

C I M A T

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Problemas de Convección
Difusión en Estado Estacionario

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestría en Ciencias con Especialidad en
Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A :

Miguel Castillo Salgado

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Salvador Botello Rionda

Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez

Diciembre de 2004

Guanajuato, Gto., México

AGRADECIMIENTOS

Quiero dedicar este trabajo principalmente a mis padres y hermanos y a todas las personas que de alguna u otra manera contribuyeron a su realización, a mis asesores y un agradecimiento especial al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) lugar donde realicé mis estudios y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT).



CIMAT
BIBLIOTECA

C I M A T
B I B L I O T E C A

020244

Índice general

1. Introducción	5
2. Teoremas y Definiciones Básicas de Análisis Funcional	9
2.1. Espacios Normados	9
2.2. Espacios con Producto Interno	10
2.3. Espacios de Hilbert	11
2.4. Espacios de Sobolev $W_p^m(\Omega)$	11
2.5. Espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$	15
2.6. Formulación Débil	18
3. El Método de Galerkin-MEF para Procesos de Convección-Difusión	21
3.1. Ecuación de Convección Difusión en Estado Estacionario	23
3.2. Formulación Débil	24
3.3. Implementación del Método de Elemento Finito	27
3.3.1. Problema Unidimensional	29
3.3.2. Convección Dominante	30
4. Cálculo de Incrementos Finitos	35
4.1. Métodos de Estabilización	36
4.1.1. Difusión artificial	36
4.1.2. Petrov-Galerkin	39
4.1.3. Cálculo del parámetro α	40
4.2. Extensión a Problemas Bidimensionales	41
4.3. Cálculo de Incrementos Finitos	42
4.3.1. Equilibrio de la ecuación de flujo	42
4.3.2. Condiciones de frontera de Neumann	44

4.3.3. Conservación del flujo	45
4.4. Formulación Bidimensional	45
4.5. Formulación Débil	46
4.6. Cálculo del Parámetro de Estabilización	48
4.7. Cálculo de la Derivada	50
5. Resultados Numéricos	53
6. Conclusiones	75

Capítulo 1

Introducción

Los modelos matemáticos que involucran procesos combinados de convección y de difusión son de los retos más desafiantes en análisis numérico. Estos procesos surgen en muchas ramas de la ciencia e ingeniería resultando así muy importante su análisis. A menudo los parámetros que miden la resistencia relativa de la difusión son muy pequeños comparados con los coeficientes convectivos y uno puede encontrarse ante situaciones donde surgen problemas de inestabilidad debido a tal diferencia.

Ante tales circunstancias los métodos tradicionales de aproximación también presentan ciertas dificultades. Así, en las últimas dos décadas se han desarrollado una gran cantidad de técnicas para sobrellevar tales dificultades, todas ellas sujetas a ciertas particularidades del problema en análisis, permaneciendo todavía abierta la implementación o el desarrollo de algún procedimiento completamente general.

Un problema típico de convección difusión es el siguiente.

Dispersión de contaminantes. Consideremos la figura (1.1). Si c es la concentración del contaminante —el cual puede ser, por ejemplo, aguas negras, desperdicio químico o radioactivo, temperatura, etc.—la ecuación típica que gobierna su dispersión es de la forma

$$(1.1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \nabla c = \nabla \cdot (D \nabla c) + S,$$

aquí S es el término fuente, el cual puede variar con el tiempo; v es un campo de velocidades dado, el cual también puede variar con el tiempo. Usualmente

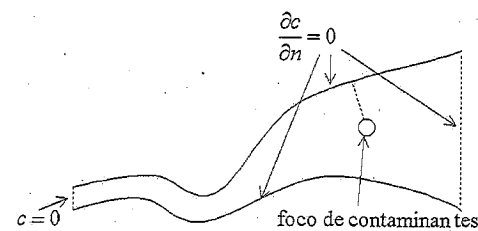


Figura 1.1: Dibujo del estuario de un río con un foco de contaminantes

v es supuesto incompresible, es decir, $v \cdot \nabla c$ puede ser reemplazado por $\nabla \cdot (vc)$; y D es la matriz de difusividad.

Una medida de la inestabilidad numérica es el número de Péclet $\gamma = |v|L/(2k)$.

En el ejemplo las dimensiones típicas son velocidades de $1/2$ a 3 m/seg , una difusividad de $0,05$ m^2/seg , y una longitud de unos 100 m . Con estos valores el número de Péclet, con $k = (k_x + k_y)/2$, donde k_x y k_y son los coeficientes de difusión a lo largo de los ejes x e y respectivamente, puede alcanzar valores entre 10 y 6×10^3 . Si D es supuesta independiente de c éste es un problema muy representativo de procesos de convección-difusión. En los casos de convección dominante, es decir, cuando el valor del número de Péclet γ es mayor que uno, la solución presenta problemas de inestabilidad.

En particular en [3] se propone el método CIF (Cálculo de Incrementos Finitos) para resolver el problema de inestabilidad.

El objetivo de este trabajo es desarrollar el método CIF para problemas estacionarios de convección difusión y presentar un análisis cualitativo de su aplicabilidad.

El contenido es como sigue.

En el Capítulo 1 se presentan resultados básicos de análisis funcional, como el Teorema de Representación de Riez y el Teorema de Lax-Milgram que son fundamentales para pruebas de existencia y unicidad de la solución del problema de interés. También se introduce el concepto de Formulación

Débil que consiste en transformar el problema de una forma diferencial a una forma integral, el cual resulta más fácil de tratar. La mayoría de los teoremas son presentados sin demostraciones, pero pueden ser encontradas en cualquier libro de análisis funcional, por ejemplo en [4], [6], [9].

En el Capítulo 2 se hace un análisis del problema de convección difusión, así como una descripción de los problemas de inestabilidad inherentes a su propia naturaleza. También se hace una descripción general del método de elemento finito aplicado a este tipo de problemas y se estudian las condiciones para las cuales existe una única solución al problema.

En el Capítulo 3 se hace una descripción de los métodos usados en el tratamiento de problemas con convección dominante. Estos métodos son llamados *métodos de estabilización*. Se plantea el método CIF (Cálculo de Incrementos Finitos) como una alternativa a los métodos tradicionales, tales como Difusión artificial o Petrov Galerkin, y se muestra como los términos extra de difusión que añaden estos, pueden surgir de manera natural al establecer el equilibrio de flujo sobre dominios infinitesimales, y se propone un algoritmo iterativo para la estabilización de las soluciones.

Por último, en el Capítulo 4 se hace una comparación entre los resultados obtenidos y los presentados en [3]. Otros ejemplos fueron tomados de [2].

Teoremas y Definiciones Básicas de Análisis Funcional

Introducción

Muchos problemas que aparecen en áreas de ciencia e ingeniería pueden ser representados por ecuaciones diferenciales. Trabajar estas ecuaciones en una forma integral resulta más natural que una forma diferencial, para lo que se introduce la formulación variacional de problemas con valores en la frontera. También se tratan algunos conceptos básicos de análisis funcional sobre las que se sustenta la teoría de dicho planteamiento, aspectos de espacios de Hilbert pero sobre todo algunas nociones sobre espacios de Sobolev para después hacer una descripción del método de elemento finito y su aplicación, en particular, a problemas de convección-difusión.

2.1. Espacios Normados

Definición 2.1.1 Sea V un espacio vectorial. Una norma sobre V es una función real denotada por $\|\cdot\|_V$, la cual satisface las siguientes condiciones:

- (1) $\|u + v\|_V \leq \|u\|_V + \|v\|_V$,
- (2) $\|\alpha v\|_V = |\alpha| \|v\|_V$,
- (3) $\|v\|_V \neq 0$ si y solo si $v \neq 0$,

para todo $v, w \in V$ y cualquier escalar α (por escalar entendemos cualquier número real o complejo).

Definición 2.1.2 Un espacio normado es una pareja $(V, \|\cdot\|_V)$, donde V es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_V$ es una norma definida en V .

Definición 2.1.3 Un espacio de Banach es un espacio normado que es completo, esto es, para toda sucesión de Cauchy $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset V$ existe un elemento $v \in V$ tal que

$$(2.1) \quad \|v_j - v\|_V \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \rightarrow \infty.$$

2.2. Espacios con Producto Interno

Definición 2.2.1 Sea V un espacio vectorial. $\bar{\alpha}$ denota el complejo conjugado del escalar α . Un producto interno sobre $V \times V$ es una función compleja que satisface las siguientes condiciones:

- (1) $(v + y, w)_V = (v, w)_V + (y, w)_V$,
- (2) $(\alpha v, w)_V = \alpha(v, w)_V$,
- (3) $(v, w)_V = \overline{(v, w)_V}$
- (4) $(v, v)_V \geq 0$ y $(v, v)_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

para todo $v, w, y \in V$ y cualquier escalar α .

Definición 2.2.2 Un espacio vectorial junto con un producto interno se llama espacio con producto interno y es denotado por $(V, (\cdot, \cdot)_V)$.

Teorema 2.2.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski) Si $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ es un espacio con producto interno, entonces

$$(2.2) \quad |(v, w)_V| \leq \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V.$$

Proposición 2.2.4 $\|u\|_V = \sqrt{(u, u)_V}$ define una norma sobre el espacio con producto interno $(V, (\cdot, \cdot)_V)$.

2.3. Espacios de Hilbert

Definición 2.3.1 Sea $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ un espacio con producto interno. Si el espacio normado asociado $(V, \|\cdot\|_V)$ es completo, entonces $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ se llama espacio de Hilbert.

Teorema 2.3.2 Sea V un espacio de Hilbert y $M \neq \emptyset$ un subconjunto cerrado convexo. Entonces para cada $v \in V$ existe un único $u \in M$ tal que

$$(2.3) \quad \delta = \inf_{\hat{u}} \|v - \hat{u}\|_V = \|v - u\|_V.$$

Teorema 2.3.3 (Teorema de representación de Riesz) Sea $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ un espacio de Hilbert. Entonces para todo funcional continuo $F \in V'$ existe exactamente un elemento $u \in V$ tal que

$$(2.4) \quad F(v) = (u, v)_V \quad \forall v \in V.$$

Definición 2.3.4 Una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ definida sobre $V \times V$ donde V es un espacio normado, se dice que es acotada (ó continua) si $\exists C < \infty$ tal que

$$(2.5) \quad |a(v, w)| \leq C \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V,$$

y coerciva sobre $W \subset V$ si $\exists \alpha > 0$ tal que

$$(2.6) \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in W.$$

Teorema 2.3.5 (Teorema de Lax-Milgram) Dado un espacio de Hilbert V , una forma bilineal continua, coerciva $a(\cdot, \cdot)$, y un funcional continuo $F \in V'$, entonces existe un único $u \in V$ tal que

$$(2.7) \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

2.4. Espacios de Sobolev $W_p^m(\Omega)$

Definición 2.4.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o $C_0^\infty(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones con soporte compacto en Ω , esto es

$$(2.8) \quad C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mid \text{supp } v \subset \Omega\}$$

donde

$$(2.9) \quad \text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\}}.$$

Definición 2.4.2 Dado un dominio Ω , el conjunto de funciones localmente integrables es denotado por

$$(2.10) \quad L_{loc}^1 = \{f \mid f \in L^1(K) \quad \forall K(\text{compacto}) \subset \Omega^\circ\}.$$

Definición 2.4.3 Un multi-índice, α , es una n -upla de enteros no negativos, α_i . La longitud de α es dada por

$$(2.11) \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Dado un vector (x_1, \dots, x_n) definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. Para $\phi \in C^\infty$, denotamos por

$$(2.12) \quad \phi^{(\alpha)},$$

la derivada parcial usual, así

$$(2.13) \quad \phi^{(\alpha)} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n} \phi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \phi$$

donde $\partial x = (\partial x^1, \dots, \partial x^n)$.

Definición 2.4.4 Decimos que una función $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ tiene derivada débil, $D_w^\alpha f$, si existe una función $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$(2.14) \quad \int_{\Omega} g(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)\phi^{(\alpha)}(x)dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty$$

Definición 2.4.5 Sea $\Omega \subset R^n$ un dominio acotado, se dice que tiene frontera Lipschitz continua, si para todo $z \in \partial\Omega$ existe una vecindad $U = U(z)$ tal que el conjunto $U \cap \Omega$ puede ser expresado en algún sistema de coordenadas cartesianas (x_1, \dots, x_n) , por la desigualdad $x_n < F(x_1, \dots, x_{n-1})$, donde F es una función Lipschitz continua. Denotaremos por \mathcal{L} al conjunto de todos los dominios acotados con frontera Lipschitz continua.

Consideremos un dominio abierto $\Omega \subset R^n$ arbitrario. Recordemos que el espacio de Lebesgue $L_p(\Omega)$ consiste de clases de equivalencia de la función u definida sobre Ω que tiene norma $\|u\|_{L_p(\Omega)}$ finita, es decir,

$$(2.15) \quad \|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty$$

en el caso en que $1 \leq p < \infty$, y cuando $p = \infty$

$$(2.16) \quad \|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \text{ess sup } \{|u(x)| : x \in \Omega\}$$

A continuación se dan algunas desigualdades que se cumplen para las funciones definidas anteriormente.

Desigualdad de Minkowski. Para $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in L_p(\Omega)$ tenemos

$$(2.17) \quad \|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}$$

Desigualdad de Hölder. Para $1 \leq p, q \leq \infty$ tales $1/p + 1/q = 1$, si $f \in L_p(\Omega)$ y $g \in L_q(\Omega)$, entonces fg están en L_1 y

$$(2.18) \quad \|fg\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}$$

Teorema 2.4.6 Para $1 \leq p \leq \infty$, $L_p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

El espacio de $L_p(\Omega)$ puede ser extendido de manera natural considerando funciones que no solamente están en $L_p(\Omega)$ si no que también sus derivadas débiles hasta orden m estén en $L_p(\Omega)$, cuando esto pasa decimos que $u(x)$

pertenece al espacio $W_p^m(\Omega)$, al cual nos referimos como el espacio de Sobolev de orden m, p sobre Ω , o lo que es igual,

$$(2.19) \quad W_p^m(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in L_p(\Omega); \forall \alpha \quad |\alpha| \leq m\}$$

es claro que

$$(2.20) \quad W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$$

Hay muchas maneras de introducir una norma sobre $W_p^m(\Omega)$. El hecho que para cada α tal que $0 \leq |\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ está en $L_p(\Omega)$, la suma de las L_p normas de todas las derivadas débiles también satisface los axiomas de una norma, nos sugiere de manera natural introducir la siguiente norma

$$(2.21) \quad \|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } u \in W_p^m(\Omega),$$

y seminorma

$$(2.22) \quad |u|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } u \in W_p^m(\Omega),$$

para $p < \infty$, y cuando $p = \infty$ la norma

$$(2.23) \quad \|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)},$$

y seminorma

$$(2.24) \quad |u|_{W_\infty^m(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)},$$

2.5. Espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$

Sea $m \geq 1$ y consideremos el espacio $H^m(\Omega)$ de funciones $u(x)$ sobre Ω definidas por

$$(2.25) \quad H^m(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in L_2(\Omega); \forall \alpha \quad |\alpha| \leq m\}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Podemos definir sobre H^m el producto interno

$$(2.26) \quad (u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx$$

y la norma asociada

$$(2.27) \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

Teorema 2.5.1 (Teorema de la traza.) Sea $\Omega \in \mathcal{L}$. Entonces existe exactamente un operador lineal continuo $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ tal que

$$(2.28) \quad \gamma v = v|_{\partial\Omega} \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

Este teorema dice que existe una constante $C > 0$ tal que

$$(2.29) \quad \|v\|_{H^0(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Así el teorema de la traza nos permite definir el siguiente espacio

$$(2.30) \quad H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Teorema 2.5.2 (Teorema de Rellich.) Sea $\Omega \in \mathcal{L}$. Entonces el mapeo identidad de $H^1(\Omega)$ a $L_2(\Omega)$ es compacto.

