

Comunicaciones del CIMAT

Los Teoremas Fundamentales del Cálculo y la
Teoría del Electromagnetismo

Fausto Ongay

**Comunicación del CIMAT No
I-16-04/05-09-2016 (MB/CIMAT)**



CIMAT

LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO Y LA TEORÍA DEL ELECTROMAGNETISMO

FAUSTO ONGAY

PREFACIO

Versión (ligeramente) revisada de unas notas¹ de julio de 1997.

Advertencia: Estas son las notas preparadas para un curso de una semana, impartido en el CIMAT del 28 de julio al 2 de agosto de 1997, y destinado a profesores de ingeniería. Aunque posiblemente no habrá una versión definitiva de ellas, es mi deber advertir al lector que estas notas son, y así deben ser consideradas, como algo preliminar, cuya función primordial puede pensarse que es la de acercar al lector a textos más completos sobre el tema; ¡pido disculpas de antemano por las muchas erratas que en ellas habrá!

1. INTRODUCCIÓN

1.1. La noción de campo eléctrico. La noción de un “campo eléctrico” fue madurando lentamente entre los físicos de los siglos XVIII y XIX, como un resultado de la idea de describir “acciones a distancia”, es decir como una fuerza que no requiere de un contacto directo para manifestarse.

Es hasta cierto punto irónico que esta idea se originase con la descripción newtoniana del campo gravitacional, ya que el propio Newton no simpatizaba filosóficamente con esta concepción de una acción a distancia. Sin embargo, la mecánica newtoniana, y en especial la mecánica celeste, se mostraron desde un principio como una descripción tan exitosa de todo tipo de acciones, en particular las acciones a distancia como la de la gravedad, que en la mentalidad más bien pragmática de los físicos, esto acabó por volverse la manera de describir los procesos, sin cuestionarse mayormente la naturaleza de las interacciones.

¹Casualmente encontré hace poco una versión impresa de las notas, con una calidad muy pobre. Como algunas gentes me las han pedido, procesé los archivos lo mejor que pude, para hacerlos más legibles, y aproveché también para corregir los errores más notorios. De paso suprimí las últimas dos secciones, que eran las más tentativas y al releerlas me parecieron algo ‘forzadas’, y a cambio puse unas muy necesarias referencias bibliográficas.

La electricidad, y más generalmente el electromagnetismo, eran procesos conocidos desde la antigüedad. Pero, aunque incluso hasta comienzos del siglo XIX su papel, y en particular la relación que existe entre las fuerzas eléctricas y magnéticas, no era en modo alguno claro, para finales del siglo dieciocho ya no había duda de que estas eran fuerzas del tipo requerido en la segunda ley de Newton, y que por lo tanto, su descripción debía empatarse con la de las demás fuerzas newtonianas. Así, en 1787 Coulomb llevó a cabo experimentos que mostraron de manera clara que la fuerza electrostática, excepto por el hecho — fundamental, aunque no será importante para nuestros propósitos— que hay fuerzas repulsivas además de las atractivas, se comporta cualitativamente igual que la fuerza gravitacional; es decir, como una fuerza cuya intensidad disminuye como el cuadrado de la distancia; vectorialmente y denotando a las cargas de las partículas (puntuales) por Q y q , ésta se escribe², donde la constante ϵ_0 es la llamada *permitividad dieléctrica del vacío*:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Qq}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{Ley de Coulomb}).$$

En todo caso, el resultado neto de este desarrollo fue que esta fuerza podía describirse como el efecto producido en un “objeto de prueba” (la q) por un cuerpo susceptible de generar la fuerza en cuestión (la Q). Evidentemente en este proceso el objeto generador de la fuerza desempeña un papel más importante que el objeto de prueba, y así este último pronto pasó a ser un elemento secundario en la descripción del fenómeno físico.

Dicho en otras palabras, uno puede imaginar que se le da un objeto que puede producir cierta fuerza, por ejemplo un objeto cargado electrostáticamente, y que automáticamente éste llena el espacio que le rodea de una “fuerza en potencia”, la que influirá en cualquier objeto de prueba susceptible a dicha fuerza. O dicho aún de otra manera, un objeto “cargado” con alguna fuerza produce una reacción en potencia *en cada punto del espacio que le rodea*, es decir, una reacción que se manifiesta cuando colocamos ahí nuestro objeto de prueba.

Por otro lado las fuerzas no son entes de naturaleza totalmente arbitraria; en efecto, una fuerza aplicada en un objeto es lo que matemáticamente llamamos un vector; esto es, es algo que posee los atributos de “magnitud”, pues todos somos capaces de sentir que tal o cual fuerza

²En este texto adoptaremos la convención clásica de escribir con negritas a los vectores, y entonces la correspondiente letra itálica convencional denotará a la norma del vector.

es más grande que tal o cual otra, pero también de “dirección” y “sentido”, pues no es lo mismo ser empujado para un lado que para otro. Así en resumen, las fuerzas del tipo electrostático (y ellas fueron las primeras en describirse de tal modo) pueden representarse diciendo que un objeto cargado con la fuerza (o más brevemente una carga) produce en su entorno una fuerza que puede describirse matamáticamente asociando a cada punto del espacio un vector; ésta es la idea intuitiva de campo vectorial. En el caso particular de la ley de Coulomb que enunciamos arriba, esto conduce de manera natural a la introducción de un campo eléctrico \mathbf{E} , definido como el campo de fuerza producido por una partícula con carga Q , por unidad de carga q , es decir,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{q}\mathbf{F} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{r^3}\mathbf{r}$$

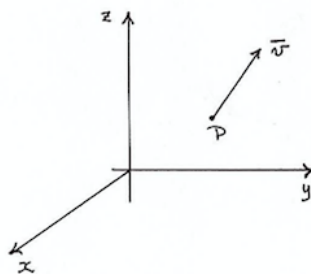
2. CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

2.1. Campos vectoriales.

2.1.1. Campos vectoriales en el plano, en el espacio y en n dimensiones.

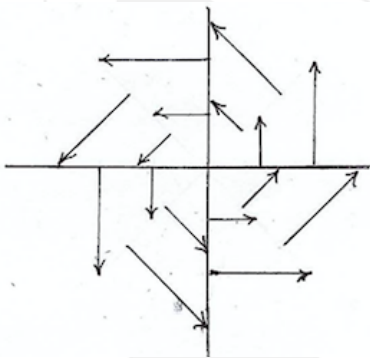
Un hecho muy básico del análisis, y en realidad de la teoría de funciones en general, es que el estudio de una función $f : A \rightarrow B$ es equivalente al estudio de su gráfica, es decir al conjunto de pares ordenados de la forma $\{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$. En particular, para funciones entre espacios euclidianos $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, las funciones pueden describirse pictóricamente, a través de sus gráficas, de una manera completa si $n + m \leq 3$, pero sólo en esos casos. Sin embargo, si $n = m$ hay un ‘truco’ que permite visualizar de manera ‘casi completa’ a una función de este tipo, aun en ciertos casos en que $n + m > 3$.

Para describir esta construcción, recordemos que intuitivamente un vector (formalmente, un elemento de un espacio \mathbb{R}^n), siendo una cantidad que posee magnitud, dirección y sentido, geoméricamente se puede representar como una flecha, con origen en algún punto del espacio \mathbb{R}^n , como se ilustra en la figura.



Sin entrar en muchos detalles, es también claro que por su propia definición, todo vector queda determinado por sus coordenadas. En particular, se sigue que una función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ queda determinada por m funciones $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, llamadas sus *funciones coordenadas*: $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_m)$.

Ahora bien, si se tiene un campo vectorial, es decir, una función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (¡misma n !), podemos representarlo gráficamente indicando, para cada punto del espacio dominio \mathbb{R}^n , una flecha que represente al valor de la función en ese punto, *la que podemos dibujar en el mismo espacio*. Por ejemplo, la siguiente figura ilustra el caso del campo vectorial en dos dimensiones $f(x, y) = (-y, x)$ (nótese que el vector $(-y, x)$ es un vector perpendicular al vector (x, y) , de igual magnitud).



Nota: Para efectos de estas notas, los únicos casos que nos interesarán son cuando n y m son 1, 2, 3 ó 4 (este último sólo de manera tangencial al final de las notas), y el lector que desee restringir sus esfuerzos al caso de 2 y 3 dimensiones puede hacerlo, sin riesgo de perder nada fundamental. Pero, como de cualquier modo necesitaremos considerar distintas dimensiones, y como además varias de las afirmaciones que se harán valen para cualquier dimensión, en los casos en que sea más simple escribir las cosas en un número arbitrario de dimensiones n así lo haré.

(Por otro lado, no seré demasiado “quisquilloso” con las hipótesis sobre las funciones que aparecen y en particular supondré, sin mencionarlo explícitamente cada vez, que éstas tienen todas las derivadas necesarias para que las afirmaciones tengan sentido.)

