Además, este operador multilineal resulta ser continuo y

$$\left\|T\left[a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}\right]\right\| \leq \|T\| \cdot \left\|a^{i_1}\right\| \cdots \left\|a^{i_r}\right\|.$$

Si $S\colon X_1 \times \overset{[i_1,\ldots,i_r]}{\cdots} \times X_m \longrightarrow Y$ es un operador $(m-r)$-lineal continuo y $x^*_{i_k} \in X^*_{i_k}$ para $k = 1, \ldots, r$, entonces denotaremos por $x^*_{i_1} \star \cdots \star x^*_{i_r} \star S$ al operador m-lineal definido como

$$x^*_{i_1} \star \cdots \star x^*_{i_r} \star S\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$$

de tal manera que

$$\left(x^1, \ldots, x^m\right) \longmapsto x^*_{i_1}\left(x^{i_1}\right) \cdots x^*_{i_r}\left(x^{i_r}\right) \cdot S(x^1, \overset{[i_1,\ldots,i_r]}{\ldots}, x^m).$$

Además, este operador multilineal es continuo y

$$\left\|x^*_{i_1} \star \cdots \star x^*_{i_r} \star S\right\| \leq \left\|x^*_{i_1}\right\| \cdots \left\|x^*_{i_r}\right\| \cdot \|S\|.$$

Desigualdades

En este trabajo utilizaremos las siguientes desigualdades clásicas de la teoría de los espacios de Banach. En [EMT, DJT] pueden verse las demostraciones.

La Desigualdad de Hölder
Sean $p, p' \in [1, \infty]$ exponentes conjugados, esto es,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Entonces si $f \in L_p(\mu)$ y $g \in L_{p'}(\mu)$, tenemos que $f \cdot g \in L_1(\mu)$ y

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_{p'}}.$$

La Desigualdad de Minkonwski
Sea $p \in [1, \infty]$, entonces para $f, g \in L_p(\mu)$ se tiene que

$$\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}.$$

La Desigualdad de Kinchin
Para todo $1 \leq p < \infty$, existen constantes positivas A_p, B_p tales que para cualquier sucesión escalar $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en ℓ_2 se tiene que

$$A_p \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \leq B_p \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right)^{1/2},$$

donde las funciones

$$\begin{array}{rccc} r_n: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \text{signo}\,(\text{sen }\ 2^n \pi t) \end{array}$$

son las funciones de Rademacher.

1.2. Producto Tensorial entre Espacios de Banach

El concepto de producto tensorial está estrechamente relacionado con el concepto de operador multilineal. En esta sección incluiremos los resultados bien conocidos que necesitaremos acerca del producto tensorial. Para un estudio detallado del producto tensorial entre espacios de Banach recomendamos ver [DF, Flo, Ryan].

Definición 1.1 *Para $E_1, \ldots, E_m$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, se define el producto tensorial entre estos espacios como un pareja $(E_1 \otimes \cdots \otimes E_m, \otimes)$, donde $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\otimes\colon E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$*

es una aplicación m-lineal, la cual satisface la siguiente propiedad:
Si F es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f\colon E_1\times\cdots\times E_m \longrightarrow F$ es una aplicación m-lineal, entonces existe una única aplicación lineal $f^L\colon E_1\otimes\cdots\otimes E_m \longrightarrow F$ de tal manera que

$$f^L\circ\otimes = f.$$

Para los elementos en la imagen de la aplicación $\otimes$ utilizaremos la notación

$$\otimes\left(a^1,\ldots,a^m\right) := a^1\otimes\cdots\otimes a^m$$

donde $\left(a^1,\ldots,a^m\right)\in E_1\times\cdots\times E_m$. Nos referiremos a estos como elementos diagonales.
Si $E_i = E$ para toda i, entonces denotaremos al producto tensorial de orden m por $\otimes^m E$ y denotaremos por $\otimes^m a$ a los elementos $a\otimes\cdots\otimes a$ donde $a\in E$.
También, denotaremos por $D\left(E_1,\ldots,E_m\right)$ el conjunto formado por todas las sucesiones del espacio $E_1\otimes\cdots\otimes E_m$ cuyos términos son elementos diagonales, es decir,

$$D\left(E_1,\ldots,E_m\right) := \left\{\left(a_n^1\otimes\cdots\otimes a_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}} : a_n^k\in E_k, n\in\mathbb{N}, k=1\ldots,m\right\}.$$

Como el producto tensorial $E_1\otimes\cdots\otimes E_m$ coincide con el espacio generado por el conjunto imagen de la aplicación $\otimes$, tenemos que todo $w\in E_1\otimes\cdots\otimes E_m$ se puede representar (no de manera única) de la forma

$$w=\sum_{i=1}^{n} a_i^1\otimes\cdots\otimes a_i^m,$$

para algún $n\in\mathbb{N}$ y para algunos $a_1^k,\ldots,a_n^k\in X_k$ donde $k=1,\ldots,m$.

Si $S_1\colon E_1\longrightarrow F_1,\ldots,S_m\colon E_m\longrightarrow F_m$ son aplicaciones lineales entre espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, entonces denotaremos por $S_1\otimes\cdots\otimes S_m$ a la única aplicación lineal

$$S_1\otimes\cdots\otimes S_m\colon E_1\otimes\cdots\otimes E_m \longrightarrow F_1\otimes\cdots\otimes F_m$$

que satisface que

$$\left(S_1\otimes\cdots\otimes S_m\right)\left(a^1\otimes\cdots\otimes a^m\right) = S_1\left(a^1\right)\otimes\cdots\otimes S_m\left(a^m\right)$$

para todo $a^k\in E_k$ donde $k=1\ldots,m$.

Si consideramos $X_1,\ldots,X_m$ espacios de Banach, resulta natural preguntarse por la existencia de alguna norma definida sobre el producto tensorial $X_1\otimes\cdots\otimes X_m$. En nuestro caso, estaremos interesados en aquellas normas tensoriales que hacen que la aplicación $\otimes$ sea continua.

Definición 1.2 *Se dice que una norma α en $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ es razonable si satisface las siguientes condiciones:*

1. $\alpha\left(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m\right) \leq \left\|x^1\right\| \cdots \|x^m\|$ *para todo* $x^1 \in X_1, \ldots, x^m \in X_m$.
2. *Si* $x_1^* \in X_1^*, \ldots, x_m^* \in X_m^*$, *entonces* $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_m^* \in (X_1 \otimes \cdots \otimes X_m, \alpha)^*$ *y su norma (como funcional) está acotada por* $\|x_1^*\| \cdots \|x_m^*\|$.

A partir de la condición 1 se establece la continuidad de la aplicación multilineal $\otimes$.

1.2.1. Producto Tensorial Inyectivo

La norma tensorial inyectiva, $\epsilon(\cdot)$, se define de la siguiente manera:

$$\epsilon\,(w) = \sup\left\{\left|\left(x_1^* \otimes \cdots \otimes x_m^*\right)(w)\right| : x_k^* \in B_{X_k^*}, k = 1, \ldots, m\right\}$$

para cada $w \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$.
Esta norma además de ser una norma razonable, resulta ser la menor de todas éstas.

Proposición 1.3 *Sean $X_1, \ldots, X_m$ espacios de Banach. Entonces*

1. $\epsilon(\cdot)$ *es una norma razonable.*
2. *Si α es cualquier otra norma razonable en $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$, entonces se tiene que*
$$\epsilon(w) \leq \alpha(w)$$
para todo $w \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$.

Definición 1.4 *Si $X_1, \ldots, X_m$ son espacios de Banach, la completación del espacio normado $(X_1 \otimes \cdots \otimes X_m, \epsilon)$ se define como el producto tensorial inyectivo de estos espacios y se denota por $X_1 \hat{\otimes}_\epsilon \cdots \hat{\otimes}_\epsilon X_m$. Si $X_i = X$ para toda i, denotamos al producto tensorial inyectivo de orden m por $\hat{\otimes}_\epsilon^m X$.*

1.2.2. Producto Tensorial Proyectivo

La norma proyectiva que definiremos a continuación, nos permite generalizar la propiedad descrita en la Definición 1.1 para el producto tensorial entre espacios vectoriales al contexto de espacios de Banach (véase el Teorema 1.7).
La norma proyectiva se define como

$$\pi\,(w) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \left\|x_i^1\right\| \cdots \|x_i^m\| : w = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m\right\}$$

para cada $w \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$.
Esta norma es la mayor de las normas razonables.

Proposición 1.5 *Sean $X_1, \dots, X_m$ espacios de Banach. Entonces*

1. *$\pi(\cdot)$ es una norma razonable.*

2. *Si β es cualquier otra norma razonable en $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$, entonces*

$$\beta(w) \leq \pi(w)$$

para todo $w \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$.

3. *Para todo $w \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ y para cualquier representación de éste de la forma*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m,$$

se tiene que

$$\pi(w) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(x_i^1, \dots, x_i^m\right) \right| : \varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m)} \right\}.$$

Definición 1.6 *Si $X_1, \dots, X_m$ son espacios de Banach, la completación del espacio normado $(X_1 \otimes \cdots \otimes X_m, \pi)$ se define como el producto tensorial proyectivo de estos espacios y se denota por $X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$. Si $X_i = X$ para toda i, denotamos al producto tensorial proyectivo de orden m por $\hat{\otimes}_\pi^m X$.*

Teorema 1.7 *Sean $X_1, \dots, X_m, Y$ espacios de Banach. Para cada operador multilineal $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ existe un único operador lineal continuo T^L en el espacio $\mathcal{L}\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m, Y\right)$ tal que*

$$T = T^L \circ \otimes.$$

Recíprocamente, para cada $u \in \mathcal{L}\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m, Y\right)$ la expresión

$$S(x^1, \dots, x^m) = u\left(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m\right)$$

determina un elemento de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ tal que $S^L = u$.
La correspondencia $T \leftrightarrow T^L$ establece un isomorfismo isométrico entre los espacios $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ y $\mathcal{L}\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m, Y\right)$.

Observación 1.8 *El teorema anterior afirma en particular que*

$$\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right)^* \overset{1}{\equiv} \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m).$$

Este isomorfismo isométrico nos permite hablar de la topología w^* en el espacio $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$. Esta topología será la inducida por el isomorfismo isométrico anterior cuando consideramos sobre $\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right)^*$ la topología w^*.

Proposición 1.9 *Sean* $S_1 \colon X_1 \longrightarrow Y_1, \ldots, S_m \colon X_m \longrightarrow Y_m$ *operadores lineales continuos entre espacios de Banach. Se cumple lo siguiente:*

(i) El operador lineal

$$S_1 \otimes \cdots \otimes S_m \colon X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow Y_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi Y_m,$$

el cual denotaremos por $S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m$*, resulta ser continuo y*

$$\|S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m\| \leq \|S_1\| \cdots \|S_m\| .$$

(ii) Si $T \in \mathcal{L}(Y_1, \ldots, Y_m; W)$ *y* $R \in \mathcal{L}(W, Z)$ *entonces se cumple que*

$$(R \circ T \circ (S_1, \ldots, S_m))^L = R \circ T^L \circ S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m \ .$$

1.3. Operadores Lineales p-Sumantes

Como el objetivo principal de este trabajo es el de introducir la clase de los operadores multilineales *p-sumantes* mediante la cual se generaliza el concepto de operador lineal absolutamente p-sumante, más de una vez durante este trabajo haremos mención sobre los resultados básicos de la teoría lineal p-sumante. La intención de esta sección es, en principio, la de proveer una referencia breve y rápida sobre los conceptos básicos de la teoría lineal p-sumante.

Más aún, esta sección nos permite mostrar el buen comportamiento que posee esta nueva clase de operador multilineal, ya que ésta satisface análogos multilineales para todos los resultados que enunciaremos en esta sección.

En [DJT] pueden encontrarse todas las demostraciones de los resultados enunciados en esta sección, así como un estudio completo sobre la teoría lineal p-sumante.

1.3.1. Definición

Definición 1.10 *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $u : X \to Y$ *un operador lineal entre espacios de Banach. Decimos que* u *es absolutamente* p*-sumante si existe una constante* $c \geq 0$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para cualesquiera* $x_1, \ldots, x_n$ *elementos de* X *se tiene que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} ||u\,(x_i)\,||^p \right)^{1/p} \leq c \cdot \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p \right)^{1/p} : x^* \in B_{X^*} \right\} \qquad (\Pi_p)\,.$$

Se denota por $\pi_p(u)$ a la menor c que satisface (Π_p), es decir,

$$\pi_p(u) := \text{ínf}\,\{c \geq 0 : c \text{ satisface } (\Pi_p)\}\,.$$

También, se denota por

$$\Pi_p(X, Y)$$

al conjunto de todos los operadores lineales absolutamente p-sumantes de X en Y.

• El conjunto $\Pi_p(X, Y)$ es un subespacio lineal del espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ y además $\pi_p(\cdot)$ define una norma sobre $\Pi_p(X, Y)$ tal que

$$||u|| \leq \pi_p(u)$$

para todo $u \in \Pi_p(X, Y)$.

Una Caracterización en Términos de Sucesiones

Observación 1.11 *Si $u\colon X \longrightarrow Y$ es un operador lineal continuo entre espacios de Banach, entonces la correspondencia*

$$\hat{u} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u\,(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

siempre induce un operador lineal bien definido y continuo $\hat{u} : \ell_p^w\,(X) \to \ell_p^w\,(Y)$, así como un operador lineal bien definido y continuo $\hat{u} : \ell_p^s\,(X) \to \ell_p^s\,(Y)$. En ambos casos, la norma de estos operadores es igual a $\|u\|$.

Algunas veces, este proceso puede producir un operador lineal bien definido $\hat{u}$ de $\ell_p^w\,(X)$ en $\ell_p^s\,(Y)$; tal caso se tiene precisamente cuando u es absolutamente p-sumante.

Proposición 1.12 *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces tenemos que*

$$u : X \to Y \text{ es absolutamente } p\text{-sumante si y sólo si } \hat{u}\left(\ell_p^w(X)\right) \subseteq \ell_p^s(Y).$$

En este caso,

$$||\hat{u} : \ell_p^w(X) \to \ell_p^s(Y)|| = \pi_p(u).$$

El Teorema de Grothendieck

Este teorema es uno de los resultados fundamentales de la teoría lineal de los operadores absolutamente p-sumantes.

Teorema 1.13 *Todo operador lineal continuo*

$$u : l_1 \to l_2$$

es absolutamente 1-sumante, es decir,

$$\Pi_1\left(\ell_1, \ell_2\right) = \mathcal{L}\left(\ell_1, \ell_2\right).$$

1.3.2. Ejemplos Básicos y Propiedades Elementales

Ejemplos Básicos

La importancia de los siguientes ejemplos radica en el hecho de que estos resultan ser el prototipo de operador lineal absolutamente p-sumante, esto es, salvo composiciones todo operador lineal absolutamente p-sumante es de este estilo.

• Sea K un espacio de Hausdorff compacto, sea μ una medida de Borel regular positiva sobre K y sea $1 \leq p < \infty$. El operador lineal canónico

$$j_p \colon C(K) \longrightarrow L_p(\mu) : f \mapsto f$$

es absolutamente p-sumante y $\pi_p(j_p) = \mu(K)^{1/p}$.

• Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y sea $1 \leq p < \infty$. El operador inclusión

$$i_p : L_\infty(\mu) \to L_p(\mu)$$

es absolutamente p-sumante y $\pi_p(i_p) = \mu(\Omega)^{1/p}$.

Propiedades Elementales

Proposición 1.14 *Sea $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operador de rango finito. Entonces u es absolutamente p-sumante para todo $1 \leq p < \infty$.*

Proposición 1.15 (Propiedad de Ideal de la clase Π_p)
Sea $1 \leq p < \infty$ y sea $v \in \Pi_p(X, Y)$. Entonces la composición de v con cualquier otro operador lineal acotado es absolutamente p-sumante. Más especificamente, Si X_0 y Y_0 son espacios de Banach entonces para cualesquiera $u \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$ y $w \in \mathcal{L}(X_0, X)$ tenemos que

$$u \circ v \circ w \in \Pi_p(X_0, Y_0)$$

y $\pi_p(u \circ v \circ w) \leq ||u|| \cdot \pi_p(v) \cdot ||w||$.

Proposición 1.16 (Inyectividad de la clase Π_p)
Si $i : Y \to Y_0$ es una isometría, entonces

$$v \in \Pi_p(X, Y) \text{ si y sólo si } i \circ v \in \Pi_p(X, Y_0).$$

En este caso tenemos que $\pi_p(i \circ v) = \pi_p(v)$.

Proposición 1.17 *Para cada $1 \leq p < \infty$, se tiene que $\Pi_p(X, Y)$ es un espacio de Banach con la norma $\pi_p(\cdot)$.*

Teorema 1.18 (Teorema de Inclusión)
Si $1 \leq p < q < \infty$, entonces

$$\Pi_p(X, Y) \subseteq \Pi_q(X, Y).$$

Más aún, para $u \in \Pi_p(X, Y)$ tenemos que $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$.

1.3.3. Dominación y Factorización

El hecho de que los operadores lineales canónicos

$$j_p\colon C(K) \longrightarrow L_p(\mu) \text{ y } i_p\colon L_\infty(\mu) \longrightarrow L_p(\mu)$$

sean el prototipo de operador lineal absolutamente p-sumante es una consecuencia de los siguientes dos teoremas fundamentales.

Teorema 1.19 (Teorema de Dominación para la clase Π_p)
Supongamos que $1 \leq p < \infty$, que $u : X \to Y$ es un operador lineal continuo entre espacios de Banach y que K es un subconjunto w^*-compacto y normante de B_{X^*}. Entonces u es absolutamente p-sumante si y sólo si existe una constante $c \geq 0$ y una medida de probabilidad regular de Borel μ sobre K, tal que para cada $x \in X$ se tiene que

$$||u\,(x)\,|| \leq c \cdot \left(\int_K |x^*\,(x)\,|^p \, d\mu\,(x^*) \right)^{1/p}.$$

En este caso, $\pi_p(u)$ es el ínfimo de todas las constantes c's para las cuales tal medida existe.

Si X es un espacio de Banach y K es un subconjunto normante de B_{X^*}, denotaremos por i_X al operador lineal

$$i_X\colon X \longrightarrow \ell_\infty^K$$

definido como

$$i_X\,(x)\,(x^*) = x^*\,(x)\,,$$

el cual resulta ser una isometría. Si además K es w^*-compacto, entonces i_X tiene su recorrido en el espacio $C(K)$; seguiremos denotando a esta isometría por

$$i_X\colon X \longrightarrow C(K).$$

Teorema 1.20 (Teorema de Factorización para la clase Π_p)
Sea $1 \leq p < \infty$, sean X y Y dos espacios de Banach, sea K un subconjunto w^*-compacto y normante de B_{X^*} y sea $B := B_{Y^*}$. Para todo operador lineal continuo $u : X \to Y$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) u es absolutamente p-sumante.

(ii) Existe una medida de probabilidad regular de Borel μ sobre K, un subespacio (cerrado) X_p de $L_p(\mu)$ y un operador lineal acotado $\hat{u} : X_p \to Y$ tal que

(a) $(j_p \circ i_X)(X) \subset X_p$

(b) $(\hat{u} \circ j_p \circ i_X)(x) = u(x) \quad \forall\, x \in X.$

En otras palabras, si $j_p^X : i_X(X) \longrightarrow X_p$ *es la restricción de* j_p *a* $i_X(X)$*, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \\
i_X(X) \arrow[r, "j_p^X"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & X_p \arrow[u, "\hat{u}"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
C(K) \arrow[r, "j_p"'] & L_p(\mu)\ .
\end{tikzcd}$$

(iii) Existe una medida de probabilidad regular de Borel μ *sobre* K *y un operador lineal acotado* $\tilde{u} : L_p(\mu) \to \ell_\infty^B$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[dd, "i_X"'] & Y \arrow[dr, "i_Y"] & \\
 & & \ell_\infty^B \\
C(K) \arrow[r, "j_p"'] & L_p(\mu)\ . \arrow[ur, "\tilde{u}"'] &
\end{tikzcd}$$

(iv) Existe un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) *y operadores lineales continuos* $\tilde{u} : L_p(\mu) \to \ \ell_\infty^B$ *y* $v : X \to L_\infty(\mu)$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[dd, "v"'] & Y \arrow[dr, "i_Y"] & \\
 & & \ell_\infty^B \\
L_\infty(\mu) \arrow[r, "i_p"'] & L_p(\mu)\ . \arrow[ur, "\tilde{u}"'] &
\end{tikzcd}$$

Más aún, podemos escoger μ *y* $\hat{u}$ *en (ii) o* μ *y* $\tilde{u}$ *en (iii) de tal manera que* $||\hat{u}|| = ||\tilde{u}|| = \pi_p(u)$*; en (iv) podemos escoger que* $||v|| = 1$ *y* $||\tilde{u}|| = \pi_p(u)$*.*

Algunas Consecuencias

Entre las consecuencias del Teorema de Dominación y del Teorema de Factorización se encuentran las siguientes:

Teorema 1.21 (Teorema Débil de Dvoretzky-Rogers)
Sea $1 \leq p < \infty$. Todo espacio de Banach X de dimensión infinita contiene una sucesión débilmente p-sumable que no es fuertemente p-sumable. Es decir, $id_X : X \longrightarrow X$ es absolutamente p-sumante si y sólo si X tiene dimensión finita.

Teorema 1.22 *Sea X un espacio de Banach y sea H un espacio de Hilbert. Si $u \in \mathcal{L}(X, H)$ es tal que u^* es q-sumante para algún $1 \leq q < \infty$, entonces u es 1-sumante y*

$$\pi_1(u) \leq A_1^{-1} \cdot B_q \cdot \pi_q(u^*),$$

donde A_1 y B_q son las constantes de la desigualdad de Kinchin (véase la sección 1.1.2).

Operadores Lineales p-Sumantes sobre $\mathcal{L}_p$-Espacios

El hecho de que la definición de operador lineal p-sumante involucre sólo un número finito de vectores a la vez, nos permite obtener una mejor comprensión de estos operadores lineales cuando tenemos un buen entendimiento de los subespacios de dimensión finita de los espacios de Banach involucrados.

Por ejemplo, los espacios $L_p(\mu)$ tienen la propiedad de que sus subespacios de dimensión finita estan siempre contenidos en una copia un poco distorsionada de algún ℓ_p^n. La clase de los $\mathcal{L}_p$-espacios generaliza este comportamiento de los espacios $L_p(\mu)$.

$\mathcal{L}_p$-Espacios

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $\lambda > 1$. El espacio de Banach X se dice que es un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-espacio si todo subespacio de dimensión finita E de X está contenido en un subespacio de dimensión finita F de X para el cual existe un isomorfismo $v \colon F \longrightarrow \ell_p^{dimF}$ con $\|v\| \cdot \|v^{-1}\| < \lambda$. Diremos que X es un $\mathcal{L}_p$-espacio si éste es un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-espacio para algún $\lambda > 1$.

Los $\mathcal{L}_p$-espacios nos permiten generalizar el Teorema de Grothendieck (Teorema 1.13).

Teorema 1.23 *Si X es un $\mathcal{L}_1$-espacio y Y es un $\mathcal{L}_2$-espacio, entonces todo operador lineal continuo $u \colon X \longrightarrow Y$ es 1-sumante, es decir,*

$$\Pi_1(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y).$$

Teorema 1.24 *Si X es un $\mathcal{L}_1$-espacio y Y es un espacio de Banach, entonces todo operador lineal 2-sumante $u \colon X \longrightarrow Y$ es 1-sumante, es decir,*

$$\Pi_1(X, Y) = \Pi_2(X, Y).$$

Cuando consideramos operadores lineales entre espacios de Hilbert se tiene que la clase de los operadores Hilbert-Schmidt es la misma que la clase de los operadores 2-sumantes. De hecho, se puede decir más acerca de esta relación.

Teorema 1.25 *Sea $1 \leq p < \infty$. Un operador lineal $u\colon H_1 \longrightarrow H_2$ es Hilbert-Schmidt si y sólo si es absolutamente p-sumante. Además, si $1 \leq p < 2$ entonces*

$$\pi_p(u) \leq K_G \cdot \|u\|_{HS}$$

y si $2 \leq p < \infty$ entonces

$$\pi_p(u) \leq \|u\|_{HS}\,,$$

donde K_G denota la constante de Grothendieck (véase [DJT, Teorema 1.14]) y $\|u\|_{HS}$ denota la norma Hilbert-Schmidt de u(véase [DJT, Proposición 4.9]).

CAPÍTULO II

Operadores Multilineales p-Sumantes

En este capítulo comenzamos propiamente el estudio de una nueva clase de operadores multilineales: la clase de *los operadores multilineales p-sumantes.* Ésta generaliza al contexto multilineal el concepto de operador lineal absolutamente p-sumante. En este capítulo mostramos las propiedades elementales que satisface esta nueva clase, así como la posición de la misma con respecto a las generalizaciones multilineales ya conocidas del concepto de operador lineal absolutamente p-sumante. También, mostramos la relación entre esta nueva clase de operadores multilineales y la teoría de normas tensoriales de orden arbitrario.

2.1. Definición y Propiedades Elementales

2.1.1. Definición y Ejemplos

A continuación establecemos con precisión la noción central de estudio: **los operadores multilineales p-sumantes**.

