



Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

MAT

**Núcleos Reproductores Discretos y una  
Aplicación a las Funciones Elípticas  
Discretas**

**T E S I S**

que para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias**

con Especialidad en

**Matemáticas Aplicadas**

P r e s e n t a

**Mauricio García Arroyo**

Director de Tesis:

**Dr. Raúl Felipe Parada**

Guanajuato, Gto.. Agosto de 2006

---

# Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a mi familia. A mi padre, a Judith, a mi hermano y a Caro por su enorme cariño y su apoyo, mil gracias.

A Elsa, mi gran amor, por creer en mí. Por estar siempre cerca y alentarme en todo momento, mi más sincera gratitud y reconocimiento.

A mis amigos, todos. De cerca o lejos, siempre estuvieron conmigo.

A mis profesores, que fueron trazando el camino durante todos los años de mi formación. Especialmente a mi director de tesis, el Dr. Raúl Felipe, por su guía y su confianza, muchas gracias.

A CONACyT, por su apoyo económico que fue de gran ayuda para concluir mis estudios de maestría.

# Índice general

<b>I</b>	<b>Teoría Conocida</b>	<b>4</b>
1.	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
1.1.	Planteamiento del Problema . . . . .	5
1.2.	Introducción a la Teoría de las Funciones Analíticas Discretas . . . . .	7
1.3.	Sobre la Teoría General de Núcleos de Reproducción . . . . .	15
1.4.	Funciones Elípticas: Introducción a la Teoría de Weierstrass . . . . .	20
1.4.1.	Preliminares . . . . .	20
1.4.2.	Funciones Elípticas . . . . .	23
<b>II</b>	<b>Resultados Obtenidos</b>	<b>31</b>
2.	<b>El Kernel de Szëgo Discreto</b>	<b>32</b>
2.1.	Preliminares . . . . .	32
2.2.	Aspectos Geométricos . . . . .	34
2.3.	Una Base para el Espacio de Szëgo . . . . .	36
2.3.1.	Ejemplos . . . . .	37
2.3.2.	El Método . . . . .	40
2.3.3.	Construcción de una Base para el Espacio de Szëgo . . . . .	41
2.3.4.	Dimensión del espacio de Szëgo . . . . .	43
3.	<b>Funciones Elípticas Discretas</b>	<b>47</b>
3.1.	Latices y Funciones Periódicas en la Malla . . . . .	47
3.2.	Ejemplos Particulares . . . . .	52
3.3.	Problemas Abiertos . . . . .	62
4.	<b>Conclusiones</b>	<b>66</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>68</b>

# Índice de figuras

1.1. Región simple. . . . .	8
2.1. Esquina tipo A . . . . .	35
2.2. Esquina tipo B . . . . .	35
2.3. Esquina doble . . . . .	35
2.4. Región no simplemente conexa: sus esquinas tienen los cuatro vértices en la frontera; el cuadrado del centro no pertenece a la región. . . . .	36
2.5. Región simple de orden 1. . . . .	38
2.6. Región simple de orden 2. . . . .	38
2.7. Región simple de orden 9. . . . .	39
2.8. Esquina tipo B. . . . .	44
2.9. Esquina superior derecha tipo A, Subcaso 1. . . . .	45
2.10. Esquina tipo A, Subcaso II. . . . .	46
3.1. Región fundamental, $\mathcal{R}\mathcal{F}_{a,b}(z)$ . . . . .	48
3.2. Región de analiticidad $\mathcal{R}\mathcal{A}_{a,b}(z)$ . . . . .	49
3.3. $\mathcal{R}\mathcal{F}_{3,3}(0)$ - Región fundamental para $\mathcal{L}_{3,3}$ . . . . .	53
3.4. $\mathcal{R}\mathcal{A}_{3,3}(0)$ - Región de analiticidad de $\mathcal{L}_{3,3}$ . . . . .	54
3.5. $\mathcal{R}\mathcal{F}_{5,4}(0)$ - Región fundamental para $\mathcal{L}_{5,4}$ . . . . .	58
3.6. $\mathcal{R}\mathcal{A}_{5,4}(0)$ - Región de analiticidad de $\mathcal{L}_{5,4}$ . . . . .	59

Parte I

# Teoría Conocida

# Capítulo 1

## Introducción

Este capítulo consta de cuatro secciones. En la primera de ellas se plantea el problema de que trata esta tesis, detallando sus alcances y limitaciones. Se describe ahí, tanto el estado del problema antes de este trabajo de investigación, como la motivación y la importancia de estudiarlo.

En las siguientes tres secciones se dará una introducción a una teoría conocida que será empleada en los capítulos siguientes, en donde se desarrollará el contenido principal de esta tesis.

En la segunda sección del presente capítulo se presenta la teoría de las funciones analíticas discretas. Esta teoría fue originalmente planteada por Jacqueline Ferrand (Lelong) y posteriormente desarrollada por R.J. Duffin [3]. El contenido de esta sección es de suma importancia, pues es el contexto en el cual se desenvuelve esta investigación.