2.1.2. *Líneas de flujo de un campo vectorial.* Quizá la propiedad más importante de los campos vectoriales es que estos definen un **flujo**. Intuitivamente, la idea es que cada una de las flechas que integran el campo vectorial es tangente a una curva privilegiada, que corresponde

a la solución de la ecuación diferencial

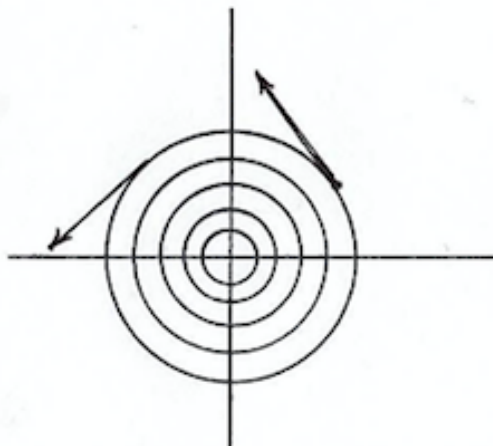
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Puede entonces pensarse que estas curvas “llenan el espacio” de trayectorias por medio de las cuales se puede “mover” a los puntos del espacio, y a esto es a lo que llamamos el flujo del campo. Dicho de manera más explícita, por cada punto del espacio \mathbf{x}_0 hay una única curva $\gamma(t)$, solución de la ecuación anterior, que tiene como condición inicial al punto dado, es decir, $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$, y cuyos vectores tangentes están dados por los valores del campo a lo largo de la curva

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \mathbf{F}(\gamma(t)).$$

Así, para definir el flujo del punto \mathbf{x}_0 entre el “tiempo” 0 y el “tiempo” t , simplemente seguimos la curva correspondiente hasta este “tiempo”, es decir evaluamos γ ahí.

En el caso en que \mathbf{F} represente una fuerza, las líneas del flujo son las líneas de fuerza; si representa un fluido en movimiento, son las líneas de flujo del fluido, etc. Como un ejemplo final, en el caso del campo bidimensional escrito arriba, las líneas de flujo del campo son los círculos concéntricos con el origen (junto con el origen).



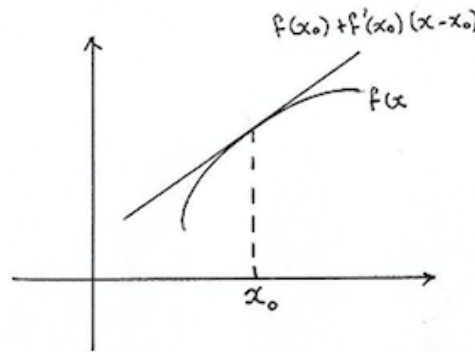
Nosotros en realidad no utilizaremos mayormente esta idea (de hecho, más adelante hablaremos de otro tipo de flujo), pero es importante que el lector tenga conciencia de ello.

2.1.3. *Gradiente, divergencia y rotacional: ¿Qué es la derivada de un campo vectorial?* La manera más básica de entender a la derivada es como la operación que nos describe, en primera aproximación, como cambia el valor de una función cuando cambiamos el valor de la variable independiente. En el caso de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esto queda descrito

de la manera más precisa posible en la *fórmula de aproximación lineal*, que en esencia dice que para valores de x cerca de un punto (fijo) x_0 , se tiene la relación

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

la que intuitivamente dice que cerca del punto x_0 la función f se parece mucho a la recta tangente $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Dicho esto en lenguaje intuitivo, la derivada nos determina el comportamiento “infinitesimal” de la función en cada punto; es decir, para valores “arbitrariamente” cercanos al punto la recta que más se parece a la curva es su tangente en el punto dado (fig.)

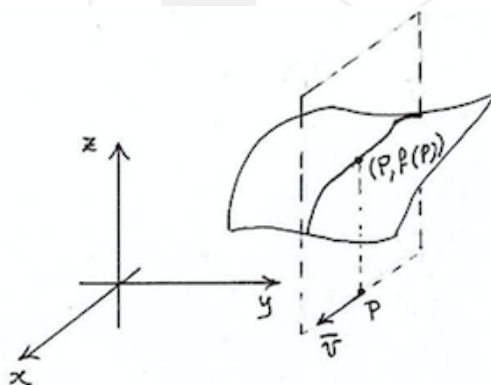


En el caso en que el dominio tiene una sola dimensión hay esencialmente una única manera de “mover” a la variable independiente; pero en el caso de funciones definidas en \mathbb{R}^n , como es el caso de las campos vectoriales que nos interesa aquí, las posibilidades son más complejas: por ejemplo, podemos “mover” a la variable en toda una bola, que sería la extensión natural de lo que es la derivada, pero también podemos estudiar la variación a lo largo de curvas o superficies, etc. De hecho, aunque existe una definición precisa de derivada (o derivada total como se le llama a veces para enfatizar) de una función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, y un análogo exacto de la fórmula de aproximación lineal, para nosotros esta opción no será la más importante en el caso general de campos vectoriales, y estudiaremos otras maneras de determinar la variación de funciones definidas en \mathbb{R}^n . En lo que sigue revisaremos brevemente la situación para funciones definidas en \mathbb{R}^3 , y como sabemos, en este caso hay tres formas básicas de “estudiar estos cambios infinitesimales”, que son los operadores clásicos del análisis vectorial: el gradiente de funciones (que sí corresponde a una derivada total), así como la divergencia y el rotacional de campos vectoriales.

Sin duda la más básica de estas nociones es la de gradiente, la que en realidad se aplica a cualquier función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; las otras dos

construcciones son sensiblemente más elaboradas y nos tomará algo más de esfuerzo describirlas.

Intuitivamente, la idea tras la definición de gradiente es simplemente determinar en cada punto la dirección donde la función cambia más rápidamente. Para poder ilustrar geoméricamente la situación, en lo que sigue supondré $n = 2$, pero insisto que los argumentos valen en cualquier número de dimensiones. Así pues, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $P = (x_1, x_2)$ un punto del plano, estudiar cómo varía f en una dirección particular es equivalente a intersectar la gráfica de f con un plano perpendicular al plano xy , que pase por el punto y que tenga la dirección deseada (fig.); esta dirección a su vez queda determinada por un vector unitario $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.



La recta intersección de los dos planos está dada por $P + t\mathbf{v}$, y la curva en el espacio que resulta se puede describir como $\{(x_1 + tv_1, x_2 + tv_2, f(P + t\mathbf{v}))\}$.

Al calcular la derivada de la tercera coordenada de esta curva, la regla de la cadena nos dice que es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P)v_2,$$

y en efecto, esta cantidad tiene su máximo cuando los vectores

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P) \right)$$

y \mathbf{v} , son colineales y apuntan en la misma dirección, como habíamos dicho.

El mismo tipo de argumentos nos dicen que una manera alterna de entender al gradiente es como la dirección perpendicular a las curvas de nivel de la función, es decir ortogonal a los conjuntos donde la función permanece constante.

Los otros dos operadores diferenciales que hemos mencionado se aplican, como dijimos, a campos vectoriales, pero para poderlos describir geoméricamente, conviene desarrollar primeramente una teoría de integración en varias variables; esto es lo que haremos a continuación.

3. INTEGRACIÓN EN VARIAS VARIABLES

Así pues, antes de proceder a revisar el electromagnetismo, necesitamos repasar, aunque sea someramente, las nociones básicas de integración en varias variables, y en particular las definiciones de flujo y circulación, que nos conducirán a las definiciones de divergencia y rotacional respectivamente.

3.1. Integrales de línea. La más simple de estas nociones es la de *integral de línea*, y para introducirla recordemos que una *curva parametrizada* en \mathbb{R}^n es una función $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde I es algún intervalo cerrado, $I = [a, b]$ (que siempre podemos tomar como $[0, 1]$ si lo deseamos, aunque conviene dejar la opción abierta a cualquier intervalo); $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son los *extremos* de la curva. Intuitivamente, la curva como objeto geométrico está descrita por la **imagen** de γ , pero la parametrización nos dice la manera de recorrer dicha curva. Por supuesto, una de las maneras más útiles de entender esta idea de curvas parametrizadas, especialmente en el caso $n = 3$, es mediante el movimiento de partículas puntuales, tomando a la variable independiente (o *parámetro*) como el tiempo, y en tal caso la derivada de la curva parametrizada γ' , que geoméricamente representa un vector tangente a la curva en cada punto, se interpreta como la *velocidad* de la partícula (recordemos también que la magnitud de dicho vector representa la *rapidez* con que se recorre la trayectoria en ese punto), en tanto que la segunda derivada es su *aceleración*.

Recordemos asimismo que el *producto interior* usual de \mathbb{R}^n (o *producto punto*) de dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ es $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$.

Supongamos ahora que tenemos un campo vectorial \mathbf{F} definido en \mathbb{R}^n . Damos entonces la siguiente definición:

Definición 1. *La integral de línea del campo \mathbf{F} a lo largo de la curva parametrizada γ es*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

En esta fórmula, $d\mathbf{r}$ se entiende como un “vector tangente infinitesimal” a la curva, de modo que, dicho en otras palabras, la integral de

línea del campo \mathbf{F} es la integral de la **componente tangencial** del campo a lo largo de la curva γ . (Nótese que esto es ya una función ordinaria de $I \rightarrow \mathbb{R}$.)

Por supuesto, la instancia más conocida de integrales de línea es el caso en que \mathbf{F} representa una fuerza, en cuyo caso la integral de línea representa el *trabajo* realizado por la fuerza al desplazar un objeto a lo largo de la curva γ . Más adelante recordaremos otra instancia de integrales de línea.

3.2. Integrales de volumen. Al otro extremo (en las dimensiones) están las integrales de funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sobre regiones de la dimensión global del espacio (esto es, n). En el caso de \mathbb{R}^3 , que es el que primordialmente consideraremos aquí, éstas se conocen como *integrales de volumen*, y la definición de ellas, que nos servirá un tanto como pretexto para recordar la idea de la integral de Riemann, es como sigue.