Definición 2.1 *Sean $1 \leq p < \infty$ y $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ un operador multilineal entre espacios de Banach. Decimos que T es p-sumante si existe una constante $c \geq 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ y para todo $u_1^k, \ldots, u_n^k, v_1^k, \ldots, v_n^k \in X_k$ con $1 \leq k \leq m$ se tiene que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right) \right\|^p \right)^{1/p} \leq c \cdot \sup \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right) \right|^p \right)^{1/p} \tag{2.1}$$

donde el supremo[1] *se toma sobre todos los elementos $\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)}$.*

[1] Cuando omitamos decir el conjunto sobre el que se toma el supremo, estaremos suponiendo que se está tomando sobre todos los elementos $\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)}$.

Denotaremos por $\|T\|_{s,p}$ a la menor c que satisface (2.1), es decir,

$$\|T\|_{s,p} := \text{ínf}\left\{c \geq 0 : c \text{ satisface } (2.1)\right\}.$$

También, denotaremos por

$$\mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$$

al conjunto formado por los operadores multilineales p-sumantes de $X_1 \times \cdots \times X_m$ en Y. Usaremos la notación $\mathcal{L}_s^p$ para referirnos a la clase de los operadores multilineales p-sumantes en general.
Comenzaremos con un par de observaciones.

Observaciones 2.2
• *En el caso cuando $m = 1$, la definición de p-sumante es equivalente a la definición de absolutamente p-sumante.*
• *Utilizando que los espacios $\mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m\right)$ y $\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right)^*$ son isométricamente isomorfos (véase la Observación 1.8), es inmediato que el supremo en el lado derecho de (2.1) es igual a*

$$\left\|\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m\right)_{i=1}^n - \left(v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^n\right\|_p^w, \tag{2.2}$$

donde a $\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m\right)_{i=1}^n$ y a $\left(v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^n$ los estamos considerando como elementos del espacio $\ell_p^w\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right)$. Entonces cuando sea necesario usaremos (2.2) en el lado derecho de (2.1) de manera indistinta.

Comenzaremos probando que el conjunto $\mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ es un subespacio lineal del espacio $\mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$, así como el hecho de que $\|\cdot\|_{s,p}$ es, en efecto, una norma sobre $\mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$.

Proposición 2.3 *Sean $1 \leq p < \infty$ y $X_1, \ldots, X_m, Y$ espacios de Banach. Entonces $\mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ y además, $\|\cdot\|_{s,p}$ define una norma sobre $\mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ tal que*

$$\|T\| \leq \|T\|_{s,p} \tag{2.3}$$

para todo $T \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$.

Demostración:
Primero observemos que si $T \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$, entonces (2.1) es válido para $\|T\|_{s,p}$ en vez de c, es decir, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^n \left\|T\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\qquad \leq \quad \|T\|_{s,p} \cdot \sup\left(\sum_{i=1}^n \left|\varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right|^p\right)^{1/p}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $u_1^k, \ldots, u_n^k, v_1^k, \ldots, v_n^k \in X_k$ con $1 \leq k \leq m$.

Ahora, si en (2.4) tomamos $n=1$ y $v_1^1=\cdots=v_1^m=0$ obtenemos que

$$\|T\| \leq \|T\|_{s,p}$$

y entonces $\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$ es un subconjunto de $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)$.
Veamos que $\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)$.
Sean $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$ y $T_1,T_2\in\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$.
Si $n\in\mathbb{N}$ y $u_1^k,\ldots,u_n^k,v_1^k,\ldots,v_n^k\in X_k$ con $1\leq k\leq m$, por la desigualdad de Minkowski y por el hecho de que $T_1,T_2\in\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^n \left\|(\lambda_1T_1+\lambda_2T_2)\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right)-(\lambda_1T_1+\lambda_2T_2)\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\
&\qquad\leq \left(\sum_{i=1}^n \left\|\lambda_1T_1\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right)-\lambda_1T_1\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\
&\qquad+ \left(\sum_{i=1}^n \left\|\lambda_2T_2\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right)-\lambda_2T_2\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\
&\qquad= |\lambda_1|\cdot\left(\sum_{i=1}^n \left\|T_1\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right)-T_1\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\
&\qquad+ |\lambda_2|\cdot\left(\sum_{i=1}^n \left\|T_2\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right)-T_2\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\
&\leq \left(|\lambda_1|\,\|T_1\|_{s,p}+|\lambda_2|\,\|T_2\|_{s,p}\right)\cdot\left\|\left(u_n^1\otimes\cdots\otimes u_n^m\right)_{i=1}^n-\left(v_n^1\otimes\cdots\otimes v_n^m\right)_{i=1}^n\right\|_p^w.
\end{aligned}$$

Entonces $\lambda_1T_1+\lambda_2T_2\in\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$ y además

$$\|\lambda_1T_1+\lambda_2T_2\|_{s,p}\leq|\lambda_1|\,\|T_1\|_{s,p}+|\lambda_2|\,\|T_2\|_{s,p}\,. \tag{2.5}$$

Por lo tanto $\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)$.
Para finalizar, veamos que $\|\cdot\|_{s,p}$ define una norma sobre $\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$.
(i) Si $T\in\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$, veamos que

$$\|T\|_{s,p}\geq 0 \qquad \text{y} \qquad \|T\|_{s,p}=0\Leftrightarrow T=0.$$

De la definición de $\|\cdot\|_{s,p}$ es claro que $\|T\|_{s,p}\geq 0$.
Supongamos que $\|T\|_{s,p}=0$, luego por (2.3) tenemos que $\|T\|=0$ y entonces $T=0$. Si $T=0$ es claro que $\|T\|_{s,p}=0$.
(ii) Veamos que si $\lambda\in\mathbb{K}$ y $T\in\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$ entonces

$$\|\lambda T\|_{s,p}=|\lambda|\,\|T\|_{s,p}\,.$$

Como el caso $\lambda=0$ es inmediato, supongamos que $\lambda\neq 0$.

De (2.5) tenemos que
$$\|\lambda T\|_{s,p} \leq |\lambda| \, \|T\|_{s,p}$$
y que
$$\|T\|_{s,p} = \left\|\lambda^{-1} \cdot \lambda T\right\|_{s,p} \leq \left|\lambda^{-1}\right| \|\lambda T\|_{s,p} .$$
Luego,
$$\|\lambda T\|_{s,p} = |\lambda| \, \|T\|_{s,p} .$$
(iii) La desigualdad del triángulo es un caso particular de (2.5).
Por lo tanto $\|\cdot\|_{s,p}$ define una norma sobre $\mathcal{L}_s^p(X_1, \ldots, X_m; Y)$. □

La proposición anterior, nos da herramientas para poder mostrar los primeros ejemplos de operadores multilineales p-sumantes.

Ejemplos 2.4

(a) Sea $m \in \mathbb{N}$, sean $X_1, \ldots, X_m$ espacios de Banach y sea $1 \leq p < \infty$. Toda forma multilineal $\varphi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)$ es p-sumante y $\|\varphi\|_{s,p} = \|\varphi\|$.

(b) Sea K un espacio de Hausdorff compacto, sea μ una medida positiva regular de Borel sobre K y sea $1 \leq p < \infty$. Cada $f \in L_p(\mu)$ define un operador de multiplicación m-lineal
$$\begin{array}{rccc} T_f: & C(K) \times \cdots \times C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & \left(g^1, \ldots, g^m\right) & \longmapsto & f \cdot g^1 \cdots g^m. \end{array}$$
Este operador es p-sumante y $\|T_f\|_{s,p}=\|f\|_{L_p(\mu)}$.

(c) Sea $1 \leq p < \infty$. Cada elemento $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ℓ_p define un operador diagonal m-lineal
$$\begin{array}{rccc} D_\lambda: & \ell_\infty \times \cdots \times \ell_\infty & \longrightarrow & \ell_p \\ & \left((a_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_n^m)_{n\in\mathbb{N}}\right) & \longmapsto & \left(\lambda_n \cdot a_n^1 \cdots a_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$
el cual es p-sumante y $\|D_\lambda\|_{s,p} = \|\lambda\|_{\ell_p}$.

Demostración:
(a) Este inciso se sigue de manera inmediata de la definición de operador multilineal p-sumante y de la desigualdad (2.3). □
(b) Para cada $w \in K$ denotaremos por δ_w al elemento de $B_{\mathcal{L}(^m C(K))}$ definido como
$$\begin{array}{rccc} \delta_w: & C(K) \times \cdots \times C(K) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \left(g^1, \ldots, g^m\right) & \longmapsto & g^1(w) \cdots g^m(w). \end{array}$$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $g_1^k, \ldots, g_n^k, h_1^k, \ldots, h_n^k \in C(K)$ con $1 \leq k \leq m$.
Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} \left\| T_f \left(g_i^1, \ldots, g_i^m \right) - T_f \left(h_i^1, \ldots, h_i^m \right) \right\|_{L_p(\mu)}^p \right)^{1/p} \\
= & \left(\sum_{i=1}^{n} \int_K \left| f(w) g_i^1(w) \cdots g_i^m(w) - f(w) h_i^1(w) \cdots h_i^m(w) \right|^p \, d\mu \right)^{1/p} \\
= & \left(\int_K |f(w)|^p \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \delta_w \left(g_i^1, \ldots, g_i^m \right) - \delta_w \left(h_i^1, \ldots, h_i^m \right) \right|^p \, d\mu \right)^{1/p} \\
\leq & \; \|f\|_{L_p(\mu)} \cdot \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}(^m C(K))}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \varphi \left(g_i^1, \ldots, g_i^m \right) - \varphi \left(h_i^1, \ldots, h_i^m \right) \right|^p \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Luego, T_f es un operador multilineal p-sumante y $\|T_f\|_{s,p} \leq \|f\|_{L_p(\mu)}$. Para obtener la igualdad de normas sólo necesitamos observar que

$$\|f\|_{L_p(\mu)} = \|T_f(1, \ldots, 1)\|_{L_p(\mu)} \leq \|T_f\| \leq \|T_f\|_{s,p},$$

donde la última desigualdad se sigue de la desigualdad (2.3). □
(c) La demostración es similar a la del inciso (b). □

2.1.2. Una caracterización de la clase $\mathcal{L}_s^p$

Una caracterización muy útil y ampliamente usada en la teoría lineal de los operadores absolutamente p-sumantes, es la que describe a estos operadores lineales como aquellos que envian sucesiones débilmente p-sumables en sucesiones fuertemente p-sumables[2]. En esta sección veremos que la clase de los operadores multilineales p-sumantes satisface una caracterización similar, la cual, en lo que resta de esta sección mostrará ser de gran utilidad.
Recordemos que si $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ y $T^L \colon X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \longrightarrow Y$ es la aplicación lineal asociada a T tal que

$$T^L \circ \otimes = T,$$

véase la Definición 1.1, entonces $\widehat{T^L}$ denota el operador lineal

$$\widehat{T^L} : (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left(T^L(w_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

donde $w_n \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (véase la sección 1.1.2). Para simplificar la notación denotaremos por $\hat{T}$ a la aplicación $\widehat{T^L}$.

[2]Véase la Proposición 1.12.

También, recordemos que $D\left(X_1, \ldots, X_m\right)$ denota el conjunto formado por todas las sucesiones con términos en la diagonal del espacio $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$, esto es,

$$D\left(X_1, \ldots, X_m\right)=\left\{\left(x_n^1 \otimes \cdots \otimes x_n^m\right)_{n \in \mathbb{N}}: x_n^k \in X_k \text{ con } 1 \leq k \leq m,\, n \in \mathbb{N}\right\} .$$

Entonces, denotaremos por $D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right)$ al espacio métrico formado por el conjunto $\ell_p^w\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right) \cap D\left(X_1, \ldots, X_m\right)$ junto con la métrica inducida sobre éste por el espacio $\ell_p^w\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right)$.

Proposición 2.5 *Sean $1 \leq p<\infty$ y $T \in \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m ; Y\right)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) T es p-sumante.

(ii) $\left.\hat{T}\right|_{D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right)}: D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right) \rightarrow \ell_p^s(Y)$ es Lipschitz.

(iii) $\left.\hat{T}\right|_{D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right)}: D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right) \rightarrow \ell_p^s(Y)$ es uniformemente continua.

(iv) La sucesión $\left(T\left(u_n^1, \ldots, u_n^m\right)-T\left(v_n^1, \ldots, v_n^m\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ pertenece a $\ell_p^s(Y)$ para cualesquiera dos elementos $\left(u_n^1 \otimes \cdots \otimes u_n^m\right)_{n \in \mathbb{N}}$ y $\left(v_n^1 \otimes \cdots \otimes v_n^m\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de $D\left(X_1, \ldots, X_m\right)$ tales que la sucesión $\left(u_n^1 \otimes \cdots \otimes u_n^m-v_n^1 \otimes \cdots \otimes v_n^m\right)_{n \in \mathbb{N}}$ pertenece al espacio $\ell_p^w\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right)$.

En este caso, $\|T\|_{s, p}=\left\|\left.\hat{T}\right|_{D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right)}\right\|_{Lip}$.

Demostración:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Como T es p-sumante, para cualesquiera dos elementos

$$\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m\right)_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \left(v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i \in \mathbb{N}}$$

de $D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^n\left\|T\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right)-T\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\quad\leq \|T\|_{s, p} \cdot \sup\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right)-\varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right|^p\right)^{1/p} \\
&\quad= \|T\|_{s, p} \cdot\left\|\left(u_n^1 \otimes \cdots \otimes u_n^m\right)_{n \in \mathbb{N}}-\left(v_n^1 \otimes \cdots \otimes v_n^m\right)_{n \in \mathbb{N}}\right\|_p^w . \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Entonces, de la desigualdad (2.6) obtenemos que $\left.\hat{T}\right|_{D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right)}$ es una función bien definida Lipschitz tal que $\left\|\left.\hat{T}\right|_{D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right)}\right\|_{Lip} \leq\|T\|_{s, p}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Es inmediato.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Como $\hat{T}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)}$ es uniformemente continua, podemos encontrar $\delta > 0$, tal que si $\left(u_n^1 \otimes \cdots \otimes u_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(v_n^1 \otimes \cdots \otimes v_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenecen a $D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right)$ y son tales que

$$\left\|\left(u_n^1 \otimes \cdots \otimes u_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}} - \left(v_n^1 \otimes \cdots \otimes v_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^w < \delta,$$

entonces

$$\left\|\left(T\left(u_n^1, \ldots, u_n^m\right) - T\left(v_n^1, \ldots, v_n^m\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^s \leq 1. \tag{2.7}$$

Sean $\left(u_n^1 \otimes \cdots \otimes u_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(v_n^1 \otimes \cdots \otimes v_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}$ elementos cualesquiera de $D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right)$ y definamos

$$\alpha := \left\|\left(u_n^1 \otimes \cdots \otimes u_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}} - \left(v_n^1 \otimes \cdots \otimes v_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^w.$$

Si $\alpha > 0$ tenemos que

$$\left\|\left(\left(\frac{\delta}{2\alpha}u_n^1\right) \otimes \cdots \otimes u_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}} - \left(\left(\frac{\delta}{2\alpha}v_n^1\right) \otimes \cdots \otimes v_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^w = \frac{\delta}{2} < \delta$$

y entonces de (2.7) obtenemos que

$$\left\|\left(T\left(\frac{\delta}{2\alpha}u_n^1, \ldots, u_n^m\right) - T\left(\frac{\delta}{2\alpha}v_n^1, \ldots, v_n^m\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^s \leq 1,$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} &\left\|\left(T\left(u_n^1, \ldots, u_n^m\right) - T\left(v_n^1, \ldots, v_n^m\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^s \\ &\qquad \leq \quad \frac{2}{\delta} \cdot \left\|\left(u_n^1 \otimes \cdots \otimes u_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}} - \left(v_n^1 \otimes \cdots \otimes v_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^w. \end{aligned} \tag{2.8}$$

En el caso cuando $\alpha = 0$, tenemos que $u_n^1 \otimes \cdots \otimes u_n^m = v_n^1 \otimes \cdots \otimes v_n^m$ para toda $n \in \mathbb{N}$, luego

$$T\left(u_n^1, \ldots, u_n^m\right) = T^L\left(u_n^1 \otimes \cdots \otimes u_n^m\right) = T^L\left(v_n^1 \otimes \cdots \otimes v_n^m\right) = T\left(v_n^1, \ldots, v_n^m\right)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y entonces la desigualdad (2.8) sigue siendo cierta en este caso. Por lo tanto la desigualdad (2.8) es válida para cualesquiera dos elementos de $D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right)$ y utilizando ésta con sucesiones finitas, tenemos que T es p-sumante. Además, de la desigualdad (2.8) tenemos que la función

$$\hat{T}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} : D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right) \to \ell_p^s(Y)$$

está bien definida y es Lipschitz, por lo que esta desigualdad sigue siendo válida si escribimos $\left\| \hat{T}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} \right\|_{Lip}$ en lugar de $\frac{2}{\delta}$. De esto último, obtenemos que

$$\|T\|_{s,p} \leq \left\| \hat{T}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} \right\|_{Lip}.$$

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Es inmediato del hecho de que la función

$$\hat{T}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} : D_p^w\left(X_1,\ldots,X_m\right) \to \ell_p^s(Y)$$

es Lipschitz.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Supongamos que T no es p-sumante.
Entonces podemos construir una sucesión $0 = n_0 < n_1 < \cdots$ de números naturales y un par de sucesiones $\left(\tilde{u}_n^1 \otimes \cdots \otimes \tilde{u}_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\tilde{v}_n^1 \otimes \cdots \otimes \tilde{v}_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D\left(X_1,\ldots,X_m\right)$ tales que

$$\sup \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \left|\varphi\left(\tilde{u}_i^1,\ldots,\tilde{u}_i^m\right) - \varphi\left(\tilde{v}_i^1,\ldots,\tilde{v}_i^m\right)\right|^p = 1 \tag{2.9}$$

y

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \left\|T\left(\tilde{u}_i^1,\ldots,\tilde{u}_i^m\right) - T\left(\tilde{v}_i^1,\ldots,\tilde{v}_i^m\right)\right\|^p > k+1 \tag{2.10}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Consideremos las siguientes sucesiones definidas por pedazos,

$$\begin{aligned} u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m &= \tfrac{1}{(k+1)^2} \cdot \tilde{u}_i^1 \otimes \cdots \otimes \tilde{u}_i^m \\ v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m &= \tfrac{1}{(k+1)^2} \cdot \tilde{v}_i^1 \otimes \cdots \otimes \tilde{v}_i^m \end{aligned}$$

donde $n_k + 1 \leq i \leq n_{k+1}$ y $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Entonces la sucesión $\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i\in\mathbb{N}}$ pertenece al espacio $\ell_p^w\left(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right)$, porque para cada forma multilineal $\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}$ se

tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} & \left|\varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right|^p \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \left|\varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right|^p + \\
&\quad \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left|\varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right|^p + \cdots \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \left|\varphi\left(\tilde{u}_i^1, \ldots, \tilde{u}_i^m\right) - \varphi\left(\tilde{v}_i^1, \ldots, \tilde{v}_i^m\right)\right|^p + \\
&\quad \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left|\varphi\left(\tilde{u}_i^1, \ldots, \tilde{u}_i^m\right) - \varphi\left(\tilde{v}_i^1, \ldots, \tilde{v}_i^m\right)\right|^p + \cdots \\
&\leq 1 + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty,
\end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad se sigue de la igualdad (2.9).
Pero por otro lado, utilizando la desigualdad (2.10), tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} & \left\|T\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right\|^p \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \left\|T\left(\tilde{u}_i^1, \ldots, \tilde{u}_i^m\right) - T\left(\tilde{v}_i^1, \ldots, \tilde{v}_i^m\right)\right\|^p + \\
&\quad \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left\|T\left(\tilde{u}_i^1, \ldots, \tilde{u}_i^m\right) - T\left(\tilde{v}_i^1, \ldots, \tilde{v}_i^m\right)\right\|^p + \cdots \\
&\geq 1 + 1/2 + \cdots
\end{aligned}$$

y esto claramente contradice (*iv*). □

Observación 2.6
Como $\hat{T}$ *es un operador lineal (véase la sección 1.1.2) y* $0 \in D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right)$*, tenemos que* $\hat{T}(0) = 0$ *y entonces en el inciso (ii) de la proposición anterior se tiene que* $\hat{T}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)}$ *es un elemento de* $\mathcal{LIP}_0\left(D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right), \ell_p^s(Y)\right)$.

En la Proposición 2.3 probamos que $\left(\mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right), \|\cdot\|_{s,p}\right)$ es un espacio normado. Una primera aplicación de la caracterización anterior será probar que este espacio es, además, completo.

Proposición 2.7 *$\mathcal{L}_s^p(X_1, \ldots, X_m; Y)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{s,p}$.*

Demostración:
Como ya sabemos que $\left(\mathcal{L}_s^p(X_1, \ldots, X_m; Y), \|\cdot\|_{s,p}\right)$ es un espacio normado, sólo nos falta probar que el espacio $\mathcal{L}_s^p(X_1, \ldots, X_m; Y)$ es completo con respecto de la norma $\|\cdot\|_{s,p}$.
Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión $\|\cdot\|_{s,p}$-Cauchy en $\mathcal{L}_s^p(X_1, \ldots, X_m; Y)$.
De la Proposición 2.3 se tiene que

$$\|S\| \leq \|S\|_{s,p} \quad \forall\, S \in \mathcal{L}_s^p(X_1, \ldots, X_m; Y),$$

entonces $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$.
Luego, existe $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \text{ en } \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y). \tag{2.11}$$

Ahora, por el Teorema 1.7 tenemos que T induce un operador lineal continuo

$$T^L\colon X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow Y,$$

el cual a su vez induce el operador lineal continuo (véase la Observación 1.11)

$$\hat{T}\colon \ell_p^w\left(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right) \longrightarrow \ell_p^w(Y).$$

En particular tenemos que la función

$$\hat{T}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} : D_p^w(X_1, \ldots, X_m) \longrightarrow \ell_p^w(Y) \tag{2.12}$$

es una función bien definida Lipschitz tal que $\hat{T}(0) = 0$.
Por otro lado, de la Proposición 2.5 se tiene que a cada $S \in \mathcal{L}_s^p(X_1, \ldots, X_m; Y)$ le podemos asociar la función Lipschitz

$$\hat{S}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} : D_p^w(X_1, \ldots, X_m) \longrightarrow \ell_p^s(Y)$$

con $\hat{S}(0) = 0$ y $\left\|\hat{S}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)}\right\|_{Lip} = \|S\|_{s,p}$.
Entonces como la sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\|\cdot\|_{s,p}$-Cauchy en $\mathcal{L}_s^p(X_1, \ldots, X_m; Y)$, la sucesión

$$\left(\widehat{T_n}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

es $\|\cdot\|_{Lip}$-Cauchy en $\mathcal{LIP}_0\left(D_p^w(X_1, \ldots, X_m), \ell_p^s(Y)\right)$, el cual es un espacio de Banach[3], por lo tanto existe $f \in \mathcal{LIP}_0\left(D_p^w(X_1, \ldots, X_m), \ell_p^s(Y)\right)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{T_n}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} = f \text{ en } \mathcal{LIP}_0\left(D_p^w(X_1, \ldots, X_m), \ell_p^s(Y)\right). \tag{2.13}$$

[3]Véase el final de la sección 1.1.1

Ahora, como el espacio $\ell_p^s(Y)$ es un subespacio lineal del espacio[4] $\ell_p^w(Y)$, podemos ver a f y a cada término de la sucesión

$$\left(\widehat{T_n}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

con recorrido en $\ell_p^w(Y)$, esto es, podemos verlos como elementos del espacio $\mathcal{LIP}_0\left(D_p^w(X_1,\ldots,X_m),\ell_p^w(Y)\right)$.
Afirmamos que $\hat{T}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} = f$.
Utilizando (2.12) veremos que $\hat{T}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)}$ y f son iguales como elementos del espacio $\mathcal{LIP}_0\left(D_p^w(X_1,\ldots,X_m),\ell_p^w(Y)\right)$. Para simplificar la notación denotaremos por D_p^w,ℓ_p^w y ℓ_p^s a los espacios $D_p^w(X_1,\ldots,X_m),\ell_p^w(Y)$ y $\ell_p^s(Y)$ respectivamente. Para cada $n\in\mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|\hat{T}\Big|_{D_p^w} - f\right\|_{Lip\left(D_p^w,\ell_p^w\right)}\\
&\quad\leq \left\|\hat{T}\Big|_{D_p^w} - \widehat{T_n}\Big|_{D_p^w}\right\|_{Lip\left(D_p^w,\ell_p^w\right)} + \left\|\widehat{T_n}\Big|_{D_p^w} - f\right\|_{Lip\left(D_p^w,\ell_p^w\right)}\\
&\quad= \left\|\left(\hat{T} - \widehat{T_n}\right)\Big|_{D_p^w}\right\|_{Lip\left(D_p^w,\ell_p^w\right)} + \left\|\widehat{T_n}\Big|_{D_p^w} - f\right\|_{Lip\left(D_p^w,\ell_p^w\right)} = (*).
\end{aligned}$$

Ahora, recordando que $\hat{f}+\hat{g}=\widehat{f+g}$ (véase la sección 1.1.2) y que $\|\cdot\|_p^w \leq \|\cdot\|_p^s$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(*) &= \left\|\widehat{T-T_n}\Big|_{D_p^w}\right\|_{Lip\left(D_p^w,\ell_p^w\right)} + \left\|\widehat{T_n}\Big|_{D_p^w} - f\right\|_{Lip\left(D_p^w,\ell_p^w\right)}\\
&\leq \left\|\widehat{T-T_n}\Big|_{D_p^w}\right\|_{Lip\left(D_p^w,\ell_p^w\right)} + \left\|\widehat{T_n}\Big|_{D_p^w} - f\right\|_{Lip\left(D_p^w,\ell_p^s\right)} = (**).
\end{aligned}$$

Luego, utilizando que $\|u|_A\|_{Lip} \leq \|u\|$ (véase el final de la sección 1.1.1) y la Observación 1.11 obtenemos que

$$\begin{aligned}
(**) &\leq \left\|\widehat{T-T_n}\colon \ell_p^w\left(X_1\hat{\otimes}_\pi\cdots\hat{\otimes}_\pi X_m\right)\longrightarrow \ell_p^w(Y)\right\| + \left\|\widehat{T_n}\Big|_{D_p^w} - f\right\|_{Lip\left(D_p^w,\ell_p^s\right)}\\
&= \|T-T_n\| + \left\|\widehat{T_n}\Big|_{D_p^w} - f\right\|_{Lip\left(D_p^w,\ell_p^s\right)}. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Si $n\to\infty$ en (2.14), por las igualdades (2.11) y (2.13) tenemos que

$$\hat{T}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} = f$$

[4]Véase la sección 1.1.1

y por lo tanto $\hat{T} \in \mathcal{LIP}_0\left(D_p^w\left(X_1, \ldots, X_m\right), \ell_p^s\left(Y\right)\right)$, concluyendo de esto que $T \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$.
Por último, como $\hat{T}\Big|_{D_p^w\left(X_1,\ldots,X_m\right)} = f$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|T_n - T\|_{s,p} &= \left\| \widehat{T_n - T}\Big|_{D_p^w\left(X_1,\ldots,X_m\right)} \right\|_{Lip\left(D_p^w, \ell_p^s\right)} \\
&= \left\| \left(\widehat{T_n} - \hat{T}\right)\Big|_{D_p^w\left(X_1,\ldots,X_m\right)} \right\|_{Lip\left(D_p^w, \ell_p^s\right)} \\
&= \left\| \widehat{T_n}\Big|_{D_p^w\left(X_1,\ldots,X_m\right)} - \hat{T}\Big|_{D_p^w\left(X_1,\ldots,X_m\right)} \right\|_{Lip\left(D_p^w, \ell_p^s\right)} \\
&= \left\| \widehat{T_n}\Big|_{D_p^w\left(X_1,\ldots,X_m\right)} - f \right\|_{Lip\left(D_p^w, \ell_p^s\right)}
\end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.
Entonces, por la igualdad (2.13) tenemos que $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\|_{s,p} = 0$ y concluimos que $\mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ es un espacio completo con respecto de la norma $\|\cdot\|_{s,p}$. □

2.1.3. Propiedades Elementales

Antes de estudiar de manera profunda la teoría de los operadores multilineales p-sumantes, necesitamos probar algunos resultados elementales.