La sección 3 trata de la teoría general de núcleos de reproducción, como fue presentada por N. Aronszajn [1] en su artículo de 1944, y por S. Saitoh en su libro *Theory of reproducing kernels and its applications* [9]. Al ser de carácter introductorio, sólo serán presentados los conceptos básicos y algunos resultados que aplicaremos más adelante en este trabajo.

La cuarta y última sección de este capítulo está dedicada al estudio de la teoría de Weierstrass sobre funciones elípticas, y está basada en los textos de P. Du Val [2] y A.I. Markushevich [6]. Al igual que en las dos secciones anteriores, se mencionan sólo las definiciones y resultados elementales de la teoría, mismos que serán empleados en los posteriores capítulos.

### 1.1. Planteamiento del Problema

La definición de una función analítica discreta fue propuesta originalmente por Jacqueline Ferrand (Lelong) en su artículo *Fonctions préharmoniques et fonctions préholomorphes*, publicado en 1944. Ahí se establecen las bases de la teoría en que se sustenta

esta tesis, y que fue ampliamente desarrollada por R.J. Duffin en la década de los años 50. La discretización de la teoría de funciones de variable compleja es un terreno aún fértil, en el cual hemos decidido llevar a cabo nuestras investigaciones. Muchas de las propiedades importantes de las funciones analíticas usuales han podido transportarse con éxito al dominio discreto, lo que resulta de gran interés teórico para nosotros.

En los últimos años, la teoría de las funciones analíticas discretas ha sido retomada por diversos investigadores alrededor del mundo, entre los cuales podemos destacar a László Lovász [5], R. Kenyon [4], D. Zeilberger [12] y C. Mercat [8], quienes han hecho importantes aportaciones. En artículos recientes de estos autores se muestran interesantes aplicaciones de esta teoría a diversos campos, como son caminatas aleatorias, redes eléctricas o estructuras con elásticos, por mencionar algunos (ver [5]). Esto representa una gran motivación para llevar a cabo este trabajo, en el cual nos proponemos contribuir al desarrollo de una teoría que tiene un gran potencial de aplicaciones. Incluso, el Prof. Christian Mercat de Montpellier, Francia, en comunicación personal vía correo electrónico, mostró su interés en nuestro trabajo e hizo importantes señalamientos respecto a las dificultades que podríamos afrontar al atacar los problemas que aquí nos planteamos.

Concretamente, el primer problema que estudiamos en esta tesis (Capítulo 2) consiste en encontrar una versión discreta del *kernel de Szëgo*. Para ello, aplicaremos algunos resultados de la teoría general de núcleos reproductores, presentada por N. Aronsajn [1]. Proponemos una definición análoga del espacio de Szëgo, que consta de funciones analíticas en una región acotada del plano que, a su vez, son funciones  $L^2$  en la frontera de la región. Probamos que la versión discreta de dicho espacio es un espacio de Hilbert, que admite un kernel de reproducción definido en un dominio discreto, y mostramos la manera de construirlo.

Por otro lado, en el Capítulo 3, presentaremos una propuesta para la definición de función elíptica discreta. Estudiaremos algunas de sus propiedades y su relación con las funciones elípticas usuales. Desde luego, lo deseable hubiera sido construir una teoría general de las funciones elípticas discretas, sin embargo, en el camino nos encontramos con algunas dificultades avizoradas por C. Mercat en su correo electrónico, una de las principales siendo que en la literatura actual sobre funciones analíticas discretas no se encuentra una definición satisfactoria de la versión discreta para la función  $1/z^n$ , la cual es de gran importancia cuando se desea estudiar las funciones meromorfas y el concepto de polo de orden  $n$ . Así que, dado el nivel de complejidad del problema, hemos concluido que llegar a una teoría general sobre funciones elípticas discretas rebasa los alcances de esta tesis.

Cabe añadir que, en la literatura científica que hemos consultado sobre funciones analíticas discretas, no hay indicios de algún trabajo de investigación que se ocupe de

funciones elípticas discretas. Por lo tanto, no hay referencias de por donde empezar o que camino seguir en esta dirección.

Lo que sí nos proponemos en esta parte de la tesis es sugerir algunas ideas para una posible definición de función elíptica discreta, aplicando resultados obtenidos en el Capítulo 2. Desarrollaremos algunos casos particulares para ilustrar las ventajas y limitaciones de dicha definición, así como las propiedades análogas que posee en relación con la versión continua. Asimismo, a lo largo de la exposición del tercer capítulo de este trabajo, surgirán diversas interrogantes y plantearemos algunas conjeturas que quedarán como problemas abiertos. Esperamos que estas ideas sean un punto de partida para investigaciones futuras en este contexto.