Teorema 2.5.3 (Teorema de Green.) Sea $\Omega \in \mathcal{L}$. Entonces para cada $i \in \{1, \dots, d\}$

$$(2.31) \quad \int_{\Omega} w \partial_i v dx + \int_{\Omega} v \partial_i w dx = \int_{\partial\Omega} n_i v w ds \quad \forall v, w \in H^1(\Omega),$$

donde n_i son los componentes del vector unitario normal a la frontera de la superficie $\partial\Omega$ y $\partial_i v = \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Teorema 2.5.4 (Desigualdad generalizada de Poincaré.) Sea $\Omega \in \mathcal{L}$ y $\omega \neq \emptyset$ un conjunto abierto de Ω o bien de $\partial\Omega_0$, donde $\Omega_0 \subset \Omega$, $\Omega_0 \subset \mathcal{L}$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$(2.32) \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|v\|_{H^1(\omega)}^2 + \left| \int_{\omega} v d\omega \right|^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

Demostración. Supongamos que (2.32) no se cumple. Entonces existe una sucesión $\{v_j\} \subset H^1(\Omega)$ tal que

$$(2.33) \quad \|v_j\|_{H^1(\Omega)}^2 > j \left(\|v_j\|_{H^1(\omega)}^2 + \left| \int_{\omega} v_j d\omega \right|^2 \right),$$

y podemos suponer que los v_j son seleccionados tales que

$$(2.34) \quad \|v_j\|_{H^1(\Omega)} = 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

El encaje $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ es compacto por el teorema de Rellich (2.5.2). De aquí, existe un $z \in L_2(\Omega)$ y una subsucesión de $\{v_j\}$, la cual denotaremos por $\{v_{j_k}\}$, tal que

$$(2.35) \quad \|v_{j_k} - z\|_{H^0(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } j_k \rightarrow \infty.$$

de acuerdo con (2.33) y (2.34), tenemos que

$$(2.36) \quad \|v_{j_k}\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad j_k \rightarrow \infty,$$

y así, por (2.35) y (2.36), $\{v_{j_k}\}$ es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$, y otra vez por (2.35),

$$(2.37) \quad \|v_{j_k} - z\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } j_k \rightarrow \infty.$$

de aquí y de (2.36) tenemos $\|z\|_1 = 0$, es decir, z es una función constante c.t.p. en Ω . Usando la desigualdad de Hölder para $p = q = 2$ y (4.18) tenemos

$$(2.38) \quad \left| \int_{\omega} (v_{j_k} - z) \right| \leq \left(\text{meas } \omega \int_{\omega} |v_{j_k} - z|^2 \right)^{1/2} \\ \leq C \|v_{j_k} - z\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } j_k \rightarrow \infty$$

la segunda desigualdad sigue de

$$(2.39) \quad \|v\|_{H^0(\omega)} \leq \|v\|_{H^0(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

si ω es un abierto de Ω , o por (2.29) encontramos que

$$(2.40) \quad \|v\|_{H^0(\omega)} \leq \|v\|_{H^0(\partial\Omega_0)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

si ω es un abierto de $\partial\Omega_0$. Además de (2.33) se sigue que

$$(2.41) \quad \int_{\omega} v_j d\omega \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty$$

así la función constante z es la función cero. Lo que contradice (2.34) y (2.37). \square

Por la desigualdad de Hölder, obtenemos lo siguiente

$$(2.42) \quad \left| \int_{\omega} v d\omega \right|^2 \leq \text{meas } \omega \int_{\omega} |v|^2 d\omega \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

y si las suposiciones del teorema (2.5.4) son satisfechas, por (2.32) tenemos

$$(2.43) \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(|v|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^0(\omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En particular, cuando $\omega \subset \partial\Omega$ se cumple

$$(2.44) \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

que usualmente es llamada desigualdad de *Friedrichs*.

2.6. Formulación Débil

Para introducir el concepto de formulación débil consideremos el siguiente problema

$$(2.45) \quad -\Delta\phi = f \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$(2.46) \quad \phi = 0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$

donde $\Omega \subset \mathcal{L}$, $f \in C(\bar{\Omega})$. Introduzcamos el siguiente espacio

$$(2.47) \quad V = \{v \in H^1 \mid v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

multiplicando (2.45) por una función $v \in V$ arbitraria e integrando sobre Ω , obtenemos

$$(2.48) \quad \int_{\Omega} v(-\Delta\phi) = \int_{\Omega} vf,$$

aplicando el teorema de Green (2.5.3) para $w = \Delta\phi$, obtenemos la siguiente forma equivalente a (2.45),

$$(2.49) \quad \int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi = \int_{\Omega} vf + \int_{\partial\Omega} vn^T \nabla \phi,$$

como v es igual a cero en $\partial\Omega$, tenemos

$$(2.50) \quad \int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi = \int_{\Omega} vf.$$

Ahora podemos definir la siguiente forma bilineal

$$(2.51) \quad a(v, \phi) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi,$$

y el funcional

$$(2.52) \quad F(v) = \int_{\Omega} vf.$$

Para que las integrales esten bien definidas solo necesitamos $f \in L_2(\Omega)$.

La formulación débil consiste en encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(2.53) \quad a(v, u) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega);$$

se puede mostrar que a y F satisfacen las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram.

El Método de Galerkin-MEF para Procesos de Convección-Difusión

Introducción

Existe una gran cantidad de ecuaciones diferenciales parciales que surgen de una ley de balance o conservación, entre las que gobiernan el movimiento de los fluidos podemos citar la ley de conservación de masa y la ley de conservación de energía.

Así, aplicando estos supuestos físicos podemos llegar a la siguiente ecuación

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt}\phi(x,t) + \frac{d}{dx}g(x,t) + Q(x,t) = 0 \quad \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ t \geq 0, \end{array}$$

que es la ecuación fundamental de la ley de conservación.

Las funciones ϕ y g se han supuesto continuamente diferenciables, el término Q es el término fuente, g es el término de flujo y ϕ representa la densidad del agente físico. Estas funciones dependen de x y de t pero su dependencia puede ser a través de la función $\phi(x,t)$ misma.

La función Q es, en general, dada para cada problema en específico. La relación entre ϕ y g depende de las propiedades del medio, son conocidas como *relaciones constitutivas*.

Un modelo donde el flujo g es proporcional a la densidad, esto es,

$$(3.2) \quad g = c\phi$$

c es una constante (es importante notar que c tiene unidades de velocidad) se llama modelo de *convección*.

En este caso la ecuación (3.1) toma la forma

$$(3.3) \quad \frac{d\phi}{dt} + c\frac{d\phi}{dx} = 0,$$

haciendo el término de fuente $Q = 0$, esta ecuación tiene por solución

$$(3.4) \quad \phi(x, t) = F(x, ct),$$

para cualquier función diferenciable F . La gráfica de $F(x, t)$ es la gráfica de $F(x)$ trasladada ct unidades espaciales a la derecha, esto describe lo que intuitivamente conocemos por convección (o arrastre).

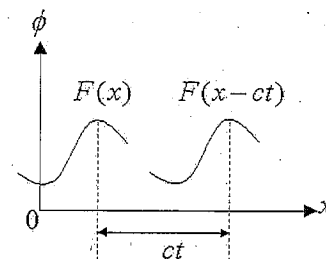


Figura 3.1: soluciones de (3.3) para dos tiempos diferentes.

Otro tipo de problema, el de *difusión*, aparece cuando el sentido del flujo depende de la concentración de partículas. Tal flujo depende de la derivada espacial de ϕ . Suponiendo una relación lineal tomamos

$$(3.5) \quad g = -D\frac{d\phi}{dx},$$

D se llama la constante de difusión.

Cuando ambos procesos aparecen, el flujo está dado por

$$(3.6) \quad g = c\phi - D\frac{d\phi}{dx}$$

y la ecuación (3.1) toma la forma

$$(3.7) \quad \frac{d}{dt}\phi(x, t) + c\frac{d}{dx}\phi(x, t) - D\frac{d^2}{dx^2}\phi(x, t) + Q(x, t) = 0 \quad a \leq x \leq b \\ t \geq 0.$$

Si la ecuación es independiente del tiempo se tiene un proceso estacionario.

3.1. Ecuación de Convección Difusión en Estado Estacionario

En su forma más general, el problema con valores a la frontera que describe este proceso es el siguiente

$$(3.8) \quad -u^T \nabla \phi + \nabla^T D \nabla \phi + Q = 0 \quad \text{en } \Omega \in R^n$$

$$(3.9) \quad \phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\phi$$

$$(3.10) \quad n^T D \nabla \phi + \bar{q}_n = 0 \quad \text{en } \Gamma_q$$

donde $\Omega \in \mathcal{L}$, n es un vector unitario normal a la frontera $\partial\Omega$, $D = (d_{ij}) \in (C^1(\bar{\Omega}))^{n \times n}$ es una matriz simétrica uniformemente positiva definida, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

$$(3.11) \quad \varepsilon^T D(x) \varepsilon \geq C \|\varepsilon\|^2 \quad \forall \varepsilon \in R^n \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

$u = u_i, i = 1, \dots, n$, es el vector velocidad, $Q \in C(\bar{\Omega})$, $\bar{\phi} \in C^2(\bar{\Omega})$, $\bar{q}_n \in C(\bar{\Gamma}_q)$, y Γ_ϕ, Γ_q son conjuntos relativamente abiertos con respecto a la topología sobre $\partial\Omega$,

$$(3.12) \quad \bar{\Gamma}_\phi \cup \bar{\Gamma}_q = \partial\Omega$$

y

$$(3.13) \quad \text{meas}_{n-1}(\bar{\Gamma}_\phi \cap \bar{\Gamma}_q) = 0$$

(es decir, Γ_ϕ y Γ_q son ajenos).

Las condiciones (3.9) y (3.10) se llaman condiciones de frontera de *Dirichlet* y *Neumann* respectivamente. La función $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$ se llama una solución clásica del problema. En procesos físicos ϕ puede representar, por ejemplo, una temperatura en algún proceso térmico, una concentración en algún proceso de contaminación, etc., ∇ es el gradiente.

La matriz D describe las propiedades físicas del medio Ω . Si D es independiente de $x \in \Omega$ llamamos al medio *homogéneo* (no homogéneo en caso contrario). Si $d(x)_{ii} = d(x)_{11}$ para $i = 2, \dots, n$, y $d(x)_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, decimos que el medio es *isotrópico* (anisotrópico en caso contrario).

3.2. Formulación Débil

En problemas prácticos los coeficientes $d(x)_{ij}$ son a menudo discontinuos, así, no pueden ser empleados en (3.8). Con el propósito de utilizar un tipo más general de funciones introducimos la formulación débil o variacional del problema (3.8)-(3.10), lo que nos permite tomar en cuenta funciones no necesariamente continuas $d_{ij}, u_i, \bar{q}_n, Q$ o $\bar{\phi}$.

Consideremos nuevamente (3.8)

$$(3.14) \quad -u^T \nabla \phi + \nabla^T D \nabla \phi + Q = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \in R^n,$$

introducamos el siguiente espacio de funciones, a las que llamaremos funciones de prueba,

$$(3.15) \quad V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ en } \Gamma_\phi\},$$

multiplicando (3.8) por una función de prueba arbitraria $v \in V$, e integrando sobre Ω , obtenemos

$$(3.16) \quad \int_{\Omega} v(-u^T \nabla \phi) + \int_{\Omega} v \nabla^T D \nabla \phi + \int_{\Omega} v Q = 0,$$

aplicando ahora el teorema de Green (2.5.3), llegamos a la siguiente forma equivalente de (3.16),

$$(3.17) \quad \int_{\Omega} v(u^T \nabla \phi) + \int_{\Omega} (\nabla v)^T D \nabla \phi = \int_{\Omega} v Q + \int_{\partial\Omega} v n^T D \nabla \phi,$$

como $v = 0$ sobre Γ_ϕ , y por (3.10), encontramos

$$(3.18) \quad \int_{\Omega} v(u^T \nabla \phi) + \int_{\Omega} (\nabla v)^T D \nabla \phi = \int_{\Omega} v Q + \int_{\Gamma_q} v \bar{q}_n.$$

Definamos la siguiente forma bilineal

$$(3.19) \quad a(v, \phi) = \int_{\Omega} v(u^T \nabla \phi) + \int_{\Omega} (\nabla v)^T D \nabla \phi \quad v, w \in H^1(\Omega),$$

y el funcional

$$(3.20) \quad F(v) = \int_{\Omega} v Q + \int_{\Gamma_q} v \bar{q}_n \quad v \in V.$$

Para que las integrales esten bien definidas es suficiente considerar $d_{ij}, u_i \in L_\infty, \bar{q}_n \in L_2(\partial\Omega), Q \in L_2(\Omega)$ y $\bar{\phi} \in H^1(\Omega)$.

Definición 3.2.1 Sea $\Omega \in \mathcal{L}$ y $\Gamma_\phi \neq \emptyset$. Una función $\phi \in H^1(\Omega)$ se llama solución débil al problema (3.8)-(3.10) si

$$(3.21) \quad \phi - \bar{\phi} \in V$$

y

$$(3.22) \quad a(v, \phi) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

Teorema 3.2.2 Sea $\Omega \in \mathcal{L}$, $\Gamma_\phi \neq \emptyset$ y u tal que

$$(3.23) \quad n \cdot u(x) \geq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \text{y} \quad \nabla \cdot u(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

entonces existe solamente una solución débil del problema (3.21)-(3.22).

Demostración. Para aplicar la teoría desarrollada en el Capítulo 1 es necesario mostrar que la forma bilineal

$$(3.24) \quad a(v, \phi) = \int_{\Omega} v(u^T \nabla \phi) + \int_{\Omega} (\nabla v)^T D \nabla \phi,$$

es coerciva y continua.