La primera propiedad que presentaremos nos proporciona, entre otras cosas, una manera de construir nuevos operadores multilineales p-sumantes, a partir de operadores multilineales p-sumantes ya conocidos.

Proposición 2.8
Sean $1 \leq p < \infty$ y $T \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$. Si $R \in \mathcal{L}\left(Y, Z\right)$ y $S_i \in \mathcal{L}\left(W_i, X_i\right)$ con $1 \leq i \leq m$, entonces

$$R \circ T \circ \left(S_1, \ldots, S_m\right) \in \mathcal{L}_s^p\left(W_1, \ldots, W_m; Z\right)$$

y $\|R \circ T \circ \left(S_1, \ldots, S_m\right)\|_{s,p} \leq \|R\| \cdot \|T\|_{s,p} \cdot \|S_1\| \cdots \|S_m\|$.

Demostración:
Los operadores lineales continuos $S_1, \ldots, S_m$ dan lugar al operador lineal continuo

$$S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m \colon W_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi W_m \longrightarrow X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$$

tal que $S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m\left(w^1 \otimes \cdots \otimes w^m\right) = S_1(w^1) \otimes \cdots \otimes S_m(w^m)$ y tal que $\|S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m\| \leq \|S_1\| \cdots \|S_m\|$ (véase la Proposición 1.9).

Ahora, por la Observación 1.11 tenemos que R y $S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m$ inducen los operadores lineales continuos

$$\hat{R} : \ell_p^s(Y) \to \ell_p^s(Z)$$

y

$$\widehat{S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m} : \ell_p^w\left(W_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi W_m\right) \to \ell_p^w\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right)$$

con $\left\|\hat{R}\right\| = \|R\|$ y $\left\|\widehat{S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m}\right\| = \|S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m\| \leq \|S_1\| \cdots \|S_m\|$. También, por la Proposición 2.5 tenemos que T da lugar a la función Lipschitz

$$\left.\hat{T}\right|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} : D_p^w(X_1,\ldots,X_m) \to \ell_p^s(Y)$$

con $\left\|\left.\hat{T}\right|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)}\right\|_{Lip} = \|T\|_{s,p}$. Como la función

$$\left.\widehat{R \circ T \circ (S_1,\ldots,S_m)}\right|_{D_p^w(W_1,\ldots,W_m)} : D_p^w(W_1,\ldots,W_m) \to \ell_p^s(Z)$$

coincide con la función

$$\hat{R} \circ \left.\hat{T}\right|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} \circ \widehat{S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m}|_{D_p^w(W_1,\ldots,W_m)}$$

que es Lipschitz, por la Proposición 2.5 tenemos que $R \circ T \circ (S_1,\ldots,S_m)$ es p-sumante y

$$\begin{aligned} \|R \circ T \circ (S_1,\ldots,S_m)\|_{s,p} &= \left\|\left.\widehat{R \circ T \circ (S_1,\ldots,S_m)}\right|_{D_p^w(W_1,\ldots,W_m)}\right\|_{Lip} \\ &= \left\|\hat{R} \circ \left.\hat{T}\right|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} \circ \widehat{S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m}|_{D_p^w(W_1,\ldots,W_m)}\right\|_{Lip} = (*). \end{aligned}$$

Ahora, de la definición de la norma Lipschitz y del hecho de que $\left\| u|_A \right\|_{Lip} \leq \|u\|$ (véase el final de la sección 1.1.1) obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} (*) \quad &\leq \left\|\hat{R}\right\| \cdot \left\|\left.\hat{T}\right|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)}\right\|_{Lip} \cdot \left\|\widehat{S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m}|_{D_p^w(W_1,\ldots,W_m)}\right\|_{Lip} \\ &\leq \|R\| \cdot \|T\|_{s,p} \cdot \left\|\widehat{S_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi S_m}\right\| \\ &\leq \|R\| \cdot \|T\|_{s,p} \cdot \|S_1\| \cdots \|S_m\| . \end{aligned}$$

□

En general, el hecho de que existan $R \in \mathcal{L}(Y,Z)$ y $S_i \in \mathcal{L}(W_i,X_i)$ con $1 \leq i \leq m$ tales que la composición $R \circ T \circ (S_1,\ldots,S_m)$ resulte ser un operador multilineal p-sumante, no es suficiente para que el operador multilineal T lo sea.

Para mostrar un ejemplo de esto utilizaremos el hecho de que los operadores multilineales p-sumantes satisfacen una versión multilineal del Teorema Débil de Dvoretzky-Rogers (véase la Proposición 3.18). Éste nos asegura la existencia de al menos un operador multilineal continuo $T\colon X \times \cdots \times X \longrightarrow X$ que no es 1-sumante cuando X es un espacio de Banach de dimensión infinita.

Ejemplo 2.9 *Consideremos un espacio de Banach X de dimensión infinita y un operador multilineal continuo $T\colon X \times \cdots \times X \longrightarrow X$ que no sea 1-sumante. Si $R\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$ es una funcional lineal continua y $S_i\colon X \longrightarrow X$ es el operador lineal cero para toda $1 \leq i \leq m$, entonces los operadores multilineales*

$$R \circ T \ \text{ y } \ T \circ (S_1, \ldots, S_m)$$

son 1-sumantes (pues tanto una forma multilineal (véase los Ejemplos 2.4) como el operador multilineal cero son 1-sumantes) aunque T no lo es.

A pesar de este ejemplo, en ciertas circunstancias la existencia de un operador lineal continuo R tal que la composición $R \circ T$ es p-sumante sí implica que T lo es. El que presentaremos a continuación será de gran utilidad en el capítulo siguiente cuando hablemos acerca del teorema de factorización.

Proposición 2.10 (Inyectividad de $\mathcal{L}_s^p$) *Sea $1 \leq p < \infty$. Si $i : Y \to Y_0$ es una isometría lineal, entonces*

$$T \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right) \ \text{ si y sólo si } \ i \circ T \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y_0\right).$$

Además, $\|T\|_{s,p} = \|i \circ T\|_{s,p}$.

Demostración:
$\Rightarrow$) Supongamos que $T \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$.
Entonces por la proposición anterior tenemos que $i \circ T \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y_0\right)$ y $\|i \circ T\|_{s,p} \leq \|T\|_{s,p}$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $i \circ T \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y_0\right)$.
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $u_1^k, \ldots, u_n^k, v_1^k, \ldots, v_n^k \in X_k$ con $1 \leq k \leq m$.
Dado que i es una isometría lineal tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} \left\|T\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\qquad = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|(i \circ T)\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - (i \circ T)\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\qquad \leq \|i \circ T\|_{s,p} \cdot \sup \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ y $\|T\|_{s,p} \leq \|i \circ T\|_{s,p}$. □

La Proposición 2.8 nos dice que una condición suficiente para que la composición $R \circ T$, entre un operador lineal R y un operador multilineal T, sea p-sumante es que T sea p-sumante. A continuación probaremos que también cuando el operador lineal es p-sumante, que para el caso lineal es lo mismo que absolutamente p-sumante (véase la Observación 2.2), se tiene que la composición $R \circ T$ es p-sumante.

Proposición 2.11 *Sean* $1 \leq p < \infty, T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ *y* $R \in \mathcal{L}(Y, Z)$. *Si* $R \in \Pi_p(Y, Z)$ *entonces*

$$R \circ T \in \mathcal{L}_s^p(X_1, \ldots, X_m; Z)$$

y $\|R \circ T\|_{s,p} \leq \pi_p(R) \cdot \|T\|$.

Demostración:
Como $R \in \Pi_p(Y, Z)$ tenemos que el operador lineal

$$\hat{R} : \ell_p^w(Y) \to \ell_p^s(Z)$$

está bien definido y satisface que $\left\|\hat{R}\right\| = \pi_p(R)$ (véase la Proposición 1.12), además como T es un operador multilineal continuo tenemos que el operador lineal

$$\hat{T} : \ell_p^w\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right) \to \ell_p^w(Y)$$

está bien definido y satisface que $\left\|\hat{T}\right\| = \|T\|$ (véase la Observación 1.11). Como la función

$$\left.\widehat{R \circ T}\right|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} : D_p^w(X_1, \ldots, X_m) \to \ell_p^w(Z)$$

coincide con la función $\hat{R} \circ \hat{T}|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)}$ que es Lipschitz, por la Proposición 2.5 tenemos que $R \circ T$ es p-sumante y

$$\|R \circ T\|_{s,p} = \left\| \left.\widehat{R \circ T}\right|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} \right\|_{Lip} = \left\| \hat{R} \circ \hat{T}|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)} \right\|_{Lip} = (*).$$

Si utilizamos la definición de la norma Lipschitz y que $\|u|_A\|_{Lip} \leq \|u\|$ (véase el final de la sección 1.1.1) obtenemos que

$$(*) \leq \left\|\hat{R}\right\| \cdot \left\|\hat{T}|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)}\right\|_{Lip} \leq \pi_p(R) \cdot \left\|\hat{T}\right\| = \pi_p(R) \cdot \|T\|$$

□

En algunas ocasiones es posible obtener un resultado análogo a la Proposición 2.11 para la composición $T \circ (S_1, \ldots, S_m)$.

Proposición 2.12 *Sean* $1 \leq p < \infty$, $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ *y* $S_i \in \mathcal{L}(W_i, X_i)$ *con* $1 \leq i \leq m$. *Si el operador* m*-lineal* $S \in \mathcal{L}\left(W_1, \ldots, W_m; X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right)$ *definido como*

$$S\left(w^1, \ldots, w^m\right) = S_1 w^1 \otimes \cdots \otimes S_m w^m$$

es p*-sumante, entonces*

$$T \circ (S_1, \ldots, S_m)$$

es p*-sumante y* $\|T \circ (S_1, \ldots, S_m)\|_{s,p} \leq \|T\| \cdot \|S\|_{s,p}$.

Demostración:
Por el Teorema 1.7 tenemos que T induce el operador lineal continuo

$$T^L \colon X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow Y$$

tal que $T^L\left(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m\right) = T\left(x^1, \ldots, x^m\right)$ y tal que $\left\|T^L\right\| = \|T\|$. De esto último es inmediato que

$$T \circ (S_1, \ldots, S_m) \equiv T^L \circ S.$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.8 tenemos que $T \circ (S_1, \ldots, S_m)$ es p-sumante y

$$\begin{aligned}
\|T \circ (S_1, \ldots, S_m)\|_{s,p} &= \left\|T^L \circ S\right\|_{s,p} \\
&\leq \left\|T^L\right\| \cdot \|S\|_{s,p} \\
&= \|T\| \cdot \|S\|_{s,p} .
\end{aligned}$$

□

Al igual que sucede con otras clases de operadores multilineales, por ejemplo con los compactos y los débilmente compactos, los operadores multilineales p-sumantes cumplen la siguiente propiedad:

Proposición 2.13
Sean $1 \leq p < \infty$ *y* $m \geq 2$. *Si* $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ *es un operador* m*-lineal* p*-sumante, entonces para todo* $r \in \{1, \ldots, m-1\}$, *para cualesquiera* $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$ *y para cualesquiera* $x^{i_k} \in X_{i_k}$ *con* $k = 1, \ldots, r$, *el operador* $(m-r)$*-lineal*[5]

$$T\left[x^{i_1}, \ldots, x^{i_r}\right]$$

es p*-sumante y* $\left\|T\left[x^{i_1}, \ldots, x^{i_r}\right]\right\|_{s,p} \leq \|T\|_{s,p} \cdot \left\|x^{i_1}\right\| \cdots \left\|x^{i_r}\right\|$.

Demostración:
Primero probaremos el caso $r = 1$.
Sean $i_1 \in \{1, \ldots, m\}$ y $x^{i_1} \in X_{i_1}$.

[5]En la sección 1.1.2 se define la aplicación $T\left[x^1, \ldots, x^r\right]$.

Si $x^{i_1} = 0$ entonces $T\left[x^{i_1}\right] \equiv 0$ y claramente el operador multilineal cero es p-sumante. Supongamos que $x^{i_1} \neq 0$.
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in X_1 \times \overset{[i_1]}{\cdots} \times X_m$.
Entonces utilizando que T es p-sumante tenemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left[x^{i_1}\right]\left(u_i^1, \overset{[i_1]}{\ldots}, u_i^m\right) - T\left[x^{i_1}\right]\left(v_i^1, \overset{[i_1]}{\ldots}, v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(u_i^1, \ldots, x^{i_1}, \ldots, u_i^m\right) - T\left(v_i^1, \ldots, x^{i_1}, \ldots, v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq \|T\|_{s,p} \cdot \sup \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \varphi\left(u_i^1, \ldots, x^{i_1}, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, x^{i_1}, \ldots, v_i^m\right)\right|^p\right)^{1/p}$$

$$= \|T\|_{s,p} \cdot \sup \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \varphi\left[x^{i_1}\right]\left(u_i^1, \overset{[i_1]}{\ldots}, u_i^m\right) - \varphi\left[x^{i_1}\right]\left(v_i^1, \overset{[i_1]}{\ldots}, v_i^m\right)\right|^p\right)^{1/p} = (*).$$

Dado que $\left\|\varphi\left[x^{i_1}\right]\right\| \leq \left\|x^{i_1}\right\|$ para toda $\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}$, tenemos que

$$(*) \leq \|T\|_{s,p} \cdot \left\|x^{i_1}\right\| \cdot \sup \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \psi\left(u_i^1, \overset{[i_1]}{\ldots}, u_i^m\right) - \psi\left(v_i^1, \overset{[i_1]}{\ldots}, v_i^m\right)\right|^p\right)^{1/p}$$

donde el supremo se toma sobre todos los elementos $\psi \in B_{\mathcal{L}\left(X_1, \overset{[i_1]}{\ldots}, X_m\right)}$.
Por lo tanto $T\left[x^{i_1}\right]$ es p-sumante y $\left\|T\left[x^{i_1}\right]\right\|_{s,p} \leq \|T\|_{s,p} \cdot \left\|x^{i_1}\right\|$.
El caso $m = 2$ no es más que el caso anterior ya que en esta situación r tiene que ser igual a 1. Entonces supongamos que $m \geq 3$ y que $r > 1$.
La demostración en esta situación se sigue del caso $r = 1$ y del hecho de que

$$T\left[x^{i_1}, \ldots, x^{i_r}\right] \equiv \left(T\left[x^{i_1}, \ldots, x^{i_{r-1}}\right]\right)\left[x^{i_r}\right]$$

para cualesquiera $r \in \{2, \ldots, m-1\}$ y $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$. $\square$

Con el ejemplo que veremos a continuación, quedará probado que el recíproco de la proposición anterior no es cierto en general.

Ejemplo 2.14 *En [CD, Ejemplo 3.2] se demuestra que el operador bilineal continuo*

$$\begin{array}{rccc} T: & \ell_1 \times \ell_2 & \longrightarrow & \ell_1 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

no pertenece a la clase de los operadores bilineales fuertemente 1-sumantes[6]*, a pesar de que $T[x]$ y $T[y]$ sí son absolutamente 1-sumantes para todo $x \in \ell_1$*

[6] Definiremos esta clase en la siguiente sección (Definición 2.17).

y todo $y \in \ell_2$. Debido a que todo operador multilineal p-sumante resultará ser fuertemente p-sumante[7] *para todo $1 \leq p < \infty$, se tiene que el operador bilineal T no puede ser 1-sumante, y por lo tanto el recíproco de la proposición anterior no es cierto en general.*

Para finalizar esta subsección, donde desarrollamos las herramientas elementales que necesitamos para el estudio profundo de los operadores multilineales p-sumantes, enunciamos y probamos el llamado teorema de inclusión, que nos muestra la relación que existe entre los operadores multilineales p-sumantes y los operadores multilineales q-sumantes cuando $1 \leq p < q < \infty$.

Proposición 2.15 (Teorema de Inclusión)
Sean $X_1, \ldots, X_m, Y$ espacios de Banach y sean $1 \leq p < q < \infty$. Entonces

$$\mathcal{L}_s^p \left(X_1, \ldots, X_m; Y \right) \subset \mathcal{L}_s^q \left(X_1, \ldots, X_m; Y \right).$$

Más aún, si $T \in \mathcal{L}_s^p \left(X_1, \ldots, X_m; Y \right)$ entonces $\|T\|_{s,q} \leq \|T\|_{s,p}$.

Demostración:
Sea $T \in \mathcal{L}_s^p \left(X_1, \ldots, X_m; Y \right)$.
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $u_1^k, \ldots, u_n^k, v_1^k, \ldots, v_n^k \in X_k$ con $k = 1, \ldots, m$.
Observemos que si definimos

$$\lambda_i := \left\| T \left(u_i^1, \ldots, u_i^m \right) - T \left(v_i^1, \ldots, v_i^m \right) \right\|^{\frac{q-p}{p}}$$

entonces

$$\left\| T \left(u_i^1, \ldots, u_i^m \right) - T \left(v_i^1, \ldots, v_i^m \right) \right\|^q = \left\| T \left(\lambda_i u_i^1, \ldots, u_i^m \right) - T \left(\lambda_i v_i^1, \ldots, v_i^m \right) \right\|^p$$

para $i = 1, \ldots, n$.
Ahora, de la igualdad anterior y del hecho de que T es p-sumante, tenemos que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n \left\| T \left(u_i^1, \ldots, u_i^m \right) - T \left(v_i^1, \ldots, v_i^m \right) \right\|^q \right)^{1/p} \\ = & \left(\sum_{i=1}^n \left\| T \left(\lambda_i u_i^1, \ldots, u_i^m \right) - T \left(\lambda_i v_i^1, \ldots, v_i^m \right) \right\|^p \right)^{1/p} \\ \leq & \|T\|_{s,p} \cdot \sup \left(\sum_{i=1}^n \left| \varphi \left(\lambda_i u_i^1, \ldots, u_i^m \right) - \varphi \left(\lambda_i v_i^1, \ldots, v_i^m \right) \right|^p \right)^{1/p} \\ = & \|T\|_{s,p} \cdot \sup \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p \left| \varphi \left(u_i^1, \ldots, u_i^m \right) - \varphi \left(v_i^1, \ldots, v_i^m \right) \right|^p \right)^{1/p} . \end{aligned} \tag{2.15}$$

[7] Este hecho se probará en la siguiente sección (Teorema 2.19).

Utilizando la desigualdad de Hölder con los exponentes $\frac{q}{q-p}$ y $\frac{q}{p}$, los cuales estan bien definidos pues $p < q$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p \left|\varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right|^p\right)^{1/p} \\
&\qquad \leq \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right|^q\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

para cada $\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}$.

Luego, si sustituimos esta última desigualdad, en el lado derecho de (2.15), obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} \left\|T\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right\|^q\right)^{1/p} \\
&\qquad \leq \quad \|T\|_{s,p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \left\|\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^{n}\right\|_q^w .
\end{aligned}$$

Finalmente, si sustituimos el valor de λ_i en esta desigualdad y luego simplificamos el resultado obtenido de esta sustitución con el lado izquierdo de la misma, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} \left\|T\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right\|^q\right)^{1/q} \\
&\qquad\qquad \leq \quad \|T\|_{s,p} \cdot \sup \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right|^q\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

y entonces concluimos que $T \in \mathcal{L}_s^q\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ y $\|T\|_{s,q} \leq \|T\|_{s,p}$. □

Observación 2.16 *Es importante mencionar que las contenciones expresadas en la proposición anterior son en general propias. Sin embargo, será hasta el capítulo siguiente (Observación 3.17) cuando estemos en condiciones de probar este hecho.*

2.2. Comparando la clase $\mathcal{L}_s^p$

En esta sección recopilaremos las generalizaciones más importantes que se han hecho al caso multilineal del concepto de operador lineal absolutamente p-sumante y veremos, en la medida de lo posible, las relaciones existentes entre éstas y la clase de los operadores multilineales p-sumantes, el objeto principal de nuestra investigación.

La intención de esta sección no sólo será la de establecer la posición de esta nueva clase con respecto a las clases multilineales p-sumantes ya conocidas, sino también con respecto a otras clases multilineales.

En la siguiente definición reunimos las distintas nociones aparecidas en la literatura generalizando el concepto de operador lineal absolutamente p-sumante. Usaremos, en la medida de lo posible, la nomenclatura utilizada por cada autor.

Definición 2.17 *Consideremos $m \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty$, $X_1, \ldots, X_m, Y$ espacios de Banach y $H_1, \ldots, H_m, H$ espacios de Hilbert. Diremos que:*

- *[Pie2] $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ es **absolutamente p-sumante** si existe una constante $c \geq 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $x_1^j, \ldots, x_n^j$ en X_j con $1 \leq j \leq m$ se tiene que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{i=1}^{n} \right\|_p^w. \tag{2.16}$$

Denotaremos por $\boldsymbol{\mathcal{L}_{as}^{p}}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ o simplemente por $\boldsymbol{\mathcal{L}_{as}^{p}}$ al conjunto de todos los operadores multilineales absolutamente p-sumantes.
Esta clase, según algunos autores, aparece por primera vez en el trabajo de A. Pietsch [Pie2] y ha sido estudiada por ejemplo por R. Alencar et al. en [AM], por Y.S. Choi et al. en [CKMT] y por M.C. Matos en [Mat, Mat3].

- *[Pie2] $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ es **p-dominado** si existe una constante $c \geq 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $x_1^j, \ldots, x_n^j$ en X_j con $1 \leq j \leq m$ se tiene que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right) \right\|^{\frac{p}{m}} \right)^{\frac{m}{p}} \leq c \cdot \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{i=1}^{n} \right\|_p^w. \tag{2.17}$$

Denotaremos por $\boldsymbol{\mathcal{L}_{d}^{p}}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ o simplemente por $\boldsymbol{\mathcal{L}_{d}^{p}}$ al conjunto de todos los operadores multilineales p-dominados.
Esta clase, igual que la anterior, aparece por primera vez en el trabajo de A. Pietsch [Pie2] y ha sido estudiada por ejemplo por M.C. Matos en [Mat], por Y. Melendez et al. en [MT] y por S. Geiss en [Geiss].

- *[BPGV] $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ es **múltiple p-sumante** si existe una constante $c \geq 0$ tal que para toda sucesión $\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{n_j}$ en X_j con $1 \leq j \leq m$ se tiene que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left\| T\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_m}^m\right) \right\|^p \right)^{1/p} \leq c \cdot \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{n_j} \right\|_p^w. \tag{2.18}$$

Denotaremos por $\boldsymbol{\mathcal{L}_{ms}^{p}}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ o simplemente por $\boldsymbol{\mathcal{L}_{ms}^{p}}$ al conjunto de todos los operadores multilineales múltiples p-sumantes.

Esta clase fue introducida de manera independiente por F. Bombal et al. en [BPGV] y por M.C. Matos en [Mat2] (en este último artículo con el nombre de operadores multilineales completamente p-sumantes). Esta clase ha sido estudiada por ejemplo por D. Perez García et al. en [Per, PV].