## 1.2. Introducción a la Teoría de las Funciones Analíticas Discretas

En este trabajo denotaremos por  $i$  a la unidad imaginaria (i.e.  $i^2 = -1$ ); y, para todo número complejo  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , denotamos su *conjugado complejo* por  $\bar{z} = x - iy$ .

**Definición 1** *Llamaremos malla entera al subconjunto del plano complejo*

$$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = m + in, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Para  $z_0 \in \mathcal{M}$ , diremos que  $\{z_0, z_0 + 1, z_0 + 1 + i, z_0 + i\}$  es el *cuadrado unitario asociado a  $z_0$* .

**Definición 2** (*J. Ferrand*) *Una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice que es analítica discreta en el cuadro unitario asociado a  $z_0$  si*

$$\frac{f(z_0 + 1 + i) - f(z_0)}{1 + i} = \frac{f(z_0 + i) - f(z_0 + 1)}{i - 1}.$$

A una función analítica discreta en toda la malla le llamamos *función entera discreta*.

**Definición 3** *Definimos los siguientes conceptos:*

1. *Una región  $R \subset \mathcal{M}$  de la malla entera es una unión de cuadrados unitarios.*
2. *Una región simple es un conjunto simplemente conexo que es la unión de un número finito de cuadrados unitarios; su **frontera**  $\partial R$  es una curva (poligonal) simple cerrada, compuesta por lados de cuadrados unitarios.*



Los puntos de de una región que no están en la frontera se llaman puntos interiores.

3. Las mallas par e impar consisten de los puntos  $m + in \in \mathcal{M}$  tales que  $m + n$  es par e impar, respectivamente.

**Ejemplo 1** En la figura se muestra un ejemplo de una región simple en la malla: Los

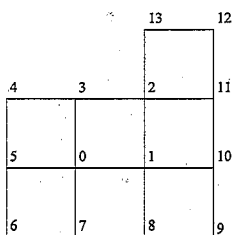


Figura 1.1: Región simple.

puntos interiores son  $z_0$  y  $z_1$ ; mientras que los puntos frontera son  $z_2, z_3, \dots, z_{13}$ .

También se ilustra en la figura una manera de enlistar los puntos de la malla como una sucesión  $z_0, z_1, z_2, \dots$ ; lo que llamaremos sistema coordenado espiral.

**Definición 4** (R. Duffin) Una función se dice analítica discreta en el cuadro asociado a  $z_0$  si

$$f_0 + if_1 + i^2 f_2 + i^3 f_3 = 0$$

donde,  $f_j = f(z_j)$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ .

**Proposición 5** La definición de Duffin es equivalente a la definición de J. Ferrand.

**Prueba.** Supongamos que  $f$  es analítica en el cuadrado unitario asociado a  $z_0$  según la definición de J. Ferrand. Entonces, utilizando la notación espiral,

$$\begin{aligned} \frac{f_2 - f_0}{1 + i} &= \frac{f_3 - f_1}{i - 1} \\ \Leftrightarrow [f_2 - f_0](i - 1) &= [f_3 - f_1](1 + i) \\ \Leftrightarrow if_2 - f_2 - if_0 + f_0 &= f_3 + if_3 - f_1 - if_1 \\ \Leftrightarrow f_0 + if_1 - f_2 - if_3 &= i(f_0 + if_1 - f_2 - if_3) \\ \Leftrightarrow f_0 + if_1 - f_2 - if_3 &= 0 \end{aligned}$$

y se tiene el resultado. ■

Introducimos los siguientes operadores de traslación, sobre las funciones definidas en la malla:

$$X^n f(z) = f(z+n) \quad y \quad Y^n f(z) = f(z+in)$$

Definimos el operador

$$L = I + iX - XY - iY,$$

entonces

$$Lf(z_0) = f_0 + if_1 - f_2 - if_3.$$

De modo que la condición de analiticidad puede ser expresada como

$$Lf(z_0) = 0.$$

Sea  $f = u + iv$ , con  $u = \Re(f)$  y  $v = \Im(f)$ , una función analítica discreta en  $z_0$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 = Lf(z_0) &= f_0 + if_1 - f_2 - if_3 \\ &= u_0 + iv_0 + i(u_1 + iv_1) - (u_2 + iv_2) - i(u_3 + iv_3) \\ &= u_0 - v_1 - u_2 + v_3 + i(v_0 + u_1 - v_2 - u_3) \end{aligned}$$

$$\iff u_0 - v_1 - u_2 + v_3 = 0 \quad y \quad v_0 + u_1 - v_2 - u_3 = 0.$$

Es decir, tenemos los análogos a las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_2 - u_0 = v_3 - v_1 \quad y \quad u_3 - u_1 = v_0 - v_2$$

**Proposición 6** Una función definida arbitrariamente en los puntos de la malla sobre los ejes coordenados tiene una extensión única a una función entera discreta.