Primeramente, suponemos que tenemos una región $U \subset \mathbb{R}^3$, la que podemos subdividir, aproximadamente, en regiones **muy** pequeñas en forma de paralelepípedo, que por brevedad llamaré “cubitos”, con caras paralelas a los planos coordenados, cada uno de los cuales tiene lados cuyas longitudes son Δx , Δy y Δz respectivamente. Por la continuidad de f , podemos suponer que ésta es constante sobre todo el cubito, y definimos su “integral” sobre este cubito como $f(\mathbf{x}_0)\Delta x\Delta y\Delta z$, donde \mathbf{x}_0 es algún punto dentro del cubito; aquí por supuesto $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ representa el volumen del cubito. El valor aproximado de la integral que nos interesa se puede entonces calcular mediante la *suma de Riemann*

$$\sum f(\mathbf{x}_0)\Delta x\Delta y\Delta z,$$

donde la suma se efectúa sobre todos los cubitos en que hemos subdividido la región U .

Observación: En el argumento anterior, como en muchos de los que seguirán en estas notas, estarán implícitos varios teoremas importantes del análisis, y los utilizaré de manera bastante liberal, aunque es importante aclarar que los teoremas subyacen toda la discusión.

En particular, utilizaremos frecuentemente sin mencionarlo cada vez el teorema del valor medio, que intuitivamente dice que una función continua es “aproximadamente constante” en un intervalo suficientemente pequeño; es decir, si x está muy cerca de x_0 , entonces $f(x) \approx f(x_0)$, y el teorema del valor intermedio, que dice a su vez que si una

función es diferenciable en un intervalo, también muy pequeño, entonces las secantes a su gráfica y las tangentes a ella son “muy parecidas”, es decir, $f(x_1) - f(x_0) = f'(z)(x_1 - x_0)$, para algún z entre x_0 y x_1 .

Finalmente, definimos la integral sobre U como el límite de las sumas de Riemann

$$\begin{aligned} \iiint_U f(x, y, z) dxV &= \iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \lim \sum f(\mathbf{x}_0) \Delta x \Delta y \Delta z = \lim \sum f(\mathbf{x}_0) \Delta V. \end{aligned}$$

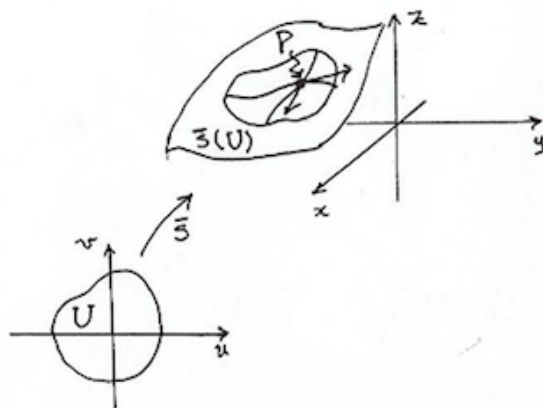
donde el límite se toma cuando el tamaño de los cubitos tiende a cero. El resultado crucial de la teoría de integración de Riemann es justamente que este límite está bien definido; es decir, no depende de cómo hagamos la subdivisión en cubitos, ni de cómo escojamos los puntos \mathbf{x}_0 , ni de cómo hagamos tender el volumen de los cubitos a cero.

Ahora bien, como sabemos, podemos *simbolizar* (y enfatizo la palabra “simbolizar”) este límite escribiendo $dV = dx dy dz = \lim \Delta V$, y pensando en la integral como una suma de un número infinito de cantidades infinitamente pequeñas (que llamamos “infinitesimales”, siguiendo a Leibniz). Con frecuencia, para indicar que estamos pensando en este proceso de aproximación, utilizaré la notación “ δV ” y hablaremos entonces de “cubitos infinitesimales” (y notaciones similares para otras cantidades).

Conviene hacer notar que la integral de línea, definida en la sección anterior, también se puede definir como un límite de sumas de Riemann e invitamos al lector a repasar esta construcción en alguna de las referencias que damos.

3.3. Integrales de superficie. Aunque a priori pueda parecer algo extraño, la más complicada (¡aunque afortunadamente no por demasiado!) de las nociones que consideraremos es la de *integral de superficie*. Pero para introducir estas integrales, debemos recordar primero la idea de plano tangente a una superficie.

Sea pues S una superficie en \mathbb{R}^3 , y $P \in S$, un punto. Entonces, en una vecindad suficientemente pequeña de este punto, podemos describir a la superficie por medio de una *parametrización*. Es decir, existe algún abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y una función $\mathbf{s} : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, de modo que la imagen de \mathbf{s} es la vecindad de P (véase la figura siguiente); decimos entonces que \mathbf{s} es una parametrización de la superficie S cerca del punto P . Para simplificar las cosas podemos, sin perder generalidad, suponer que U es un disco abierto centrado en el origen, y que de hecho $\mathbf{s}(0) = P$.



Si denotamos a las coordenadas en U por (u, v) , entonces, como se ilustra en la misma figura anterior, las imágenes de los ejes coordenados, u y v , son dos curvas cuyos vectores tangentes son independientes, y por consiguiente generan un plano, que se llama *el plano tangente* a S en P (de hecho, esto puede considerarse como parte de la definición de lo que es una superficie); si escribimos $\mathbf{s}(u, v) = (s_1(u, v), s_2(u, v), s_3(u, v))$, estos vectores pueden denotarse por

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} = \left(\frac{\partial s_1}{\partial u}, \frac{\partial s_2}{\partial u}, \frac{\partial s_3}{\partial u} \right); \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} = \left(\frac{\partial s_1}{\partial v}, \frac{\partial s_2}{\partial v}, \frac{\partial s_3}{\partial v} \right);$$

donde por simplicidad en la escritura omitimos la referencia al punto (u, v) , y con las derivadas evaluadas en cero. Más aún, siempre podemos suponer que \mathbf{s} es tal que el producto cruz

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v}$$

es de norma (es decir, de magnitud) 1; en tal caso, el vector \mathbf{n} es un *vector normal unitario al plano tangente*, y esta información, junto con el punto P determina completamente al plano tangente. Intuitivamente, esta construcción lo que nos dice es que la superficie se puede aproximar localmente (es decir, para pequeñas vecindades de puntos), por regiones planas, las que de acuerdo a nuestra convención denotaremos usualmente por δS , y que tienen como vector normal a un vector como la \mathbf{n} descrita arriba.

Aquí es pertinente hacer también la observación de que el orden en el producto cruz sí es importante, ya que si intercambiamos los factores se invierte el signo del producto. Otra manera de expresar este hecho es decir que con la parametrización no sólo describimos a la superficie, sino que además le damos una *orientación*. En el caso de una superficie “abierta”, cual vector normal se escoge dependerá

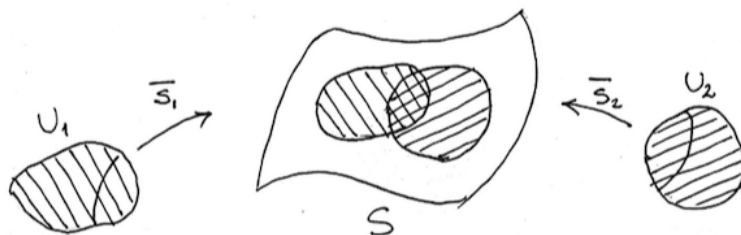
del problema explícito que se considere; sin embargo, en el caso de superficies cerradas, siempre consideraremos en estas notas el vector normal **exterior**. (Aquí debemos señalar que la definición precisa de lo que es una superficie abierta o cerrada no es enteramente trivial y, por lo mismo, la definición de lo que es el vector normal “exterior” tampoco lo es; sin embargo, la noción intuitiva de estos conceptos será suficiente para nuestros fines.)

Supongamos ahora que tenemos un campo vectorial **F** definido en la superficie *S* (o si se prefiere, para no entrar en problemas técnicos al momento de calcular derivadas, en un entorno de ella), y supongamos que podemos parametrizar a *S* por una sólo función **s**. Definimos entonces la *integral de superficie de la componente normal* del campo **F** como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_U \mathbf{F}(\mathbf{s}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) \, dudv.$$

Notamos que en general esta definición sí depende de cual es la dirección normal que hemos elegido; probablemente el caso más importante para nosotros es aquel en que *S* es una superficie cerrada, y en tal caso, como hemos dicho, en estas notas **n** denotará **siempre** al vector normal exterior a la superficie. Es asimismo importante señalar que en esta fórmula interviene ya el hecho de que **n** se escogió unitario.

El resultado importante es que esta fórmula se comporta bien cuando efectuamos reparametrizaciones de la superficie, con tal de que los vectores normales coincidan. En particular, si la superficie no puede parametrizarse por una sola función, pero suponiendo que podemos elegir los vectores normales de manera consistente (decimos entonces que la superficie es *orientable*), entonces lo que hacemos es dividirla en varios “pedazos” que sí admitan una tal parametrización (fig. siguiente), y en virtud de que en las intersecciones no importa en cual parametrización calculemos el valor de la integral, podemos definir la integral como la suma de todas estas contribuciones.



(También es conveniente hacer notar que esta definición en particular no depende realmente del hecho que nuestros objetos vivan en \mathbb{R}^3 ,

sino más bien del hecho que se puede definir un vector normal que determina al plano tangente, lo que ocurre porque las superficies tienen **exactamente** una dimensión menos que el espacio ambiente, pero ya no insistiremos en este punto.)

En el siguiente capítulo veremos una interpretación geométrica (o quizá mejor dicho, física) de las integrales de superficie; por lo pronto, baste con mencionar que también estas integrales se pueden definir en términos de sumas de Riemann.

4. LOS OPERADORES DEL ANÁLISIS CLÁSICO

En esta sección, como en la anterior, seguiremos centrando nuestra atención básicamente en objetos que viven en el espacio \mathbb{R}^3 , conviene introducir una notación para los vectores de la “base canónica” de \mathbb{R}^3 ; la que usaremos es: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ (algunos autores prefieren usar \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} para estos vectores).