Sea

$$(3.25) \quad \phi^0 = \phi - \bar{\phi},$$

entonces el problema (3.16)-(3.18) puede formularse de la siguiente manera: encontrar $\phi^0 \in V$ tal que

$$(3.26) \quad a(v, \phi^0) = F(v) - a(v, \bar{\phi}) \quad \forall v \in V.$$

Tomando $\omega = \Gamma_\phi$ en la desigualdad de *Friedrichs* (2.44) podemos ver que

$$(3.27) \quad \int_{\Omega} (\nabla v)^T D \nabla v \geq C \int_{\Omega} (\nabla v)^T \nabla v = C |v|_{H^1(\Omega)}^2 \geq C' \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in V.$$

Por otra parte

$$(3.28) \quad \int_{\Omega} v(u^T \nabla v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^T \nabla v^2),$$

utilizando el teorema de Green para $w = v^2$ obtenemos

$$(3.29) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^T \nabla v^2) = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial\Omega} v^2 n \cdot u - \int_{\Omega} v^2 (\nabla \cdot u) \right) \quad \forall v \in V,$$

de (3.23) tenemos que

$$(3.30) \quad \int_{\Omega} (u^T \nabla v^2) + \int_{\Omega} (\nabla v)^T D \nabla v \geq \int_{\Omega} (\nabla v)^T D \nabla v \geq C' \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V,$$

lo que muestra la coercividad de la forma.

Por la desigualdad del triángulo,

$$(3.31) \quad \left| \int_{\Omega} v(u^T \nabla \phi) + \int_{\Omega} (\nabla v)^T D \nabla \phi \right| \leq \left| \int_{\Omega} v(u^T \nabla \phi) \right| + \left| \int_{\Omega} (\nabla v)^T D \nabla \phi \right|$$

por medio de la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* obtenemos

$$(3.32) \quad \left| \int_{\Omega} v(u^T \nabla \phi) + \int_{\Omega} (\nabla v)^T D \nabla \phi \right| \leq \left(\int_{\Omega} v^2 \right)^{1/2} \|u\|_{(L^\infty(\Omega))^n} \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \|D\|_{(L^\infty(\Omega))^{n \times n}} \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \right)^{1/2} \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v, w \in V.$$

donde $C_2 = \|u\|_{(L^\infty(\Omega))^n} + \|D\|_{(L^\infty(\Omega))^{n \times n}}$.

Como el mapeo $v \mapsto F(v) - a(v, \bar{\phi})$ es un funcional continuo, la existencia de un único $\phi^0 \in V$ que satisface (3.26) sigue del teorema de *Lax-Milgram*. \square

3.3. Implementación del Método de Elemento Finito

En general la solución analítica de (3.8)-(3.10) no es conocida, por lo que se recurre a métodos de aproximación. Uno de los procedimientos más utilizado es el método de elemento finito, el cual está basado en la formulación débil, así que para introducir la idea principal de este esquema consideremos (3.26)

$$(3.33) \quad a(v, \phi^0) = F(v) - a(v, \bar{\phi}) \quad \forall v \in V.$$

Sea $V_h \subset V$ un subespacio de dimensión N . Como V_h es cerrado en V , también es un espacio de Hilbert, se considera el problema (3.26) restringiéndolo a V_h .

Encontrar $\phi_h^0 \in V_h$ tal que

$$(3.34) \quad a(v_h, \phi_h^0)_h = F(v_h) - a(v_h, \bar{\phi})_h \quad \forall v_h \in V_h,$$

La existencia de una única ϕ_h^0 que satisface (3.34) sigue del teorema de Lax-Millgram.

Tomemos $v_h^1, \dots, v_h^N \in V_h$ ($\dim V_h = N$) una base, y expresemos a ϕ^0 como combinación lineal de esta,

$$(3.35) \quad \phi_h^0 = \sum_{j=1}^N c_j v_h^j,$$

sustituyendo (3.35) en (3.34) obtenemos,

$$(3.36) \quad \int_{\Omega} v_h^i (u^T \nabla \sum_{j=1}^N c_j v_h^j) + \int_{\Omega} (\nabla v_h^i)^T D \nabla \sum_{j=1}^N c_j v_h^j = F(v_h^i) - a(v_h^i, \bar{\phi})_h, \quad i = 1, \dots, N,$$

por la linealidad de la integral

$$(3.37) \quad \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} v_h^i (u^T \nabla v_h^j) + \int_{\Omega} (\nabla v_h^i)^T D \nabla v_h^j \right) c_j = F(v_h^i) - a(v_h^i, \bar{\phi})_h, \quad i = 1, \dots, N,$$

o en forma matricial

$$(3.38) \quad \begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \dots & M_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(v_h^1) - a(v_h^1, \bar{\phi})_h \\ \vdots \\ F(v_h^n) - a(v_h^n, \bar{\phi})_h \end{pmatrix}$$

donde $M_{i,j} = \int_{\Omega} v_h^i (u^T \nabla v_h^j) + \int_{\Omega} (\nabla v_h^i)^T D \nabla v_h^j$.

Cuando V_h consta de polinomios continuos a trozos con soporte compacto, al método de aproximación suele referirse como *Método de Elemento Finito de Galerkin* o *Galerkin-MEF*.

3.3.1. Problema Unidimensional

Consideremos la ecuación unidimensional de convección-difusión,

$$(3.39) \quad -u \frac{d\phi}{dx} + k \frac{d^2\phi}{dx^2} + Q(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$(3.40) \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 1.$$

Supongamos que el intervalo $[0, 1]$ está dividido en J elementos de la siguiente forma,

$$(3.41) \quad 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{J-1} < x_J = 1.$$

A cada nodo x_j y x_{j-1} pertenecientes al j -ésimo elemento asociamos las siguientes funciones,

$$(3.42) \quad N_1^{(j)}(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}}, \quad N_2^{(j)}(x) = \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, \quad x \in [x_{j-1}, x_j],$$

ahora definimos la función,

$$(3.43) \quad \psi_j(x) = \begin{cases} N_2^{(j)}(x) & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ N_1^{(j+1)}(x) & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el extremo izquierdo del intervalo $\psi_0(x) = N_1^{(1)}(x)$ sobre $[0, x_1]$ y en el extremo derecho $\psi_J(x) = N_2^{(J)}(x)$ sobre $[x_{J-1}, 1]$. Podemos definir a V_h como

$$(3.44) \quad V_h = \left\{ v(x) = \sum_{j=0}^J \alpha_j \psi_j(x) \mid \alpha_j \in \mathfrak{R} \right\}.$$

Haciendo uso de este espacio introducimos la forma débil de (3.39),

$$(3.45) \quad k \left(\frac{dv}{dx}, \frac{d\phi_h}{dx} \right) + (v, u \cdot \frac{d\phi_h}{dx}) = (v, Q_h) \quad \forall v \in V_h,$$

donde (\cdot, \cdot) representa el producto interno en L_2 , ϕ_h y Q_h son las proyecciones ortogonales sobre V_h de ϕ y Q respectivamente. Para una malla uniforme con una longitud h por elemento y tomando dos elementos adyacentes, tenemos

$$(3.46) \quad (1 - \gamma) \phi_{i+1} - 2\phi_i + (1 + \gamma) \phi_{i-1} = (h^2/k) Q_h(x_j)$$

$\gamma = uh/(2k)$ es nuevamente el número de Péclet.

3.3.2. Convección Dominante

Analizamos algunos problemas numéricos que surgen al utilizar elemento finito cuando se presenta convección dominante, esto es, cuando el número de Péclet γ es mayor que uno. Para esto, consideremos primeramente el problema homogéneo,

$$(3.47) \quad -u \frac{d\phi}{dx} + k \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$(3.48) \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 1.$$

Esta ecuación tiene como solución

$$(3.49) \quad \phi(x) = \frac{e^{\frac{u}{k}x} - 1}{e^{\frac{u}{k}} - 1},$$

usando elementos lineales en la discretización de Galerkin llegamos a la siguiente ecuación

$$(3.50) \quad (1 - \gamma) \phi_{i+1} - 2\phi_i + (1 + \gamma) \phi_{i-1} = 0$$

observemos que

$$(3.51) \quad \phi_i = \frac{e^{\frac{u}{k}x_i} - 1}{e^{\frac{u}{k}} - 1} = \frac{e^{i\frac{u}{k}h} - 1}{e^{\frac{u}{k}} - 1} = \frac{e^{2i\gamma} - 1}{e^{\frac{u}{k}} - 1}$$

sustituyendo en (3.50),

$$(3.52) \quad (1 - \gamma) e^{2\gamma} - 2 + (1 + \gamma) e^{-2\gamma} = 0$$

o

$$(3.53) \quad (1 - \gamma) e^{4\gamma} - 2e^{2\gamma} + (1 + \gamma) = 0$$

tomando $\lambda = e^{2\gamma}$ la ecuación anterior podemos escribirla de la siguiente forma

$$(3.54) \quad (1 - \gamma) \lambda^2 - 2\lambda + (1 + \gamma) = 0$$

cuyas raíces son

$$(3.55) \quad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_+ = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma},$$

así, la solución por medio de elemento finito puede ser expresada de la siguiente manera

$$(3.56) \quad \phi_i = \frac{\lambda_+^i - 1}{\lambda_+ - 1}$$

ahora es claro que la solución es oscilatoria cuando $\gamma > 1$ debido a que λ_+ se hace negativo para valores de i impares y positivo para valores pares.

Tomemos ahora un término fuente Q diferente de cero. La solución a (3.39), para cualquier función Q es

$$(3.57) \quad \phi(x) = \int_0^1 G(x, t) Q(t) dt$$

donde $G(x, t)$ es la función de Green, que es construida a partir de la solución de la ecuación homogénea,

$$(3.58) \quad G(x, t) = \begin{cases} \frac{(e^{ux/k} - 1)(e^{u(1-t)/k} - 1)}{u(e^{u/k} - 1)} & \text{para } x \leq t \\ \frac{(e^{ut/k} - 1)(e^{u(1-t)/k} - e^{u(x-t)/k})}{u(e^{u/k} - 1)} & \text{para } x \geq t. \end{cases}$$

de la misma manera, la solución discreta ϕ_i podemos escribirla como sigue

$$(3.59) \quad \phi_i = \sum_{i=1}^{J-1} hG_{i,k}Q_i$$

y $G(x, t)$ es la función

$$(3.60) \quad G_{i,k} = \begin{cases} \frac{(\lambda_+^i - 1)(\lambda_+^{J-k} - 1)}{u(\lambda_+^J - 1)} & \text{para } i \leq k \\ \frac{(\lambda_+^k - 1)(\lambda_+^{J-k} - \lambda_+^{i-k})}{u(\lambda_+^J - 1)} & \text{para } i \geq k. \end{cases}$$

Así la aproximación que se hace a $e^{2\gamma}$ afecta cualquier solución de (3.39).

Los siguientes ejemplos fueron resueltos sobre una división uniforme del dominio y ocupando elementos lineales.

En el primer ejemplo se resuelve la ecuación

$$(3.61) \quad -u \frac{d\phi}{dx} + k \frac{d^2\phi}{dx^2} + \text{sen}(\pi x) = 0$$

$$(3.62) \quad \phi_0 = 0 \quad \phi_1 = 0,$$

para $u = 1$, $k = 0,01$, y $l = 1$. El intervalo $[0, 1]$ fué discretizado en 20 elementos de igual longitud. Con estas dimensiones el número de Péclet fué de 2.5, y como se puede ver en las gráficas, se presentan oscilaciones cerca de los lugares donde el gradiente es más alto, como se esperaba, al ser $\gamma > 1$. También se presenta la solución analítica, la cual no presenta este tipo de

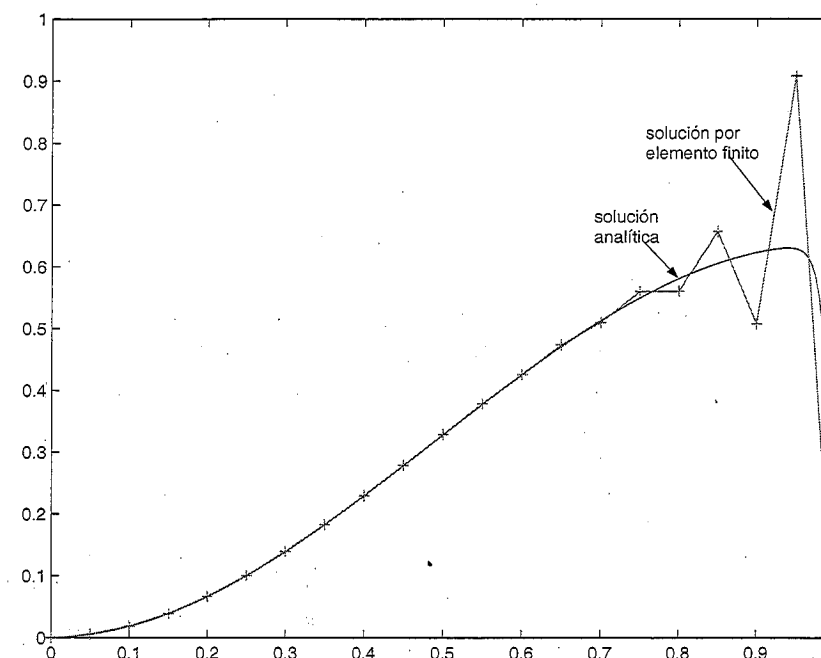


Figura 3.2: Solución para un término de fuente $Q(x) = \sin(\pi x)$ y número de Péclet de 2.5.

oscilaciones, y puede verse claramente que coincide con la solución numérica en los lugares más suaves.

Para el segundo ejemplo

$$(3.63) \quad -u \frac{d\phi}{dx} + k \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

con $u = 1$, $k = 0,005$, $l = 1$, $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$, el intervalo $[0, 1]$ también fué discretizado en 20 elementos de igual longitud y el número de Péclet fué de 5. Nuevamente se presentan oscilaciones cerca de los lugares de mayor pendiente, y coincide con la solución analítica en los lugares suaves. Este tipo de oscilaciones son típicas de problemas con convección dominante.