**Prueba.** La relación  $f_0 + if_1 - f_2 - if_3 = 0$  define sucesivamente los valores  $f(i+1)$ ,  $f(i+2)$ , ...; después, la misma relación define  $f(2i+1)$ ,  $f(2i+2)$ , .... Inductivamente podemos definir los valores de  $f$  en todo el primer cuadrante.

La extensión a los demás cuadrantes es análoga. Y la función entera así obtenida es única por construcción. ■

**Definición 7** Sea  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ . Llamamos función dual de  $f$  a la función, denotada por  $f^-$ , definida por  $f^-(x+iy) = (-1)^{x+y} \overline{f(x+iy)}$ .

**Proposición 8** Sea  $f$  una función sobre la malla, entonces si  $z_0 = x+iy$ ,

$$\overline{(Lf)}(z_0) = (-1)^{x+y} Lf^-(z_0)$$

En particular,  $f$  y  $f^-$  tienen la misma región de analiticidad.

**Prueba.**

$$\begin{aligned}
 Lf^-(z_0) &= f_0^- + if_1^- - f_2^- - if_3^- \\
 &= (-1)^{x+y} f_0 + (-1)^{x+y+1} f_1 - (-1)^{x+y+2} f_2 - i(-1)^{x+y+1} f_3 \\
 &= (-1)^{x+y} [f_0 - if_1 - f_2 + if_3] = (-1)^{x+y} [f_0 + if_1 - f_2 - if_3] \\
 &= (-1)^{x+y} \overline{[f_0 + if_1 - f_2 - if_3]} \\
 &= (-1)^{x+y} \overline{Lf(z_0)}
 \end{aligned}$$

■

Sea  $L' = I - iX^{-1} - Y^{-1}X^{-1} + iY^{-1}$ ; definimos el operador Laplaciano  $D = -L'L = -LL'$ ; así

$$\begin{aligned}
 Df(z_0) &= -L'Lf(z_0) = -LL'f(z_0) \\
 &= f_2 + f_4 + f_6 + f_8 - 4f_0
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

**Definición 9** Una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice armónica en  $z_0$  si  $Df(z_0) = 0$ .

Vemos de (1.1) que si  $f$  es analítica en una región  $\mathbf{R} \subset \mathcal{M}$ , entonces  $f$  es armónica en el interior de  $\mathbf{R}$ .

Como el operador Laplaciano es real (i.e. si  $f$  toma valores reales,  $Df$  toma valores reales), entonces si  $f$  es armónica,  $\Re(f)$  y  $\Im(f)$  también lo son.

Dada una función  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ , sea  $f$  definida como  $f = L'h$ . Entonces

$$Lf = LL'h = -Dh,$$

así que si  $h$  es armónica en un punto  $z_0$ , entonces  $f$  es analítica en el cuadro asociado a  $z_0$ .

**Teorema 10 (Principio del Máximo)** Si  $f$  es armónica en una región  $\Omega$  finita, entonces

$$\max_{z \in \Omega} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

Es decir,  $|f|$  alcanza su máximo en la frontera de  $\Omega$ ; en particular, lo mismo sucede para  $|\Re(f)|$  y  $|\Im(f)|$ .

**Prueba.** Supongamos que  $|f|$  alcanza su máximo en un punto interior  $z_0$  de  $\Omega$ . Siendo  $f$  armónica en  $z_0$  se tiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq 4|f_0| - (|f_2| + |f_4| + |f_6| + |f_8|) \\ &\leq 4|f_0| - |f_2 + f_4 + f_6 + f_8| \\ &\leq |f_2 + f_4 + f_6 + f_8 - 4f_0| \\ &= |Df(z_0)| = 0. \end{aligned}$$

Entonces,  $|f_0| = |f_j|$ ,  $j = 2, 4, 6, 8$ . En particular,  $|f|$  alcanza su máximo en  $z_2 = z_0 + 1 + i$ . Si  $z_2 \in \partial\Omega$ , se tiene el resultado; si no, por un razonamiento análogo  $|f|$  alcanza su máximo en  $z_0 + 2 + 2i$ .

Este proceso debe terminar en un punto frontera, pues  $\Omega$  es una región finita. ■

**Definición 11** Sean  $a = z_0, z_1, \dots, z_m = b \in \mathcal{M}$  una cadena de puntos de la malla, es decir  $|z_j - z_{j-1}| = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Si  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos la integral de línea por

$$\int_a^b f dz = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m (f_n + f_{n-1})(z_n - z_{n-1})$$

Si  $C$  es una cadena cerrada, i.e.  $a = b$ , entonces la integral de línea se escribe

$$\int_C f dz = \sum_{n=1}^m f_n (z_{n+1} - z_{n-1})$$

En particular, si  $C$  es un cuadrado unitario, tenemos

$$\begin{aligned} \int_C f dz &= \frac{1}{2} [(1-i)f_0 + (1+i)f_1 + (i-1)f_2 + (-1-i)f_3] \\ &= \frac{(1-i)}{2} Lf(z_0) \end{aligned}$$

**Proposición 12** Sea  $\Omega \subset \mathcal{M}$  una región simple, entonces

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \frac{(1-i)}{2} \sum_{\Omega} Lf, \tag{1.2}$$

donde  $\sum_{\Omega}$  denota la suma sobre los cuadrados unitarios en  $\Omega$ .