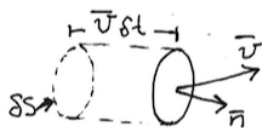
4.1. El flujo de un campo vectorial y la divergencia.

4.1.1. *Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.* Aunque no indispensable, ni del todo correcto históricamente hablando, la mejor manera de entender el significado geométrico de la divergencia es a través de consideraciones de *dinámica de fluidos*.

Puesto en términos simples, lo que queremos es considerar un fluido (por ejemplo agua, para fijar ideas), que se desplaza en el espacio y para el cual podemos asociar un vector de velocidad de desplazamiento del fluido en cada punto. Como la velocidad es un vector, es claro que este proceso determina un campo vectorial en la región donde evoluciona el fluido, de modo que las ideas geométricas antes consideradas se aplican.

Ahora bien, vagamente hablando, el flujo de un campo vectorial **a través de una superficie** S puede describirse como sigue:

Si suponemos que tenemos un fluido cuya densidad es ρ y que se desplaza conforme al campo vectorial de velocidades \mathbf{v} , y queremos determinar cual es la cantidad (i.e., la masa) de fluido que atraviesa una superficie S en un intervalo muy pequeño de tiempo δt ; de este modo, podemos suponer que la velocidad del fluido en ese intervalo de tiempo es (aproximadamente) constante. Para efectuar este cálculo, consideramos entonces una pequeña porción de la superficie, que denotamos δS , la que podemos también suponer que es aproximadamente plana, con vector normal unitario \mathbf{n} (véase la figura):



Entonces (como en nuestra aproximación todo es constante), el fluido avanza una “distancia vectorial” $\mathbf{v}\delta t$, y por consiguiente la masa de fluido que atraviesa δS en el tiempo δt está dada por

$$\rho\delta V = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\delta S\delta t.$$

De este modo, al dividir entre δt , tenemos que la masa global de fluido que atraviesa la superficie S , por unidad de tiempo, es la suma de todas estas “contribuciones infinitesimales”; es decir, es la integral de superficie

$$\iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dS.$$

Ahora simplemente adoptamos un punto de vista formal, es decir, *definimos* el flujo del fluido como esta integral; o más precisamente, decimos que esta integral define el flujo del campo vectorial $\rho\mathbf{v}$ a través de la superficie S . Evidentemente, esta construcción tiene sentido para cualquier campo vectorial, y por ello damos la definición siguiente:

Definición 2. Sea \mathbf{F} un campo vectorial en \mathbb{R}^3 , y S una superficie (contenida en el dominio de \mathbf{F}). El flujo de \mathbf{F} a través de S es la integral de superficie

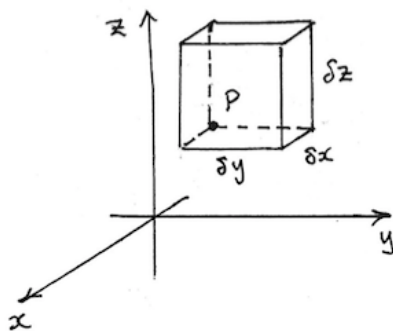
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}dS.$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a la superficie.

Observación: no hay que confundir este flujo, que es una medida de algo global referido a una superficie, con el flujo introducido anteriormente; aunque trataré de distinguir en lo que sigue de que tipo de flujo hablamos, pido al lector que esté atento a ello.

4.1.2. *Flujo infinitesimal y divergencia.* La noción de divergencia surge al considerar el flujo de un fluido, o más en general de un campo vectorial, **por unidad de volumen**, a través de la superficie de ese volumen. En el caso más simple, cuando todo es constante, la divergencia es simplemente el cociente del flujo (que es una constante) dividido entre el volumen. En el caso general en que las cantidades involucradas no sean constantes, consideramos lo que sucede a nivel infinitesimal. De manera algo más precisa, supongamos que tenemos un campo vectorial $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ que fluye a través de un cubito infinitesimal,

de modo que podemos considerar que el campo es constante sobre las tapas de este cubito, con caras paralelas a los ejes coordenados, y cuyo volumen es δV ; supongamos que el cubito tiene un vértice en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ (véase la figura).



El flujo a través de la frontera del cubito puede ser fácilmente calculado sobre cada una de las tapas del cubito; por ejemplo, si llamamos S_1 y S_2 a las tapas paralelas al plano yz , con S_1 la tapa por el punto P , entonces el área de ambas tapas es $\delta S = \delta y \delta z$, en tanto que el vector normal en S_1 es $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{e}_1 = (-1, 0, 0)$, mientras que en S_2 es $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_1$, de modo que el flujo total en estas dos tapas es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_0 + \delta x, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}_2 \delta S + \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}_1 \delta S \\ = (F_1(x_0 + \delta x, y_0, z_0) - F_1(x_0, y_0, z_0)) \delta y \delta z. \end{aligned}$$

Por consiguiente, haciendo cálculos similares para las restantes tapas del cubito y dividiendo entre $\delta V = \delta x \delta y \delta z$, tenemos que el flujo por unidad de volumen es

$$\begin{aligned} \frac{(F_1(x_0 + \delta x, y_0, z_0) - F_1(x_0, y_0, z_0))}{\delta x} \\ + \frac{(F_2(x_0, y_0 + \delta y, z_0) - F_2(x_0, y_0, z_0))}{\delta y} \\ + \frac{(F_3(x_0, y_0, z_0 + \delta z) - F_3(x_0, y_0, z_0))}{\delta z}, \end{aligned}$$

de modo que al tomar el límite cuando δV tiende a cero llegamos a la expresión

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \iiint_{\delta V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV = \frac{\partial F_1}{\partial x}(P) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(P);$$

esta última expresión es justamente lo que llamamos *la divergencia* del campo \mathbf{F} en el punto P .

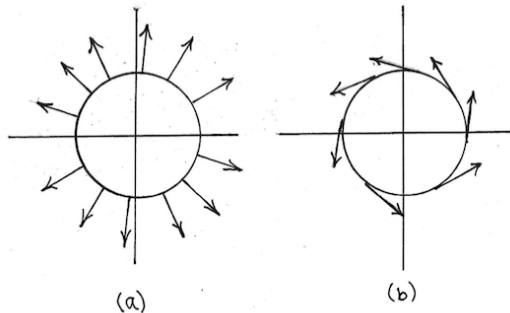
Vemos, como corolario de nuestra discusión, de dónde surge el término “divergencia”: En efecto, si las líneas del campo fueran perfectamente paralelas, entonces los valores del flujo del campo en cada pareja de tapas opuestas del cubito infinitesimal tendrían el mismo valor, **pero signo opuesto**, de modo que se cancelarían dos a dos; de este modo, la divergencia mide que tanto se alejan las líneas del campo de ser paralelas.

4.2. La circulación de un campo vectorial y el rotacional.

4.2.1. *Circulación de un campo vectorial.* De manera semejante al caso del flujo, la noción de rotación infinitesimal, o *rotacional* de un campo vectorial, se entiende mejor pensando en el caso de un fluido. Aquí la idea intuitiva es medir que tan rápidamente gira el fluido en torno de un punto dado, y comencemos por introducir la noción de *circulación* de un campo vectorial: Para ello, recordemos que una curva (parametrizada) cerrada en el espacio, es una función $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Entonces, si \mathbf{F} es un campo vectorial, y γ es una curva cerrada, la circulación de \mathbf{F} a lo largo de γ es la integral de línea

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Aunque algo menos claro que el caso del flujo, intuitivamente, la circulación del campo es una medida de cuantas veces gira éste al recorrer la curva γ . Para entender mejor esta idea conviene considerar el ejemplo de un campo radial en el plano, digamos $\mathbf{F}_1(x, y) = (x, y)$, que intuitivamente no gira al recorrer un círculo, digamos de radio 1 centrado en el origen, ya que siempre lo vemos apuntar en dirección hacia afuera del desplazamiento (que por supuesto es en la dirección tangente a la trayectoria) y el caso del campo perpendicular $\mathbf{F}_2(x, y) = (-y, x)$, descrito en la sección anterior, que por el contrario, gira una vez (véase la fig.).



En ambos casos, la curva γ puede describirse como

$$\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

de modo que las circulaciones respectivas son

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \cdot (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) dt = 0$$

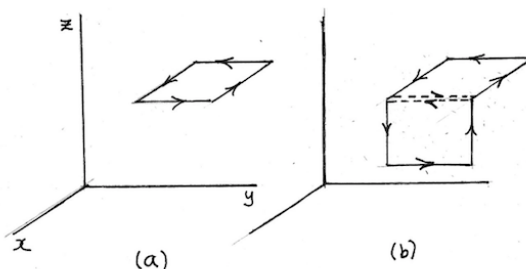
y

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \cdot (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) dt = 1$$

Ejercicio: Calcular la circulación del campo constante $(x, y) = (1, 0)$. ¿Cómo se explicaría intuitivamente este resultado?

4.2.2. *Circulación infinitesimal y rotacional.* Nos preguntamos ahora por cuál es la noción infinitesimal de circulación por unidad de superficie de un campo vectorial. Más precisamente, supongamos que tenemos una superficie infinitesimal δS , cuya frontera es una curva γ , $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial, y queremos calcular la circulación del campo sobre esta curva, y luego tomar el límite cuando la longitud de la curva y el área de la superficie bajo consideración tienden a cero.