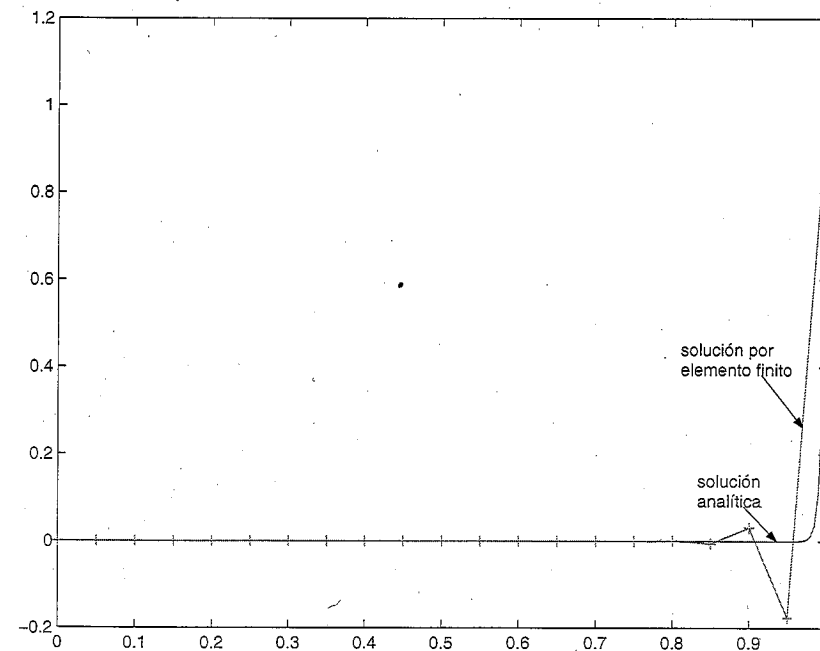


Figura 3.3: Solución para un término de fuente $Q(x) = 0$ y número de Péclet de 5.

Cálculo de Incrementos Finitos

Introducción

Existen muchas estrategias para resolver la ecuación lineal de convección difusión

$$(4.1) \quad -u^T \nabla \phi + \nabla D \nabla \phi + Q = 0 \quad \text{en } \Omega \subset R^n$$

$$(4.2) \quad \phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

donde u es el campo de velocidades y D la matriz con los coeficientes de difusión.

Como se señaló en el capítulo anterior, un valor que tiene un efecto muy importante sobre la calidad de la solución discreta es el número de Péclet

$$(4.3) \quad \gamma = \frac{h|u|}{2k},$$

donde h es una medida del elemento, $k = (k_x + k_y)/2$ (ver [3]) y $|u|$ la magnitud del campo convectivo dentro de cada elemento. En particular si el número de Péclet γ es mayor que uno, la solución discreta obtenida por el método de Galerkin puede exhibir oscilaciones.

Existen en la literatura varios métodos para corregir el carácter oscilatorio de la solución obtenida por Galerkin-MEF. Llamaremos a estos procedimientos *de estabilización*.

Un método consiste en reemplazar la forma (3.18) por

$$(4.4) \quad (\nabla v, D\nabla\phi_h) + (v, u \cdot \nabla\phi_h) + \sum \frac{\alpha^{(e)}}{2} h(u\nabla v, u \cdot \nabla\phi_h) = \\ (v, Q_h) + \sum \frac{\alpha^{(e)}}{2} h(u \cdot \nabla v, Q_h) \quad \forall v \in V_h,$$

las sumas son tomadas sobre todos los elementos de la discretización y $\alpha^{(e)}$ es un parámetro por determinar, así la forma (4.4) tiene una coercividad adicional en el sentido del flujo, lo que brinda estabilidad a la solución discreta.

El cálculo del parámetro α se ha hecho solamente para problemas unidimensionales y extendido de manera heurística a problemas más complejos en dos o tres dimensiones, pero una estimación precisa de dicho parámetro aún sigue pendiente.

En este capítulo se mostrará cómo el término de balance que añaden los diferentes métodos de estabilización surge manera natural al equilibrar el flujo sobre un cierto dominio, además se propone un método iterativo para la estimación del parámetro.

Notese que haciendo $\alpha = 0$ dentro de cada elemento llegamos a la forma del planteamiento de Galerkin, esto es usual cuando en un elemento el número de Péclet es menor que uno.

4.1. Métodos de Estabilización

Existen formas para obtener soluciones estables de la ecuación de convección difusión que son ampliamente usadas en la práctica, todas sujetas a procedimientos completamente heurísticos planteados sobre problemas en una dimensión y extendidos después a problemas en dos o tres dimensiones, los cuales consisten en añadir difusión al problema. A continuación hablaremos sobre las principales características de algunos procedimientos y de como surge la idea de considerar un término extra de difusión.

4.1.1. Difusión artificial

Es bien conocido que al utilizar diferencias finitas centrales en la resolución de ecuaciones diferenciales obtenemos las mismas soluciones que al utilizar elemento finito con funciones de prueba lineales.

Por lo tanto cuando el número de Péclet γ es mayor que uno se presentan los mismos problemas de inestabilidad. La solución puede ser mejorada a través de un refinamiento de la malla, dividiendo el dominio en elementos de menor longitud hasta lograr reducir el número de Péclet a un valor menor que uno.

Lógicamente esto trae como consecuencia un aumento en las dimensiones de los sistemas de ecuaciones lineales que tienen que resolverse, incrementando así el costo computacional, lo que lo hace poco factible.

La figura (4.1.1) muestra la solución por diferencias finitas centrales para una división del dominio de 40 elementos (izquierda) con un número de Péclet $\gamma = 0,5$ y para 10 elementos (derecha) con un número de Péclet $\gamma = 2$.

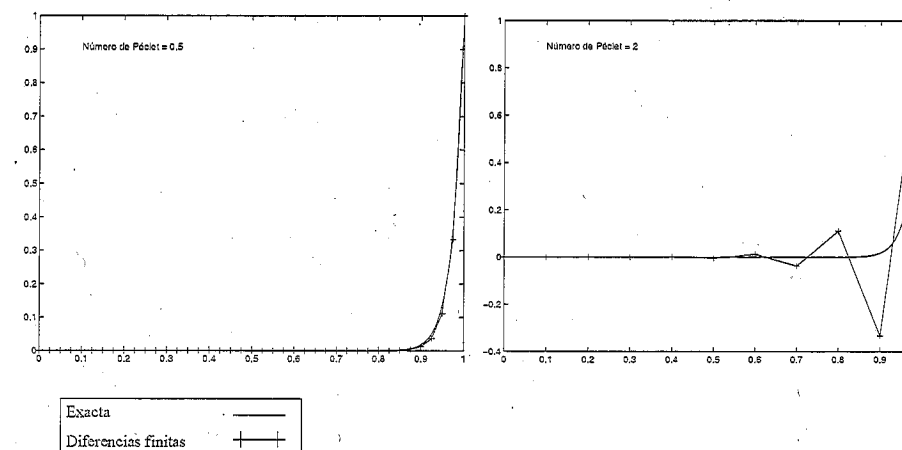


Figura 4.1: Problema unidimensional de convección difusión resuelto con diferencias finitas centrales.

Una forma de mejorar la calidad de la solución es aproximar la derivada de primer orden por un tipo de diferencias finitas *hacia atrás*, es decir,

$$(4.5) \quad \frac{d\phi_i}{dx} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{l},$$

donde l es la longitud del elemento.

Una de las dificultades que se encuentran al usar diferencias finitas hacia atrás es que las soluciones presentan un carácter sobredifusivo, por lo que dicha ecuación carece de exactitud.

La figura (4.1.1) muestra la solución para el problema y dominios mencionados anteriormente, y aunque no se presentan oscilaciones, incluso para números de Péclet $\gamma > 1$, las soluciones obtenidas presentan un carácter sobredifusivo.

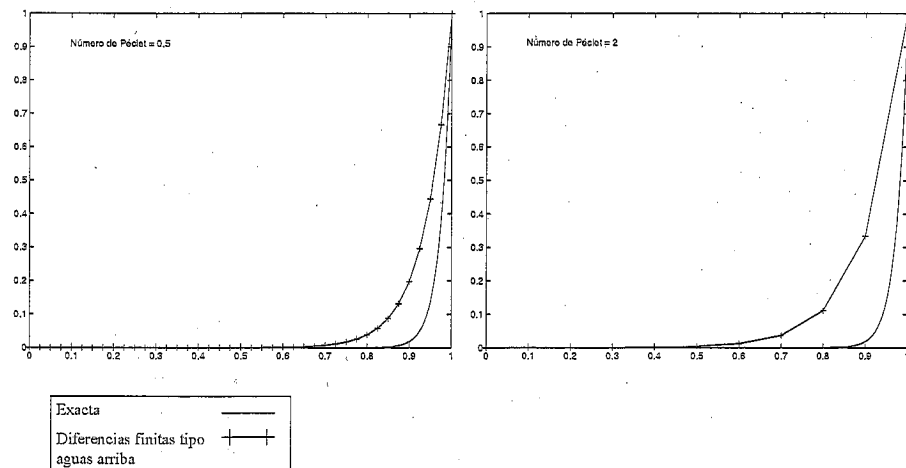


Figura 4.2: Problema unidimensional de convección difusión resuelto con diferencias finitas hacia atrás.

Así, uno de los primeros intentos hechos para obtener soluciones estables consistió en agregar un término de difusión a la ecuación diferencial, lo que puede lograrse aproximando la derivada de primer orden como sigue,

$$(4.6) \quad \frac{d\phi_i}{dx} = \alpha \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{l} + (1 - \alpha) \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2l},$$

α es un valor entre cero y uno. Sustituyendo en la ecuación diferencial y después de hacer algunas simplificaciones obtenemos,

$$(4.7) \quad -u \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{l} \alpha + \left(k + \alpha \frac{ul}{2} \right) \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{l^2} = Q,$$

lo que es equivalente a resolver la ecuación

$$(4.8) \quad -u \frac{d\phi}{dx} + \left(k + \alpha \frac{ul}{2} \right) \frac{d^2\phi}{dx^2} = Q,$$

de donde se ve claramente que $\alpha \frac{ul}{2}$ es el término extra de difusión.

La forma débil asociada a (4.8) es

$$(4.9) \quad \int_{\Omega} v_h^i u \frac{d\phi}{dx} + \int_{\Omega} k \frac{dv_h^i}{dx} \frac{d\phi}{dx} + \int_{\Omega} \alpha \frac{ul}{2} \frac{dv_h^i}{dx} \frac{d\phi}{dx} = \int_{\Omega} v_h^i Q + \int_{\partial\Omega} v_h^i \bar{q}_n \quad v_h^i \in V_h.$$

Con este procedimiento se obtienen soluciones nodalmente exactas como lo muestra la figura (4.3).

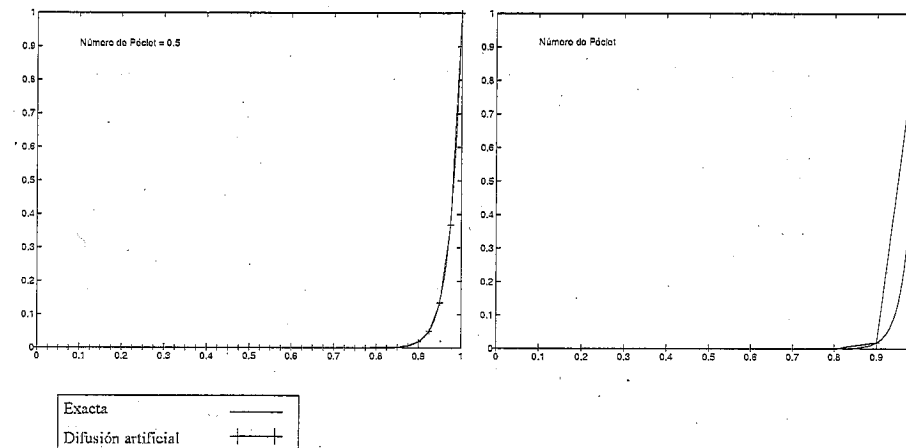


Figura 4.3: Problema unidimensional de convección difusión resuelto con difusión artificial

4.1.2. Petrov-Galerkin

De los procedimientos más ampliamente usados en la práctica son los esquemas de Petrov-Galerkin, donde las dificultades presentadas por el método estándar de Galerkin son sobrellevadas usando funciones de peso diferentes a las funciones de la base, por ejemplo

$$(4.10) \quad w_i = v_h^i + \alpha F_i,$$

cuyo objetivo principal es adicionar al problema un término difusivo, esto puede lograrse tomando a F_i como

$$(4.11) \quad \frac{l}{2} \frac{dv_h^i}{dx},$$

así que dicha función toma la forma

$$(4.12) \quad w_i = v_h^i + \alpha \frac{l}{2} \frac{dv_h^i}{dx},$$

donde el parámetro α es el mismo que en difusión artificial.

Usando ahora estas funciones de peso tenemos

$$(4.13) \quad \int_{\Omega} \left(v_h^i + \alpha \frac{l}{2} \frac{dv_h^i}{dx} \right) \left(-u \frac{d\phi}{dx} + k \frac{d^2\phi}{dx^2} + Q \right) = 0,$$

o

$$(4.14) \quad \int_{\Omega} v_h^i u \frac{d\phi}{dx} + \int_{\Omega} k \frac{dv_h^i}{dx} \frac{d\phi}{dx} + \int_{\Omega} \alpha \frac{ul}{2} \frac{dv_h^i}{dx} \frac{d\phi}{dx} - \int_{\Omega} \alpha \frac{kl}{2} \frac{dv_h^i}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \int_{\Omega} v_h^i Q + \int_{\Omega} \alpha \frac{l}{2} \frac{dv_h^i}{dx} Q + \int_{\partial\Omega} v_h^i \bar{q}_n \quad v_h^i \in V_h$$

4.1.3. Cálculo del parámetro α

La forma en que se calcula el parámetro α es la siguiente.

Tomemos (4.8),

$$(4.15) \quad -u \frac{d\phi}{dx} + \left(k + \alpha \frac{ul}{2} \right) \frac{d^2\phi}{dx^2} = Q;$$

como α tiene que satisfacer (4.8), en particular cuando $Q=0$, tenemos

$$(4.16) \quad \alpha = \frac{u \frac{d\phi}{dx} - k \frac{d^2\phi}{dx^2}}{\frac{ul}{2}} = \frac{2 \frac{d\phi}{dx}}{\frac{d^2\phi}{dx^2}} - \frac{1}{\gamma}$$

Aproximando las derivadas por medio de diferencias finitas centrales vemos que

$$(4.17) \quad \alpha = \frac{2 \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2l}}{\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{l^2}} - \frac{1}{\gamma}$$

$$(4.18) \quad = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}} - \frac{1}{\gamma}$$

la sustitución de la solución exacta en (4.18) nos da

$$(4.19) \quad \alpha = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{e^{\gamma} - e^{-\gamma}} - \frac{1}{\gamma} = \coth \gamma - \frac{1}{\gamma}$$

4.2. Extensión a Problemas Bidimensionales

La solución por medio de Galerkin-FEM a problemas bidimensionales conduce a los mismos problemas de inestabilidad que presentan los problemas unidimensionales, de esta manera los procedimientos de estabilización mencionados son extendidos directamente a dos o tres dimensiones de la siguiente manera.

Difusión artificial.- En este caso tenemos

$$(4.20) \quad -u^T \nabla \phi + \nabla^T (D + D^*) \nabla \phi + Q = 0 \quad \text{en } \Omega \in R^n$$

aquí $D^* = \frac{\alpha l^{(e)}}{2|u|} uu^T$ es la matriz de difusión adicional, α el parámetro de estabilización y $l^{(e)}$ es la longitud característica del elemento, típicamente se toma como $l^{(e)} = (\Omega^e)^{1/d}$, con $d = 1, 2, 3$ para problemas en 1, 2 o 3 dimensiones respectivamente, el número de Péclet $\gamma = \frac{|u|l^{(e)}}{2k}$ con $k = \frac{k_x + k_y}{2}$.