- *[Dim] $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ es **fuertemente p-sumante** si existe una constante $c \geq 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $x_1^j, \ldots, x_n^j \in X_j$ con $1 \leq j \leq m$ se tiene que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left\|T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p} \leq c \cdot \sup\left(\sum_{i=1}^{n} \left|\varphi\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right)\right|^p\right)^{1/p} \tag{2.19}$$

donde el supremo se toma sobre todos los $\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}$.
Denotaremos por $\boldsymbol{\mathcal{L}_{fs}^p}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ o simplemente por $\boldsymbol{\mathcal{L}_{fs}^p}$ al conjunto de todos los operadores multilineales fuertemente p-sumantes.
Esta clase fue introducida por V. Dimant en [Dim].

- *[BPR] $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ pertenece al conjunto $\boldsymbol{\Pi_p} \circ \boldsymbol{\mathcal{L}}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ si el operador lineal canónico, T^L, asociado a T pertenece al conjunto de los operadores lineales absolutamente p-sumantes, esto es, si*

$$T^L \in \Pi_p\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m, Y\right).$$

Esta clase fue introducida y estudiada por G. Botelho et al. en [BPR].

Recolectamos también las definiciones de otras clases de operadores multilineales aparecidas.

- *[Dwy] $T \in \mathcal{L}(H_1, \ldots, H_m; H)$ es **Hilbert-Schmidt**, si existe una base ortonormal $\left(u_j^k\right)_{j\in J_k}$ de H_k con $k = 1, \ldots, m$, tal que*

$$\|T\|_{HS} := \left(\sum_{\substack{j_k \in J_k \\ k=1,\ldots,m}} \left\|T\left(u_{j_1}^1, \ldots, u_{j_m}^m\right)\right\|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Denotaremos por $\boldsymbol{\mathcal{L}_{HS}}(H_1, \ldots, H_m; H)$ o simplemente por $\boldsymbol{\mathcal{L}_{HS}}$ al conjunto formado por todos los operadores multilineales Hilbert-Schmidt.
Esta clase fue definida por T.A.W. Dwyer III en [Dwy] y estudiada por F. Cobos et al. en [CKP].

- *$T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ es compacto si el conjunto*

$$T\left(B_{X_1}, \ldots, B_{X_m}\right)$$

es relativamente compacto en Y.
Denotaremos por $\boldsymbol{\mathcal{K}}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ o simplemente por $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ al conjunto formado por todos los operadores multilineales compactos. Esta clase aparece por ejemplo en el trabajo de A. Pietsch [Pie2].

Observación 2.18
En cada una de las obras citadas anteriormente se puede encontrar que para las clases $\mathcal{L}^p_{as}$, $\mathcal{L}^p_d$ con $m \leq p$, $\mathcal{L}^p_{ms}$ y $\mathcal{L}^p_{fs}$ el ínfimo sobre todas las constantes c's que satisfacen la desigualdad (2.16), (2.17), (2.18) y (2.19) y que denotaremos por $\|T\|_{as,p}, \|T\|_{d,p}, \|T\|_{ms,p}$ y $\|T\|_{fs,p}$ respectivamente, es una norma con la cual el respectivo espacio resulta ser Banach.
En el caso de la clase $\mathcal{L}_{HS}$, en [Mat2] se demuestra que el valor de $\|T\|_{HS}$ es independiente de las bases ortonormales $\left(u^k_j\right)_{j\in J_k}$ escogidas en H_k, donde $k = 1, \ldots, m$. Además, esta clase resulta ser un espacio de Hilbert con la norma $\|\cdot\|_{HS}$, la cual está definida por el producto interno

$$\langle S, T\rangle := \sum_{\substack{j_k\in J_k\\ k=1,\ldots,m}} \left\langle S\left(u^1_{j_1},\ldots,u^m_{j_m}\right), T\left(u^1_{j_1},\ldots,u^m_{j_m}\right)\right\rangle_H,$$

donde $S, T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1,\ldots,H_m;H)$.

A continuación presentamos la relación entre las clases de operadores multilineales definidas previamente y los operadores multilineales p-sumantes. Recordemos que esta última clase la denotamos por $\mathcal{L}^p_s(X_1,\ldots,X_m;Y)$ (véase la Definición 2.1).

Teorema 2.19 *Sean $m \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty$ y $X_1,\ldots,X_m,Y$ espacios de Banach. Si $\mathcal{L}^m$ denota el espacio $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)$, entonces se cumplen las siguientes inclusiones:*

$$
\begin{array}{llll}
 & & \overset{(2)}{\subset}\ \mathcal{L}^p_{as}(X_1,\ldots,X_m;Y) & \\
\mathcal{L}_{HS}(X_1,\ldots,X_m;Y) & & & \\
\quad\overset{(1)}{\subset} & & \overset{(3)}{\subset}\ \mathcal{L}^{mp}_{d}(X_1,\ldots,X_m;Y) & \\
 & \mathcal{L}^p_s(X_1,\ldots,X_m;Y) & & \subset\ \mathcal{L}^m \\
\quad\subset & & \subset\ \mathcal{L}^p_{fs}(X_1,\ldots,X_m;Y) & \\
\Pi_p\circ\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y) & & & \\
 & & \overset{(4)}{\subset}\ \mathcal{L}^p_{ms}(X_1,\ldots,X_m;Y). &
\end{array}
$$

La inclusión (1) es válida cuando los espacios $X_1,\ldots,X_m,Y$ son espacios de Hilbert reales. Las inclusiones (2), (3) y (4) son ciertas cuando toda forma multilineal $\varphi \in \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)$ es absolutamente p-sumante, mp-dominada y múltiple p-sumante respectivamente[8]. Las demás inclusiones son ciertas para espacios de Banach arbitrarios.

[8] A diferencia de los operadores multilineales p-sumantes (véase los Ejemplos 2.4), no siempre se cumple que toda forma multilineal resulta ser absolutamente p-sumante, p-dominada o múltiple p-sumante.

Demostración:
La inclusión $\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y) \subset \mathcal{L}_{fs}^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$ es inmediata de las definiciones de las clases involucradas. Más aún, se tiene que

$$\|T\|_{fs,p} \leq \|T\|_{s,p}$$

para todo $T \in \mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$.
A continuación probaremos que $\Pi_p \circ \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y) \subset \mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$.
Sea $T \in \Pi_p \circ \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)$. Por definición tenemos que

$$T^L \in \Pi_p\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m, Y\right).$$

Ahora, recordando que $\hat{T}$ denota el operador lineal $\widehat{T^L}$, por la Proposición 1.12 se tiene que el operador lineal

$$\begin{array}{rccc} \hat{T}: & \ell_p^w\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right) & \longrightarrow & \ell_p^s(Y) \\ & (w_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \left(T^L(w_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

es continuo y $\left\|\hat{T}\right\| = \pi_p\left(T^L\right)$. Finalmente como el operador lineal continuo $\hat{T}$ restringido al conjunto $D_p^w(X_1,\ldots,X_m)$ es una función Lipschitz tal que

$$\left\|\hat{T}\Big|_{D_p^w(X_1,\ldots,X_m)}\right\|_{Lip} \leq \left\|\hat{T}\right\|,$$

véase el final de la sección 1.1.1, por la Proposición 2.5 obtenemos que el operador multilineal $T \in \mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$ y

$$\|T\|_{s,p} \leq \pi_p\left(T^L\right).$$

A continuación demostraremos la contención (4). Esto es, veremos que si toda forma multilineal $\varphi \in \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)$ es múltiple p-sumante entonces se cumple que

$$\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y) \subset \mathcal{L}_{ms}^p(X_1,\ldots,X_m;Y).$$

La demostración de las contenciones (2) y (3) es análoga a ésta.
Supongamos que $\mathcal{L}_{ms}^p(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K}) = \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)$.
De la definición de $\|\cdot\|_{ms,p}$ se tiene que

$$\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_{ms,p}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{L}_{ms}^p(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K}) = \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)$.
Luego, el operador lineal

$$\begin{array}{rccc} \nu: & \mathcal{L}_{ms}^p(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

es un operador biyectivo y continuo entre espacios de Banach y entonces por el teorema de la aplicación abierta, tenemos que existe $M > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{ms,p} \leq M \cdot \|\varphi\| \tag{2.20}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)$.
Sea $T \in \mathcal{L}_s^p(X_1, \ldots, X_m; Y)$. Veamos que $T \in \mathcal{L}_{ms}^p(X_1, \ldots, X_m; Y)$.
Sea $\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{r_k}$ una sucesión en X_k con $1 \leq k \leq m$.
Ahora, consideremos las siguientes $\prod_{k=1}^m r_k$ sucesiones que constan de un elemento en $X_1 \times \cdots \times X_m$:

$$\left\{\left(x_1^1, \ldots, x_1^m\right)\right\}, \ldots, \left\{\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_m}^m\right)\right\}, \ldots, \left\{\left(x_{r_1}^1, \ldots, x_{r_m}^m\right)\right\}$$

con $1 \leq i_1 \leq r_1, \ldots, 1 \leq i_m \leq r_m$.
Si definimos para $i = 1, \ldots, \alpha := \prod_{k=1}^m r_k$,

$$\begin{aligned}
&\left(u_1^1, \ldots, u_1^m\right) := \left(x_1^1, \ldots, x_1^m\right), \ldots, \left(u_\alpha^1, \ldots, u_\alpha^m\right) := \left(x_{r_1}^1, \ldots, x_{r_m}^m\right) \\
&\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right) := 0 \ ,
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{r_m} \left\|T\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_m}^m\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\qquad = \left(\sum_{i=1}^{\alpha} \left\|T\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\qquad \leq \|T\|_{s,p} \cdot \sup \left(\sum_{i=1}^{\alpha} \left|\varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right|^p\right)^{1/p} \\
&\qquad = \|T\|_{s,p} \cdot \sup \left(\sum_{i_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{r_m} \left|\varphi\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_m}^m\right)\right|^p\right)^{1/p} \\
&\qquad = (*).
\end{aligned}$$

Si utilizamos que toda forma multilineal es múltiple p-sumante y la desigualdad (2.20), obtenemos que

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\leq \quad \|T\|_{s,p} \cdot \sup \|\varphi\|_{ms,p} \cdot \prod_{k=1}^m \left\|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{m_k}\right\|_p^w \\
&\leq \quad M \cdot \|T\|_{s,p} \cdot \prod_{k=1}^m \left\|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{m_k}\right\|_p^w .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, T pertenece a $\mathcal{L}_{ms}^p(X_1, \ldots, X_m; Y)$.
Finalmente, veamos que si $H_1, \ldots, H_m, H$ son espacios de Hilbert reales entonces

$$\mathcal{L}_{HS}(H_1, \ldots, H_m; H) \subset \mathcal{L}_s^p(H_1, \ldots, H_m; H).$$

Sea $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, \ldots, H_m; H)$.
Entonces existe una base ortonormal $\left(u_j^k\right)_{j\in J_k}$ de H_k, donde $k = 1, \ldots, m$, tal que $\|T\|_{HS} < \infty$. Afirmamos que la aplicación

$$T_0 \colon H \longrightarrow \mathcal{L}_{HS}(H_1, \ldots, H_m; \mathbb{R}),$$

definida como $T_0(y)\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left\langle T\left(x^1, \ldots, x^m\right), y\right\rangle_H$, es un operador lineal Hilbert-Schmidt. Es inmediato de la definición que T_0 es un operador lineal continuo.
Ahora, T_0 es Hilbert-Schmidt ya que

$$\|T_0\|_{HS} = \|T\|_{HS} < \infty.$$

En efecto, para cualquier base ortonormal $(v_i)_{i\in I}$ de H se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T_0\|_{HS}^2 &= \sum_{i\in I} \|T_0(v_i)\|_{HS}^2 \\
&= \sum_{i\in I} \sum_{\substack{j_k\in J_k \\ k=1,\ldots,m}} \left|T_0(v_i)\left(u_{j_1}^1, \ldots, u_{j_m}^m\right)\right|^2 \\
&= \sum_{i\in I} \sum_{\substack{j_k\in J_k \\ k=1,\ldots,m}} \left|\left\langle T\left(u_{j_1}^1, \ldots, u_{j_m}^m\right), v_i\right\rangle_H\right|^2 \\
&= \sum_{\substack{j_k\in J_k \\ k=1,\ldots,m}} \sum_{i\in I} \left|\left\langle T\left(u_{j_1}^1, \ldots, u_{j_m}^m\right), v_i\right\rangle_H\right|^2 \\
&= \sum_{\substack{j_k\in J_k \\ k=1,\ldots,m}} \left\|T\left(u_{j_1}^1, \ldots, u_{j_m}^m\right)\right\|^2 \\
&= \|T\|_{HS}^2 .
\end{aligned}$$

Entonces, como el operador lineal adjunto de un operador lineal Hilbert-Schmidt es Hilbert-Schimdt, el operador $T_0^* \colon \mathcal{L}_{HS}(H_1, \ldots, H_m; \mathbb{R}) \longrightarrow H$ es Hilbert-Schmidt y por el Teorema 1.25 concluimos que T_0^* es un operador lineal absolutamente p-sumante.
Por otro lado, si definimos

$$\Lambda \colon H_1 \times \cdots \times H_m \longrightarrow \mathcal{L}_{HS}(H_1, \ldots, H_m; \mathbb{R})$$

como $\Lambda\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left\langle x^1, \cdot\right\rangle_{H_1} \cdots \left\langle x^m, \cdot\right\rangle_{H_m}$, es inmediato que esta aplicación es un operador m-lineal continuo (de hecho $\|\Lambda\| = 1$), el cual satisface además que

$$T = T_o^* \circ \Lambda. \tag{2.21}$$

Esta última igualdad es porque para $u \in H$ y $x^k \in H_k$ con $k = 1, \ldots, m$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\langle T_0^* \left(\Lambda \left(x^1, \ldots, x^m\right)\right), u\right\rangle_H &= \left\langle \Lambda \left(x^1, \ldots, x^m\right), T_0 (u)\right\rangle_{HS} \\
&= \sum_{\substack{j_k \in J_k \\ k=1,\ldots,m}} \left\langle \Lambda \left(x^1, \ldots, x^m\right) \left(u^1_{j_1}, \ldots, u^m_{j_m}\right), T_0 (u) \left(u^1_{j_1}, \ldots, u^m_{j_m}\right)\right\rangle_{\mathbb{R}} \\
&= \sum_{\substack{j_k \in J_k \\ k=1,\ldots,m}} \left\langle x^1, u^1_{j_1}\right\rangle_{H_1} \cdots \left\langle x^m, u^m_{j_m}\right\rangle_{H_m} \left\langle T \left(u^1_{j_1}, \ldots, u^m_{j_m}\right), u\right\rangle_H \\
&= \left\langle T \left(x^1, \ldots, x^m\right), u\right\rangle_H .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la igualdad (2.21), del hecho que T_0^* es lineal absolutamente p-sumante y de la Proposición 2.11, concluimos que $T \in \mathcal{L}^p_s (H_1, \ldots, H_m; H)$.

□

Observación 2.20
En general no es posible comparar la clase $\mathcal{L}^p_s (X_1, \ldots, X_m; Y)$ *y la clase* $\mathcal{K} (X_1, \ldots, X_m; Y)$. *Más adelante en la Observación 3.16 demostraremos esto.*

Observación 2.21
En la contención $\mathcal{L}_{HS} (H_1, \ldots, H_m; H) \subset \mathcal{L}^p_s (H_1, \ldots, H_m; H)$ *se tiene la siguiente relación entre la norma* $\|\cdot\|_{HS}$ *y la norma* $\|\cdot\|_{s,p}$*:*
Por la igualdad (2.21) y por la Proposición 2.11 tenemos que

$$\|T\|_{s,p} \leq \pi_p (T_0^*) \cdot \|\Lambda\| = \pi_p (T_0^*) \tag{2.22}$$

para toda $1 \leq p < \infty$ *.*
Si $1 \leq p < 2$, *entonces por (2.22) y por la Proposición 1.25 tenemos que*

$$\begin{aligned}
\|T\|_{s,p} &\leq \pi_p(T_0^*) \\
&\leq K_G \cdot \|T_0^*\|_{HS} = K_G \cdot \|T_0\|_{HS} = K_G \cdot \|T\|_{HS} .
\end{aligned}$$

En el caso cuando $2 \leq p < \infty$, *por (2.22) y por la Proposición 1.25 tenemos que*

$$\begin{aligned}
\|T\|_{s,p} &\leq \pi_p (T_0^*) \\
&\leq \|T_0^*\|_{HS} = \|T_0\|_{HS} = \|T\|_{HS} .
\end{aligned}$$

Una característica que comparten los operadores multilineales absolutamente p-sumantes ($\mathcal{L}^p_{as}$), los múltiples p-sumantes ($\mathcal{L}^p_{ms}$) y los p-dominados ($\mathcal{L}^p_d$) es que, a diferencia de los operadores multilineales p-sumantes ($\mathcal{L}^p_s$), para éstos no siempre se tiene que toda forma multilineal es absolutamente p-sumante, múltiple p-sumante o p-dominada. Esto nos dice que en general la clase $\mathcal{L}^p_s$ es distinta a las clases $\mathcal{L}^p_{as}, \mathcal{L}^p_{ms}$ y $\mathcal{L}^p_d$.

- $\mathcal{L}_s^p(\ell_2, \ell_2; \mathbb{K}) \neq \mathcal{L}_{as}^p(\ell_2, \ell_2; \mathbb{K})$ para todo $p \geq 2$.

La forma bilineal continua

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \ell_2 \times \ell_2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & \langle x, y\rangle_{\ell_2} \end{array}$$

no es absolutamente p-sumante para ningún $p \geq 2$ (véase [CD, Sección 4]), sin embargo esta forma bilineal continua es p-sumante para todo $p \geq 2$ ya que cualquier forma bilineal continua lo es (véase los Ejemplos 2.4).

- $\mathcal{L}_s^p(\ell_1, \ell_1; \mathbb{K}) \neq \mathcal{L}_{ms}^p(\ell_1, \ell_1; \mathbb{K})$ para todo $p > 2$.

En [PV, Teorema 3.6] se demuestra que dado $p > 2$ existe una forma bilineal continua $\varphi\colon \ell_1 \times \ell_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ que no es múltiple p-sumante, sin embargo toda forma bilineal continua es p-sumante para todo $p > 2$.

- $\mathcal{L}_s^p(\ell_2, \ell_2; \mathbb{C}) \neq \mathcal{L}_d^p(\ell_2, \ell_2; \mathbb{C})$ para todo $1 \leq p < \infty$.

La forma bilineal continua

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \ell_2 \times \ell_2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{\infty} t_i \cdot x_i \cdot y_i \ , \end{array}$$

donde $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pertenece al espacio ℓ_2 pero no a ℓ_1, no es p-dominada para ningún $1 \leq p < \infty$ (véase [MT, Pág. 208]), sin embargo ésta es una forma bilineal p-sumante para todo $1 \leq p < \infty$.

La contención $\mathcal{L}_{HS} \subset \mathcal{L}_s^p$, presentada en el Teorema 2.19, en general es propia.

- $\mathcal{L}_{HS}(\ell_2, \ell_2; \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}_s^p(\ell_2, \ell_2; \mathbb{R})$ para todo $1 \leq p < \infty$.

La forma bilineal

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \ell_2 \times \ell_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \langle x, y\rangle_{\ell_2} \ , \end{array}$$

la cual es totalmente p-sumante para toda $1 \leq p < \infty$, no es Hilbert-Schmidt pues

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} |\varphi(e_i, e_j)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} 1 = \infty \ .$$

A continuación veremos que cuando toda forma multilineal es Hilbert-Schmidt, la contención anterior no puede ser propia para ningún $1 \leq p < \infty$.

Proposición 2.22 *Sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $H_1, \dots, H_m$ espacios de Hilbert reales. Lo siguiente es equivalente:*

(i) $\mathcal{L}_{HS}(H_1, \dots, H_m; \mathbb{R}) = \mathcal{L}(H_1, \dots, H_m)$.

(ii) $\mathcal{L}_{HS}(H_1, \dots, H_m; H) = \mathcal{L}_s^p(H_1, \dots, H_m; H)$ *para todo* $1 \leq p < \infty$ *y para todo espacio de Hilbert real* H.

(iii) $\mathcal{L}_{HS}(H_1, \dots, H_m; H) = \mathcal{L}_s^p(H_1, \dots, H_m; H)$ *para algún* $1 \leq p < \infty$ *y para todo espacio de Hilbert real* H.

Demostración:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Sean $1 \leq p_0 < \infty$ y H_0 espacio de Hilbert real arbitrarios. Por la contención (1) del Teorema 2.19 tenemos que

$$\mathcal{L}_{HS}\left(H_1, \ldots, H_m; H_0\right) \subset \mathcal{L}_s^{p_0}\left(H_1, \ldots, H_m; H_0\right).$$

Ahora, en [Per, Teorema 4.2] se demuestra que

$$\mathcal{L}_{ms}^{p}\left(H_1, \ldots, H_m; H\right) = \mathcal{L}_{HS}\left(H_1, \ldots, H_m; H\right) \tag{2.23}$$

para todo $1 \leq p < \infty$ y para todo espacio de Hilbert H (real y complejo). Luego, utilizando esta igualdad con $H = \mathbb{R}$ y $p = p_0$, así como la hipótesis tenemos que

$$\mathcal{L}_{ms}^{p_0}\left(H_1, \ldots, H_m; \mathbb{R}\right) = \mathcal{L}\left(H_1, \ldots, H_m\right)$$

y entonces por la contención (4) del Teorema 2.19 obtenemos que

$$\mathcal{L}_s^{p_0}\left(H_1, \ldots, H_m; H_0\right) \subset \mathcal{L}_{ms}^{p_0}\left(H_1, \ldots, H_m; H_0\right).$$

Finalmente, de la igualdad (2.23) con $p = p_0$ y $H = H_0$ concluimos que

$$\mathcal{L}_s^{p_0}\left(H_1, \ldots, H_m; H_0\right) \subset \mathcal{L}_{HS}\left(H_1, \ldots, H_m; H_0\right).$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Es inmediato.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Esto se sigue tomando $H = \mathbb{R}$ y recordando que toda forma multilineal es p-sumante para cada $1 \leq p < \infty$ (Ejemplos 2.4). □

2.3. La clase $\mathcal{L}_s^p$ desde un punto de vista tensorial

2.3.1. Un poco de historia

Para algunos autores, el concepto de producto tensorial aparece por primera vez en Análisis Funcional a finales de los años 30's, en el trabajo de Murray y John Von Neumann sobre espacios de Hilbert. En 1950, R. Schatten [Sch] comenzó con el primer estudio sistemático de normas definidas sobre el producto tensorial entre dos espacios de Banach, siendo, la tesis de A. Grothendieck [Gro] de 1955, la que finalmente sentaría las bases y mostraría la importante conexión que existe entre las normas tensoriales y la teoría de espacios de Banach.

Para 1970, S. Chevet [Che] y P. Saphar [Sap] introducen nuevos ejemplos de normas tensoriales (en ese tiempo sólo se conocían la norma inyectiva y la norma proyectiva, introducidas por A. Grothendieck en su tesis doctoral), las cuales, resultarían ser el vehículo preciso para unir la teoría de las normas tensoriales con la teoría lineal de los operadores absolutamente p-sumantes[9].

[9] En [Ryan1, Capítulo 6] puede encontrarse la definición de las normas introducidas por S. Chevet y P. Saphar, así como la relación existente en estas normas tensoriales y la clase de los operadores lineales absolutamente p-sumantes.

El objetivo de esta sección será el de mostrar que es posible generalizar, al caso de productos tensoriales entre más de dos espacios de Banach, las normas tensoriales introducidas por S. Chevet y P. Saphar en 1970, de tal manera que esta generalización, al igual que en el caso lineal, resultará ser el puente que una la teoría de las normas tensoriales de orden mayor que dos con la teoría de los operadores multilineales p-sumantes.

2.3.2. Una generalización de las normas Chevet-Saphar

Aunque existe bastante literatura acerca de la teoría de normas definidas sobre el producto tensorial entre dos espacios de Banach (véase por ejemplo [DF]), el caso de normas tensoriales definidas sobre el producto tensorial entre más de dos espacios, ha sido menos estudiado. En [Flo1] (véase también [Flo]), se ha comenzado a generalizar las definiciones básicas y los conceptos elementales de la teoría de normas tensoriales de orden 2 al caso de normas tensoriales de orden arbitrario, por lo que la definición que utilizaremos a continuación se ha tomado de ahí.

Definición 2.23 (**[Flo1, Definición 1.2]**)
Diremos que β es una norma tensorial de orden m si asigna a cada m-ada de espacios de Banach $(X_1, \ldots, X_m)$, una norma $\beta\left(\cdot\,; X_1, \ldots, X_m\right)$ sobre el espacio vectorial $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ (denotaremos por $X_1 \otimes_\beta \cdots \otimes_\beta X_m$ al espacio $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ con la norma β), tal que se cumplen las siguientes condiciones:

1. *β es una norma razonable, es decir, $\epsilon\left(\cdot\right) \leq \beta\left(\cdot\right) \leq \pi\left(\cdot\right)$, donde $\epsilon\left(\cdot\right)$ y $\pi\left(\cdot\right)$ son la norma inyectiva y proyectiva respectivamente.*[10]

2. *β satisface la propiedad de la aplicación métrica: Si $u_i \in \mathcal{L}\left(X_i, Y_i\right)$ para $i = 1 \ldots, m$, entonces*

$$\left\| u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \colon X_1 \otimes_\beta \cdots \otimes_\beta X_m \longrightarrow Y_1 \otimes_\beta \cdots \otimes_\beta Y_m \right\| \leq \left\| u_1 \right\| \cdots \left\| u_m \right\| .$$

A continuación definiremos la norma que nos permitirá relacionar la teoría de normas tensoriales de orden arbitrario con la teoría de los operadores multilineales p-sumantes.
Consideremos $m \in \mathbb{N}$ y $p, p' \in [1, \infty]$ exponentes conjugados.
Si $X_1, \ldots, X_m, Y$ son espacios de Banach y $\xi \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \otimes Y$ entonces definimos

$$d_{s,p}\left(\xi\right) = \inf \left\| \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^n \right\|_{p'}^w \left\| \left(y_i\right)_{i=1}^n \right\|_p^s$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de ξ de la forma

$$\xi = \sum_{i=1}^n \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m \otimes y_i - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m \otimes y_i\right)$$

[10] En la sección 1.2 pueden verse las definiciones de la norma proyectiva e inyectiva.

y la sucesión $\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^n$ se está considerando como un elemento del espacio $\ell_{p'}^w\left(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m\right)$.