Para simplificar los argumentos, vamos a suponer que la curva en cuestión es un cuadrado, contenido en un plano paralelo al plano xy , de longitudes δx y δy , con un vértice en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y recorrido en la dirección positiva (véase la siguiente figura; notemos además que en casos más complicados, como por ejemplo el ilustrado en la parte (b) de la figura, en que la frontera de la superficie está constiuida por las aristas del cubo que se muestran, el cálculo puede reducirse a calcular dos circulaciones como las consideradas, notando que si recorremos una curva en dos direcciones contrarias, entonces las integrales de línea respectivas difieren por un signo y se cancelan al sumarlas; más adelante volveremos a usar este argumento.)



En cada caso podemos además suponer que los lados del cuadrado están parametrizados con rapidez 1, y que el campo es constante sobre cada uno de los lados del cuadrado, y por consiguiente la circulación sobre los lados paralelos al eje y dará

$$\mathbf{F}(P + \delta x) \cdot \mathbf{e}_2 \delta y + \mathbf{F}(P) \cdot (-\mathbf{e}_2) \delta y = (F_2(P + \delta x) - F_2(P)) \delta y;$$

(aquí y en lo que sigue, para abreviar ocasionalmente utilizaremos la notación $P + \delta y = (x_0, y_0 + \delta y, z_0)$, etc.) en tanto que sobre los lados paralelos al eje x se obtiene

$$\mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{e}_1 \delta x + \mathbf{F}(P + \delta y) \cdot (-\mathbf{e}_1) \delta x = (F_1(P) - F_1(P + \delta y)) \delta x.$$

Dividiendo ahora por el area $\delta x \delta y$ del cuadrado infinitesimal, y haciendo δx y δy tender a cero, se tiene la circulación infinitesimal sobre este tipo de superficies:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{F_2(P + \delta x) - F_2(P)}{\delta x} + \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{F_1(P) - F_1(P - \delta x)}{\delta y} \\ = \frac{\partial F_2}{\partial x}(P) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(P). \end{aligned}$$

Observemos además que esta cantidad, que es la que representa una circulación infinitesimal, se asocia a un plano cuyo vector normal es $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, de modo que éste es el “eje” del giro infinitesimal, y nótese que z es justamente la coordenada que **no** aparece explícitamente en la expresión final.

Repitiendo el proceso para una curva arbitraria, la que aproximamos por cuadrillos infinitesimales paralelos a los planos coordenados como se sugirió arriba, obtenemos que la circulación infinitesimal por unidad de superficie está dada por las tres cantidades:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y};$$

cada una de las cuales está asociada a planos determinados por los vectores normales $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ respectivamente, de modo que la circulación infinitesimal sobre curvas arbitrarias debe asociarse con el vector

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right),$$

que reconocemos como *el rotacional* del campo vectorial \mathbf{F} . (Como una regla nemotécnica para recordar la definición del rotacional, observemos que en cada coordenada las derivadas son con respecto de las funciones y variables que **no** corresponden al índice de esa coordenada, y el signo se toma teniendo en cuenta el signo de la permutación de los índices 1, 2, 3 correspondiente a poner esa coordenada primero y las

restantes después. Por supuesto, también es correcto, y para muchos más fácil recordar al rotacional como el determinante —simbólico—

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

que es una de las maneras usuales en que se enseña este operador.)

Recordemos finalmente que si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, se dice que el campo es *irrotacional*.

4.2.3. “*Segundas derivadas*”. Otro de los resultados centrales del cálculo es que, bajo condiciones muy generales, el orden de derivación “es intrascendente”; en otras palabras, da lo mismo derivar una función de varias variables primero con respecto de una de sus variables y luego con respecto de otra de ellas, que hacerlo en el orden opuesto; en símbolos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Esta relación, combinada con las definiciones de los operadores que hemos considerado, en el caso $n = 3$ da como resultado las siguientes importantes fórmulas:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0; \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Aunque tediosa, la verificación de estas fórmulas es un cálculo directo; sin embargo, un hecho mucho más interesante es que hay un recíproco de ellas (llamado en matemáticas el *lema de Poincaré*), que dice que si una campo vectorial satisface $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, entonces existe una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$; y si un campo vectorial satisface $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, entonces hay otro campo vectorial \mathbf{G} tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

Aunque nosotros no tendremos que preocuparnos por ello, es importante señalar, sin embargo, que el lema de Poincaré **exige hipótesis adicionales**, que vagamente hablando podemos describir diciendo que el dominio de todas las funciones involucradas en estas fórmulas no puede “tener hoyos”; por ejemplo, el análogo en dos dimensiones del lema de Poincaré no vale si consideramos como dominio de los campos el plano sin el origen. A este tipo de restricciones se les llama *restricciones topológicas*.

Hay otro operador de derivación de segundo orden fundamental, que usaremos al final de estas notas: el *laplaciano*. Para una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este operador se define por:

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

5. LOS ENTES DEL ELECTROMAGNETISMO

Aunque los fenómenos electromagnéticos se conocen desde la antigüedad (por ejemplo, la palabra electricidad misma deriva su nombre de *electron*, que es el nombre en griego del ámbar), las primeras teorías coherentes de los procesos electromagnéticos datan del siglo XVIII, y más concretamente de 1787, en que se formula la ley de Coulomb, que describe la fuerza que se ejerce entre dos partículas cargadas eléctricamente.

5.1. Una breve nota sobre los objetos geométricos. Para nuestros propósitos, conviene introducir la siguiente notación: Por γ siempre denotaremos una curva; S denotará una superficie, cuyo vector normal será denotado por \mathbf{n} ; y V denotará un volumen, todos estos objetos en el espacio tridimensional. Como ya hemos dicho, si S es una superficie cerrada, \mathbf{n} denotará al vector normal exterior.

Ahora bien, aunque la definición de lo que es la frontera de un objeto geométrico no es en modo alguno algo trivial, la idea intuitiva sí lo es, y esto es lo que aprovecharemos aquí. En particular, es bastante claro que la frontera de un objeto geométrico de dimensión n (por ejemplo una superficie, que es de dimensión 2), es un objeto geométrico de dimensión $n - 1$ (en este caso sería una curva, que es de dimensión 1). Algo un poco menos “evidente”, pero que también es importante para el desarrollo de las ideas que estamos discutiendo (aunque nosotros no lo utilizaremos directamente), es que la frontera de un objeto ya no tiene frontera ella misma.

En general, utilizaremos la notación ∂ para la frontera de un objeto; esto **no** debe confundirse con las derivadas parciales, aunque la razón para escoger esta notación está motivada en el fondo por las propiedades de las derivadas. Así por ejemplo, si tenemos un volumen V cuya frontera es la superficie S , escribiremos $S = \partial V$, con notaciones similares para los demás casos.

Más aún, si hemos escogido una orientación en el espacio global, y orientamos alguno de nuestros objetos geométricos, esto induce *ipso facto* una orientación en su frontera: En estas notas siempre supondremos la orientación usual en \mathbb{R}^3 , de modo que por ejemplo, si tenemos una superficie en el plano xy , y **declaramos** que su vector normal es \mathbf{e}_3 , entonces diremos que la curva que constituye su frontera está orientada de modo que se recorre en la *dirección positiva*, es decir, la opuesta a la de las manecillas del reloj. (Esta convención es lo que se conoce como la *regla de la mano derecha*, y es la más habitual, aunque cabe insistir en que es sólo una convención.)

5.2. **La formulación empírica de las leyes de Maxwell.** En sus versiones originales, las leyes del electromagnetismo surgieron de la **medición de ciertos fenómenos en el laboratorio**, y son pues hipótesis físicas de la teoría. Esto quiere decir que además de la ley de Coulomb y la definición del campo eléctrico ya mencionados, las leyes básicas del electromagnetismo sistematizaron a leyes descubiertas en el laboratorio, y comprenden a la ley de Gauss, la ley de Faraday, la ley de Ampère y la ley de ausencia (o inexistencia) de monopolos magnéticos. En conjunto estas leyes se conocen como *ecuaciones de Maxwell*, las cuales recordaremos a continuación.

5.2.1. *La ley de Gauss.* La primera de las leyes del electromagnetismo es en cierto modo la generalización de la ley de Coulomb al caso de distribuciones de carga que no sean puntuales, y se debe a la profunda intuición del gran matemático, físico teórico y astrónomo Karl Gauss. Si suponemos que tenemos una carga q distribuida en un volumen V , con densidad ρ y $S = \partial V$, entonces se cumple la *ley de Gauss*:

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \iiint_V \rho dV$$

donde el campo \mathbf{D} es el llamado *desplazamiento eléctrico*.

Para convencerse de que tal es el caso, recordemos que por definición de ρ , $\iiint_V \rho dV$ es simplemente la carga q encerrada en el volumen V . Si en la ecuación anterior ponemos V como una esfera (digamos de radio 1), reemplazamos el lado derecho por $4\pi q$ y ponemos $\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$, de modo que en este caso $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, entonces un cálculo directo (¡ejercicio!) muestra que la ley de Gauss se cumple en este caso, y es simplemente la ley de Coulomb.

Observación: Para aquellos lectores que estén familiarizados con el tema, esto dice que para la ley de Coulomb la densidad ρ es una “delta de Dirac”.

5.2.2. *La ley de Faraday.* La segunda ley fue experimentalmente descubierta por M. Faraday alrededor de 1831, y nos dice que si tenemos una fuerza magnética variable \mathbf{B} que atraviesa una región S , entonces ésta produce un campo eléctrico, de modo que la variación en el tiempo del flujo del campo magnético es **menos** la circulación del campo eléctrico \mathbf{E} sobre la frontera de S , $\gamma = \partial S$. Esta última es lo que se conoce como la *fuerza electromotriz en el circuito* γ . En símbolos,

$$-\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

En el momento en que fue descubierta, esta *ley de inducción* de Faraday fue una de las relaciones más asombrosas que pudieran concebirse, pues mostró que los fenómenos de la electricidad y el magnetismo, que hasta entonces parecían bastante independientes, en realidad estaban íntimamente ligados. Esto, como sabemos, es uno de los factores básicos que contribuyeron al desarrollo de todo tipo de artefactos eléctricos y, más tarde, electrónicos, que tanto han modificado nuestro modo de vida.