Petrov-Galerkin.- Ahora se toman como funciones de peso las siguientes

$$(4.21) \quad w_i = v_h^i + \frac{\alpha l^{(e)}}{2|u|} u^T \nabla v_h^i$$

y así obtenemos

$$(4.22) \quad \int_{\Omega} \left(v_h^i + \frac{\alpha l^{(e)}}{2|u|} u^T \nabla v_h^i \right) (-u^T \nabla \phi + \nabla^T(D) \nabla \phi + Q) = 0$$

o en forma equivalente

$$(4.23) \quad \int_{\Omega} v_h^i u^T \nabla \phi + \int_{\Omega} \nabla v_h^i (D \nabla \phi) + \int_{\Omega} \frac{\alpha l^{(e)}}{2|u|} u^T \nabla v_h^i (u^T \nabla \phi) - \int_{\Omega} \frac{\alpha l^{(e)}}{2|u|} u^T \nabla v_h^i (\nabla^T D \nabla \phi) = \int_{\Omega} \frac{\alpha l^{(e)}}{2|u|} u^T (\nabla v_h^i) Q + \int_{\Omega} v_h^i Q + \int_{\Gamma_q} v_h^i \bar{q}_n \quad v_h^i \in V_h.$$

donde α y $l^{(e)}$ se calculan como en difusión artificial.

4.3. Cálculo de Incrementos Finitos

4.3.1. Equilibrio de la ecuación de flujo

Vamos a considerar, por simplicidad, el problema unidimensional de convección-difusión, ver figura(4.3.1) inciso a).

Supongamos una distribución lineal de Q sobre el intervalo infinitesimal $[A, B]$, el balance del flujo entre los extremos A y B pueden ser escrito, tomando $A = x - h$ y $B = x$, de la siguiente manera

$$(4.24) \quad q(x) + [u\phi](x) - q(x-h) - [u\phi](x-h) - \frac{1}{2}[Q(x) + Q(x-h)]h = 0$$

Aproximemos el término difusivo q y el término convectivo $u\phi$ por medio de un polinomio de Taylor en el punto B , es decir,

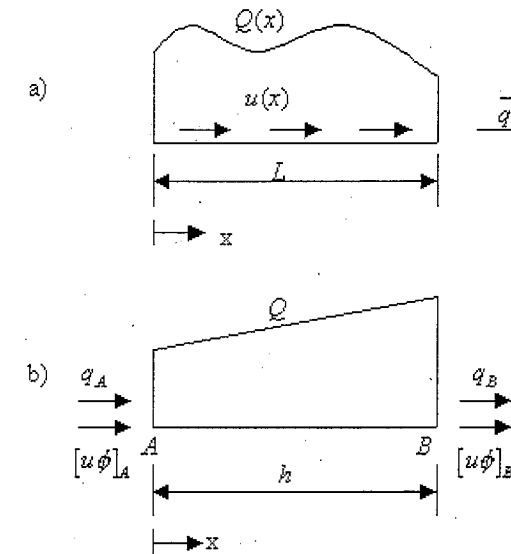


Figura 4.4: Problema unidimensional de convección difusión

$$(4.25) \quad [u\phi](x-h) = [u\phi](x) - h \frac{d}{dx}[u\phi](x) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2}[u\phi](x) - O(h)^3$$

$$(4.26) \quad q(x-h) = q(x) - h \frac{d}{dx}q(x) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2}q(x) - O(h)^3$$

$$(4.27) \quad Q(x-h) = Q(x) - h \frac{d}{dx}Q(x) + O(h)^2$$

sustituyendo estas ecuaciones, haciendo uso de la ley de Fourier $q = -k \frac{d\phi}{dx}$, descartando los términos de orden $O(h^3)$ obtenemos lo siguiente

$$(4.28) \quad -u \frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + Q - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left[-u \frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + Q \right] = 0 \quad 0 < x < L$$

4.3.2. Condiciones de frontera de Neumann

Las condiciones de frontera de Dirichlet para la ecuación (4.28) son las condiciones estandar dadas por (3.9). A continuación obtenemos las condiciones de frontera de Neumann.

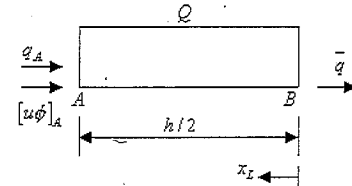


Figura 4.5: Dominio de balance para determinar las condiciones de Neuman

La longitud del segmento de equilibrio se toma ahora como la mitad de la longitud característica h . La ecuación de equilibrio entre los puntos A y B , suponiendo una distribución constante para el término fuente Q sobre $[A, B]$ y tomando $A = x - h/2$ y $B = x$, es la siguiente

$$(4.29) \quad \bar{q} - q(x - \frac{h}{2}) - [u\phi](x - \frac{h}{2}) - \frac{h}{2}Q = 0$$

donde \bar{q} es el flujo total prescrito en $x = L$. Usando un polinomio de Taylor de segundo orden para aproximar los flujos advectivo y difusivo en el punto A obtenemos

$$(4.30) \quad -u\phi + k\frac{d\phi}{dx} + \bar{q} - \frac{h}{2} \left(-u\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k\frac{d\phi}{dx} \right) + Q \right) = 0 \quad \text{en} \quad x = L.$$

Cuando solo es prescrito flujo difusivo (4.30) toma la forma

$$(4.31) \quad k\frac{d\phi}{dx} + \bar{q} - \frac{h}{2} \left(-u\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k\frac{d\phi}{dx} \right) + Q \right) = 0 \quad \text{en} \quad x = L.$$

El problema con valores a la frontera a resolver es (4.28), (3.9) y (4.31), siendo h un parámetro por determinar.

4.3.3. Conservación del flujo

Supongamos que conocemos el flujo \bar{q}_0 y \bar{q}_L en $x = 0$ y $x = L$ respectivamente, entonces $\Gamma_\phi = \emptyset$ y $V = H^1(\Omega)$. Tomando una función arbitraria $v \in V$ hacemos lo siguiente

$$(4.32) \quad \int_0^L v \left(-u\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k\frac{d\phi}{dx} \right) + Q - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left(-u\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k\frac{d\phi}{dx} \right) + Q \right) \right) dx = 0 \quad \forall v \in V,$$

integrando por partes, y agrupando adecuadamente

$$(4.33) \quad v \left[-u\phi + k\frac{d\phi}{dx} - \frac{h}{2} \left(-u\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k\frac{d\phi}{dx} \right) \right) \right]_0^L - \int_0^L \frac{dv}{dx} \left(-u\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k\frac{d\phi}{dx} \right) + Q \right) + \int_0^L vQ = 0 \quad \forall v \in V,$$

como la función constante $v = 1 \in V$, y usando (4.30)

$$(4.34) \quad \bar{q}_L - \bar{q}_0 + \int_0^L Q = 0,$$

lo que confirma las propiedades de conservación.

4.4. Formulación Bidimensional

Si consideramos ahora un dominio rectangular de dimensiones h_x y h_y en las direcciones de x e y respectivamente, los conceptos desarrollados en la sección anterior pueden ser extendidos a dos o tres dimensiones. Los flujos convectivo y difusivo se suponen que varían linealmente a lo largo de los lados del rectángulo (4.6).

Así, después de establecer el balance del flujo, de la misma manera como se hizo en el caso unidimensional, llegamos a las siguientes ecuaciones,

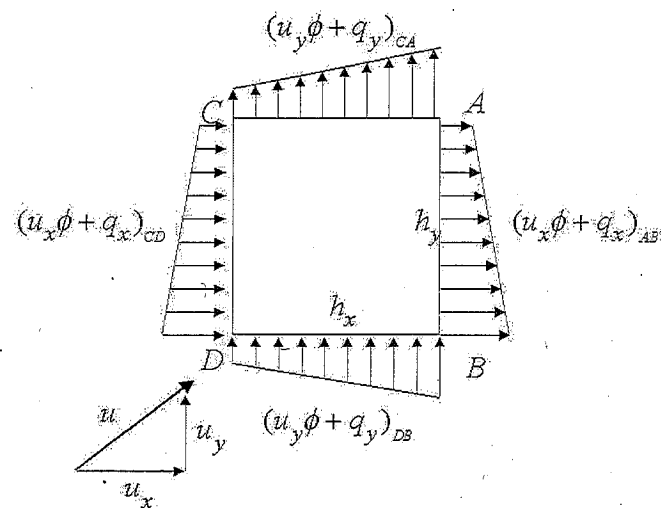


Figura 4.6: Dominio de análisis

$$(4.35) \quad r - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla r = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$(4.36) \quad \phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_p$$

$$(4.37) \quad \mathbf{n}^T D \nabla \phi + \bar{q}_n - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{n} r = 0 \quad \text{en } \Gamma_q$$

con el vector característico \mathbf{h} definido como

$$(4.38) \quad \mathbf{h} = [h_x, h_y]^T$$

\mathbf{n} es el vector normal a $\partial\Omega$ y

$$(4.39) \quad r = -u^T \nabla \phi + \nabla^T D \nabla \phi + Q$$

4.5. Formulación Débil

Consideremos el siguiente problema

$$(4.40) \quad -u^T \nabla \phi + \nabla^T D \nabla \phi + Q - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla (-u^T \nabla \phi + \nabla^T D \nabla \phi + Q) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Nuevamente hacemos uso del espacio de prueba,

$$(4.41) \quad V = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \quad \text{en } \Gamma_\phi\},$$

para obtener la siguiente forma equivalente

$$(4.42) \quad - \int_{\Omega} v u^T \nabla \phi + \int_{\partial\Omega} v \mathbf{n}^T D \nabla \phi - \int_{\Omega} \nabla v (D \nabla \phi) + \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} n N_i u^T \nabla \phi \\ - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} n v \nabla^T D \nabla \phi - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} n Q - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} \nabla v (u^T \nabla \phi) \\ + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} \nabla v \nabla^T D \nabla \phi + \int_{\Omega} v Q + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} (\nabla v) Q = 0 \quad \forall v \in V,$$

haciendo uso de las condiciones de frontera obtenemos

$$(4.43) \quad \int_{\Omega} v u^T \nabla \phi + \int_{\Omega} \nabla v (D \nabla \phi) + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} \nabla v (u^T \nabla \phi) \\ - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} \nabla v (\nabla^T D \nabla \phi) = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} (\nabla v) Q + \int_{\Omega} v Q + \int_{\Gamma_q} v \bar{q}_n \quad \forall v \in V,$$

tomando $V_h \subset V$ vemos que

$$(4.44) \quad \int_{\Omega} v_h^i u^T \nabla \phi_h + \int_{\Omega} \nabla v_h^i (D \nabla \phi_h) + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} \nabla v_h^i (u^T \nabla \phi_h) \\ - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} \nabla v_h^i (\nabla^T D \nabla \phi_h) = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{h}^T}{2} (\nabla v_h^i) Q + \int_{\Omega} v_h^i Q + \int_{\Gamma_q} v_h^i \bar{q}_n \quad \forall v_h^i \in V_h.$$

4.6. Cálculo del Parámetro de Estabilización

La estimación del parámetro podemos hacerla a través de un proceso de suavizado de la solución obtenida por Galerkin-MEF.

Renombremos al conjunto $\{v_h^1, \dots, v_h^n\} \in V_h$ denotándolo ahora por $\{N_1, \dots, N_N\}$ y tomemos (4.44), con un solo elemento de la malla como dominio y supongamos que el vector h es constante en este elemento,

$$(4.45) \quad \int_{\Omega^{(e)}} N_i u^T \nabla \phi + \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i (D \nabla \phi) + \frac{h^T}{2} \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i (u^T \nabla \phi) \\ - \frac{h^T}{2} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla N_i \nabla^T D \nabla \phi) = \frac{h^T}{2} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla N_i) Q \\ + \int_{\Omega^{(e)}} N_i Q + \int_{\Gamma_q^{(e)}} N_i \bar{q}_n,$$

tomamos el vector h en la dirección de un vector P y lo expresamos en función del escalar $l^{(e)}$ (el área del elemento), es decir,

$$(4.46) \quad h = \alpha l^{(e)} \frac{P}{\|P\|}.$$

se han obtenido buenos resultados tomando el vector P como la proyección del vector de velocidad u sobre el vector gradiente $\nabla \phi$.

Sea $\hat{\phi}$ una solución a (4.44), y $\hat{\phi}_x$ y $\hat{\phi}_y$ a sus respectivas derivadas. Definamos r de la siguiente manera

$$(4.47) \quad r(\hat{\phi}) = \int_{\Omega^{(e)}} N_i u^T [\hat{\phi}_x, \hat{\phi}_y]^T + \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i (D [\hat{\phi}_x, \hat{\phi}_y]^T) \\ + \alpha l^{(e)} \frac{P^T}{\|P\|} \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i (u^T [\hat{\phi}_x, \hat{\phi}_y]^T) - \alpha l^{(e)} \frac{P^T}{\|P\|} \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i (\nabla^T D [\hat{\phi}_x, \hat{\phi}_y]^T) \\ - \alpha l^{(e)} \frac{P^T}{\|P\|} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla N_i) Q - \int_{\Omega^{(e)}} N_i Q - \int_{\Gamma_q^{(e)}} N_i \bar{q}_n.$$

Supongamos que hemos obtenido dos soluciones, $\hat{\phi}_1$ y $\hat{\phi}_2$, de (4.44), donde $\hat{\phi}_2$ es obtenida a partir de $\hat{\phi}_1$ mediante algún proceso de suavizado, y son tales que

$$(4.48) \quad |r(\hat{\phi}_1)| \geq |r(\hat{\phi}_2)|,$$

entonces

$$(4.49) \quad |r(\hat{\phi}_1) - r(\hat{\phi}_2)| \geq |r(\hat{\phi}_1)| - |r(\hat{\phi}_2)| \geq 0,$$

de aquí

$$(4.50) \quad r(\hat{\phi}_1) - r(\hat{\phi}_2) = \int_{\Omega^{(e)}} N_i u^T [\hat{\phi}_{1x} - \hat{\phi}_{2x}, \hat{\phi}_{1y} - \hat{\phi}_{2y}]^T \\ + \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i (D [\hat{\phi}_{1x} - \hat{\phi}_{2x}, \hat{\phi}_{1y} - \hat{\phi}_{2y}]^T) \\ - (\alpha_2 - \alpha_1) l^{(e)} \frac{P^T}{\|P\|} \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i (u^T [\hat{\phi}_{1x} - \hat{\phi}_{2x}, \hat{\phi}_{1y} - \hat{\phi}_{2y}]^T) \\ + (\alpha_2 - \alpha_1) l^{(e)} \frac{P^T}{\|P\|} \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i \nabla^T D [\hat{\phi}_{1x} - \hat{\phi}_{2x}, \hat{\phi}_{1y} - \hat{\phi}_{2y}]^T \\ + (\alpha_2 - \alpha_1) l^{(e)} \frac{P^T}{\|P\|} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla N_i) Q$$

si hacemos que $r(\hat{\phi}_1) - r(\hat{\phi}_2) = 0$, entonces $\alpha_2 - \alpha_1$ tendría que satisfacer

$$(4.51) \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{A_1}{B_1},$$

o

$$(4.52) \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{A_1}{B_1},$$

$$\begin{aligned}
(4.53) \quad A_1 &= - \int_{\Omega^{(e)}} N_i u^T [\tilde{\phi}_{1x} - \tilde{\phi}_{2x}, \tilde{\phi}_{1y} - \tilde{\phi}_{2y}]^T \\
&\quad - \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i (D[\tilde{\phi}_{1x} - \tilde{\phi}_{2x}, \tilde{\phi}_{1y} - \tilde{\phi}_{2y}]^T) \\
B_1 &= -l^{(e)} \frac{P^T}{\|P\|} \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i (u^T [\tilde{\phi}_{1x} - \tilde{\phi}_{2x}, \tilde{\phi}_{1y} - \tilde{\phi}_{2y}]^T) \\
&\quad + l^{(e)} \frac{P^T}{\|P\|} \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i \nabla^T D[\tilde{\phi}_{1x} - \tilde{\phi}_{2x}, \tilde{\phi}_{1y} - \tilde{\phi}_{2y}]^T \\
&\quad + l^{(e)} \frac{P^T}{\|P\|} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla N_i) Q
\end{aligned}$$

sustituyendo este valor de α_2 en (4.44) podemos recobrar una nueva solución $\hat{\phi}_2$ y construir $\hat{\phi}_3$ de tal forma que $|r(\hat{\phi}_2)| \geq |r(\hat{\phi}_3)|$. Procediendo de esta manera encontramos $|r(\hat{\phi}_1)| \geq |r(\hat{\phi}_2)| \geq \dots \geq |r(\hat{\phi}_k)| \geq |r(\hat{\phi}_{k+1})|$ y $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$.