**Observaciones.**

1. Si comparamos la expresión en (1.2) con el caso continuo, tenemos que  $\frac{1-i}{4\pi} Lf(z)$  corresponde al residuo de  $f$  en  $z$ .

2. Si  $f$  es una función analítica en la región  $\Omega$ , de (1.2) se sigue que

$$\int_{\partial\Omega} f dz = 0$$

**Lema 13** Sea  $R \subset M$  una región simple; sean  $a, z \in R$ ,  $c \in \mathbb{C}$  y  $F$  analítica en  $R$ . Definimos

$$f(z) = \int_a^z F dz + c,$$

tomando el camino de integración en  $R$ .

Si  $p, q \in R$  son tales que  $|p - q| = 1$ , entonces

$$\frac{f(p) - f(q)}{p - q} = \frac{F(p) + F(q)}{2} \quad (1.3)$$

Además  $f$  es analítica en  $R$ .

**Prueba.**

Consideremos la cadena  $\{a = z_0, z_1, \dots, z_m = q, z_{m+1} = p\} \subset R$ , entonces

$$\begin{aligned} f(p) - f(q) &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{m+1} (F_n + F_{n-1})(z_n - z_{n-1}) - \sum_{n=1}^m (F_n + F_{n-1})(z_n - z_{n-1}) \right] \\ &= \frac{1}{2} (F_{m+1} + F_m)(z_{m+1} - z_m) = \frac{1}{2} (F(p) + F(q))(p - q) \end{aligned}$$

De donde se deduce (1.3).

Ahora probemos que  $f$  es analítica. Usando (1.3), vemos que

$$\begin{aligned} 2(f_2 - f_0) &= 2(f_2 - f_1 + f_1 - f_0) = (F_2 + F_1)i + F_1 + F_0 \\ &= F_0 + F_1 + iF_1 + iF_2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 2i(f_3 - f_1) &= 2i(f_3 - f_2 + f_2 - f_1) = i[(-1)(F_3 + F_2) + i(F_2 + F_1)] \\ &= -F_1 - F_2 - iF_2 - iF_3 \end{aligned}$$

Sumando estas dos igualdades se obtiene  $-2LF(z_0) = Lf(z_0)$  ■

**Teorema 14** Sea  $F$  una función analítica en una región  $R \subset M$ . Sean  $a, b \in R$  y

$k \in \mathbb{C}$  una constante. Entonces

$$f(z) = \left\{ 4 \int_b^z F^- dz + k \right\}^-$$

es analítica en  $\mathbf{R}$ , y

$$F(z) = \int_a^z f dz + F(a).$$

Los caminos de integración se suponen en  $\mathbf{R}$ .

**Prueba.** Tomemos el dual de  $f$ :

$$f^-(z) = 4 \int_b^z F^- dz + k$$

Como  $F^-$  es analítica, si  $p, q \in \mathbf{R}$  y  $|p - q| = 1$ , del lema 14 se sigue que

$$f^-(p) - f^-(q) = 2(p - q)(F^-(p) + F^-(q))$$

Es decir, si  $p = m + in$

$$(-1)^{m+n} \overline{f}(p) + (-1)^{m+n} \overline{f}(q) = 2(p - q)[(-1)^{m+n} \overline{F}(p) - (-1)^{m+n} \overline{F}(q)]$$

Notamos que  $\overline{(p - q)} = (p - q)^{-1}$ ; tomando el conjugado en la igualdad anterior,

$$(f(p) + f(q))(p - q) = 2(F(p) - F(q))$$

Sea  $\mathcal{C}$  un cuadro unitario  $\{z_0, \dots, z_3\} \subset \mathbf{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} (1 - i)Lf(z_0) &= 2 \int_{\mathcal{C}} f dz = (f_1 + f_0) + i(f_2 + f_1) - (f_3 + f_2) - i(f_0 + f_3) \\ &= 2[F_1 - F_0 + F_2 - F_1 + F_3 - F_2 + F_0 - F_3] = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  es analítica en  $\mathbf{R}$ .

Sea  $\{a = z_0, z_1, \dots, z_m = z\}$  un camino en  $\mathbf{R}$ , luego

$$\begin{aligned} \int_a^z f dz &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (f_k + f_{k-1})(z_k - z_{k-1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m 2[F_k - F_{k-1}] \\ &= \sum_{k=1}^m [F_k - F_{k-1}] = F_m - F_1 \\ &= F(z) - F(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F(z) = \int_a^z f dz + F(a),$$

y se sigue el teorema. ■

**Definición 15** Sea  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica discreta, definimos la derivada de  $F$  como la función  $f$  del teorema 15, es decir

$$dF(z) = \left\{ 4 \int_b^z F^- dz + k \right\}^-$$

**Observaciones.**

1. A la función  $k^-$ , la llamamos biconstante pues toma los dos valores  $\pm \bar{k}$ ; si  $z = m + in$ ,  $k^-(z) = (-1)^{m+n} \bar{k}$ .
2. La derivada de una función analítica discreta es única salvo por una biconstante arbitraria.