5.2.3. *La ley de Ampère-Maxwell.* En cierto sentido el “dual” de la ley de Faraday es la *ley de Ampère*, que vagamente hablando dice que las corrientes, es decir, las cargas en movimiento, generan a su vez campos magnéticos. En términos cualitativos, si tenemos una *densidad de corriente* \mathbf{j} que atravieza una superficie S , entonces su flujo (llamado a veces la *corriente neta de magnetización*), produce una tensión magnética \mathbf{H} cuya circulación es exactamente el flujo de la corriente; en términos cuantitativos la ley de Ampère dice:

$$\int_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Algunos años más tarde, sin embargo, Maxwell descubrió que esta ley es sólo válida para el caso de campos magnéticos estacionarios; un poco más adelante veremos cual es la corrección necesaria, lo que da como resultado la conocida como *ley de Ampère-Maxwell*.

5.2.4. *La ley de ausencia de monopolos magnéticos.* La última relación es la que se denomina *ley de ausencia de monopolos magnéticos*. De manera un tanto imprecisa, esta ley dice que todo campo magnético debe tener dos polos opuestos (“norte” y “sur”, como se les designa convencionalmente), y en última instancia es un reflejo del hecho que una corriente debe de producirse a lo largo de un circuito de tamaño finito; en otras palabras, una carga puntual que se “moviera” en un circuito cerrado reducido a un punto, no produciría una corriente). De manera más precisa, la ley dice que el flujo de un campo magnético siempre es cero, y en símbolos se escribe en la forma

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Para entender un poco mejor esta ley, vale la pena contrastar con el flujo asociado a una carga eléctrica puntual, es decir a un monopolo eléctrico. En tal caso, como hemos visto, la ley de Gauss —o lo que es equivalente en este caso, la ley de Coulomb—, nos dice que el flujo de un campo eléctrico en la vecindad de un monopolo es exactamente

igual a la carga de ese monopolo. Pero conviene también señalar que en teorías más recientes la validez de esta ley se ha puesto en tela de juicio, y de hecho, en nuestros días hay una búsqueda activa (aunque hasta el momento infructuosa) de monopolos magnéticos.

5.3. El electromagnetismo clásico. Esto no es toda la historia, ya que el modelo global del electromagnetismo descrito arriba se complementa con otros tres tipos de leyes:

Primeramente, tenemos la conservación de la carga eléctrica, que define la densidad de corriente que ya hemos considerado; ésta se llama *ecuación de continuidad*, y en términos llanos dice que una variación en el tiempo en la carga es equivalente a un flujo de corriente:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV.$$

En segundo lugar, están las *leyes constitutivas*, que ligan a los distintos campos electromagnéticos que hemos considerado, las que dependen de los medios particulares. Más precisamente, los campos \mathbf{D} y \mathbf{H} se consideran como campos que miden la respuesta potencial de un medio, la que está en función de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} que se aplican. En el caso particular del vacío, que es el único que consideraremos en lo que sigue, éstas se leen

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}.$$

Las constantes ϵ_0 y μ_0 que aparecen en las ecuaciones anteriores se conocen, respectivamente, como la permitividad dieléctrica (que ya habíamos mencionado) y la *permeabilidad magnética* del vacío.

Finalmente, está la *ley de fuerzas de Lorentz*, que rige la dinámica de una partícula cargada, y que proporciona el puente entre la teoría de Maxwell y la mecánica newtoniana. Cabe la observación de que esta ley es considerablemente posterior a las ecuaciones de Maxwell, pues fue enunciada en 1887, y determina a la fuerza producida por un campo eléctrico \mathbf{E} y un campo magnético \mathbf{B} , sobre una partícula puntual de carga q que se desplaza con velocidad \mathbf{v} ; su expresión cuantitativa es:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Cerremos este capítulo con el siguiente comentario: aunque en el ya más de siglo y cuarto después de que Maxwell enunciara sus ecuaciones se le han hecho algunas modificaciones importantes, es de mencionar que el modelo así construido es uno de los más exitosos modelos físicos que se conocen; simplemente, piense el lector en todas las cosas que funcionan en base a la electricidad, ¡la mayoría de las cuales se han

desarrollado en base a cálculos derivados directamente del electromagnetismo de Maxwell!

6. LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

Sin duda, el resultado más importante del cálculo es el llamado *teorema fundamental del cálculo*, descubierto independientemente por Newton y Leibniz alrededor de 1670. Como bien sabemos, este teorema relaciona las nociones fundamentales de derivada e integral en la fórmula maravillosa

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

donde F es una antiderivada de f , esto es, es tal que $F' = f$.

Aunque en realidad es bastante claro de la expresión anterior, algo que no es tan conocido (o por lo menos no se enfatiza suficientemente para los que no son matemáticos) es que, aparte de la afirmación cuantitativa sobre el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$ —y por supuesto del hecho que nos proporciona la estrategia básica para calcular integrales, ambos hechos fundamentales en la práctica—, un aspecto central del teorema fundamental del cálculo es que éste relaciona el *comportamiento* de la función F en los extremos del intervalo $[a, b]$ (es decir, en la frontera del intervalo) con el *comportamiento promedio* de su derivada, f , en todo el intervalo. Más aún, el signo menos que aparece en el lado derecho está directamente relacionado con el hecho que a es el extremo izquierdo del intervalo (es decir, el que está hacia el lado “más negativo” del intervalo), en tanto que b es el extremo derecho (el “más positivo”), y esto nos hace ver que el resultado no es independiente de la orientación elegida en la recta (que por supuesto es la usual).

Una discusión a fondo de estas ideas escapa al propósito de estas notas, pero sí queremos invitar de entrada al lector a que reflexione sobre la analogía con este hecho que presentan los teoremas que discutiremos a continuación, que son la generalización de este resultado a dimensiones superiores, y que justifican el título (y tema) de estas notas.

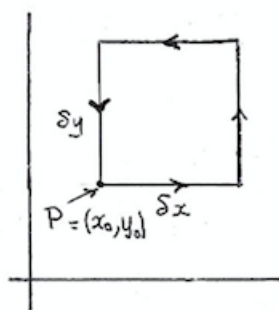
6.1. El caso del plano: el teorema de Green. Quizá el más sencillo de los teoremas fundamentales del cálculo en varias dimensiones es el llamado teorema de Green (la primera versión apareció en 1828), ya que corresponde a la generalización a dos variables independientes, y cuyo enunciado es como sigue:

Teorema 1. *Supongamos que se tiene un campo vectorial $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$, definido en una región $U \subset \mathbb{R}^2$, y que esta región tiene como frontera*

a la curva $\gamma = \partial U$. Entonces

$$\iint_U \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Para dar una idea de la demostración de este teorema consideramos, como ya hicimos en algunos casos anteriores, un rectángulo de tamaño infinitesimal, con un vértice en $P = (x_0, y_0)$, con lados paralelos a las ejes coordenados, orientado como en la figura, pero ahora nos interesa también su área $\delta U = \delta x \delta y$.



Suponiendo por continuidad que el campo vectorial y sus derivadas son constantes en las región de integración, tenemos por un lado que

$$\iint_U \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(P) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(P) \right) \delta x \delta y,$$

y por el otro tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \\ &= F_1(P)\delta x + F_2(P + (\delta x, 0))\delta y - F_1(P + (\delta x, \delta y))\delta x - F_2(P + (0, \delta y))\delta y, \end{aligned}$$

que podemos agrupar como

$$(F_2(P + (\delta x, 0)) - F_2(P + (0, \delta y)))\delta y - (F_1(P + (\delta x, \delta y)) - F_1(P))\delta x.$$

Usando ahora por ejemplo que $x_0 + \delta x \approx x_0$, y que

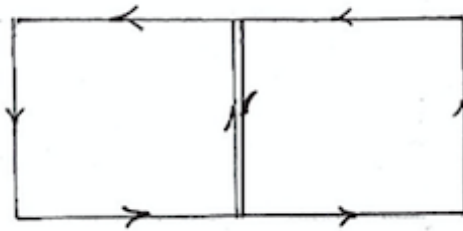
$$F_1(P + (0, \delta y)) - F_1(P) \approx \frac{\partial F_1}{\partial y}(P)\delta y.$$

obtenemos que el segundo término en la fórmula anterior es precisamente

$$-\frac{\partial F_1}{\partial x}(P)\delta x \delta y$$

y con un argumento similar para el otro término, obtenemos la relación deseada.

Ahora bien, habiendo probado este caso infinitesimal, el teorema general se sigue considerando regiones subdivididas en cuadritos infinitesimales, sumando después las contribuciones de cada cuadrito, y notando, como antes, que en las aristas comunes a dos cuadritos hay dos contribuciones, cada una con orientación opuesta, de modo que se cancelan entre sí (véase la fig.).



Pero si tenemos dos cuadritos infinitesimales, que comparten una arista, éstos sólo pueden estar en el interior de la región. De este modo, sólo sobrevivirán las contribuciones en la frontera, y esto nos da el resultado en el caso general.