4.7. Cálculo de la Derivada

Sea $\hat{\phi}$ la solución obtenida por el método de Galerkin, $\{v_h^1, \dots, v_h^N\} \in V_h$ una base y $\{c_1, \dots, c_N\} \in R$ tales que

$$(4.54) \quad \hat{\phi} = \sum_{j=1}^N c_j v_h^j$$

De la definición de derivada débil (2.14) vemos que la derivada débil de $\hat{\phi}$ debe satisfacer

$$(4.55) \quad \int_{\Omega} (\hat{\phi}(x))' \phi(x) = - \int_{\Omega} \hat{\phi}(x) \phi(x)' \quad \forall \phi(x) \in C_0^\infty.$$

En nuestro caso, para $\{v_h^1, \dots, v_h^N\} \in V_h$ tenemos

$$(4.56) \quad \int_{\Omega} (\hat{\phi}_h(x))' v_h^i(x) = - \int_{\Omega} \hat{\phi}_h(x) (v_h^i(x))' \quad i = 1, \dots, N,$$

si expresamos a $\hat{\phi}_h$ y a $(\hat{\phi}_h)'$ como una combinación lineal de los elementos de la base, llegamos a la siguiente expresión

$$(4.57) \quad \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \alpha_j v_h^j(x) v_h^i(x) = - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N c_j v_h^j(x) (v_h^i(x))' \quad i = 1, \dots, N,$$

y por linealidad

$$(4.58) \quad \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} v_h^j(x) v_h^i(x) \right) \alpha_j = - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N c_j v_h^j(x) (v_h^i(x))' \quad i = 1, \dots, N,$$

lo que en forma matricial quedaría de la siguiente manera

$$(4.59) \quad \begin{pmatrix} \int_{\Omega} v_h^1 v_h^1 & \dots & \int_{\Omega} v_h^1 v_h^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega} v_h^N v_h^1 & \dots & \int_{\Omega} v_h^N v_h^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N c_j v_h^j(x) (v_h^1(x))' \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N c_j v_h^j(x) (v_h^N(x))' \end{pmatrix}$$

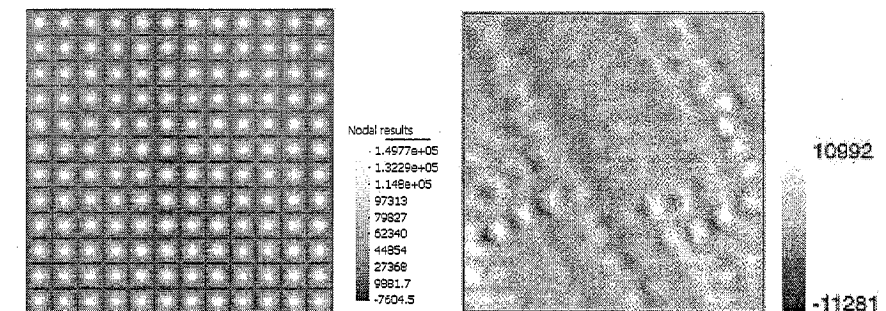
y $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ son los coeficientes por determinar, y así tendríamos la derivada de $\hat{\phi}$, como una combinación lineal de la base.

Resultados Numéricos

Algunos de los problemas que a continuación se muestran, fueron presentados en *IARH workshop*¹ en 1981, y han sido usados para comparar la efectividad de varios métodos. También comparamos nuestros resultados con los presentados por *E. Oñate* y *M. Manzan* en [8].

En dicho artículo se propone un método iterativo para hacer una estimación del parámetro. Puede observarse que cerca de las zonas de gradiente alto se presentan los mayores problemas de oscilación, los cuales han sido reducidos gradualmente aplicando el procedimiento descrito en la Sección 3.6., como se puede notar en el siguiente ejemplo cuyos datos corresponden al problema 3.

a)



¹International Association for Hydraulic Research

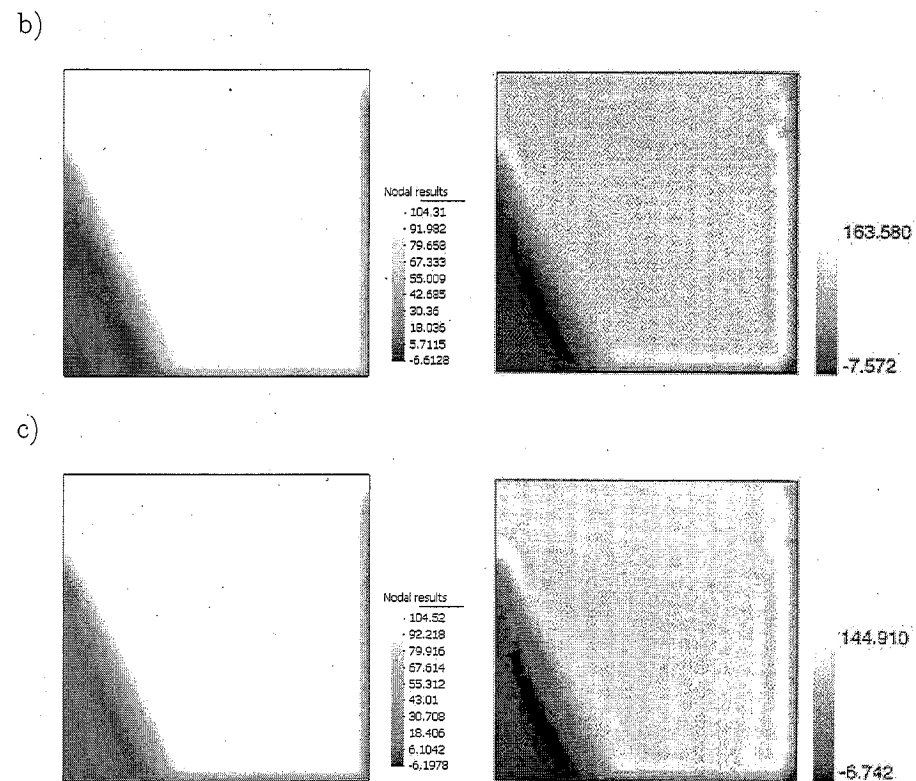


Figura 5.1: Comparación entre el método propuesto (izquierda) y el presentado en el artículo (derecha). a) Primera iteración. b) Quinta iteración. c) Décima iteración.

A continuación se presentan una serie de ejemplos resueltos para diferentes condiciones.

Problema 1. Problema unidimensional de convección-difusión con término de fuente y condiciones de Dirichlet.

En este ejemplo resolvemos el problema $-u d\phi/dx + k d^2\phi/dx^2 + Q = 0$ para $u = 1$, $k = 0,01$, $Q(x) = \text{sen}(\pi x)$, $l = 1$, y $\phi_0 = \phi_1 = 0$. El intervalo $[0, 1]$ fué dividido en 20 elementos de la misma longitud, se usan funciones de prueba lineales. Con estos valores de los parámetros se calcula un número de Péclet de 2.5.

La figura (5.2) muestra la evolución de la solución para diferentes iteraciones. Se puede observar como en cada iteración son reducidas las oscilaciones. La figura (5.3) muestra el comportamiento del parámetro α .

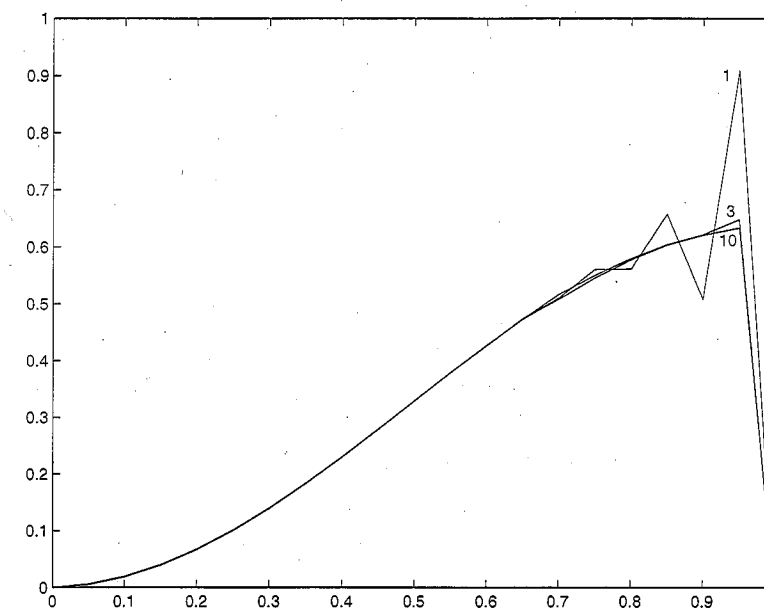


Figura 5.2: Problema unidimensional con término de fuente $Q(x) = \text{sen}(\pi x)$. Distribución final de ϕ después de 10 iteraciones.

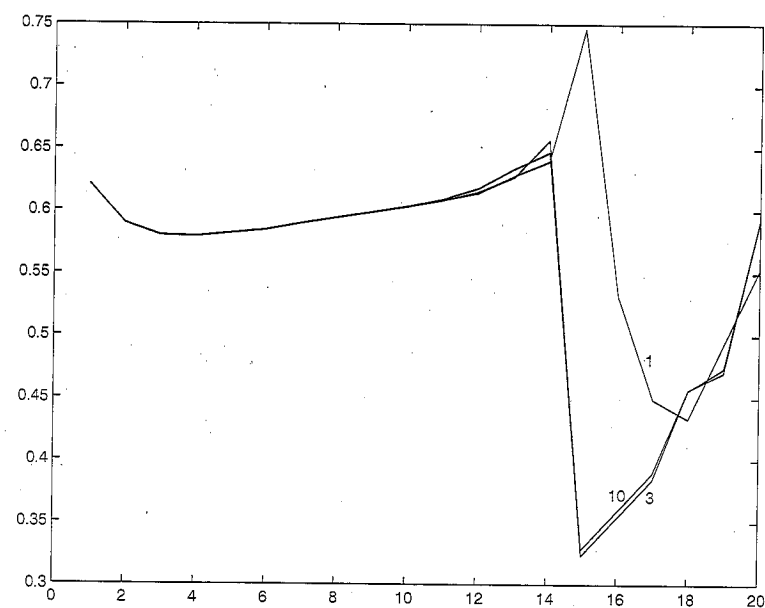


Figura 5.3: Evolución del parámetro de estabilización.

Problema 2. Problema unidimensional de convección-difusión con término de fuente $Q = 0$ y condiciones de Dirichlet.

En este ejemplo resolvemos el problema $-u\phi/dx + kd^2\phi/dx^2 = 0$ para $u = 1$, $k = 0,005$, $l = 1$, y $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$. El intervalo $[0, 1]$ se divide en 20 elementos de la misma longitud, se usan funciones de prueba lineales. Con estos valores de los parámetros se calcula un número de Péclet de 5.

Nuevamente, los mayores problemas de inestabilidad se presentan cerca de las zonas con mayor pendiente.

La figura (5.4) muestra la distribución final de la solución después de 10 iteraciones. La figura (5.5) muestra la evolución del parámetro α .

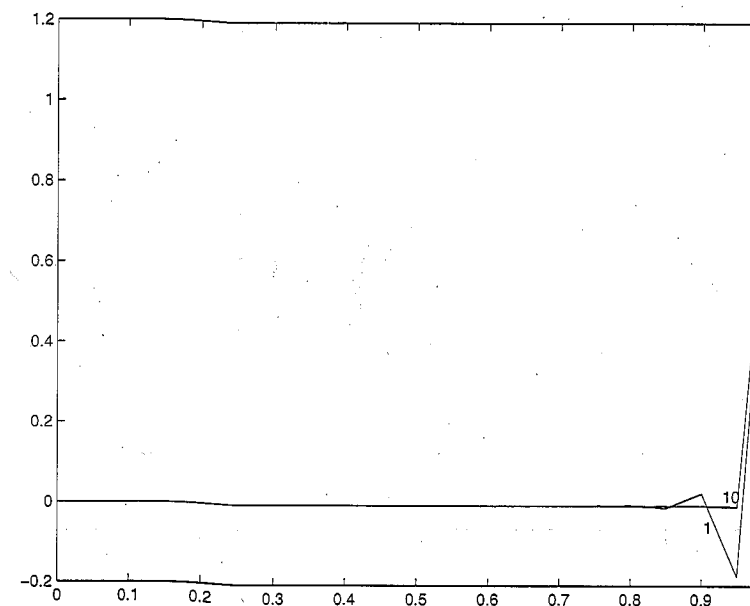


Figura 5.4: Problema unidimensional con término. Distribución final de ϕ después de 10 iteraciones.