**Ejemplo 2** Las funciones constantes son analíticas discretas y su derivada es cero, salvo por una biconstante arbitraria. Sea  $f \equiv \lambda \in \mathbb{C}$  sobre la malla. Entonces

$$f(z_0 + 1 + i) - f(z_0) = \lambda - \lambda = 0$$

y

$$f(z_0 + i) - f(z_0 + 1) = \lambda - \lambda = 0$$

Por lo tanto, usando la definición de Ferrand,

$$\frac{f(z_0 + 1 + i) - f(z_0)}{1 + i} = \frac{f(z_0 + i) - f(z_0 + 1)}{i - 1}$$

Calculemos la derivada de  $f$ . Tomamos  $a, b \in \mathcal{M}$ , entonces para  $z \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \int_b^z f^- dz &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m (f_n + f_{n-1})(z_n - z_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m ((-1)^{x_n + y_n} \bar{\lambda} + (-1)^{x_n + y_n + 1} \bar{\lambda})(z_n - z_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m ((-1)^{x_n + y_n} \bar{\lambda} - (-1)^{x_n + y_n} \bar{\lambda})(z_n - z_{n-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $k \in \mathbb{C}$  es una constante arbitraria,

$$df(z) = \left\{ 4 \int_b^z f^- dz + k \right\}^- = k^-.$$

### 1.3. Sobre la Teoría General de Núcleos de Reproducción

**Definición 16** Sea  $[H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H]$  un espacio de Hilbert cuyos elementos son funciones complejas sobre un conjunto  $E$ . Un núcleo de reproducción para  $H$  es una función  $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

- a) para todo  $y \in E$ ,  $K(x, y) \in H$  como función de  $x$ ,  $y$
- b) para toda función  $f \in H$ ,  $K(x, y)$  reproduce esta función, es decir

$$\forall y \in E, f(y) = \langle f(\cdot), K(\cdot, y) \rangle_H$$

**Teorema 17** El núcleo de reproducción (si existe) está determinado de manera única por el espacio de Hilbert  $H$ .

**Prueba.** Sean  $K_1(x, y)$  y  $K_2(x, y)$  kernels de reproducción de  $H$ . Si  $y \in E$  es fijo,  $K_1(\cdot, y), K_2(\cdot, y) \in H$  luego  $K_1(\cdot, y) - K_2(\cdot, y) \in H$  y

$$\begin{aligned} \|K_1(\cdot, y) - K_2(\cdot, y)\|_H^2 &= \langle K_1(\cdot, y) - K_2(\cdot, y), K_1(\cdot, y) - K_2(\cdot, y) \rangle_H \\ &= \langle K_1(\cdot, y) - K_2(\cdot, y), K_1(\cdot, y) \rangle - \langle K_1(\cdot, y) - K_2(\cdot, y), K_2(\cdot, y) \rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

Siendo  $K_1(x, y)$  y  $K_2(x, y)$  kernels de reproducción se tiene al mismo tiempo que

$$K_1(y, y) - K_2(y, y) = \langle K_1(\cdot, y) - K_2(\cdot, y), K_1(\cdot, y) \rangle$$

y

$$K_1(y, y) - K_2(y, y) = \langle K_1(\cdot, y) - K_2(\cdot, y), K_2(\cdot, y) \rangle$$

Por lo tanto (1.4) se anula y  $K_1 = K_2$ . ■

**Proposición 18** Si  $K(x, y)$  es un núcleo de reproducción para el espacio de Hilbert  $H$  compuesto de funciones sobre  $E$ , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $K(x, y) = \langle K(\cdot, y), K(\cdot, x) \rangle$  para todo  $x, y \in E$



2.  $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$  para todo  $x, y \in E$ ,  $y$
3.  $K(y, y) \geq 0, \forall y \in E$ ; además,  $K(y, y) = 0 \Leftrightarrow K(x, y) = 0 \forall x \in E$

**Prueba.**

1. Como  $K(\cdot, y) \in H$ , de la propiedad de reproducción de  $K$  se sigue que  $K(x, y) = \langle K(\cdot, y), K(\cdot, x) \rangle$
2. De las propiedades de producto interno y de (1.) vemos que

$$K(x, y) = \langle K(\cdot, y), K(\cdot, x) \rangle = \overline{\langle K(\cdot, x), K(\cdot, y) \rangle} = \overline{K(y, x)}$$

3. Si  $y \in E$ , entonces  $K(y, y) = \langle K(\cdot, y), K(\cdot, y) \rangle = \|K(\cdot, y)\|^2 \geq 0$ . En particular,  $K(y, y) = \|K(\cdot, y)\|^2 = 0 \Leftrightarrow K(x, y) = 0 \forall x \in E$ .