Proposición 2.24 *Si* $1 \leq p \leq \infty$ *entonces* $d_{s,p}$ *es una norma tensorial de orden* m*.*

Demostración:
Sean $X_1, \ldots, X_m, Y$ espacios de Banach. Primero probaremos que

$$\epsilon\left(\xi\right) \leq d_{s,p}\left(\xi\right) \tag{2.24}$$

para todo $\xi \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \otimes Y$.

Sea ξ un elemento de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \otimes Y$.
Consideremos una representación de ξ de la forma

$$\sum_{i=1}^n \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m \otimes y_i - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m \otimes y_i\right). \tag{2.25}$$

Entonces para todo $x_k^* \in B_{X_k^*}$ con $k = 1, \ldots, m$ y $y^* \in B_{Y^*}$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\left|\left(x_1^* \otimes \cdots \otimes x_m^* \otimes y^*\right)\left(\xi\right)\right| \\ &\quad = \left|\sum_{i=1}^n \left[x_1^*\left(u_i^1\right) \cdots x_m^*\left(u_i^m\right) y^*\left(y_i\right) - x_1^*\left(v_i^1\right) \cdots x_m^*\left(v_i^m\right) y^*\left(y_i\right)\right]\right| \\ &\quad = \left|\sum_{i=1}^n \left[x_1^*\left(u_i^1\right) \cdots x_m^*\left(u_i^m\right) - x_1^*\left(v_i^1\right) \cdots x_m^*\left(v_i^m\right)\right] y^*\left(y_i\right)\right| \\ &\quad \leq \sum_{i=1}^n \left|x_1^*\left(u_i^1\right) \cdots x_m^*\left(u_i^m\right) - x_1^*\left(v_i^1\right) \cdots x_m^*\left(v_i^m\right)\right| \|y_i\| = (*). \end{aligned}$$

Si definimos por $\varphi_{x_1^*,\ldots,x_m^*} : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow \mathbb{K}$ a la forma m-lineal tal que $\varphi_{x_1^*,\ldots,x_m^*}\left(x^1, \ldots, x^m\right) = x_1^*\left(x^1\right) \cdots x_m^*\left(x^m\right)$ y utilizamos la desigualdad de Hölder, obtenemos que

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{i=1}^n \left|\varphi_{x_1^*,\ldots,x_m^*}\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi_{x_1^*,\ldots,x_m^*}\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right| \|y_i\| \\ &\leq \left\|\left(\varphi_{x_1^*,\ldots,x_m^*}\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi_{x_1^*,\ldots,x_m^*}\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right)_{i=1}^n\right\|_{\ell_{p'}} \left\|\left(\|y_i\|\right)_{i=1}^n\right\|_{\ell_p} \\ &\leq \left\|\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^n\right\|_{p'}^w \left\|\left(y_i\right)_{i=1}^n\right\|_p^s \end{aligned}$$

luego,

$$\left|\left(x_1^* \otimes \cdots \otimes x_m^* \otimes y^*\right)\left(\xi\right)\right| \leq \left\|\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^n\right\|_{p'}^w \left\|\left(y_i\right)_{i=1}^n\right\|_p^s.$$

Por lo tanto, si tomamos el supremo sobre los $x_k^* \in X_k^*$ y $y^* \in Y^*$ en la desigualdad anterior obtenemos que

$$\epsilon\left(\xi\right) \leq \left\|\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^n\right\|_{p'}^w \left\|\left(y_i\right)_{i=1}^n\right\|_p^s.$$

Finalmente, tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de ξ de la forma (2.25) concluimos que $\epsilon(\xi) \le d_{s,p}(\xi)$.
Ahora, probemos que $d_{s,p}(\cdot)$ es una norma sobre $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \otimes Y$.
(i) Si $\xi \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \otimes Y$, veamos que

$$d_{s,p}(\xi) \ge 0 \qquad \text{y} \qquad d_{s,p}(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0.$$

De la definición de $d_{s,p}(\cdot)$ es inmediato que $d_{s,p}(\xi) \ge 0$ y que si $\xi = 0 \Rightarrow d_{s,p}(\xi) = 0$. Si $d_{s,p}(\xi) = 0$, por (2.24) tenemos que $\epsilon(\xi) = 0$ y entonces $\xi = 0$ pues $\epsilon(\cdot)$ es una norma.
(ii) Veamos que si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\xi \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \otimes Y$ entonces

$$d_{s,p}(\lambda \xi) = |\lambda| \; d_{s,p}(\xi).$$

El caso $\lambda = 0$ es inmediato. Supongamos que $\lambda \neq 0$.
Consideremos una representación de ξ de la forma (2.25). Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} \left[u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m \otimes (\lambda y_i) - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m \otimes (\lambda y_i) \right]$$

es una representación de $\lambda \xi$ de la forma (2.25). Luego, por la definición de $d_{s,p}(\lambda \xi)$ se tiene que

$$\begin{aligned} d_{s,p}(\lambda \xi) &\le \left\| \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m \right)_{i=1}^n \right\|_{p'}^w \|(\lambda y_i)_{i=1}^n\|_p^s \\ &= |\lambda| \left\| \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m \right)_{i=1}^n \right\|_{p'}^w \|(y_i)_{i=1}^n\|_p^s . \end{aligned}$$

Si tomamos el ínfimo sobre todas las representaciones de ξ de la forma (2.25), obtenemos que

$$d_{s,p}(\lambda \xi) \le |\lambda| \, d_{s,p}(\xi).$$

Ahora, si utilizamos esta última desigualdad se tiene que

$$d_{s,p}(\xi) = d_{s,p}\left(\lambda^{-1} \lambda \xi\right) \le |\lambda|^{-1} d_{s,p}(\lambda \xi)$$

por lo tanto, $d_{s,p}(\lambda \xi) = |\lambda| \; d_{s,p}(\xi)$.
(iii) Probemos que si $\xi_1, \xi_2 \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \otimes Y$ entonces

$$d_{s,p}(\xi_1 + \xi_2) \le d_{s,p}(\xi_1) + d_{s,p}(\xi_2).$$

Probaremos sólo el caso cuando $1 < p < \infty$, los casos $p = 1$ y $p = \infty$ se siguen de manera análoga haciendo las modificaciones obvias.
Cuando tenemos que $\xi_1 = 0$ o $\xi_2 = 0$ la prueba es inmediata.
Entonces supongamos que $\xi_1, \xi_2 \neq 0$ y consideremos $\epsilon > 0$.
Si utilizamos la definición de $d_{s,p}(\xi_1)$, tenemos que es posible encontrar una representación de ξ_1 de la forma

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(\tilde{u}_{i,1}^1 \otimes \cdots \otimes \tilde{u}_{i,1}^m \otimes \tilde{y}_{i,1} - \tilde{v}_{i,1}^1 \otimes \cdots \otimes \tilde{v}_{i,1}^m \otimes \tilde{y}_{i,1} \right)$$

tal que

$$\left\|\left(\tilde{u}_{i,1}^1 \otimes \cdots \otimes \tilde{u}_{i,1}^m - \tilde{v}_{i,1}^1 \otimes \cdots \otimes \tilde{v}_{i,1}^m\right)_{i=1}^{n_1}\right\|_{p'}^w \left\|(\tilde{y}_{i,1})_{i=1}^{n_1}\right\|_p^s < d_{s,p}\left(\xi_1\right) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Observemos que $\left\|(\tilde{y}_{i,1})_{i=1}^{n_1}\right\|_p^s > 0$ ya que $\xi_1 \neq 0$. Ahora, definamos

$$\alpha := \frac{\left\|(\tilde{y}_{i,1})_{i=1}^{n_1}\right\|_p^s}{\left(d_{s,p}(\xi_1) + \frac{\epsilon}{2}\right)^{1/p}} > 0$$

y

$$u_{i,1}^k := \alpha^{\delta_{1k}} \cdot \tilde{u}_{i,1}^k, \qquad v_{i,1}^k := \alpha^{\delta_{1k}} \cdot \tilde{v}_{i,1}^k \qquad \text{y} \qquad y_{i,1} := \alpha^{-1} \cdot \tilde{y}_{i,1}$$

donde δ_{1k} es la delta de Kronecker, $1 \leq i \leq n_1$ y $1 \leq k \leq m$.
Entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(u_{i,1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{i,1}^m \otimes y_{i,1} - v_{i,1}^1 \otimes \cdots \otimes v_{i,1}^m \otimes y_{i,1}\right)$$

es una representación de ξ_1 que satisface que

$$\left\|\left(u_{i,1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{i,1}^m - v_{i,1}^1 \otimes \cdots \otimes v_{i,1}^m\right)_{i=1}^{n_1}\right\|_{p'}^w < \left(d_{s,p}\left(\xi_1\right) + \frac{\epsilon}{2}\right)^{1/p'} \tag{2.26}$$

y

$$\left\|(y_{i,1})_{i=1}^{n_1}\right\|_p^s < \left(d_{s,p}\left(\xi_1\right) + \frac{\epsilon}{2}\right)^{1/p}. \tag{2.27}$$

Análogamente existe una representación de ξ_2 de la forma

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left(u_{i,2}^1 \otimes \cdots \otimes u_{i,2}^m \otimes y_{i,2} - v_{i,2}^1 \otimes \cdots \otimes v_{i,2}^m \otimes y_{i,2}\right)$$

tal que

$$\left\|\left(u_{i,2}^1 \otimes \cdots \otimes u_{i,2}^m - v_{i,2}^1 \otimes \cdots \otimes v_{i,2}^m\right)_{i=1}^{n_2}\right\|_{p'}^w < \left(d_{s,p}\left(\xi_2\right) + \frac{\epsilon}{2}\right)^{1/p'} \tag{2.28}$$

y

$$\left\|(y_{i,2})_{i=1}^{n_2}\right\|_p^s < \left(d_{s,p}\left(\xi_2\right) + \frac{\epsilon}{2}\right)^{1/p}. \tag{2.29}$$

Luego, si para cada $i \in \{1, \ldots, n_1 + n_2\}$ y $k \in \{1, \ldots, m\}$ definimos u_i^k,v_i^k y y_i^k como

$$u_i^k := \begin{cases} u_{i,1} & \text{si } 1 \leq i \leq n_1 \\ u_{i-n_1,2} & \text{si } n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2 \end{cases}$$

v_i^k y y_i^k se definen de manera análoga, entonces se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2} \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m \otimes y_i - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m \otimes y_i\right)$$

es una representación de $\xi_1+\xi_2$ para la cual se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_1+n_2} \left|x^*\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m\right)-x^*\left(v_i^1\otimes\cdots\otimes v_i^m\right)\right|^{p'} \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \left|x^*\left(u_{i,1}^1\otimes\cdots\otimes u_{i,1}^m\right)-x^*\left(v_{i,1}^1\otimes\cdots\otimes v_{i,1}^m\right)\right|^{p'} \\
&+ \sum_{i=1}^{n_2} \left|x^*\left(u_{i,2}^1\otimes\cdots\otimes u_{i,2}^m\right)-x^*\left(v_{i,2}^1\otimes\cdots\otimes v_{i,2}^m\right)\right|^{p'} \\
&\leq d_{s,p}(\xi_1)+d_{s,p}(\xi_2)+\epsilon \qquad \text{por (2.26) y (2.28)}
\end{aligned}$$

para todo $x^*\in B_{\left(X_1\hat{\otimes}_\pi\cdots\hat{\otimes}_\pi X_m\right)^*}$. Luego,

$$\left\|\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m-v_i^1\otimes\cdots\otimes v_i^m\right)_{i=1}^{n_1+n_2}\right\|_{p'}^{w}\leq\left(d_{s,p}(\xi_1)+d_{s,p}(\xi_2)+\epsilon\right)^{1/p'}. \tag{2.30}$$

De manera similar, utilizando (2.27) y (2.29) se tiene que

$$\left\|(y_i)_{i=1}^{n_1+n_2}\right\|_p^s\leq\left(d_{s,p}(\xi_1)+d_{s,p}(\xi_2)+\epsilon\right)^{1/p}. \tag{2.31}$$

Por lo tanto, de la definición de $d_{s,p}(\xi_1+\xi_2)$, de (2.30) y (2.31) se tiene que

$$\begin{aligned}
d_{s,p}(\xi_1+\xi_2) &\leq \left\|\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m-v_i^1\otimes\cdots\otimes v_i^m\right)_{i=1}^{n_1+n_2}\right\|_{p'}^{w}\cdot\left\|(y_i)_{i=1}^{n_1+n_2}\right\|_p^s \\
&\leq d_{s,p}(\xi_1)+d_{s,p}(\xi_2)+\epsilon
\end{aligned}$$

y como ϵ fue arbitrario concluimos que $d_{s,p}(\cdot)$ satisface la desigualdad del triángulo.

Probemos que

$$d_{s,p}(\xi)\leq\pi(\xi)$$

para todo $\xi\in X_1\otimes\cdots\otimes X_m\otimes Y$.

Sea $\xi\in X_1\otimes\cdots\otimes X_m\otimes Y$ y consideremos una representación de ξ de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m\otimes y_i \tag{2.32}$$

observemos que cada elemento diagonal $u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m\otimes y_i$ puede escribirse de la forma

$$u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m\otimes y_i-0\otimes\cdots\otimes 0\otimes y_i$$

luego, de la definición de $d_{s,p}\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m\otimes y_i\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
d_{s,p}\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m\otimes y_i\right) &\leq \left\|u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m-0\otimes\cdots\otimes 0\otimes y_i\right\|_{p'}^{w}\left\|y_i\right\|_p^s \\
&\leq \left\|u_i^1\right\|\cdots\left\|u_i^m\right\|\left\|y_i\right\|
\end{aligned}$$

para cada $i=1,\ldots,m$.

Entonces, por la desigualdad del triángulo y esta última desigualdad, se tiene que

$$\begin{aligned} d_{s,p}(\xi) &= d_{s,p}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m \otimes y_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} d_{s,p}\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m \otimes y_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left\|u_i^1\right\| \cdots \left\|u_i^m\right\| \left\|y_i\right\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de ξ de la forma (2.32) concluimos que $d_{s,p}(\xi) \leq \pi(\xi)$.
Por último, probemos que $d_{s,p}$ satisface la propiedad de la aplicación métrica.
Sean $u_i \in \mathcal{L}(X_i, W_i)$ donde $i = 1, \ldots, m$ y $v \in \mathcal{L}(Y, Z)$.
Sea $\xi \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \otimes Y$ y consideremos una representación de éste de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m \otimes y_i - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m \otimes y_i\right). \tag{2.33}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} u_1\left(u_i^1\right) \otimes \cdots \otimes u_m\left(u_i^m\right) \otimes v\left(y_i\right) - u_1\left(v_i^1\right) \otimes \cdots \otimes u_m\left(v_i^m\right) \otimes v\left(y_i\right)$$

es una representación de $(u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes v)(\xi)$ en $W_1 \otimes \cdots \otimes W_m \otimes Z$, de la definición de $d_{s,p}((u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes v)(\xi))$ tenemos que

$$\begin{aligned} & d_{s,p}\left((u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes v)(\xi)\right) \\ &\qquad \leq \left\|\left(u_1\left(u_i^1\right) \otimes \cdots \otimes u_m\left(u_i^m\right)\right)_{i=1}^{n}\right\|_{p'}^{w} \left\|\left(v\left(y_i\right)\right)_{i=1}^{n}\right\|_{p}^{s} \\ &\qquad \leq \|u_1\| \cdots \|u_m\| \cdot \|v\| \cdot \left\|\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m\right)_{i=1}^{n}\right\|_{p'}^{w} \left\|\left(y_i\right)_{i=1}^{n}\right\|_{p}^{s}. \end{aligned}$$

Si en la desigualdad anterior tomamos el ínfimo sobre todas las representaciones de ξ de la forma (2.33) obtenemos que

$$d_{s,p}\left((u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes v)(\xi)\right) \leq \|u_1\| \cdots \|u_m\| \cdot \|v\| \cdot d_{s,p}(\xi).$$

Por lo tanto $d_{s,p}$ satisface la propiedad de la aplicación métrica. $\square$

Dado que en general el espacio normado $X_1 \otimes_{d_{s,p}} \cdots \otimes_{d_{s,p}} X_m \otimes_{d_{s,p}} Y$ no es completo, denotaremos por

$$X_1 \hat{\otimes}_{d_{s,p}} \cdots \hat{\otimes}_{d_{s,p}} X_m \hat{\otimes}_{d_{s,p}} Y$$

a la completación de este.

2.3.3. Relación entre la clase $\mathcal{L}_s^p$ y la norma tensorial $d_{s,p}$

Para poder mostrar la manera como se conectan la clase $\mathcal{L}_s^p$ y la norma tensorial $d_{s,p}$, necesitamos primero demostrar el lema auxiliar siguiente.

Lema 2.25 *Sean $1 \leq p < \infty$, X espacio de Banach y $x^* \in X^*$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in X$ tal que*

$$x^*(x_\epsilon) = \|x^*\|^p \qquad y \qquad \|x_\epsilon\| \leq (1+\epsilon)\|x^*\|^{p-1}.$$

Demostración:
Si $x^* \equiv 0$ entonces claramente $x_\epsilon = 0$ es el vector requerido.
Supongamos que $x^* \neq 0$. Entonces existe $x^{**} \in X^{**}$ con $\|x^{**}\| = 1$ tal que

$$x^{**}(x^*) = \|x^*\|.$$

Ahora, por el teorema de Helly (véase [DJT, Lema 8.15]) tenemos que si $\epsilon > 0$, entonces existe $\tilde{x}_\epsilon \in X$ tal que

$$x^*(\tilde{x}_\epsilon) = x^{**}(x^*) \qquad \text{y} \qquad \|\tilde{x}_\epsilon\| \leq (1+\epsilon)\cdot\|x^{**}\|.$$

Entonces

$$x^*(\tilde{x}_\epsilon) = \|x^*\| \qquad \text{y} \qquad \|\tilde{x}_\epsilon\| \leq 1+\epsilon.$$

Por lo tanto, si definimos $x_\epsilon := \|x^*\|^{p-1}\ \tilde{x}_\epsilon$ tenemos que

$$x^*(x_\epsilon) = \|x^*\|^p \qquad \text{y} \qquad \|x_\epsilon\| \leq (1+\epsilon)\|x^*\|^{p-1}.$$

□

Dado $\zeta \in \left(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m \hat{\otimes}_\pi Y\right)^*$, denotaremos por $T_\zeta \in \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y^*)$ a la imagen de ζ bajo las isometrias canónicas

$$\left(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m \hat{\otimes}_\pi Y\right)^* \overset{1}{\equiv} \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m,Y) \overset{1}{\equiv} \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y^*),$$

de hecho, este operador multilineal está definido como

$$T_\zeta\left(x^1,\ldots,x^m\right)(y) = \zeta\left(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m \otimes y\right). \tag{2.34}$$

Análogamente, dado $T \in \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y^*)$, denotaremos a la imagen de T bajo las isometrias canónicas anteriores por $\zeta_T \in \left(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m \hat{\otimes}_\pi Y\right)^*$, esto es, ζ_T es la función definida como

$$\zeta_T\left(\sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^n T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right)(y_i).$$

Debido a que $\left(X_1\hat{\otimes}_{d_{s,p}} \cdots \hat{\otimes}_{d_{s,p}} X_m \hat{\otimes}_{d_{s,p}} Y\right)^*$ es un subespacio lineal del espacio $\left(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m \hat{\otimes}_\pi Y\right)^*$, esto gracias a que $d_{s,p}(\cdot) \leq \pi(\cdot)$, tenemos que a toda

funcional lineal ζ continua sobre $X_1 \hat{\otimes}_{d_p} \cdots \hat{\otimes}_{d_p} X_m \hat{\otimes}_{d_p} Y$, le podemos asociar el operador multilineal T_ζ mencionado anteriormente.
A continuación probaremos el teorema principal de esta sección. Éste nos dice que los operadores multilineales p-sumantes son exactamente aquellos, cuyo funcional lineal asociado ζ_T, resulta ser continuo cuando consideramos sobre el producto tensorial la norma $d_{s,p'}$.

Teorema 2.26 *Sean $1 < p \leq \infty$, $X_1, \ldots, X_m, Y$ espacios de Banach y ζ una funcional lineal sobre $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \otimes Y$. Entonces tenemos que*

$$\zeta \in \left(X_1 \hat{\otimes}_{d_{s,p}} \cdots \hat{\otimes}_{d_{s,p}} X_m \hat{\otimes}_{d_{s,p}} Y\right)^* \quad \textit{si y sólo si} \quad T_\zeta \in \mathcal{L}_s^{p'}\left(X_1, \ldots, X_m; Y^*\right).$$

Además, en este caso $\|\zeta\| = \|T_\zeta\|_{s,p'}$.

Demostración:
$\Rightarrow$) Supongamos que $\zeta \in \left(X_1 \hat{\otimes}_{d_{s,p}} \cdots \hat{\otimes}_{d_{s,p}} X_m \hat{\otimes}_{d_{s,p}} Y\right)^*$.
Entonces para todo $\xi \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \otimes Y$ se tiene que

$$|\zeta(\xi)| \leq \|\zeta\| \cdot d_{s,p}(\xi).$$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $u_1^k, \ldots, u_n^k, v_1^k, \ldots, v_n^k \in X_k$ con $k = 1, \ldots, m$. Dado que para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que

$$T_\zeta\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T_\zeta\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right) \in Y^*,$$

por el Lema 2.25 tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $y_{\epsilon,i} \in Y$ tal que

$$\begin{aligned} T_\zeta\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right)(y_{\epsilon,i}) - T_\zeta\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)(y_{\epsilon,i}) & \\ = \left\|T_\zeta\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T_\zeta\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right\|^{p'} & \end{aligned} \tag{2.35}$$

y

$$\|y_{\epsilon,i}\| \leq (1+\epsilon)\left\|T_\zeta\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T_\zeta\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right\|^{p'-1}.$$

Ahora, de esta última desigualdad y del hecho que p y p' son exponentes conjugados se tiene que

$$\left\|(y_{\epsilon,i})_{i=1}^n\right\|_p^s \leq (1+\epsilon)\left(\sum_{i=1}^n \left\|T_\zeta\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T_\zeta\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right)\right\|^{p'}\right)^{1/p} \tag{2.36}$$

cuando $1 < p < \infty$ y se tiene que

$$\left\|(y_{\epsilon,i})_{i=1}^n\right\|_p^s \leq 1+\epsilon \tag{2.37}$$

cuando $p = \infty$.
Entonces utilizando (2.35), (2.34), el hecho de que la funcional ζ pertenece al

espacio $\left(X_1\hat{\otimes}_{d_{s,p}}\cdots\hat{\otimes}_{d_{s,p}}X_m\hat{\otimes}_{d_{s,p}}Y\right)^*$ y la definición de la norma $d_{s,p}(\cdot)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left\|T_\zeta\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right)-T_\zeta\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)\right\|^{p'}\\
&\quad= \sum_{i=1}^{n}\left[T_\zeta\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right)(y_{\epsilon,i})-T_\zeta\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)(y_{\epsilon,i})\right]\\
&\quad= \zeta\left(\sum_{i=1}^{n}\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m\otimes y_{\epsilon,i}-v_i^1\otimes\cdots\otimes v_i^m\otimes y_{\epsilon,i}\right)\right)\\
&\quad\leq \|\zeta\|\cdot d_{s,p}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m\otimes y_{\epsilon,i}-v_i^1\otimes\cdots\otimes v_i^m\otimes y_{\epsilon,i}\right)\right)\\
&\quad\leq \|\zeta\|\cdot\left\|\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m-v_i^1\otimes\cdots\otimes v_i^m\right)_{i=1}^n\right\|_{p'}^{w}\cdot\left\|(y_{\epsilon,i})_{i=1}^n\right\|_p^s. \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

Utilizando en (2.38) ya sea (2.36) cuando $1<p<\infty$ o (2.37) cuando $p=\infty$ y luego simplificando la desigualdad resultante, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|T_\zeta\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right)-T_\zeta\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)\right\|^{p'}\right)^{1/p'}\\
&\qquad\qquad\leq \|\zeta\|(1+\epsilon)\left\|\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m-v_i^1\otimes\cdots\otimes v_i^m\right)_{i=1}^n\right\|_{p'}^{w}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\epsilon\to 0$ tenemos que $T_\zeta\in\mathcal{L}_s^{p'}\left(X_1,\ldots,X_m;Y^*\right)$ y $\|T_\zeta\|_{s,p'}\leq\|\zeta\|$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $T_\zeta\in\mathcal{L}_s^{p'}\left(X_1,\ldots,X_m;Y^*\right)$.