6.2. El teorema de Gauss o de la divergencia. En tres dimensiones hay dos opciones distintas de análogos del teorema fundamental del cálculo, la más simple de ellas es el teorema de Gauss o de la divergencia formulado hacia 1813 (aunque en realidad, las contribuciones de Gauss a las imatemáticas —y a varias otras ciencias— son tan enormes, que hablar de ‘un’ teorema de Gauss es alga hasta cierto punto absurdo, por lo que es preferible llamarle teorema de la divergencia. Sin embargo, el peso de la tradición es bastante fuerte y en muchas ocasiones todavía se le llama teorema de Gauss).

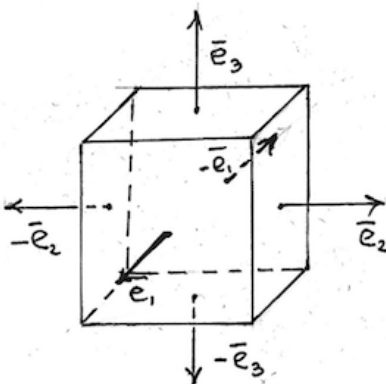
Teorema 2. *Si F es un campo vectorial definido en una región V , con frontera $S = \partial V$, entonces*

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

(donde, como hemos acordado, \mathbf{n} denota al vector normal exterior).

La demostración de este teorema es bastante similar a la del teorema de Green. Procede subdividiendo la región V en cubitos infinitesimales, con caras paralelas a los ejes coordenados. Notamos entonces que las contribuciones a la integral de volumen en caras adyacentes de cubitos que estén en el interior se cancelan, ya que los vectores normales en esas caras tienen dirección opuesta cuando los consideramos en las dos distintos cubitos; de este modo, una vez más sólo queda la contribución en la frontera, lo que explica la forma que tiene la fórmula del teorema.

No obstante, para reforzar nuestra discusión consideremos la demostración del teorema en uno de estos cubitos infinitesimales: sea pues un cubito infinitesimal δV , con frontera δS , como en la figura, y consideremos el flujo en las caras del cubo, apareándolas según el plano coordenado al que son paralelas:



Usando la continuidad del campo se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= (F_1(P + \delta x) - F_1(P))\delta y\delta z + \\ &+ (F_2(P + \delta y) - F_2(P))\delta x\delta z + (F_3(P + \delta z) - F_3(P))\delta x\delta y. \end{aligned}$$

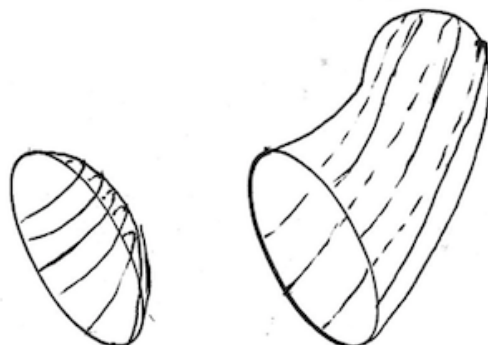
Aproximamos ahora las diferencias por las correspondientes derivadas parciales y obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\delta S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(P) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(P) \right) \delta x\delta y\delta z \\ &= \nabla \cdot \mathbf{F}(P)\delta V = \iiint_{\delta V} \nabla \cdot \mathbf{F} dV, \end{aligned}$$

que es el resultado deseado.

Como dijimos, la demostración del caso general es bastante similar al caso del teorema de Green, aunque quizá un poco más laboriosa, pero invitamos al lector a tratar de reproducirla (¡o al menos repasarla en algún texto más detallado de análisis vectorial!).

6.3. El teorema de Stokes. Finalmente, como ya hemos insinuado la otra opción para generalizar el teorema fundamental del cálculo, llamada *teorema de Stokes* (enunciado alrededor de 1850), es algo más difícil, pues ahora hay que tener cuidado adicional con las aproximaciones a la superficie, en particular con el hecho de que una misma curva en \mathbb{R}^3 puede ser frontera de muy distintas superficies (fig.).



Sin embargo, la idea de la demostración es bastante semejante a las anteriores, por lo que la omitiremos aquí, contentándonos con enunciar el resultado final y remitiendo al lector a algún texto estándar de análisis vectorial para ver los detalles (baste con recordar nuestra discusión sobre el flujo infinitesimal y el rotacional).

Teorema 3. Si \mathbf{F} es un campo vectorial definido sobre una superficie S , cuya frontera es la curva $\gamma = \partial S$, cuya orientación es la heredada de la de S , entonces

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

6.4. **¿Qué pasa en n dimensiones?** Como ya indiqué, al menos las nociones de gradiente y divergencia valen en n dimensiones. Así pues, cabe la pregunta: ¿habrá análogos de estos teoremas en otras dimensiones?

La formidable respuesta es que sí; que todas estas construcciones se pueden englobar dentro de un mismo molde, válido en un número arbitrario de dimensiones.

Ello requiere sin embargo del desarrollo de una maquinaria considerablemente más sofisticada y poderosa, llamada *cálculo de formas diferenciales*, cuya descripción precisa va más allá del alcance de estas notas; por ello me limitaré a recalcar algunos puntos que ya han aparecido, de manera más o menos explícita, repetidas veces en estas notas:

Si consideramos un espacio de n dimensiones, en el podemos considerar “objetos geométricos” (que llamamos “hipersuperficies”) que pueden tener dimensiones $1, 2, \dots, n$. Por ejemplo, en tres dimensiones podemos tener curvas, superficies y sólidos tridimensionales. En cada caso, bajo hipótesis “sensatas” sobre la forma de nuestros objetos, estos tendrán fronteras que son, a su vez, objetos geométricos de una

dimensión menos; así por ejemplo, la frontera de una bola sólida en \mathbb{R}^3 , la que tiene dimensión 3, es una esfera, que tiene dimensión 2.

Ahora, si consideramos alguna hipersuperficie M de p dimensiones, encajada en algún espacio \mathbb{R}^n , entonces para cada dimensión p hay objetos, llamados p -formas, que en cierto modo son parecidos a funciones, que se pueden definir sobre la hipersuperficie, pero que son los objetos que tienen las propiedades adecuadas para que los podamos integrar. Así por ejemplo, en el caso de \mathbb{R}^3 , las hipersuperficies de dimensión 2 son las superficies ordinarias, y en tal caso los objetos que se pueden integrar, que serían en este lenguaje general las 2-formas, esencialmente son las componentes normales a las superficies de los campos vectoriales, como vimos para las integrales de superficie.

Pero el punto realmente crucial (y nos contentaremos con describirlo en este sentido vagamente especificado) es que existe una operación, llamada *diferencial exterior*, que generaliza (¡enormemente!) a las operaciones diferenciales de gradiente, divergencia y rotacional que hemos considerado. La diferencial exterior de una p -forma f , que por lo dicho se puede integrar sobre la frontera de una hipersuperficie M , ∂M , es una $(p + 1)$ -forma, que denotamos df , la que se puede integrar sobre M , y se tiene entonces la relación

$$\int_M df = \int_{\partial M} f.$$

Esta notable fórmula es lo que se llama el *teorema de Stokes en variedades*, y esto puede considerarse como la “generalización máxima” del teorema fundamental del cálculo de Newton y Leibniz. (Aunque cabe señalar que para la formulación definitiva de este resultado, debida a E. Cartan a principios de nuestro siglo y marcada por hitos como los teoremas de Green, Gauss y Stokes que hemos discutido aquí, ¡hubieron de transcurrir cerca de 250 años! Por otro lado, es en el estudio de esta teoría general que se puede entender nuestra afirmación de que el caso más difícil de entender es el de integral de superficie, ya que aquí las 2-formas, a diferencia de las 1-formas y las 3-formas, no se pueden poner en correspondencia biyectiva con las funciones arbitrarias.)

7. LAS LEYES DE MAXWELL

Concluimos estas notas con la aplicación de la teoría que hemos desarrollado a las leyes del electromagnetismo, específicamente a la obtención de las leyes de Maxwell en forma diferencial; y en realidad, gracias a todo el aparato matemático construido, como veremos esto será algo bastante directo.

7.1. Las ecuaciones de Maxwell. Obtenegamos ante todo las versiones diferenciales de las leyes del electromagnetismo que hemos considerado en la sección 5, que son lo que habitualmente en la literatura se conoce como las *ecuaciones de Maxwell*.

Primeramente, consideremos la ley de Gauss. Recordemos que ésta nos dice

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV;$$

por otro lado, el teorema de la divergencia nos dice que $\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV$, de donde se concluye que

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Como esta relación debe valer independientemente del volumen V que se considere, esto fuerza a que las integrandos sean iguales; es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho.$$

Esta es la ley de Gauss en forma diferencial.

Dejaremos como ejercicio al lector el tratar de deducir las ecuaciones de Maxwell correspondientes a las otras tres leyes, enunciadas en la sección 5 en forma integral; dos de ellas requerirán del teorema de Stokes y la otra del teorema de la divergencia (*¿cuáles?*). Sin embargo, vale la pena discutir explícitamente aquí el caso de la ley de Ampère, la que (adelantando un poco la tarea al lector) diría $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$, ya que en este caso el razonamiento que lleva a la correspondiente ley de Maxwell no es directo:

En efecto, si consideramos la ecuación de continuidad, con argumentos análogos a los mencionados obtendremos la relación

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Esto dice en particular que la divergencia de \mathbf{j} en general **no** es cero. Pero si recordamos los teoremas sobre segundas derivadas, la ley de Ampère diría que $\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$, de modo que ambas leyes son mutuamente inconsistentes. Ahora bien, la ecuación de continuidad es una ley más básica que la de Ampère, de modo que la que hay que modificar es esta última. La modificación correcta fue deducida por Maxwell (con notable intuición) a partir de la ley de Gauss; en efecto, si derivamos la ley de Gauss con respecto del tiempo, e intercambiamos derivadas temporales con espaciales obtenemos

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

ecuación que combinada con la de continuidad dice

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) = 0,$$

que es la relación que debe satisfacer el rotacional de \mathbf{H} . Maxwell propuso entonces que la ecuación correcta era

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j},$$

que es lo que se conoce como *ley de Ampère-Maxwell*.