■

**Teorema 19 (Criterio de Existencia)** Sea  $H$  un espacio de Hilbert compuesto de funciones complejas sobre  $E$ . Entonces,

$H$  admite un núcleo de reproducción  $K(x, y) \Leftrightarrow$  para todo  $y \in E$ ,  $f \mapsto f(y)$  es un funcional lineal acotado sobre  $H$ .

**Prueba.** Supongamos que  $H$  admite un núcleo de reproducción  $K(x, y)$  y sea  $y \in E$  fijo. Claramente el funcional  $f \mapsto f(y)$  es lineal. Además, de la propiedad de reproducción de  $K$  y de la desigualdad de Schwarz se sigue que

$$|f(y)| = |\langle f(\cdot), K(\cdot, y) \rangle| \leq \|f\| \|K(y, y)\|^{1/2}$$

Por lo tanto,  $f \mapsto f(y)$  un funcional lineal acotado.

Ahora supongamos que para todo  $y \in E$  fijo, el funcional lineal  $f \mapsto f(y)$  es acotado. Luego, del teorema de representación de Riesz, existe un único elemento  $u_y \in H$  tal que  $f(y) = \langle f, u_y \rangle$  para todo  $f \in H$ . Haciendo,  $K(x, y) = u_y(x)$ , se tiene que  $K$  es un kernel de reproducción para  $H$ . ■

**Definición 20** Una matriz positiva sobre  $E$  es una función hermitiana  $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  tal que para todo conjunto finito  $\{x_j\}_{j=1}^n \subset E$  y números complejos arbitrarios  $\{c_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}$  se cumple

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \overline{c_k} K(x_k, x_j) \geq 0.$$

**Proposición 21** Todo kernel de reproducción es una matriz positiva.

**Prueba.** De la Proposición 18 (2),  $K$  es una función hermitiana. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sean  $\{x_j\}_{j=1}^n \subset E$ ,  $\{c_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}$  puntos arbitrarios, luego

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| \sum_{j=1}^n c_j K(\cdot, x_j) \right\|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^n c_j K(\cdot, x_j), \sum_{k=1}^n c_k K(\cdot, x_k) \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k \langle K(\cdot, x_j), K(\cdot, x_k) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k K(x_k, x_j) \end{aligned}$$

■

**Corolario 22** Si  $K(x, y)$  es un núcleo de reproducción, entonces  $|K(x, y)|^2 \leq K(x, x)K(y, y)$

**Prueba.** Si  $|K(x, y)| = 0$ , el resultado se sigue de la Proposición 18 (3). Si no, tomamos  $n = 2$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ , entonces, como  $K$  es una matriz positiva,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k K(x_k, x_j) \\ &= K(x, x)|c_1|^2 + K(x, y)\bar{c}_1 c_2 + K(y, x)c_1 \bar{c}_2 + K(y, y)|c_2|^2 \end{aligned}$$

Tomando  $c_1 = t \in \mathbb{R}$  y  $c_2 = \frac{K(y, x)}{|K(x, y)|}$ , tenemos

$$K(x, x)t^2 + 2|K(x, y)|t + K(y, y) \geq 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

Este polinomio en  $t$ , con coeficientes reales, es no negativo si y sólo si  $|K(x, y)|^2 - K(x, x)K(y, y) \leq 0$  ■

**Teorema 23 (Teorema Fundamental)** Sea  $K(x, y)$  una matriz positiva sobre un conjunto  $E$ , entonces existe un único espacio de Hilbert  $H$  que consta de funciones complejas sobre  $E$  que admite a  $K$  como kernel de reproducción.

**Prueba.** (Esquema de la prueba)

1. **Construimos un espacio con producto interno.**

Definimos la clase  $H_1$  de todas las funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^n K(x, y_j) \beta_j$$

para algún  $n \in \mathbb{N}$ , y  $\{y_j\}_{j=1}^n \subset E$ ,  $\{\beta_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}$ .

Dotamos esta clase con el producto interno:

Para  $f_1(x) = \sum_{j=1}^{n_1} K(x, y_j) \alpha_j$  y  $f_2(x) = \sum_{k=1}^{n_2} K(x, z_k) \beta_k$

$$\langle f_1, f_2 \rangle_1 = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} K(z_k, y_j) \alpha_j \overline{\beta_k}$$

Y la norma inducida:  $\|f\|_1 = \langle f, f \rangle_1$ .

En general, el espacio  $(H_1, \|\cdot\|_1)$  no es completo, así que construiremos su completación.

## 2. Completación del espacio $H_1$

Consideramos las sucesiones de Cauchy en  $H_1$ . La desigualdad

$$|f(x)| \leq \sqrt{K(x, x)} \|f\|_1, \forall x \in E$$

implica que toda sucesión de Cauchy converge puntualmente.