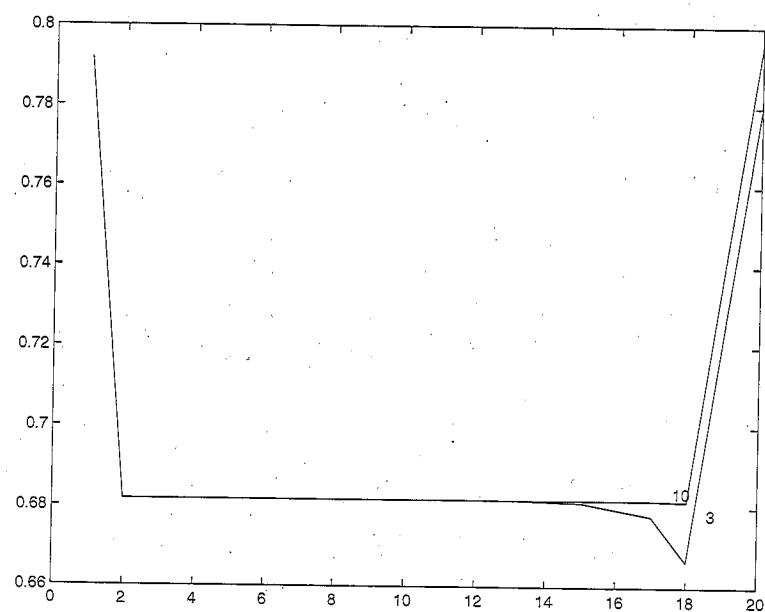


Figura 5.5: Evolución del parámetro de estabilización.

Problema 3. Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes.

$$(5.1) \quad \Omega =] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[,$$

$$(5.2) \quad u = [1, -2]^T,$$

$$(5.3) \quad k_x = k_y = 10^{-6},$$

$$(5.4) \quad Q(x, y) = 0,$$

$$(5.5) \quad \bar{\phi} = \begin{cases} 100 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_1} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_2} \end{cases},$$

donde $\Gamma_{\phi_1} = \{-1/2\} \times [1/4, 1/2] \cup] -1/2, 1/2[\times \{1/2\}$, $\Gamma_{\phi_2} = \Gamma_{\phi} - \Gamma_{\phi_1}$ y $\Gamma_q = 0$.

Para este problema se usa una malla uniforme con 576 elementos rectangulares. En la figura (5.6) se puede ver la solución obtenida para la primera iteración, la cual coincide con la obtenida por medio de Galerkin-FEM ya que el valor inicial del parámetro se toma igual a cero.

La figura (5.7) muestra la solución después de 10 iteraciones. Se puede ver que las oscilaciones son reducidas en la mayor parte del dominio, presentándose solo una pequeña zona de inestabilidad cerca de los lugares con gradiente más alto. En la figura (5.8) se puede observar la distribución final del vector P .

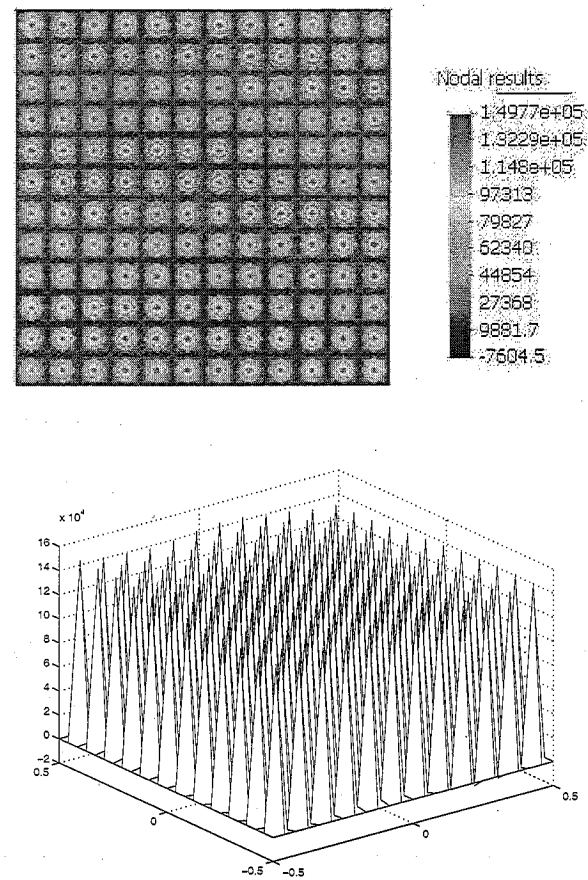


Figura 5.6: Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes. Primera iteración.

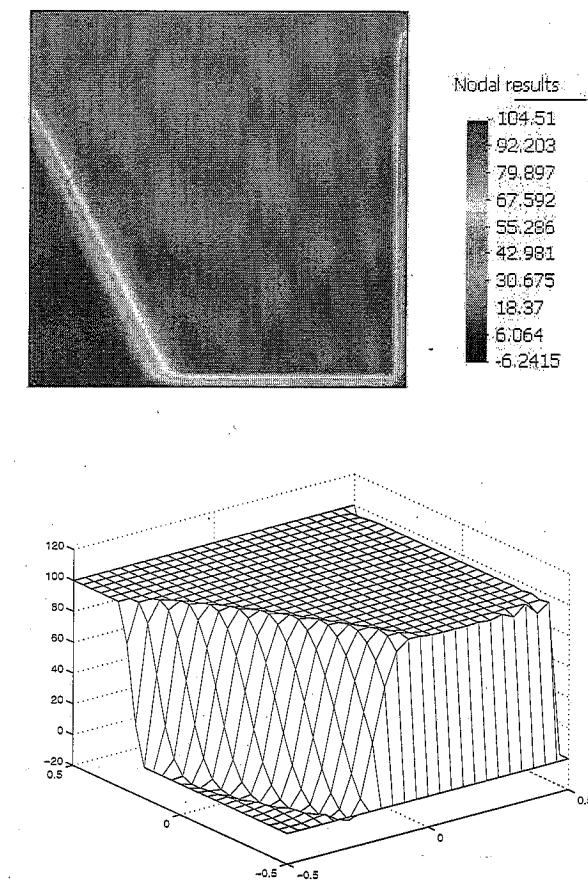
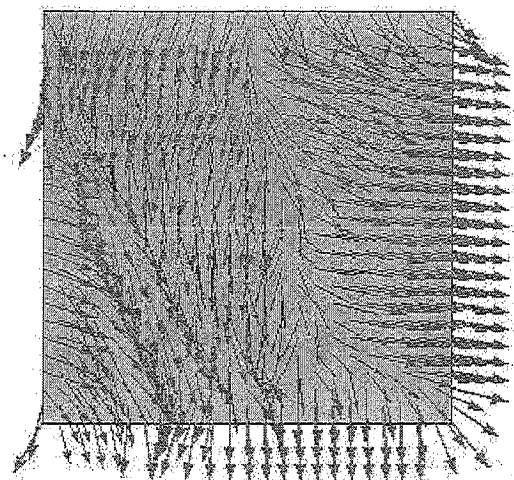


Figura 5.7: Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes. Décima iteración.

a)



b)

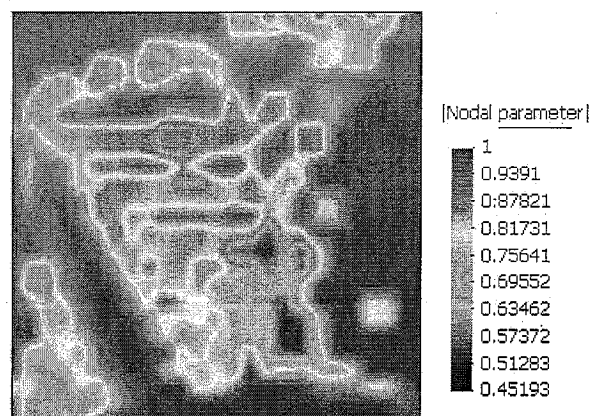


Figura 5.8: Distribución final del parámetro de estabilización después de 10 iteraciones.

Problema 4. Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Neumann y Dirichlet.

$$(5.6) \quad \Omega =]0, 1[\times]0, 1[$$

$$(5.7) \quad u = [1, 1]^T,$$

$$(5.8) \quad k_x = k_y = 10^{-10},$$

$$(5.9) \quad Q(x, y) = 0,$$

$$(5.10) \quad \bar{\phi} = \begin{cases} 100 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_1} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_2} \end{cases}$$

$$(5.11) \quad q_n = 0,$$

donde $\Gamma_{\phi_1} = \{1\} \times [0, 1]$, $\Gamma_{\phi_2} = \Gamma_{\phi} - \Gamma_{\phi_1}$ y $\Gamma_q = [0, 1] \times \{1\}$.

La solución esperada en este caso es una distribución uniforme de $\phi = 0$ en la mayor parte del dominio, excepto en una vecindad de la frontera Γ_{ϕ_1} .

Fueron utilizados 400 elementos rectangulares de cuatro nodos. La figura (5.9) muestra la solución para un valor de $\alpha = 0$. Notar las fuertes oscilaciones, y como son reducidas después de 10 iteraciones, figura (5.10).

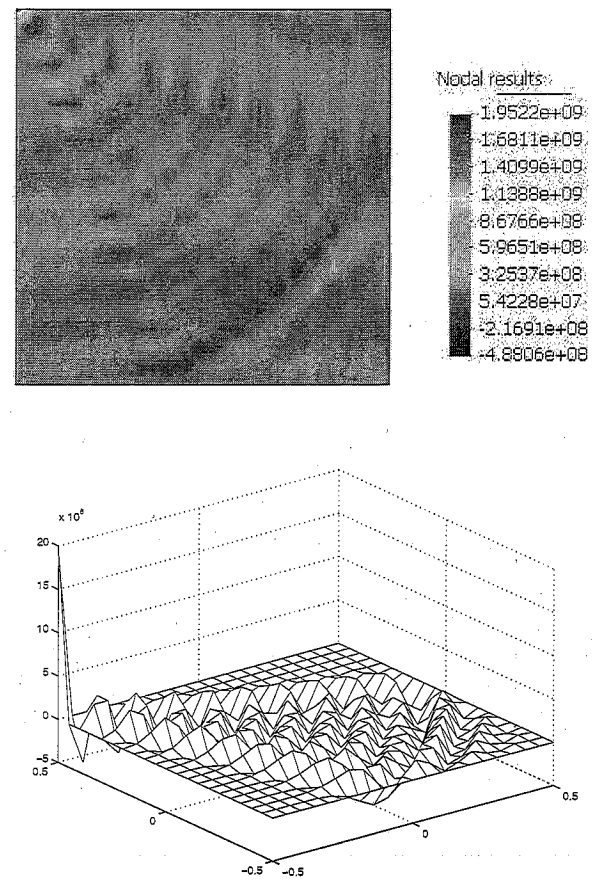


Figura 5.9: Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes. Primera iteración.

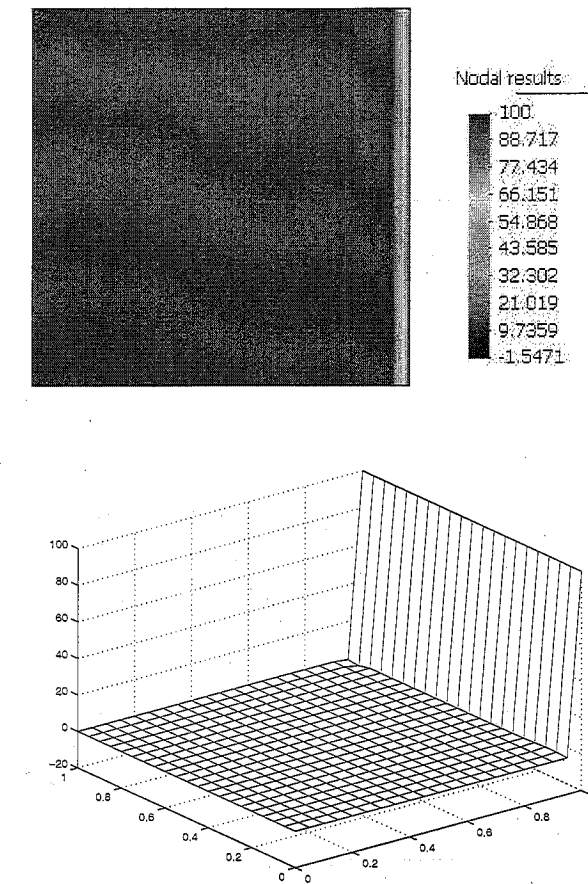
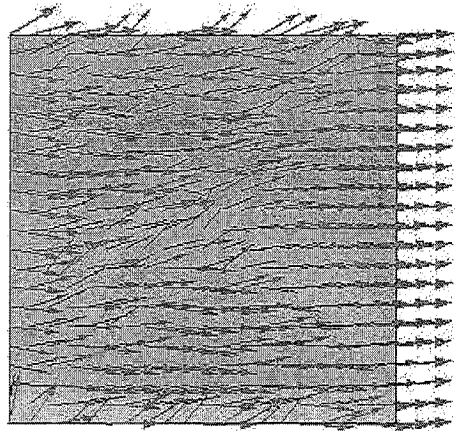


Figura 5.10: Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes. Décima iteración.

a)



b)

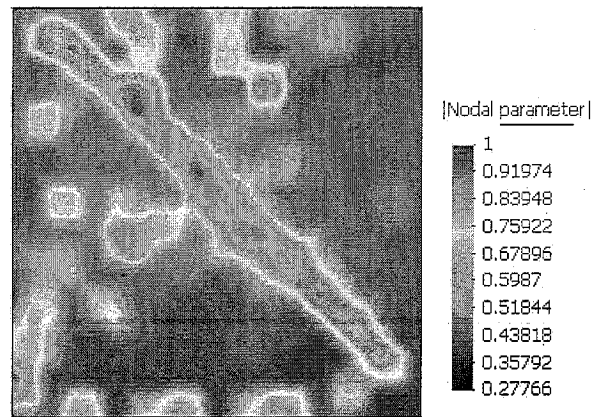


Figura 5.11: Distribución final del parámetro de estabilización después de 10 iteraciones.

Problema 5. Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes y velocidad variable.

$$(5.12) \quad \Omega =]0, 1[\times]0, 1[,$$

$$(5.13) \quad u = [2y(1 - (2x - 1)^2), -2(2x - 1)(1 - y^2)]^T,$$

$$(5.14) \quad k_x = k_y = 1/200,$$

$$(5.15) \quad Q(x, y) = 0,$$

$$(5.16) \quad \bar{\phi} = \begin{cases} 1 + \tanh(10 + 20(2x - 1)) & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_1} \\ 2 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_2} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_3} \end{cases}$$

$$(5.17)$$

donde $\Gamma_{\phi_1} = [1/2, 1] \times \{1\}$, $\Gamma_{\phi_2} = [0, 1/2] \times \{1\}$, $\Gamma_{\phi_3} = \Gamma_{\phi} - \Gamma_{\phi_1} - \Gamma_{\phi_2}$ y $\Gamma_q = \emptyset$.