Para beneficio del lector, recopilamos a continuación las leyes de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho && \text{(Ley de Gauss)} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Ley de Faraday)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(Ley de ausencia de monopolos magnéticos)} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} && \text{(Ley de Ampère-Maxwell).} \end{aligned}$$

7.2. Potenciales electromagnéticos. En el caso de una variable, dada una función diferenciable f (de hecho, basta con que f sea continua), el teorema fundamental del cálculo nos garantiza la existencia de una función F , cuya derivada es la función original, es decir, $F' = f$; y en tal caso,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Para dimensiones mayores esto no sucede en general. Sin embargo, como ya hemos insinuado, utilizando los teoremas fundamentales del cálculo, bajo ciertas condiciones se pueden construir funciones que satisfagan el análogo multidimensional de la relación anterior: ésta es la esencia del lema de Poincaré que ya hemos comentado anteriormente.

En particular, si tenemos un campo eléctrico irrotacional, que de acuerdo a la ley de Faraday corresponde básicamente al caso electrostático, o más precisamente cuando las corrientes son estacionarias, de modo que no produzcan campos magnéticos variables y por lo tanto $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, podemos concluir que existe una función $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi,$$

llamado el *potencial eléctrico* o *escalar*, cuyas diferencias nos miden los cambios de **voltaje** al recorrer cierta trayectoria (el signo menos es una convención usual). Cabe enfatizar que aunque siempre podemos medir caídas de voltaje, este potencial eléctrico sólo está definido como una función de los extremos de la trayectoria en este caso irrotacional (y si además se cumple la condición topológica del lema de Poincaré).

Similarmente, en el caso magnetostático, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, podemos construir un *potencial vectorial* $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de modo que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

En el caso general la relación entre campos y potenciales no es tan clara; de hecho, no existe una noción de potencial para campos electrodinámicos, si nos restringimos a un espacio de 3 dimensiones. No obstante, si consideramos al espacio-tiempo como una sola entidad (y de hecho, éste es el “espacio” donde **realmente** viven los objetos electromagnéticos), entonces podemos recuperar a los campos electromagnéticos \mathbf{E} y \mathbf{B} en términos de los “potenciales” ϕ y \mathbf{A} ; pero debemos sin embargo insistir que hay que considerarlos como funciones también del tiempo:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Estas ecuaciones no tienen sin embargo realmente la forma de ecuaciones de potencial usual, pues estamos obteniendo funciones con valores en **tres** dimensiones, a partir de funciones definidas en un espacio de **cuatro** dimensiones; desafortunadamente, explicar como se resuelve este problema requiere del uso de formas diferenciales, y por lo mismo va más allá del propósito de estas notas.

Pero sí cabe hacer la observación de que, en ambos casos, los potenciales no están unívocamente determinados (ni aún en los casos estáticos), sino que hay un factor de ambigüedad, llamado factor de norma o de, usando la locución inglesa, *gauge*. Más precisamente, en el caso electrostático ϕ está determinado salvo por una constante, en tanto que en el caso magnetostático \mathbf{A} está determinado salvo por la adición del gradiente de una función, ya que éste tiene rotacional cero; el lector debe convencerse de que efectivamente esto no altera las leyes de Maxwell.

7.3. Ondas electromagnéticas. El pináculo de nuestra discusión es exhibir una de las consecuencias más notables de la teoría de Maxwell: la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan con la velocidad de la luz, cuya verificación experimental hecha por H. Hertz en 1888³. Históricamente esto constituyó uno de los logros (y confirmaciones) más notables del electromagnetismo, tanto en la teoría como en la práctica, al grado que sus consecuencias pusieron a esta teoría en una situación de privilegio, en cierto modo incluso por encima de la mecánica newtoniana.

³De aquí procede el término de “ondas hertzianas”, afortunadamente hoy en desuso, pues la usanza lo volvió algo casi peyorativo

Aunque no nos será posible detallar mucho en ello, lo que sí podemos decir es que es que algunas de las conclusiones que se extraen del electromagnetismo, entre las cuales esta existencia de señales que se propagan con una velocidad fija, en el fondo contradice algunas de las suposiciones más básicas de la mecánica newtoniana, como es la aditividad de las velocidades. En particular una de las consecuencias más importantes es que el electromagnetismo es una teoría que ‘vive’ intrínsecamente en cuatro dimensiones; o por decirlo de otro modo, que el tiempo y el espacio deben ser considerados como una entidad indisoluble, cuya geometría es además distinta de la geometría euclidiana, a la que estamos tan acostumbrados. Esta conclusión fue fruto del trabajo de muchos brillantes científicos, entre los que cabe destacar a H. Lorentz, H. Poincaré, A. Einstein y H. Minkowski, y fue el antecedente principal de la teoría de la relatividad, entre otras cosas.

Ahora bien, para obtener la existencia de estas ondas electromagnéticas, observamos primero que el producto de las constantes de permeabilidad y permitividad tiene siempre unidades de velocidad al cuadrado, pero además, que en el vacío éstas satisfacen una relación fundamental, verificada experimentalmente, a saber: $c^2 = \mu_0 \epsilon_0$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Con esto, las ecuaciones de Maxwell en el vacío son:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Así, partiendo de la ecuación de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

de donde

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

pero ya que para cualquier campo \mathbf{F} se satisface la identidad

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F},$$

para el campo eléctrico se tiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E},$$

donde la última igualdad es por la ecuación de Gauss en el vacío. Como además

$$-\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

se llega finalmente a la *ecuación de onda* para el campo eléctrico en el vacío:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Similarmente, el campo magnético satisface la ecuación de onda

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

En los cálculos anteriores, se entiende que el laplaciano Δ se aplica a *cada componente* de los campos, así que el resumen es que cada componente de \mathbf{E} y \mathbf{B} en el vacío satisface una ecuación de onda, con *velocidad de propagación* c .

Nos preguntamos entonces cómo son estas ondas, y para fijar ideas, supongamos que \mathbf{E} y \mathbf{B} satisfacen:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{\partial B_1}{\partial x} = 0,$$

de modo que en particular E_1 y B_1 son en realidad constantes, las que de hecho supondremos son cero. Entonces, usando las ecuaciones de Faraday y de Ampère en el vacío se tiene el siguiente sistema de ecuaciones, que escribimos con detalle para beneficio del lector:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} & = & 0 & = & -\frac{\partial B_1}{\partial t} & \frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} & = & 0 & = & \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} \\ \frac{\partial E_1}{\partial y} - \frac{\partial E_3}{\partial z} & = & -\frac{\partial E_3}{\partial x} & = & -\frac{\partial B_2}{\partial t} & \frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial B_3}{\partial z} & = & -\frac{\partial B_3}{\partial x} & = & \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_2}{\partial t} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} & = & \frac{\partial E_2}{\partial x} & = & -\frac{\partial B_3}{\partial t} & \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} & = & \frac{\partial B_2}{\partial x} & = & \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_3}{\partial t} \end{array}$$

Como consecuencia se tiene entonces que

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 E_2}{\partial x \partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2},$$

con ecuaciones similares para E_3 , B_2 y B_3 , que invitamos al lector a deducir como ejercicio. En resumen, con estas hipótesis lo que hemos mostrado es que \mathbf{E} y \mathbf{B} son ondas que avanzan en la dirección x y son *transversales* a esta dirección, ya que la componente en la dirección x no varía. Usando el principio de superposición de ondas se puede mostrar que en general las ondas asociadas a los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son transversales a la dirección de propagación

Ahora bien, las ondas asociadas a los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} no sólo son transversales a la dirección de propagación, sino además que son *ortogonales* entre sí (a veces denotado en símbolos por $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$). En nuestro ejemplo especial podemos ilustrar esto como sigue:

Ya vimos que E_2 satisface la ecuación de onda en una dimensión; suponiendo ahora para simplificar que es una onda que avanza en la

dirección positiva, un argumento elemental de ecuaciones diferenciales parciales nos dice que su forma es

$$E_2(x, t) = f(x - ct),$$

donde f es una función de una sola variable⁴. Similarmente, se tiene que $B_3(x, t) = g(x - ct)$.

Si de nuevo derivamos E_2 con respecto a x y B_3 con respecto a t obtenemos entonces que

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = f'(x - ct) = -\frac{\partial B_3}{\partial t} = cg'(x - ct)$$

Así, salvo por una constante de integración que no es importante para nuestro razonamiento, se sigue que $f(s) = g(cs)$, de modo que la componente en y de \mathbf{E} , E_2 , y la componente en z de \mathbf{B} , B_3 , ‘oscilan’ en sincronía, y similarmente lo hacen B_2 y E_3 , mostrando que en efecto $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

REFERENCIAS

- [1] Clemmow, P. C., *An Introduction to Electromagnetic Theory*, Cambridge University Press (1973).
- [2] Schey, H. M., *Div, Grad, Curl, and all That; An informal Text on Vector Calculus*, W. W. Norton and Company (1973).
- [3] Swokowski, E. W., *Cálculo con geometría analítica*, Wadsworth Internacional Iberoamérica (1982).

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS (CIMAT)

⁴Esto se conoce como el método de D’Alembert, y el lector puede fácilmente corroborar que en efecto estas son soluciones de la ecuación de onda.