Es suficiente probar que ζ es continua sobre $X_1\otimes_{d_{s,p}}\cdots\otimes_{d_{s,p}}X_m\otimes_{d_{s,p}}Y$ y que $\|\zeta\|\leq\|T_\zeta\|_{s,p'}$.

Sea $\xi\in X_1\otimes\cdots\otimes X_m\otimes Y$ y consideremos una representación de ξ de la forma

$$\sum_{i=1}^{n}\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m\otimes y_i-v_i^1\otimes\cdots\otimes v_i^m\otimes y_i\right). \qquad (2.39)$$

Entonces, recordando que $T_\zeta\left(x^1,\ldots,x^m\right)(y)=\zeta\left(x^1\otimes\cdots\otimes x^m\otimes y\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|\zeta(\xi)| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\zeta\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m\otimes y_i\right)-\zeta\left(v_i^1\otimes\cdots\otimes v_i^m\otimes y_i\right)\right|\\
&= \left|\sum_{i=1}^{n}T_\zeta\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right)(y_i)-T_\zeta\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)(y_i)\right|\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\left(T_\zeta\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right)-T_\zeta\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)\right)(y_i)\right|\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left\|T_\zeta\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right)-T_\zeta\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)\right\|\cdot\|y_i\|.
\end{aligned}$$

Luego, utilizando la desigualdad de Hölder y la hipótesis obtenemos que

$$\begin{aligned} |\zeta(\xi)| &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|T_\zeta\left(u_i^1,\ldots,u_i^m\right) - T_\zeta\left(v_i^1,\ldots,v_i^m\right)\right\|^{p'}\right)^{1/p'} \cdot \left\|(\|y_i\|)_{i=1}^n\right\|_{\ell_p} \\ &\leq \|T_\zeta\|_{s,p'} \cdot \left\|\left(u_i^1\otimes\cdots\otimes u_i^m - v_i^1\otimes\cdots\otimes v_i^m\right)_{i=1}^n\right\|_{p'}^w \cdot \|(y_i)_{i=1}^n\|_p^s. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de ξ de la forma (2.39) concluimos que

$$|\zeta(\xi)| \leq \|T_\zeta\|_{s,p'} \cdot d_{s,p}(\xi)$$

y entonces $\zeta \in \left(X_1 \otimes_{d_{s,p}} \cdots \otimes_{d_{s,p}} X_m \otimes_{d_{s,p}} Y\right)^*$ y $\|\zeta\| \leq \|T_\zeta\|_{s,p'}$. □

A primera vista podriamos pensar que la caracterización que acabamos de probar sólo se puede utilizar en el caso cuando consideremos operadores multilineales con contradominio un espacio dual. Sin embargo, debido a que la propiedad de ser p-sumante y a que el valor de la norma $\|\cdot\|_{s,p}$ permanecen sin cambios cuando el espacio de recorrido es alargado (véase la Proposición 2.10), tenemos que el espacio $\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y)$ puede encajarse isométricamente en $\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y^{**})$. Entonces como

$$\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y^{**}) \overset{1}{\equiv} \left(X_1\hat{\otimes}_{d_{s,p'}}\cdots\hat{\otimes}_{d_{s,p'}}X_m\hat{\otimes}_{d_{s,p'}}Y^*\right)^*$$

obtenemos la siguiente caracterización para la clase $\mathcal{L}_s^p$ sin importar si el contradominio de los operadores multilineales es un espacio dual o no.

Teorema 2.27 *Sean $1 \leq p < \infty$ y $T \in \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)$. Entonces*

$$T \in \mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_m;Y) \quad \textit{si y sólo si} \quad \zeta_{j_Y\circ T} \in \left(X_1\hat{\otimes}_{d_{s,p'}}\cdots\hat{\otimes}_{d_{s,p'}}X_m\hat{\otimes}_{d_{s,p'}}Y^*\right)^*.$$

Además, se tiene que $\|T\|_{s,p} = \|\zeta_{j_Y\circ T}\|$.

CAPÍTULO III

Los Teoremas de Dominación y Factorización

En este capítulo continuamos con el estudio de *los operadores multilineales p-sumantes*. Veremos que esta nueva clase satisface análogos multilineales del Teorema de Dominación y del Teorema de Factorización, dos propiedades fundamentales de la teoría lineal p-sumante (véase el Teorema 1.19 y el Teorema 1.20).

También demostramos una versión multilineal para los p-sumantes del importante Teorema de Grothendieck. Finalmente introducimos la propiedad estrella y la propiedad corchete, éstas son de gran utilidad para mostrar que la clase de los operadores multilineales p-sumantes satisface una versión multilineal del Teorema Débil de Dvoretzky-Rogers y del Teorema de Lindenstrauss-Pelczyńsky.

3.1. Dominación y Factorización

Teorema de Dominación 3.1 *Sean $1 \leq p < \infty$ y $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ un operador multilineal entre espacios de Banach. Entonces T es un operador multilineal p-sumante si y sólo si existe una constante $c \geq 0$ y una medida de probabilidad regular μ sobre $\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}, w^*\right)$, tal que para cada $u^k, v^k \in X_k$ con $1 \leq k \leq m$ se tiene que*

$$\begin{aligned} &\left\|T\left(u^1,\ldots,u^m\right) - T\left(v^1,\ldots,v^m\right)\right\| \\ &\qquad \leq \quad c \cdot \left(\int_{B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}} \left|\varphi\left(u^1,\ldots,u^m\right) - \varphi\left(v^1,\ldots,v^m\right)\right|^p \, d\mu(\varphi)\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

En este caso, $\|T\|_{s,p}$ es el ínfimo de todas las constantes c's para las cuales una de estas medidas existe.

Demostración:
Para simplificar la notación, escribiremos $\mathcal{L}^m$ en vez de $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)$ y en vez de $T\left(x^1, \ldots, x^m\right)$ escribiremos $T(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} = \left(x^1, \ldots, x^m\right) \in X_1 \times \cdots \times X_m$.
$\Leftarrow$) Supongamos que existe $c \geq 0$ tal que la desigualdad anterior se cumple.
Si $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in X_1 \times \cdots \times X_m$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \|T(\mathbf{u}_i) - T(\mathbf{v}_i)\|^p &\leq c^p \cdot \int_{B_{\mathcal{L}^m}} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(\mathbf{u}_i) - \varphi(\mathbf{v}_i)|^p \, d\mu(\varphi) \\ &\leq c^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}^m}} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(\mathbf{u}_i) - \varphi(\mathbf{v}_i)|^p ,\end{aligned}$$

luego, T es p-sumante y $\|T\|_{s,p}$ es menor o igual que el ínfimo de todas las c's que satisfacen la desigualdad.
$\Rightarrow$) Probaremos el caso cuando los espacios de Banach son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. El caso complejo se demuestra análogamente.
Supongamos que $T \in \mathcal{L}_s^p(X_1, \ldots, X_m; Y)$.
Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in X_1 \times \cdots \times X_m$ se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(\mathbf{u}_i) - T(\mathbf{v}_i)\|^p\right)^{1/p} \leq \|T\|_{s,p} \cdot \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}^m}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(\mathbf{u}_i) - \varphi(\mathbf{v}_i)|^p\right)^{1/p} . \tag{3.1}$$

Ahora, dado $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in X_1 \times \cdots \times X_m$ con $1 \leq i \leq n$, consideremos el conjunto finito

$$M = \{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

y definamos

$$g_M : B_{\mathcal{L}^m} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de tal manera que

$$g_M(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \left[\|T(\mathbf{u}_i) - T(\mathbf{v}_i)\|^p - \|T\|_{s,p}^p \cdot |\varphi(\mathbf{u}_i) - \varphi(\mathbf{v}_i)|^p\right].$$

Si Q es el conjunto formado por todas estas g_M's, entonces este conjunto es un subconjunto no vacío de $C_{\mathbb{R}}(B_{\mathcal{L}^m}, w^*)$.
Afirmamos que Q es un conjunto convexo.
Si $M = \{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) : 1 \leq i \leq n\}$, $N = \{(\mathbf{u}'_i, \mathbf{v}'_i) : 1 \leq i \leq n'\}$ y $\kappa, \lambda \geq 0$ son tales que $\kappa + \lambda = 1$, entonces es sencillo verificar que

$$\kappa \cdot g_M + \lambda \cdot g_N \equiv g_P ,$$

donde $P = \left\{\left(\kappa^{\frac{1}{mp}} \mathbf{u}_i, \kappa^{\frac{1}{mp}} \mathbf{v}_i\right), \left(\lambda^{\frac{1}{mp}} \mathbf{u}'_i, \lambda^{\frac{1}{mp}} \mathbf{v}'_i\right) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq n'\right\}$.
Luego, el conjunto Q es convexo.

Por otro lado, consideremos el conjunto

$$C := \{f \in C_{\mathbb{R}}\left(B_{\mathcal{L}^m}, w^*\right) : f\left(\varphi\right) > 0 \; \forall \, \varphi \in B_{\mathcal{L}^m}\} \;\; ;$$

es sencillo verificar que C es un conjunto no vacío, convexo y abierto.
Veamos que $Q \cap C = \emptyset$.
Como $B_{\mathcal{L}^m}$ es w^*-compacto y las funciones

$$\begin{array}{rccc} j_{\mathbf{x}} : & B_{\mathcal{L}^m} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi\left(\mathbf{x}\right) \end{array}$$

son w^*-continuas para cada $\mathbf{x} \in X_1 \times \cdots \times X_m$, tenemos que para cada conjunto finito $M = \{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) : 1 \leq i \leq n\}$, es posible encontrar $\varphi_0 \in B_{\mathcal{L}^m}$ de tal manera que

$$\sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}^m}} \sum_{i=1}^{n} \left|\varphi\left(\mathbf{u}_i\right) - \varphi\left(\mathbf{v}_i\right)\right|^p = \sum_{i=1}^{n} \left|\varphi_0\left(\mathbf{u}_i\right) - \varphi_0\left(\mathbf{v}_i\right)\right|^p.$$

Entonces, utilizando esto en la desigualdad (3.1) obtenemos que $g_M(\varphi_0) \leq 0$ y por lo tanto, concluimos que $Q \cap C = \emptyset$.
Luego, por la versión geométrica del Teorema de Hanh-Banach aplicada a los conjuntos Q y C, tenemos que existen una función $u : C_{\mathbb{R}}\left(B_{\mathcal{L}^m}, w^*\right) \to \mathbb{R}$ lineal y continua y un número real α, tal que

$$u\left(f\right) \leq \alpha < u\left(g\right) \tag{3.2}$$

para todo $f \in Q$ y $g \in C$.
Como la función cero pertenece a Q, de la desigualdad (3.2) tenemos que $\alpha \geq 0$. Además, como para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones constantes $g_n \equiv 1/n$ pertenecen a C, otra vez de la desigualdad (3.2) tenemos que

$$0 \leq \alpha < u(g_n) \leq \|u\| \, \|g_n\| = \frac{\|u\|}{n}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha = 0$ y concluimos que

$$u(g) > 0 \;\; \forall \, g \in C. \tag{3.3}$$

Ahora, como la cerradura del conjunto C es el conjunto

$$\{f \in C_{\mathbb{R}}\left(B_{\mathcal{L}^m}, w^*\right) : f\left(\varphi\right) \geq 0 \; \forall \, \varphi \in B_{\mathcal{L}^m}\},$$

de la desigualdad (3.3) y de la continuidad de u, tenemos que u es una funcional lineal positiva sobre $C_{\mathbb{R}}\left(B_{\mathcal{L}^m}, w^*\right)$.
Entonces, por el Teorema de Representación de Riesz, existe una medida regular de Borel positiva ν sobre $B_{\mathcal{L}^m}$, tal que

$$u(h) = \int_{B_{\mathcal{L}^m}} h\left(\varphi\right) d\nu(\varphi) \qquad \forall \, h \in C_{\mathbb{R}}\left(B_{\mathcal{L}^m}, w^*\right).$$

Si sustituimos esta representación en la desigualdad (3.2), tenemos que

$$\int_{B_{\mathcal{L}^m}} f(\varphi) d\nu(\varphi) \leq 0 < \int_{B_{\mathcal{L}^m}} g(\varphi) d\nu(\varphi) \tag{3.4}$$

para todo $f \in Q$ y $g \in C$.
Si definimos

$$\mu(\cdot) = \frac{\nu(\cdot)}{\nu\left(B_{\mathcal{L}^m}\right)}\ ,$$

tenemos que μ es una medida de probabilidad regular de Borel positiva sobre $B_{\mathcal{L}^m}$, la cual sigue satisfaciendo (3.4), es decir,

$$\int_{B_{\mathcal{L}^m}} f(\varphi) d\mu(\varphi) \leq 0 < \int_{B_{\mathcal{L}^m}} g(\varphi) d\mu(\varphi) \tag{3.5}$$

para todo $f \in Q$ y $g \in C$.
Finalmente, si en la desigualdad izquierda de (3.5) sustituimos las funciones g_M, donde M es un conjunto que consta de un sólo elemento, es decir,

$$M = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X_1 \times \cdots \times X_m\},$$

obtenemos que

$$\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| \leq \|T\|_{s,p} \cdot \left(\int_{B_{\mathcal{L}^m}} |\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v})|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{1/p}.$$

Además, el ínfimo de todas las constantes c's que satisfacen la desigualdad anterior es menor o igual que $\|T\|_{s,p}$. $\square$

A continuación mostraremos cómo todo operador multilineal continuo satisface un diagrama de factorización general, análogo al que satisfacen los operadores lineales absolutamente p-sumantes[1]. Éste nos permitirá mostrar que la clase de los operadores multilineales p-sumantes satisface un teorema de factorización.

Para poder mostrar explícitamente dicho diagrama requerimos de algunos preliminares.
Sean $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ y $X, X_1, \ldots, X_m$ espacios de Banach.
Si μ es una medida positiva regular de Borel sobre (B_{X^*}, w^*), entonces recordemos que j_p y i_p denotan a los operadores lineales canónicos

$$\begin{array}{rccc} j_p: & C\left(B_{X^*}, w^*\right) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & f & \longmapsto & f \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} i_p: & L_\infty(\mu) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & f & \longmapsto & f\ . \end{array}$$

También, denotaremos por $i_{\mathbf{X}}$ al operador m-lineal continuo definido como

$$\begin{array}{rccc} i_{\mathbf{X}}: & X_1 \times \cdots \times X_m & \longrightarrow & C\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}, w^*\right) \\ & \left(x^1, \ldots, x^m\right) & \longmapsto & \left(\varphi \mapsto \varphi\left(x^1, \ldots, x^m\right)\right). \end{array}$$

[1] En la sección 1.3.3 puede verse este diagrama para la clase Π_p.

Si $i^L_{\mathbf{X}}\colon X_1\hat{\otimes}_\pi\cdots\hat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow C\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}, w^*\right)$ es el operador lineal canónico asociado al operador multilineal $i_{\mathbf{X}}$ (véase el Teorema 1.7), denotaremos por γ la restricción de $i^L_{\mathbf{X}}$ al espacio $X_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi X_m$. Es decir, γ es el operador lineal definido como

$$\gamma\colon X_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi X_m \longrightarrow C\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}, w^*\right)$$

tal que

$$\gamma\left(x^1\otimes\cdots\otimes x^m\right)(\varphi)=\varphi\left(x^1,\ldots,x^m\right).$$

De hecho, este operador lineal resulta ser inyectivo. En efecto, si consideramos $z\in X_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi X_m$ tal que $\gamma(z)\equiv 0$, entonces se tiene que

$$\varphi^L(z)=0 \qquad \forall\ \varphi\in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}. \tag{3.6}$$

Debido a que el espacio $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)$ es isométricamente isomorfo al espacio $\left(X_1\hat{\otimes}_\pi\cdots\hat{\otimes}_\pi X_m\right)^*$ bajo la isometría $\varphi\mapsto\varphi^L$ (véase el Teorema 1.7), tenemos que (3.6) es equivalente a que

$$x^*(z)=0 \qquad \forall\ x^*\in B_{\left(X_1\hat{\otimes}_\pi\cdots\hat{\otimes}_\pi X_m\right)^*},$$

Por lo que $z=0$ y entonces γ es un operador lineal inyectivo.
En el caso $m=1$, denotaremos por i_X a la función $i_{\mathbf{X}}$, es decir, i_X denota el operador lineal

$$i_X\colon X\longrightarrow C\left(B_{X^*}, w^*\right)$$

definido como

$$i_X(x)(x^*)=x^*(x),$$

el cual, en este caso, resulta ser una isometría[2].

Diagrama de Factorización General

Sean $m\in\mathbb{N}$, $X_1,\ldots,X_m,Y$ espacios de Banach y μ una medida positiva regular de Borel no trivial definida sobre $\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}, w^*\right)$. Si $T\in\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)$, entonces existe una función lineal bien definida $\hat{u}\colon\langle A_p\rangle\longrightarrow Y$ tal que:

(a) $A_p=(j_p\circ i_{\mathbf{X}})(X_1\times\cdots\times X_m)\subset L_p(\mu)$

(b) $\hat{u}\circ j_p\circ i_{\mathbf{X}}=T$.

En otras palabras, si definimos $j_p^{\mathbf{X}}\colon i_{\mathbf{X}}(X_1\times\cdots\times X_m)\longrightarrow\langle A_p\rangle$ como la función inducida por j_p, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X_1\times\cdots\times X_m \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i_{\mathbf{X}}"'] & Y \\
i_{\mathbf{X}}(X_1\times\cdots\times X_m) \arrow[r, "j_p^{\mathbf{X}}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \langle A_p\rangle \arrow[u, "\hat{u}"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
C\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}\right) \arrow[r, "j_p"'] & L_p(\mu).
\end{tikzcd} \qquad (\textbf{DF-I})$$

[2]En algunos casos seguiremos denotando por i_X a la isométria lineal $i_X\colon X\longrightarrow\ell_\infty^{B_{X^*}}$ tal que $i_X(x)(x^*)=x^*(x)$.

Demostración:
Consideremos la función $\hat{u}$ definida de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} \hat{u}: & \langle A_p \rangle & \longrightarrow & Y \\ & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot (j_p \circ i_{\mathbf{X}}) \left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot T\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right). \end{array}$$

Es sencillo ver que esta función es lineal y satisface (b). Sólo falta probar que, en efecto, es una función bien definida. Sea f un elemento de $\langle A_p \rangle$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot (j_p \circ i_{\mathbf{X}}) \left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) \equiv f \equiv \sum_{i=1}^{n'} \lambda_i^{'} \cdot (j_p \circ i_{\mathbf{X}}) \left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right) \tag{3.7}$$

donde $n, n' \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_1^{'}, \ldots, \lambda_{n'}^{'} \in \mathbb{K}$ y $u_1^k, \ldots, u_n^k, v_1^k, \ldots, v_{n'}^k \in X_k$ para $k = 1, \ldots, m$.
Si recordamos la definición de la función lineal γ, tenemos que (3.7) es lo mismo que

$$(j_p \circ \gamma) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m \right) \equiv f \equiv (j_p \circ \gamma) \left(\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i^{'} \cdot v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m \right).$$

Ahora, como j_p y γ son funciones inyectivas[3], de la igualdad anterior tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m = \sum_{i=1}^{n'} \lambda_i^{'} \cdot v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m,$$

concluyendo de esto que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot T\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) &= T^L \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m \right) \\ &= T^L \left(\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i^{'} \cdot v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m \right) = \sum_{i=1}^{n'} \lambda_i^{'} \cdot T\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\hat{u}$ es una función bien definida. □

Observación 3.2 *Además del diagrama de factorización anterior, nos será de utilidad la siguiente variante de éste.*
• *Debido a que la función lineal $\hat{u}$ es una función bien definida sobre el subespacio generado por el conjunto A_p, el diagrama (**DF-I**) sigue siendo válido si consideramos a la función $\hat{u}$ con dominio solamente el conjunto A_p. Esto es, si $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:*

[3] El operador lineal canónico j_p es inyectivo porque μ es una medida positiva regular de Borel no trivial definida sobre el espacio $\left(B_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)}, w^*\right)$.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \cdots \times X_m \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i_{\mathbf{X}}"'] & Y \\
i_{\mathbf{X}}\left(X_1 \times \cdots \times X_m\right) \arrow[r, "j_p^{\mathbf{X}}"] & A_p \arrow[u, "\hat{u}"'] \\
C\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}\right) \arrow[u, phantom, "\cap" description] \arrow[r, "j_p"'] & L_p\left(\mu\right). \arrow[u, phantom, "\cap" description]
\end{tikzcd} \qquad \textbf{\textit{(DF-II)}}$$

A continuación veremos que cuando en el diagrama (**DF-II**) consideramos a la función $\hat{u}$ con la propiedad de ser una función Lipschitz, lo que obtenemos es una caracterización de los operadores multilineales p-sumantes.

Antes de enunciar y demostrar el teorema de factorización para la clase $\mathcal{L}_s^p$, necesitaremos de la siguiente observación y el lema subsecuente.

Observación 3.3 *En [BL, Lema 1.1] se demuestra que si A es un subconjunto de un espacio de Banach X y Γ es un conjunto cualquiera, entonces toda función Lipschitz $f\colon A \longrightarrow \ell_\infty^\Gamma$ tiene una extensión $F\colon X \longrightarrow \ell_\infty^\Gamma$ de tal manera que ésta resulta ser una función Lipschitz tal que*

$$\|F\|_{Lip} = \|f\|_{Lip}\,,$$

si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y

$$\|f\|_{Lip} \leq \|F\|_{Lip} \leq \sqrt{2}\cdot \|f\|_{Lip}\,,$$

si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Lema 3.4 *Sean $1 \leq p < \infty$ y $T\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ un operador multilineal. Supongamos que T se puede factorizar de la forma*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \cdots \times X_m \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "S"'] & & Y \\
& Z \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

donde Z es un espacio de Banach, S es un operador multilineal p-sumante y f es una función Lipschitz. Entonces, T es un operador multilineal p-sumante y $\|T\|_{s,p} \leq \|f\|_{Lip} \cdot \|S\|_{s,p}$.

Demostración:
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $u_1^k, \ldots, u_n^k, v_1^k, \ldots, v_n^k$ en X_k con $k = 1, \ldots, m$.
Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - T\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right) \right\|^p \right)^{1/p} \\
&\quad = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| (f \circ S)\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - (f \circ S)\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right) \right\|^p \right)^{1/p} \\
&\quad \leq \|f\|_{Lip} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| S\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - S\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right) \right\|^p \right)^{1/p} \\
&\quad \leq \|f\|_{Lip} \cdot \|S\|_{s,p} \cdot \sup \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \varphi\left(u_i^1, \ldots, u_i^m\right) - \varphi\left(v_i^1, \ldots, v_i^m\right) \right|^p \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

donde el supremo se toma sobre todas las formas multilineales $\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)}$.
Por lo tanto T es p-sumante y $\|T\|_{s,p} \leq \|f\|_{Lip} \cdot \|S\|_{s,p}$.

$\square$

Teorema de Factorización 3.5 *Sean $1 \leq p < \infty$ y $X_1, \ldots, X_m, Y$ espacios de Banach. Para todo operador m-lineal $T\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$, lo siguiente es equivalente:*
(i) T es p-sumante.
(ii) Existe una medida de probabilidad regular de Borel μ sobre el espacio $(B_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)}, w^*)$, un subconjunto A_p de $L_p(\mu)$ y una función $\hat{u}\colon A_p \longrightarrow Y$ en $\mathcal{LIP}_0(A_p, Y)$ tal que

(a) $A_p = (j_p \circ i_{\mathbf{X}})(X_1 \times \cdots \times X_m)$

(b) $\hat{u} \circ j_p \circ i_{\mathbf{X}} = T$.

En otras palabras, si definimos $j_p^{\mathbf{X}}\colon i_{\mathbf{X}}(X_1 \times \cdots \times X_m) \longrightarrow A_p$ como la función inducida por j_p, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \cdots \times X_m \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i_{\mathbf{X}}"'] & Y \\
i_{\mathbf{X}}(X_1 \times \cdots \times X_m) \arrow[r, "j_p^{\mathbf{X}}"] & A_p \arrow[u, "\hat{u}"'] \\
C\left(B_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)}\right) \arrow[u, phantom, "\cap" description] \arrow[r, "j_p"'] & L_p(\mu) \arrow[u, phantom, "\cap" description]
\end{tikzcd} .$$

(iii) Lo mismo que en (ii) pero con $\hat{u}$ una función uniformemente continua.

(*iv*) *Existe una medida de probabilidad regular de Borel* μ *sobre el espacio* $(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}, w^*)$ *y una función* $\tilde{u} \in \mathcal{LIP}_0\left(L_p(\mu), \ell_\infty^{B_{Y^*}}\right)$, *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \cdots \times X_m \arrow[r, "T"] \arrow[dd, "i_{\mathbf{X}}"'] & Y \arrow[dr, "i_Y"] & \\
& & \ell_\infty^{B_{Y^*}} \\
C\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}\right) \arrow[r, "j_p"'] & L_p(\mu) \arrow[ur, "\tilde{u}"'] &
\end{tikzcd}$$

(*v*) *Existe un espacio de probabilidad* (Ω, Σ, μ), *un operador* m*-lineal acotado* $S\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow L_\infty(\mu)$ *y una función* $\tilde{u} \in \mathcal{LIP}_0\left(L_p(\mu), \ell_\infty^{B_{Y^*}}\right)$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \cdots \times X_m \arrow[r, "T"] \arrow[dd, "S"'] & Y \arrow[dr, "i_Y"] & \\
& & \ell_\infty^{B_{Y^*}} \\
L_\infty(\mu) \arrow[r, "i_p"'] & L_p(\mu) \arrow[ur, "\tilde{u}"'] &
\end{tikzcd}$$

Además, podemos escoger μ *y* $\hat{u}$ *en* (*ii*) *de tal manera que* $\|\hat{u}\|_{Lip} = \|T\|_{s,p}$. *En* (*iv*) *y* (*v*) *podemos escoger* μ *y* $\tilde{u}$ *de tal manera que* $\|\tilde{u}\|_{Lip} = \|T\|_{s,p}$ *si* X *es un espacio real y tal que* $\|T\|_{s,p} \leq \|\tilde{u}\|_{Lip} \leq \sqrt{2} \cdot \|T\|_{s,p}$ *si* X *es un espacio complejo. También, en el inciso* (*v*) *podemos arreglar que* $\|S\| \leq 1$.