El dominio es discretizado con una malla uniforme de 256 elementos rectangulares de cuatro nodos. En este problema el vector de velocidad es variable, sin embargo han sido reducidas las oscilaciones figura (4.13).

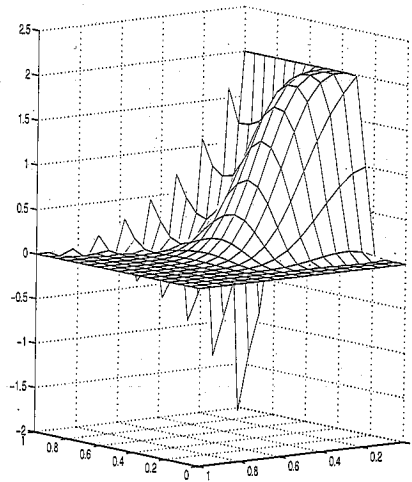
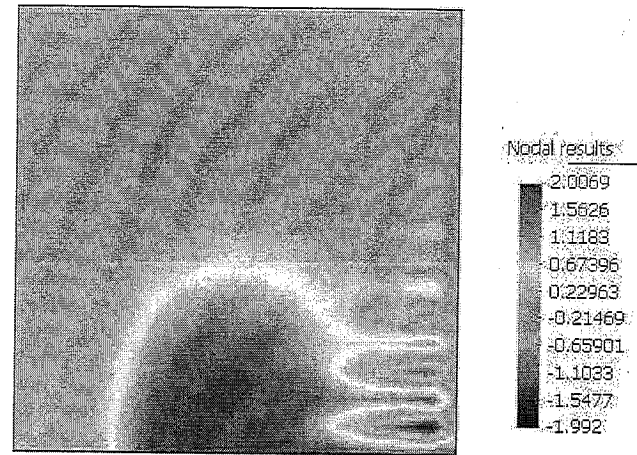


Figura 5.12: Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes y velocidad variable. Primera iteración.

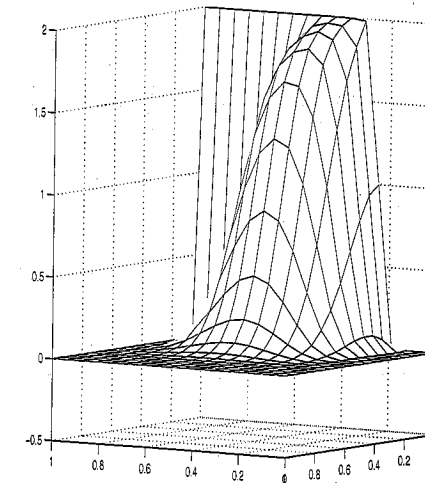
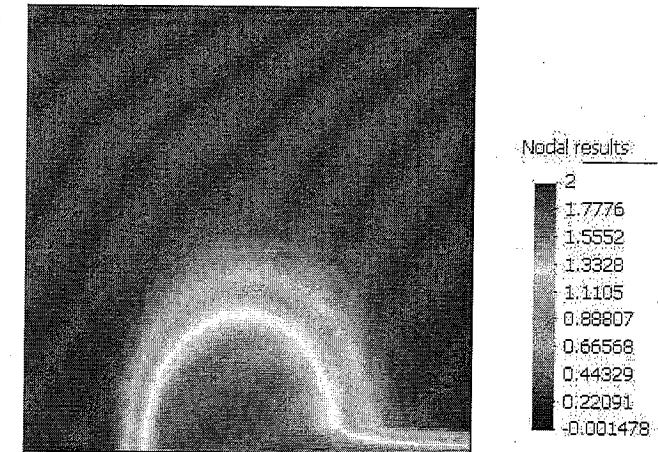
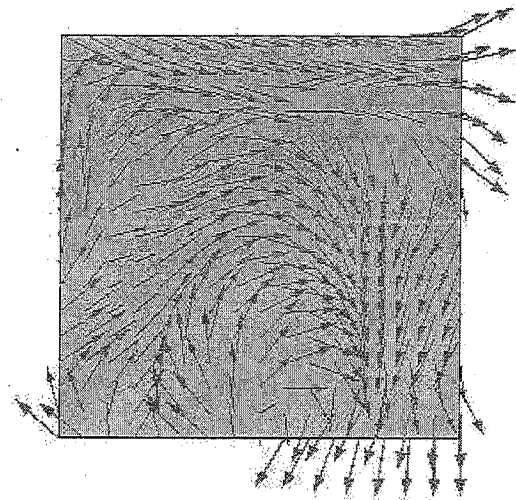


Figura 5.13: Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes y velocidad variable. Décima iteración.

a)



b)

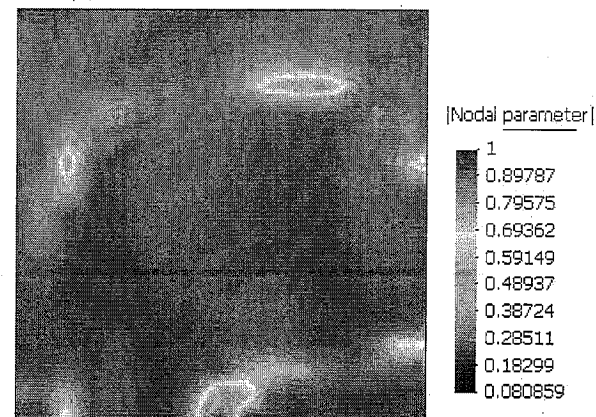


Figura 5.14: Distribución final del parámetro de estabilización después de 10 iteraciones. a) Distribución final del vector P. b) Valor calculado para el parámetro de estabilización.

Problema 6. Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Dirichlet uniformes.

$$(5.18) \quad \Omega =]-1/2, 1/2[\times]-1/2, 1/2[,$$

$$(5.19) \quad u = [0, 1]^T,$$

$$(5.20) \quad k_x = k_y = 10^{-6},$$

$$(5.21) \quad Q(x, y) = 0,$$

$$(5.22) \quad \bar{\phi} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_1} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_2} \end{cases}$$

$$(5.23)$$

donde $\Gamma_{\phi_1} = [0, 1/2] \times \{0\} \cup \{1\} \times [-1/2, 1/2]$, $\Gamma_{\phi_2} = \Gamma_{\phi} - \Gamma_{\phi_1}$ y $\Gamma_q = \emptyset$.

Puede notarse como son capturados los cambios drásticos de la solución a lo largo de una sola columna de elementos, figura(4.16). El dominio se divide en 625 elementos rectangulares de cuatro nodos.

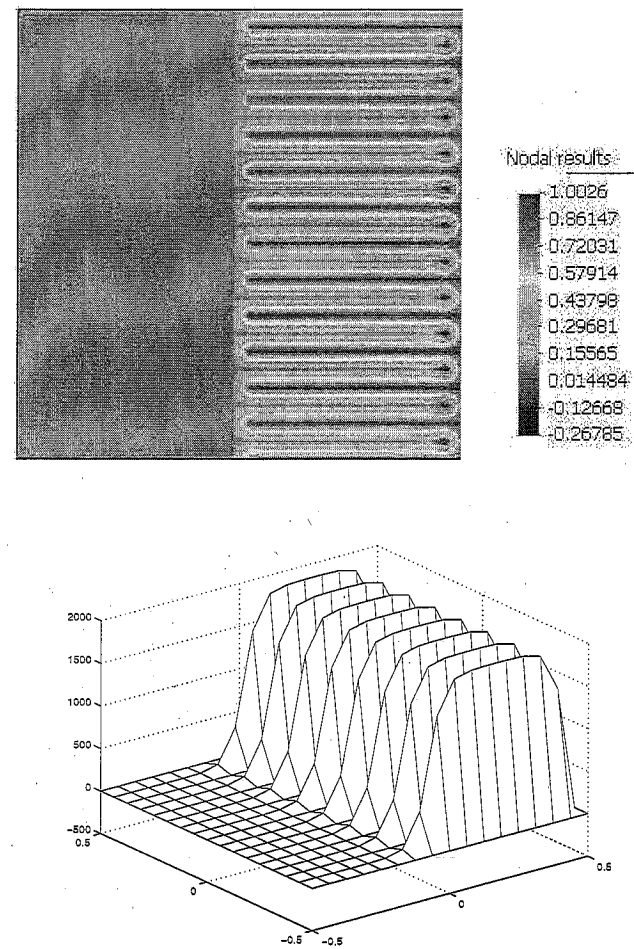


Figura 5.15: Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes. Primera iteración.

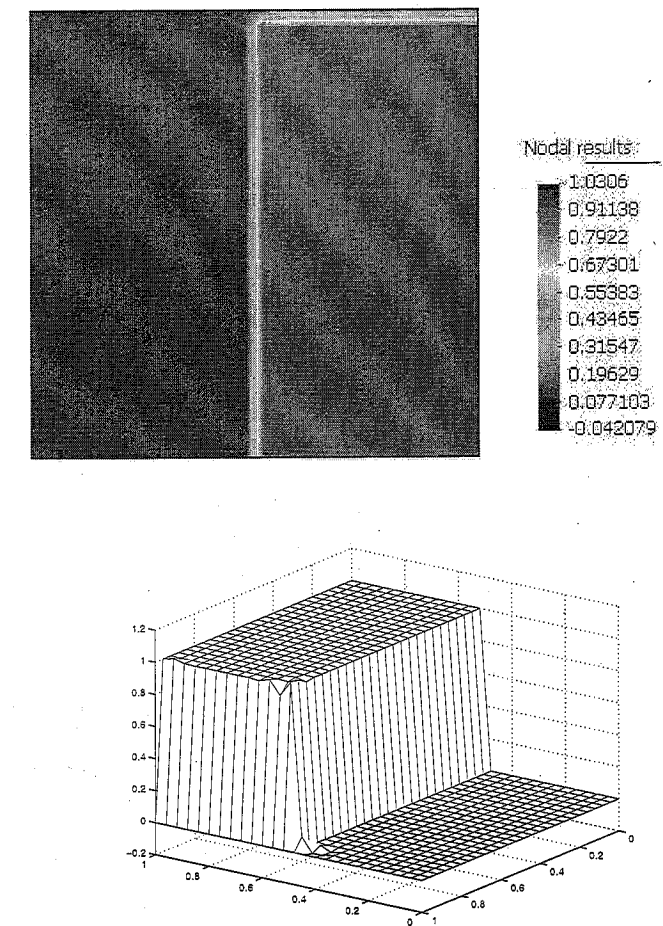
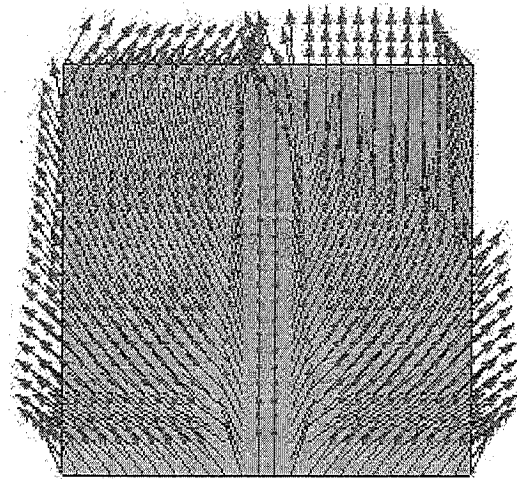


Figura 5.16: Problema bidimensional de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes. Décima iteración.

a)



b)

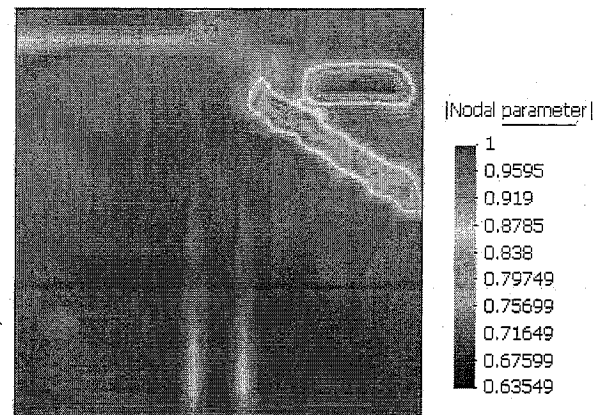


Figura 5.17: Distribución final del parámetro de estabilización después de 10 iteraciones. a) Distribución final del vector P. b) Valor calculado para el parámetro de estabilización.

Capítulo 6

Conclusiones

Uno de los principales problemas relacionados con los procesos de convección-difusión es la determinación adecuada del parámetro α . En los diferentes métodos de estabilización el cálculo depende del número de Péclet γ , cuyo concepto es extendido directamente del problema unidimensional a problemas en 2 o 3 dimensiones, y así se usa (4.19) para su estimación en cualquier caso. Pero al depender γ de la geometría de las mallas utilizadas, no podemos hablar de un número de Péclet general, ya que para mallas no uniformes tendría valores diferentes y tal vez menores que uno en ciertas zonas pero mayores que uno en otras.

De esta forma es necesario calcular el número de Péclet sobre cada elemento de la malla y posteriormente el parámetro α , aquí se propone un método iterativo independiente de la geometría y del orden de las funciones de prueba.

Otro punto importante es determinar la dirección apropiada del vector \mathbf{h} descrito en (4.38). La mayoría de los procedimientos toman dicho vector en la dirección del vector de velocidad u , pero de acuerdo a los experimentos numéricos realizados fueron obtenidos mejores resultados proyectando el vector u sobre el vector $\nabla\phi$ y perturbando en esa dirección.

En este trabajo se mostró como el balance del flujo sobre un dominio infinitesimal da origen a los diferentes esquemas de estabilización solo tomando los ordenes adecuados en las derivadas al hacer la aproximación por polinomios de Taylor.

Bibliografía

- [1] Brenner, Scott, "*The Mathematical Theory of Finite Element Methods*", Springer, 1994.
- [2] C. Elman, Ramage, "*An Analysis of Smoothing Effects of Upwinding Strategies for the Convection-Diffusion Equation*", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 40, no. 1, pp 254-281, 2002.
- [3] E. Oñate, M.Manzan, "*Stabilization Techniques for Finite Element Analysis of Convection-Diffusion Problems*", Publication CIMNE no. 183, 2000.
- [4] J.T.Oden, J.N.Reddy, "*An introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*", John Wiley and Sons, 1976.
- [5] K.W. Morton, "*Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*", Chapman and Hall, 1996.
- [6] Larsen, "*Functional Analysis, An Introduction*", Marcel Dekker, Inc. 1973.
- [7] Michal, Pekka, "*Mathematical and Numerical Modelling in Electrical Engineering*", Kluwer Academic Publisher, 1996.
- [8] O.C.Zienkiewich, R.L.Taylor, "*El Método de los elementos Finitos*", McGraw-Hill, vol. II, 1991.
- [9] Walter Rudin, "*Functional Analysis*", McGraw-Hill, 1974.