Demostración:

Para simplificar la notación denotaremos a $B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}$ por K.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que T es p-sumante.

Entonces por el Teorema de Dominación 3.1, tenemos que existe una medida de probabilidad regular de Borel μ sobre (K, w^*) tal que

$$\begin{aligned}
&\left\|T\left(u^1,\ldots,u^m\right) - T\left(v^1,\ldots,v^m\right)\right\| \\
&\quad\leq \|T\|_{s,p} \cdot \left(\int_K \left|\varphi\left(u^1,\ldots,u^m\right) - \varphi\left(v^1,\ldots,v^m\right)\right|^p d\mu(\varphi)\right)^{1/p} \\
&\quad= \|T\|_{s,p} \cdot \left\|(j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(u^1,\ldots,u^m\right) - (j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(v^1,\ldots,v^m\right)\right\|_{L_p(\mu)} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

para todo $u^k, v^k \in X_k$ con $k = 1,\ldots,m$.

Por el diagrama (**DF-II**) se tiene que la función

$$\begin{array}{cccc}
\hat{u}: & A_p & \longrightarrow & Y \\
& (j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(x^1,\ldots,x^m\right) & \longmapsto & T\left(x^1,\ldots,x^m\right)
\end{array}$$

es una función bien definida, la cual satisface (b). Además, claramente $\hat{u}(0) = 0$. Utilizando (b) en el lado izquierdo de (3.8) obtenemos que $\hat{u}$ pertenece al espacio $\mathcal{LIP}_0(A_p, Y)$ y que

$$\|\hat{u}\|_{Lip} \leq \|T\|_{s,p}.$$

Para obtener que $\|T\|_{s,p} \leq \|\hat{u}\|_{Lip}$, es suficiente probar que la desigualdad (3.8) se cumple si en vez de $\|T\|_{s,p}$ ponemos $\|\hat{u}\|_{Lip}$, pues $\|T\|_{s,p}$ es el ínfimo de todas las constantes que satisfacen (3.8). Ahora bien, podemos intercambiar $\|T\|_{s,p}$ por $\|\hat{u}\|_{Lip}$ ya que $\hat{u}$ satisface (b) y es una función Lipschitz sobre A_p.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Es inmediato.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Primero veamos que es suficiente probar que la función $\hat{u}$ pertenece a $\mathcal{LIP}_0(A_p, Y)$ y que $\|\hat{u}\|_{Lip} = \|T\|_{s,p}$.
En este caso, la función $i_Y \circ \hat{u} \colon A_p \longrightarrow \ell_\infty^{B_{Y^*}}$ pertenece a $\mathcal{LIP}_0\left(A_p, \ell_\infty^{B_{Y^*}}\right)$ y

$$\|i_Y \circ \hat{u}\|_{Lip} = \|\hat{u}\|_{Lip} = \|T\|_{s,p},$$

luego, por la Observación 3.3, podemos encontrar una extensión $\tilde{u}$ de $i_Y \circ \hat{u}$ la cual pertenece al espacio $\mathcal{LIP}_0\left(L_p(\mu), \ell_\infty^{B_{Y^*}}\right)$, de tal manera que

$$\|\tilde{u}\|_{Lip} = \|i_Y \circ \hat{u}\|_{Lip} = \|T\|_{s,p}$$

si X es un espacio real y

$$\|T\|_{s,p} = \|i_Y \circ \hat{u}\|_{Lip} \leq \|\tilde{u}\|_{Lip} \leq \sqrt{2} \cdot \|i_Y \circ \hat{u}\|_{Lip} = \sqrt{2} \cdot \|T\|_{s,p}$$

si X es un espacio complejo.
Por lo tanto $\tilde{u}$ es la función requerida en (iv).
Entonces, probemos que $\hat{u}$ pertenece a $\mathcal{LIP}_0(A_p, Y)$ y que $\|\hat{u}\|_{Lip} = \|T\|_{s,p}$.
Es claro del diagrama en (iii) que $\hat{u}(0) = 0$.
Como $\hat{u} \colon A_p \longrightarrow Y$ es uniformemente continua, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\left(u^1, \ldots, u^m\right), \left(v^1, \ldots, v^m\right) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ son tales que

$$\left\|(j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(u^1, \ldots, u^m\right) - (j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(v^1, \ldots, v^m\right)\right\|_{L_p(\mu)} < \delta,$$

entonces

$$\left\|\hat{u}\left((j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(u^1, \ldots, u^m\right)\right) - \hat{u}\left((j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(v^1, \ldots, v^m\right)\right)\right\| \leq 1. \tag{3.9}$$

Sean $\left(u^1, \ldots, u^m\right), \left(v^1, \ldots, v^m\right)$ elementos cualesquiera de $X_1 \times \cdots \times X_m$ y definamos

$$\alpha := \left\|(j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(u^1, \ldots, u^m\right) - (j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(v^1, \ldots, v^m\right)\right\|_{L_p(\mu)}.$$

Si $\alpha > 0$ tenemos que

$$\left\|(j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(\frac{\delta}{2\alpha}u^1, \ldots, u^m\right) - (j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(\frac{\delta}{2\alpha}v^1, \ldots, v^m\right)\right\|_{L_p(\mu)} = \frac{\delta}{2} < \delta$$

y entonces de (3.9) obtenemos que

$$\left\| \hat{u}\left((j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(\frac{\delta}{2\alpha}u^1,\ldots,u^m\right)\right) - \hat{u}\left((j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(\frac{\delta}{2\alpha}v^1,\ldots,v^m\right)\right)\right\| \leq 1.$$

Si recordamos que $\hat{u}\circ j_p \circ i_{\mathbf{X}} = T$, entonces la desigualdad anterior es equivalente a que

$$\begin{aligned} &\left\|\hat{u}\left((j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(u^1,\ldots,u^m\right)\right) - \hat{u}\left((j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(v^1,\ldots,v^m\right)\right)\right\| \\ &\quad \leq \frac{2}{\delta}\cdot\left\|(j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(u^1,\ldots,u^m\right) - (j_p \circ i_{\mathbf{X}})\left(v^1,\ldots,v^m\right)\right\|_{L_p(\mu)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

En el caso cuando $\alpha = 0$ es inmediato que (3.10) sigue siendo cierta.
Por lo tanto, la desigualdad (3.10) es válida para cualesquiera dos elementos de $X_1 \times \cdots \times X_m$ y entonces concluimos que $\hat{u}$ es un elemento de $\mathcal{LIP}_0\left(A_p, Y\right)$.
Para obtener la igualdad de las normas debemos observar tres cosas: Primero, dado que $\hat{u}$ es Lipschitz, la desigualdad (3.10) sigue siendo válida para $\|\hat{u}\|_{Lip}$ en vez de $2/\delta$. Segundo, la desigualdad (3.10) también sigue siendo válida si en vez de $2/\delta$ ponemos $\|T\|_{s,p}$, esto porque si utilizamos la relación $\hat{u}\circ j_p \circ i_{\mathbf{X}} = T$ en el lado izquierdo de (3.10), obtenemos que el Teorema de Dominación 3.1 es cierto para T. Tercero, dado que tanto $\|\hat{u}\|_{Lip}$ como $\|T\|_{s,p}$ son el ínfimo de todas las constantes que satisfacen (3.10), el primero por definición y el segundo por el Teorema de Dominación 3.1, concluimos que $\|\hat{u}\|_{Lip}$ es igual a $\|T\|_{s,p}$.
$(iv) \Rightarrow (v)$ Lo único que hay que observar es que el operador lineal j_p puede factorizarse de la forma

$$j_p : C\left(K\right) \xrightarrow{j_\infty} L_\infty\left(\mu\right) \xrightarrow{i_p} L_p\left(\mu\right).$$

Entonces insertando esta factorización en el diagrama conmutativo (iv) tenemos que $S = j_\infty \circ i_{\mathbf{X}}$ es el operador m-lineal requerido.
$(v) \Rightarrow (i)$ Como el operador lineal i_p es absolutamente p-sumante (véase la sección 1.3.2), por la Proposición 2.11 tenemos que el operador m-lineal $i_p \circ S$ es p-sumante. Luego, como $i_Y \circ T = \tilde{u}\circ(i_p \circ S)$, por el Lema 3.4 el operador m-lineal $i_Y \circ T$ es p-sumante y entonces por la inyectividad de $\mathcal{L}_s^p$ (Proposición 2.10), concluimos que T es p-sumante. □

La razón por la que se introduce el espacio $\ell_\infty^{B_{Y^*}}$ en el inciso (iv) del teorema de factorización, es porque este espacio nos permite extender funciones Lipschitz desde el subconjunto A_p. Un espacio con tal propiedad se le conoce como espacio 1-inyectivo[4], y cuando Y tiene esta propiedad, el diagrama de factorización toma una forma más agradable y sencilla.

[4]Un espacio de Banach Y es 1-inyectivo si, dado un subconjunto A de un espacio de Banach X, toda $f \in \mathcal{LIP}\left(A, Y\right)$ tiene una extensión $\tilde{f} \in \mathcal{LIP}\left(X, Y\right)$ con $\|f\|_{Lip} = \left\|\tilde{f}\right\|_{Lip}$.

Corolario 3.6 *Si* Y *es un espacio* 1*-inyectivo, entonces el operador multilineal* $T\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ *es* p*-sumante si y sólo si existe una medida de probabilidad regular de Borel* μ *sobre el espacio* $(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}, w^*)$ *y una función* $\tilde{u} \in \mathcal{LIP}_0\left(L_p\left(\mu\right), Y\right)$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \cdots \times X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle i_{\mathbf{X}}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{u}} \\ C\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}\right) & \xrightarrow{j_p} & L_p\left(\mu\right) \end{array}.$$

Una vez más, podemos escoger μ *y* $\tilde{u}$ *de tal manera que* $\|\tilde{u}\|_{Lip} = \|T\|_{s,p}$*.*

Por supuesto, existe la $L_\infty(\mu)$-versión correspondiente del corolario anterior, similar al inciso (v) del teorema de factorización.

Corolario 3.7 *Si* Y *es un espacio* 1*-inyectivo, entonces el operador multilineal* $T\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ *es* p*-sumante si y sólo si existe un espacio de probabilidad* (Ω, Σ, μ)*, así como una función* $\tilde{u} \in \mathcal{LIP}_0\left(L_p\left(\mu\right), Y\right)$ *y un operador multilineal* $S \in \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; L_\infty\left(\mu\right)\right)$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \cdots \times X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{u}} \\ L_\infty\left(\mu\right) & \xrightarrow{i_p} & L_p\left(\mu\right) \end{array}.$$

Además, podemos escoger que $\|S\| \leq 1$ *y que* $\|\tilde{u}\|_{Lip} = \|T\|_{s,p}$*.*

El teorema de factorización, también toma una forma sencilla en el caso cuando $p = 2$ y el operador multilineal T posee como contradominio un espacio de Hilbert. Esto gracias al hecho de que toda función Lipschitz, con dominio un subconjunto de un espacio de Hilbert y contradominio, también un espacio de Hilbert, se puede extender a una función Lipschitz con la misma norma Lipschitz[5].

Corolario 3.8 *Sea* H *un espacio de Hilbert. Entonces, el operador multilineal* $T\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow H$ *es* 2*-sumante si y sólo si existe una medida de probabilidad regular de Borel* μ *sobre el espacio* $(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}, w^*)$*, y una función* $\tilde{u} \in \mathcal{LIP}_0\left(L_2\left(\mu\right), H\right)$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \cdots \times X_m & \xrightarrow{T} & H \\ {\scriptstyle i_{\mathbf{X}}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{u}} \\ C\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}\right) & \xrightarrow{j_2} & L_2\left(\mu\right) \end{array}.$$

Además, podemos escoger μ *y* $\tilde{u}$ *de tal manera que* $\|\tilde{u}\|_{Lip} = \|T\|_{s,2}$*.*

[5] Véase la sección 1.2 en [BL] para el enunciado y la prueba formal de este hecho.

Demostración:
$\Rightarrow$) Esto se sigue del inciso (ii) del teorema de factorización y del hecho de que la función Lipschitz $\hat{u}\colon A_2 \subset L_2(\mu) \longrightarrow H$ puede extenderse a una función Lipschitz sobre el espacio $L_2(\mu)$ con la misma norma Lipschitz (véase [BL, Teorema 1.12].
$\Leftarrow$) Esta parte es consecuencia de la Proposición 2.11 y del Lema 3.4. $\square$

Al igual que para el Corolario 3.6, para este último también existe una $L_\infty(\mu)$-versión, esto es, un operador multilineal $T\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow H$ 2-sumante, también es aquel que admite una factorización de la forma

$$X_1 \times \cdots \times X_m \xrightarrow{S} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_2} L_2(\mu) \xrightarrow{\tilde{u}} H$$

para algún espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ), así como para alguna función $\tilde{u} \in \mathcal{LIP}_0(L_2(\mu), H)$ y algún $S \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; L_\infty(\mu))$ tales que $\|S\| \leq 1$ y $\|T\|_{s,2} = \|\tilde{u}\|_{Lip}$.

3.2. Algunas Consecuencias

Para poder mostrar la primera consecuencia del teorema de factorización, necesitamos probar que la clase de los operadores multilineales p-sumantes, satisface una versión multilineal del Teorema de Grothendieck. Este teorema nos dice que todo operador lineal continuo $u\colon \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ es absolutamente 1-sumante.

Nosotros generalizaremos la versión del Teorema de Grothendieck que involucra a los $\mathcal{L}_p$-espacios en vez de los ℓ_p-espacios[6].

Teorema de Grothendieck 3.9 *Si $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m$ son $\mathcal{L}_1$-espacios y Y es un $\mathcal{L}_2$-espacio, entonces todo operador multilineal $T\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ continuo es 1-sumante, es decir,*

$$\mathcal{L}_s^1(X_1, \ldots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y).$$

Demostración:
En [BPR, Proposición 5.4] se demuestra que el ideal $\Pi_p \circ \mathcal{L}$ (véase la Definición 2.17), satisface la versión multilineal del Teorema de Grothendieck que involucra a los $\mathcal{L}_p$-espacios, esto es, se prueba que

$$\Pi_1 \circ \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y).$$

Ahora, del Teorema 2.19 tenemos que

$$\Pi_1 \circ \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_s^1(X_1, \ldots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y),$$

por lo tanto $\mathcal{L}_s^1(X_1, \ldots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$. $\square$

[6] En el Teorema 1.23 se enuncia esta versión del Teorema de Grothendieck y en [DJT, Teorema 3.1] puede encontrarse la demostración del mismo.

Ahora estamos ya en condiciones de mostrar la primera consecuencia del teorema de factorización.

Teorema 3.10 *Si $X_1, \ldots, X_m$ son $\mathcal{L}_1$-espacios y Y es un espacio de Banach, entonces*
$$\mathcal{L}_s^1(X_1, \ldots, X_m; Y) = \mathcal{L}_s^2(X_1, \ldots, X_m; Y).$$

Demostración:
Por el teorema de inclusión (véase la Proposición 2.15) tenemos que
$$\mathcal{L}_s^1(X_1, \ldots, X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^2(X_1, \ldots, X_m; Y).$$

Veamos que $\mathcal{L}_s^2(X_1, \ldots, X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^1(X_1, \ldots, X_m; Y)$.
Sea $T \in \mathcal{L}_s^2(X_1, \ldots, X_m; Y)$.
Entonces por el Teorema de Factorización 3.5, existe una medida de probabilidad regular de Borel μ definida sobre el espacio $\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}, w^*\right)$ y una función $\tilde{u} \in \mathcal{LIP}_0\left(L_2(\mu), \ell_\infty^{B_{Y^*}}\right)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \cdots \times X_m \arrow[rr, "T"] \arrow[dd, "i_{\mathbf{X}}"'] & & Y \arrow[dr, "i_Y"] & \\
& & & \ell_\infty^{B_{Y^*}} \\
C\left(B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}\right) \arrow[rr, "j_2"'] & & L_2(\mu) \arrow[ur, "\tilde{u}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, por el Teorema de Grothendieck 3.9, tenemos que el operador multilineal continuo
$$j_2 \circ i_{\mathbf{X}} \colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow L_2(\mu)$$
resulta ser 1-sumante. Luego, como el diagrama es conmutativo, tenemos que
$$i_Y \circ T = \tilde{u} \circ (j_2 \circ i_{\mathbf{X}})$$
y entonces, por el Lema 3.4, $i_Y \circ T \in \mathcal{L}_s^1\left(X_1, \ldots, X_m; \ell_\infty^{B_{Y^*}}\right)$.
Por lo tanto de la Proposición 2.10 concluimos que $T \in \mathcal{L}_s^1(X_1, \ldots, X_m; Y)$.

□

En el marco de la teoría lineal de los operadores absolutamente p-sumantes, es bien sabido que la propiedad de ser absolutamente p-sumante no se hereda del operador lineal al operador lineal adjunto de éste y viceversa[7].

Sin embargo, en el caso cuando el operador lineal tiene contradominio un espacio de Hilbert, la propiedad de ser absolutamente p-sumante sí se hereda del operador lineal adjunto al operador lineal[8].

[7] En [DJT, Observación 2.20] pueden encontrarse contraejemplos de esta situación.
[8] Véase [DJT, Teorema 2.1] para la prueba de este hecho.

A continuación veremos que en el contexto multilineal, la propiedad de ser p-sumante también se hereda del operador lineal adjunto T^* al operador multilineal T, cuando T tiene contradominio un espacio de Hilbert.

Dado $T\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ un operador multilineal continuo entre espacios de Banach, denotaremos por T^* al operador lineal continuo definido de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccc} T^*: & Y^* & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m\right) \\ & y^* & \longmapsto & y^* \circ T\ . \end{array}$$

Este operador lineal tomará el papel, en el contexto multilineal, del operador adjunto de la teoría lineal.

Teorema 3.11 *Sean $X_1, \ldots, X_m$ espacios de Banach y sea H un espacio de Hilbert. Si $T \in \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; H\right)$ es tal que T^* es un operador lineal q-sumante, para algún $1 \leq q < \infty$, entonces T es 1-sumante y*

$$\|T\|_{s,1} \leq A_1^{-1} \cdot B_q \cdot \pi_q\left(T^*\right),$$

donde A_1 y B_q son las constantes de la desigualdad de Khinchin (véase la sección 1.1.2).

Demostración:
Primero probaremos el caso cuando T es un operador multilineal

$$T\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow \ell_2^r$$

donde $r \in \mathbb{N}$.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in X_1 \times \cdots \times X_m$.
Usando la desigualdad de Khinchin (véase la sección 1.1.2), tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left\|T\left(\mathbf{u}_i\right) - T\left(\mathbf{v}_i\right)\right\|_{\ell_2^r} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r} \left|\left\langle T\left(\mathbf{u}_i\right) - T\left(\mathbf{v}_i\right), e_j\right\rangle_{\ell_2^r}\right|^2\right)^{1/2} \\ &\leq A_1^{-1} \cdot \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{r} \left\langle T\left(\mathbf{u}_i\right) - T\left(\mathbf{v}_i\right), e_j\right\rangle_{\ell_2^r} r_j(t)\right| dt \\ &= (*). \end{aligned}$$

Si consideramos a T^* como un elemento de $\Pi_q\left(\ell_2^r, \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m\right)\right)$, tenemos que

$$(*) = A_1^{-1} \cdot \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\sum_{j=1}^{r} r_j(t) T^*\left(e_j\right)\right)\left(\mathbf{u}_i\right) - \left(\sum_{j=1}^{r} r_j(t) T^*\left(e_j\right)\right)\left(\mathbf{v}_i\right)\right| dt,$$

luego, como para cada $t \in [0,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \left|\left(\sum_{j=1}^{r} r_j(t) T^*\left(e_j\right)\right)\left(\mathbf{u}_i\right) - \left(\sum_{j=1}^{r} r_j(t) T^*\left(e_j\right)\right)\left(\mathbf{v}_i\right)\right| \\ &\qquad \leq \left\|\sum_{j=1}^{r} r_j(t) T^*\left(e_j\right)\right\| \cdot \left\|\left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^n\right\|_1^w, \end{aligned}$$

obtenemos que $(*)$ es menor o igual que

$$A_1^{-1} \cdot \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^r r_j(t) T^* (e_j) \right\| \, dt \right) \cdot \left\| \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m \right)_{i=1}^n \right\|_1^w . \tag{3.11}$$

Como T^* es un elemento de $\Pi_q \left(\ell_2^r, \mathcal{L} \left(X_1, \ldots, X_m \right) \right)$, por el Teorema de Dominación en su versión lineal (véase el Teorema 1.19), existe una medida de probabilidad regular de Borel μ sobre $K = B_{\ell_2^r}$ tal que

$$\left\| T^* (x) \right\| \leq \pi_q (T^*) \cdot \left(\int_K \left| \langle x, y \rangle_{\ell_2^r} \right|^q \, d\mu(y) \right)^{1/q} \tag{3.12}$$

para toda $x \in \ell_2^r$.

Utilizando ésta última desigualdad junto con el Teorema de Fubini, la desigualdad de Khinchin y el hecho de que μ es una medida de probabilidad, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^r r_j(t) T^* (e_j) \right\|^q \, dt \right)^{1/q} &= \left(\int_0^1 \left\| T^* \left(\sum_{j=1}^r r_j(t) e_j \right) \right\|^q \, dt \right)^{1/q} \\
&\leq \pi_q (T^*) \cdot \left(\int_K \int_0^1 \left| \left\langle \sum_{j=1}^r r_j(t) e_j, y \right\rangle_{\ell_2^r} \right|^q \, dt \, d\mu(y) \right)^{1/q} \\
&\leq B_q \cdot \pi_q (T^*) \cdot \left(\int_K \left(\sum_{j=1}^r \left| \langle e_j, y \rangle_{\ell_2^r} \right|^2 \right)^{q/2} \, d\mu(y) \right)^{1/q} \\
&\leq B_q \cdot \pi_q (T^*) .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Finalmente, recordando que

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^r r_j(t) T^* (e_j) \right\| \, dt \leq \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^r r_j(t) T^* (e_j) \right\|^q \, dt \right)^{1/q} ,$$

de (3.11) y de (3.13) concluimos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \left\| T (\mathbf{u}_i) - T (\mathbf{v}_i) \right\|_{\ell_2^r} \\
&\qquad \leq A_1^{-1} \cdot B_q \cdot \pi_q (T^*) \cdot \left\| \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m \right)_{i=1}^n \right\|_1^w ,
\end{aligned}$$

es decir, $\|T\|_{s,1} \leq A_1^{-1} \cdot B_q \cdot \pi_q (T^*)$.

Para finalizar, sea $T\colon X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow H$ un operador multilineal con operador lineal adjunto T^* q-sumante y fijemos $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ elementos de $X_1 \times \cdots \times X_m$. Identificando el espacio generado por el conjunto

$$\{T(\mathbf{u}_i), T(\mathbf{v}_i) : 1 \leq i \leq n\} \subset H$$

con ℓ_2^r para la r apropiada y tomando $p \in \mathcal{L}(H)$ la proyección ortogonal sobre este espacio generado, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|T(\mathbf{u}_i) - T(\mathbf{v}_i)\| &= \sum_{i=1}^{n} \|(p \circ T)(\mathbf{u}_i) - (p \circ T)(\mathbf{v}_i)\| \\
&\leq \|p \circ T\|_{s,1} \cdot \left\| \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^n \right\|_1^w \\
&\leq A_1^{-1} \cdot B_q \cdot \pi_q\left((p \circ T)^*\right) \cdot \left\| \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^n \right\|_1^w \\
&\leq A_1^{-1} \cdot B_q \cdot \pi_q(T^*) \cdot \left\| \left(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m - v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^m\right)_{i=1}^n \right\|_1^w .
\end{aligned}$$

□

3.3. Las Propiedades Estrella y Corchete

Uno de los resultados importantes que probaremos en esta sección, será la generalización para la clase de los operadores multilineales p-sumantes del llamado Teorema Débil de Dvoretzky-Rogers.

Este teorema caracteriza a los espacios de Banach de dimensión finita a través de un teorema de coincidencia entre la clase de los operadores lineales continuos y la clase de los operadores lineales absolutamente p-sumantes. Más especificamente, si $1 \leq p < \infty$ entonces

$$X \text{ tiene dimensión finita si y sólo si } \mathcal{L}(X, X) = \Pi_p(X, X).$$

Antes de mostrar la versión multilineal de este teorema aislaremos dos propiedades técnicas que nos facilitaran la escritura en los casos donde necesitemos de ellas, nos referiremos a éstas como *la propiedad estrella* y *la propiedad corchete.*

Definición 3.12 *Sea $\mathcal{M}$ una clase de operadores multilineales entre espacios de Banach, de modo tal, que $\mathcal{M}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ designa para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera espacios de Banach $X_1, \ldots, X_m, Y$, un subconjunto del espacio $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$. Diremos que $\mathcal{M}$ satisface la propiedad **estrella**, la cual denotaremos por $(\star)$, si para cada $m \geq 2$, para cualesquiera $X_1, \ldots, X_m, Y$ espacios de Banach y para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que*

$$\forall\ S \in \mathcal{M}\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m; Y\right), \exists\ 0 \not\equiv x_i^* \in X_i^* \textit{ tal que } x_i^* \star S \in \mathcal{M}(X_1, \ldots, X_m; Y),$$

donde $x_i^* \star S$ es el operador m-lineal continuo definido como

$$\left(x_i^* \star S\right)\left(x^1, \ldots, x^m\right) = x_i^*\left(x^i\right) \cdot S\left(x^1, \overset{[i]}{\ldots}, x^m\right),$$

el cual cumple que $\|x_i^* \star S\| \leq \|x_i^*\| \cdot \|S\|$.

Ejemplos

• Es inmediato que la clase $\mathcal{L}$, de todos los operadores multilineales continuos, satisface la propiedad $(\star)$.

• La clase $\mathcal{L}_s^p$, de los operadores multilineales p-sumantes, también satisface la propiedad $(\star)$. En efecto, sea $m \geq 2$, sea $i \in \{1, \ldots, m\}$, sean $X_1, \ldots, X_m, Y$ espacios de Banach y consideremos $S \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m; Y\right)$ y $0 \not\equiv x_i^* \in X_i^*$.
Veamos que $x_i^* \star S \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$.
Sean $u_1^k, \ldots, u_n^k, v_1^k, \ldots, v_n^k \in X_k$ para $k = 1, \ldots, m$.
Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^n \left\|\left(x_i^* \star S\right)\left(u_j^1, \ldots, u_j^m\right) - \left(x_i^* \star S\right)\left(v_j^1, \ldots, v_j^m\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\quad = \left(\sum_{j=1}^n \left\|x_i^*\left(u_j^i\right) \cdot S\left(u_j^1, \overset{[i]}{\ldots}, u_j^m\right) - x_i^*\left(v_j^i\right) \cdot S\left(v_j^1, \overset{[i]}{\ldots}, v_j^m\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\quad = \left(\sum_{j=1}^n \left\|S\left(x_i^*\left(u_j^i\right) \cdot u_j^1, \overset{[i]}{\ldots}, u_j^m\right) - S\left(x_i^*\left(v_j^i\right) \cdot v_j^1, \overset{[i]}{\ldots}, v_j^m\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\quad = (*).
\end{aligned}$$

Ahora, dado que $S \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m; Y\right)$, se tiene que

$$(*) \leq \|S\|_{s,p} \cdot \sup \left(\sum_{j=1}^n \left|\left(x_i^* \star \psi\right)\left(u_j^1, \ldots, u_j^m\right) - \left(x_i^* \star \psi\right)\left(v_j^1, \ldots, v_j^m\right)\right|^p\right)^{1/p},$$

donde el supremo se toma sobre $\psi \in B_{\mathcal{L}\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m\right)}$. Luego,

$$(*) \leq \|S\|_{s,p} \cdot \|x_i^*\| \cdot \sup \left(\sum_{j=1}^n \left|\varphi\left(u_j^1, \ldots, u_j^m\right) - \varphi\left(v_j^1, \ldots, v_j^m\right)\right|^p\right)^{1/p},$$

donde el supremo se toma sobre $\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)}$.

Por lo tanto, $x_i^* \star S \in \mathcal{L}_s^p\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ y además tenemos que

$$\|x_i^* \star S\|_{s,p} \leq \|x_i^*\| \cdot \|S\|_{s,p}.$$

• Análogamente, la clase $\mathcal{L}_{fs}^p$ de los operadores multilineales fuertemente p-sumantes (véase la Definición 2.17) satisface la propiedad $(\star)$.

• Las clases $\mathcal{K}$ y $\mathcal{W}$, de los operadores multilineales compactos y débilmente compactos[9] respectivamente, satisfacen la propiedad $(\star)$. Esto se sigue del hecho que

$$(x_i^* \star S)\left(B_{X_1}, \ldots, B_{X_m}\right) \subseteq \|x_i^*\| \cdot S\left(B_{X_1}, \overset{[i]}{\ldots}, B_{X_m}\right),$$

donde $m \geq 2$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $X_1, \ldots, X_m, Y$ son espacios de Banach, $S \in \mathcal{L}\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m; Y\right)$ y $x_i^* \in X_i^*$.

A continuación definiremos la propiedad corchete, con la cual tuvimos un primer acercamiento en la Proposición 2.13.

Definición 3.13 *Sea $\mathcal{N}$ una clase de operadores multilineales entre espacios de Banach. Diremos que $\mathcal{N}$ satisface la propiedad **corchete**, la cual denotaremos por $[\cdot]$, si para cada $m \geq 2$, para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, m\}$ y para cualesquiera $X_1, \ldots, X_m, Y$ espacios de Banach se tiene que*

$$\text{Si } T \in \mathcal{N}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right) \quad \text{entonces } T\left[x^i\right] \in \mathcal{N}\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m; Y\right), \ \forall\, x^i \in X_i,$$

donde $T\left[x^i\right]$ es el operador $(m-1)$-lineal definido como

$$T[x^i]\left(u^1, \overset{[i]}{\ldots}, u^m\right) = T\left(u^1, \ldots, x^i, \ldots, u^m\right).$$

Ejemplos

• Es sencillo verificar que la clase $\mathcal{L}$, de todos los operadores multilineales continuos, satisface la propiedad $[\cdot]$.

• En la Proposición 2.13 se prueba que la clase $\mathcal{L}_s^p$, de los operadores multilineales p-sumantes, satisface la propiedad $[\cdot]$.

• De manera análoga a como se hizo en la Proposición 2.13 para la clase $\mathcal{L}_s^p$, se tiene que la clase $\mathcal{L}_{fs}^p$ de los operadores multilineales fuertemente p-sumante satisface la propiedad $[\cdot]$.

• Las clases $\mathcal{K}$ y $\mathcal{W}$, de los operadores multilineales compactos y débilmente compactos respectivamente, también satisfacen la propiedad $[\cdot]$. Ésto se sigue del hecho que

$$T\left[x^i\right]\left(B_{X_1}, \overset{[i]}{\ldots}, B_{X_m}\right) \subseteq \left\|x^i\right\| \cdot T\left(B_{X_1}, \ldots, B_{X_m}\right)$$

donde $m \geq 2$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $X_1, \ldots, X_m, Y$ son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ y $x^i \in X_i$.

La propiedad estrella y la propiedad corchete nos permitirán obtener nuevos resultados para la clase $\mathcal{L}_s^p$ a partir de resultados ya conocidos de la teoría lineal de los operadores absolutamente p-sumantes.

La proposición que presentaremos a continuación, así como el corolario subsecuente, comenzarán a aclarar un poco esta situación.

[9] Un operador multilineal $T \in \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ es compacto (débilmente compacto) si el conjunto $T\left(B_{X_1}, \ldots, B_{X_m}\right)$ es relativamente compacto (débil compacto) en Y.

Proposición 3.14 *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos clases de operadores multilineales entre espacios de Banach. Supongamos que $\mathcal{M}$ satisface la propiedad $(\star)$ y que $\mathcal{N}$ satisface la propiedad $[\cdot]$. Si existe $m \geq 2$ y $X_1, \ldots, X_m, Y$ espacios de Banach tales que*

$$\mathcal{M}(X_1, \ldots, X_m; Y) \subseteq \mathcal{N}(X_1, \ldots, X_m; Y),$$

entonces

$$\mathcal{M}\left(X_1, \overset{[i_1, \ldots, i_r]}{\ldots}, X_m; Y\right) \subseteq \mathcal{N}\left(X_1, \overset{[i_1, \ldots, i_r]}{\ldots}, X_m; Y\right)$$

para cada $r \in \{1, \ldots, m-1\}$ y para cualesquiera $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$.

Demostración:
Primero probaremos el caso $r = 1$, esto es, veremos que

$$\mathcal{M}\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m; Y\right) \subseteq \mathcal{N}\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m; Y\right)$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Sean $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $S \in \mathcal{M}\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m; Y\right)$.
Como $\mathcal{M}$ satisface la propiedad $(\star)$, tenemos que existe $0 \not\equiv x_i^* \in X_i^*$ tal que

$$x_i^* \star S \in \mathcal{M}(X_1, \ldots, X_m; Y)$$

y entonces por hipótesis tenemos que $x_i^* \star S \in \mathcal{N}(X_1, \ldots, X_m; Y)$. Ahora, como $\mathcal{N}$ satisface la propiedad $[\cdot]$ tenemos que

$$(x_i^* \star S)\left[x^i\right] \in \mathcal{N}\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m; Y\right)$$

para todo $x^i \in X_i$. Si en particular tomamos $a^i \in X_i$ tal que $x_i^*\left(a^i\right) = 1$, entonces obtenemos que

$$(x_i^* \star S)\left[a^i\right] \in \mathcal{N}\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m; Y\right),$$

pero como $(x_i^* \star S)\left[a^i\right] \equiv S$, concluimos que

$$S \in \mathcal{N}\left(X_1, \overset{[i]}{\ldots}, X_m; Y\right).$$

El caso $r > 1$ se sigue aplicando repetidamente el caso $r = 1$. $\square$
El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de esta última proposición.

Corolario 3.15 *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos clases de operadores multilineales entre espacios de Banach. Supongamos que $\mathcal{M}$ satisface la propiedad $(\star)$ y la propiedad $[\cdot]$. De igual manera, supongamos que $\mathcal{N}$ satisface la propiedad $(\star)$ y la propiedad $[\cdot]$. Si existen $m \geq 2$ y $X_1, \ldots, X_m, Y$ espacios de Banach tales que*

$$\mathcal{M}(X_1, \ldots, X_m; Y) = \mathcal{N}(X_1, \ldots, X_m; Y),$$

entonces

$$\mathcal{M}(X_i; Y) = \mathcal{N}(X_i; Y)$$

para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$.

En la sección 2.2, donde comparamos a los operadores multilineales p-sumantes con diversas clases de operadores multilineales, comentamos (véase la Observación 2.20) que en general no es posible comparar a la clase de los operadores multilineales p-sumantes con la clase de los operadores multilineales compactos. Como una primera aplicación de la Proposición 3.14 veremos que, en efecto, no es posible comparar a estas dos clases de operadores multilineales.

Observación 3.16 *En general no se puede comparar la clase $\mathcal{L}_s^p$ con la clase $\mathcal{K}$ de los operadores multilineales compactos.*

Dado que en [DJT, Pág. 38] se demuestra que

$$\mathcal{L}_s^p(\ell_1;\ell_2) \not\subset \mathcal{K}(\ell_1;\ell_2)$$

y que

$$\mathcal{K}(\ell_2;\ell_2) \not\subset \mathcal{L}_s^p(\ell_2;\ell_2)$$

para todo $1 \leq p < \infty$, por la Proposición 3.14 tenemos que

$$\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_r,\ell_1;\ell_2) \not\subset \mathcal{K}(X_1,\ldots,X_r,\ell_1;\ell_2)$$

y que

$$\mathcal{K}(X_1,\ldots,X_r,\ell_2;\ell_2) \not\subset \mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_r,\ell_2;\ell_2)$$

para todo $1 \leq p < \infty$, para todo $r \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $X_1,\ldots,X_r$ espacios de Banach.

Al final de la demostración del teorema de inclusión (véase la Proposición 2.15), hicimos la observación acerca de que las relaciones expresadas por este teorema eran propias. En efecto, como las relaciones expresadas por la versión lineal de este teorema son propias, la Proposición 3.14 nos conduce entonces a que en la versión multilineal también tendremos inclusiones propias.

Observación 3.17 *En [DJT, Pág. 42] se demuestra que*

$$\mathcal{L}_s^p(L_\infty[0,1];L_q[0,1]) \subsetneq \mathcal{L}_s^q(L_\infty[0,1];L_q[0,1])$$

para cada $1 < q < \infty$ y para todo $1 \leq p < q$, entonces, otra vez por la Proposición 3.14, tenemos que

$$\mathcal{L}_s^p(X_1,\ldots,X_r,L_\infty[0,1];L_q[0,1]) \subsetneq \mathcal{L}_s^q(X_1,\ldots,X_r,L_\infty[0,1];L_q[0,1])$$

para cada $1 < q < \infty$, para todo $1 \leq p < q$, para todo $r \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $X_1,\ldots,X_r$ espacios de Banach.

A continuación mostramos, para los operadores multilineales p-sumantes, la versión multilineal del Teorema Débil de Dvoretzky-Rogers.

Proposición 3.18 (Teorema Débil de Dvoretzky-Rogers) *Lo siguiente es equivalente para $1 \leq p < \infty$ y X un espacio de Banach:*

(i) $\mathcal{L}_s^p\left({}^m X; X\right) = \mathcal{L}\left({}^m X; X\right)$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$.

(ii) $\mathcal{L}_s^p\left({}^m X; X\right) = \mathcal{L}\left({}^m X; X\right)$ *para algún* $m \in \mathbb{N}$.

(iii) X *es de dimensión finita.*

Demostración:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Inmediato.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Por el Corolario 3.15 tenemos que

$$\mathcal{L}_s^p\left(X; X\right) = \mathcal{L}\left(X, X\right).$$

Ahora, como $\mathcal{L}_s^p\left(X; X\right) = \Pi_p\left(X, X\right)$ (véase la Observación 2.2), tenemos que $\Pi_p\left(X, X\right) = \mathcal{L}\left(X, X\right)$ y entonces por el Teorema Débil de Dvoretzky-Rogers para los operadores lineales absolutamente p-sumantes (véase el Teorema 1.21) concluimos que X es de dimensión finita.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Como X tiene dimensión finita el operador lineal id_X tiene recorrido finito, pero esta clase de operador lineal es p-sumante (véase la Proposición 1.14), entonces id_X pertenece a $\Pi_p\left(X, X\right) = \mathcal{L}_s^p\left(X; X\right)$ y entonces como

$$T = id_X \circ T,$$

para todo operador multilineal $T \in \mathcal{L}\left({}^m X; X\right)$, por la Proposición 2.11 concluimos que $\mathcal{L}_s^p\left({}^m X; X\right) = \mathcal{L}\left({}^m X; X\right)$ para toda $m \in \mathbb{N}$. □

J. Lindenstrauss y A. Pelckzyński demostraron en [LP, Teorema 4.2] que para ciertos espacios de Banach el recíproco del Teorema de Grothendieck era cierto. Especificamente ellos probaron que si X es un espacio de Banach de dimensión infinita con base incondicional, entonces se tiene que

$\mathcal{L}\left(X, Y\right) = \Pi_1\left(X, Y\right) \Rightarrow X$ es isomorfo a ℓ_1^Γ para algún Γ y Y es isomorfo a un espacio de Hilbert.

A continuación veremos que la clase $\mathcal{L}_s^p$ satisface una versión multilineal de este teorema.

Proposición 3.19 *Lo siguiente es equivalente para un espacio de Banach X de dimensión infinita con base incondicional:*

(i) $\mathcal{L}_s^1\left({}^m X; Y\right) = \mathcal{L}\left({}^m X; Y\right)$ *para toda* $m \in \mathbb{N}$.

(ii) $\mathcal{L}_s^1\left({}^m X; Y\right) = \mathcal{L}\left({}^m X; Y\right)$ *para algún* $m \in \mathbb{N}$.

(iii) X *es isomorfo a* ℓ_1^Γ *para algún* Γ *y* Y *es isomorfo a un espacio de Hilbert.*

Demostración:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Inmediato.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Por el Corolario 3.15 tenemos que $\mathcal{L}_s^1(X;Y) = \mathcal{L}(X;Y)$, luego como $\mathcal{L}_s^1(X;Y) = \Pi_1(X,Y)$ se tiene que $\Pi_1(X,Y) = \mathcal{L}(X;Y)$ y entonces por el Teorema de Lindenstrauss-Pelckzyński para los operadores lineales absolutamente p-sumantes (véase [LP, Teorema 4.2]) obtenemos (iii).
$(iii) \Rightarrow (i)$ Se sigue del hecho de que los operadores multilineales p-sumantes satisfacen el análogo multilineal del Teorema de Grothendieck (véase el Teorema 3.9). □

Nota

Durante el último proceso de revisión de este trabajo, se nos hizo saber por parte del jurado de la existencia de un artículo en fase de pre-impresión que está relacionado con el trabajo que se realizó en esta tesis y que, debido a que este artículo nos proporciona un referente externo sobre este trabajo, consideramos apropiado comentar.

En dicho artículo (véase [PS]) los autores exhiben sus razones de lo que para ellos es una "generalización deseable" de los operadores lineales absolutamente p-sumantes, con la intención de mostrar la existencia de una "generalización deseable" minimal y maximal (véase [PS, Teorema 4.3,Teorema 4.4]). Ellos dicen (véase [PS, Definición 4.1]) que una clase de operadores multilineales $\mathcal{M}_p$ $(1 \leq p < \infty)$ es una "generalización deseable" de los operadores lineales absolutamente p-sumantes si satisface las siguientes propiedades:

(i) Los operadores multilineales p-dominados estan contenidos en $\mathcal{M}_p$ y éste a su vez está contenido en los operadores multilineales fuertemente múltiples p-sumantes.

(ii) $\mathcal{M}_p$ es cerrado bajo diferenciación.

(iii) $\mathcal{M}_p$ es cerrado bajo multiplicación por escalar.

(iv) $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_q$ si $1 \leq p < q < \infty$ (Teorema de Inclusión).

(v) Se cumplen análogos multilineales del Teorema de Grothendieck y del Teorema de Dvoretzky-Rogers.

En el caso de los operadores multilineales p-sumantes (la clase que estudiamos en este trabajo) se demostró que éstos satisfacen los incisos del (ii) al (v). Los incisos (ii) y (iii) son el hecho de que los operadores multilineales p-sumantes satisfacen la propiedad corchete y la propiedad estrella respectivamente, ya que estas últimas coinciden con la propiedad de ser cerrado bajo diferenciación y con la propiedad de ser cerrado bajo multiplicación por escalar respectivamente (véase [PS, Definición 3.1, Definición 3.2]); el inciso (iv) es la Proposición 2.15 y el inciso (v) se demostró en el Teorema 3.9 (Teorema de Grothendieck) y en la Proposición 3.18 (Teorema de Dvoretzky-Rogers).

Con respecto al inciso (i) tenemos que la segunda inclusión es cierta, ésto se sigue inmediatamente de la definición de los operadores multilineales p-sumantes (véase la Definición 2.1) y de la definición de los operadores multilineales fuertemente múltiples p-sumantes (véase [PS, Definición 2.7]). Para la primera inclusión del inciso (i) hasta ahora sólo sabemos que ésta se cumple en ciertos casos. Por ejemplo, si $K_1, \ldots, K_m$ son espacios de Hausdorff compactos entonces se tiene que la clase $\mathcal{L}_d^1(C(K_1), \ldots, C(K_m); Y)$ está contenida en la clase $\mathcal{L}_s^1(C(K_1), \ldots, C(K_m); Y)$ pues

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d^1(C(K_1), \ldots, C(K_m); Y) &\subset \Pi_1 \circ \mathcal{L}(C(K_1), \ldots, C(K_m); Y) \\ &\subset \mathcal{L}_s^1(C(K_1), \ldots, C(K_m); Y), \end{aligned}$$

donde la primera inclusión se sigue de [BPR, Proposición 5.7] y la segunda del Teorema 2.19.

Bibliografía

[AM] R. Alencar, M.C. Matos; *Some Classes of Multilinear Mappings between Banach Spaces*; Publicaciones Departamento Análisis Matematico, Universidad Complutense Madrid, Sección 1 número 12 (1989). 36

[BL] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss; *Geometric Nonlinear Functional Analysis Volume 1*; American Mathematical Society Colloquium Publications Volume 48, 2000. @ 61, 66, 67

[BPGV] F. Bombal, D. Pérez-García, I. Villanueva; *Multilinear Extensions of Grothendieck's Theorem*; Quart. J. Math. **55** (2004), 441-450. @ vi, 36, 37

[BPR] G. Botelho, D. Pellegrino, P. Rueda; *On Composition Ideal of Multilinear Mappings and Homogeneous Polynomials*; Publ. RIMS, Kyoto Univ. **43** (2007), 1139-1155. @ vi, 37, 67, 78

[CD] D. Carando, V. Dimant; *On Summability of Bilinear Operators*; Math. Nachr. **259** (2003), 3-11. @ 33, 43

[Car] N.L. Carothers; *A short Course on Banach Space Theory*; Cambridge Univ. Press 2005. @ 2

[Che] S. Chevet; *Sur Certains Produits Tensoriels Topologiques d' Espaces de Banach*; C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **266** (1968), A413-A415. 44

[CKMT] Y.S. Choi, S.G. Kim, Y. Meléndez, A. Tonge; *Estimates for Absolutely Summing norms of Polynomial and Multilinear Maps*; Quart. J. Math. **52** (2001), 1-12. @ 36

[CKP] F. Cobos, T. Kühn, J. Peetre; *Schatten-von Neumann Classes of Multilinear Forms*; Duke Math. J. **65** (1992), 121-156. 37

[Cob] S. Cobzaş; *Adjoints of Lipschitz Mappings*; Studia Univ. Babeş-Bolyia, Mathematica **48** (2003), No. 1, 49-54. @ 4

[DF] A. Defant, K. Floret; *Tensor Norms and Operator Ideals*; North-Holland Math. Studies 176, 1993. @ 6, 45

[DJT] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge; *Absolutely Summing Operators*; Cambridge Univ. Press, 1995. @ 2, 6, 10, 16, 51, 67, 68, 75

[Dim] V. Dimant; *Strongly p-Summing Multilinear Operators*; J. Math. Anal. Appl. **278** (2003), 182-193. @ VI, 37

[Din] S. Dineen; *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*; Springer-Verlag, London, 1999. 4

[Dwy] T.A.W. Dwyer III; *Partial Differential Equations in Fischer-Fock Spaces for the Hilbert-Schmidt Holomorphy Type*; Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 725-730. @ 37

[EMT] Y. Eidelman, V. Milman, A. Tsolomitis; *Functional Analysis: An Introduction*; Graduate Studies in Mathematics volume 66, 2004. @ 2, 6

[Flo] K. Floret; *Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces*; Note Math **17** (1997), 153-188. @ 6, 45

[Flo1] K. Floret; *The Extension Theorem for Norms on Symmetric Tensor Products of Normed Spaces*; North-Holland Math. Stud. 189, (2001), 225-237. @ 45

[Geiss] S. Geiss; *Ideale Multilinearer Abbildungen, Diplomarbeit*; 1985. 36

[Gro] A. Grothendieck; *Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires*; Memoirs Amer. Math. Soc. 16, 1955. V, 44

[LP] J. Lindenstrauss, A. Pelckzyński; *Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications*; Studia Math. **29** (1968), 275-326. @ 76, 77

[Mat] M.C. Matos; *Absolutely Summing Holomorphic Mappings*; An. Acad. Brasil. Cienc. **68** (1996), 1-13. 36

[Mat1] M.C. Matos; *On a Question of Pietsch about Hilbert-Schmidt Multilinear Mappings*; J. Math. Anal. Appl. **257** (2001), 343-355. VI

[Mat2] M.C. Matos; *Fully Absolutely Summing Mappings and Hilbert-Schmidt Operators*; Collect. Math. **54** (2003), 111-136. @ VI, 37, 38

[Mat3] M.C. Matos; *Nonlinear Absolutely Summing Mappings*; Math. Nachr. **258** (2003), 71-89. 36

[MT] Y. Melendez, A. Tonge; *Polynomials and The Pietsch Domination Theorem*; Math. Proc. Royal Irish Acad. **99A**(2) (1999), 195-212. @ VI, 36, 43

[Per] D. Perez-García; *The Inclusion Theorem for Multiple Summing Operators*; Studia Math. **165** (2004), 275-290. @ 37, 44

[Per1] D. Perez-García; *Comparing Different Classes of Absolutely Summing Multilinear Operators*; Arch. Math. **85** (2005), 258-267. @ VII

[Pie] A. Pietsch; *Absolut p-summierende Abbildungen in Normierten Räumen*; Studia Math. **27** (1967), 333-353. @ V

[Pie1] A. Pietsch; *Operator Ideals*; Deutscher Verlag der Wiss.; 1978 and North-Holland, 1980. V

[Pie2] A. Pietsch; *Ideals of Multilinear Functionals (designs of a theory)*; in: Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theorical Physics (Leipzig) (1983), 185-199. V, VI, 36, 37

[PS] D. Pellegrino, J. Santos; *Abstract Ideals of Absolutely Summing Multilinear Operators*; En pre-impresión. @ 77, 78

[PV] D. Perez-García, I. Villanueva; *Multiple Summing Operators on Banach Spaces*; J. Math. Anal. Appl. **285** (2003), 86-96. @ 37, 43

[Ryan] R. Ryan, *Application of Topological Tensor Products to Infinite Dimensional Holomorphy*; Doctoral Thesis, Trinity College Dublin, 1980. @ 6

[Ryan1] R. Ryan; *Introduction to tensor products of Banach spaces*; Springer Monographs in Mathematics, 2002. @ 44

[Sap] P. Saphar; *Produits Tensoriels d' Espaces de Banach et Classes d' Applications Linéaires*; Studia Math. **38** (1970), 71-100. 44

[Sch] R. Schatten; *A Theory of Cross-Space*; Ann. of Math. Studies 26, 1950. @ 44

[Wea] N. Weaver; *Lipschitz Algebras*; World Scientific, Singapore 1999. @ 4