Llamamos  $H$  a la clase de todas las funciones que son límites de sucesiones de Cauchy en  $H_1$ .

Para  $f, g \in H$ , con  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  y  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ ,  $\{f_n\}, \{g_n\} \subset H_1$  sucesiones de Cauchy, definimos el producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle_1$$

Claramente  $H_1 \subset H$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_1$  sobre  $H_1$ .

Como  $H_1$  es denso en  $H$ , se deduce que  $H$  es completo.

Y  $H$  admite el kernel de reproducción  $K$ , pues

$$\begin{aligned} f(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k K(y, y_k^n) \beta_k^{(n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(\cdot), N(\cdot, y) \rangle_1 = \langle f(\cdot), K(\cdot, y) \rangle, \end{aligned}$$

Para todo  $f \in H$ .

## 3. Unicidad del espacio de Hilbert $H$

Supongamos que existe otro espacio de Hilbert  $H'$  que admite el kernel de reproducción  $K(x, y)$ . Entonces  $H'$  contiene a las funciones  $u_y = K(\cdot, y)$  y sus combinaciones lineales finitas, es decir  $H_1 \subset H'$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_1$  sobre  $H_1$ .

Como  $\{u_y\}$  forman un sistema completo en  $H'$ , entonces  $H_1$  es denso en  $H'$ . Luego, todo elemento de  $H'$  es límite de una sucesión de Cauchy en  $H_1$ .

Por lo tanto  $H = H'$  y se sigue el teorema.

■  
**Teorema 24** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $H_K \subset H$  un subespacio (i.e. una subvariedad lineal cerrada). Si  $H_K$  admite un kernel de reproducción  $K(x, y)$ , entonces la aplicación  $\Pi : H \rightarrow H$  dada por

$$(\Pi f)(y) = \langle f(\cdot), K(\cdot, y) \rangle \text{ para } f \in H$$

define un operador de proyección ortogonal sobre  $H_K$ .

**Prueba.** El espacio  $H$  se descompone en suma directa  $H = H_K \oplus H_K^\perp$ . Es decir, toda  $f \in H$  se descompone de manera única como  $f = f_K + f_K^\perp$ , con  $f_K \in H_K$  y  $f_K^\perp \in H_K^\perp$ . Luego

$$\begin{aligned} (\Pi f)(y) &= \langle f(\cdot), K(\cdot, y) \rangle = \langle f_K + f_K^\perp, K(\cdot, y) \rangle \\ &= \langle f_K, K(\cdot, y) \rangle + \langle f_K^\perp, K(\cdot, y) \rangle \\ &= \langle f_K, K(\cdot, y) \rangle = f_K(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\Pi f = f_K$ , i.e.  $\Pi$  es una proyección ortogonal. ■

### Ejemplo 3 Kernel de Szëgo [10]

Sea  $\Omega$  un dominio acotado en el plano complejo tal que su frontera  $\partial\Omega$  es una curva suave. Consideremos el espacio de Hilbert

$$\mathcal{L}^2(\partial\Omega) = \left\{ f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|^2 = \int_{\partial\Omega} |f(z)|^2 dz < \infty \right\}$$

y el subespacio cerrado de  $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$

$$\mathcal{H}^2(\partial\Omega) = \{ f \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega) \mid f \text{ se extiende analíticamente a } \Omega \},$$

llamado espacio de Szëgo.

Si  $u \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$  y  $a \in \Omega$ , de la fórmula de Cauchy  $u^2(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{u^2(z)}{z-a} dz$  se deduce que

$$|u(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{dist}(a, \partial\Omega)}} \|u\|$$

Luego, por el criterio de existencia (Teorema 19), existe un kernel de reproducción  $K(x, y)$  para  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ , llamado kernel de Szëgo. El operador  $(\Pi f)(y) = \langle f(\cdot), K(\cdot, y) \rangle$  proyecta  $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$  en  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ .

#### Ejemplo 4 Kernel de Bergman

Sea  $\Omega$  un dominio acotado como en el ejemplo anterior. Consideremos el espacio de Hilbert  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ . El espacio de Bergman es el subespacio cerrado de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ :

$$\mathcal{AL}^2(\Omega) = \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega) : f \text{ es analítica en } \Omega\}.$$

Sean  $f \in \mathcal{AL}^2(\Omega)$  y  $z \in \Omega$ , entonces del teorema del valor medio,  $f^2(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} f^2(z) dz$ , se sigue que

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{\partial D} |f(z)|^2 dz} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|$$

Por lo tanto,  $\mathcal{AL}^2(\Omega)$  admite un kernel de reproducción  $K(z, u)$ , llamado kernel de Bergman.

Si  $G(z, u)$  es la función de Green para la ec. de Laplace en  $\Omega$ , definimos

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Entonces se tiene la identidad fundamental (Schiffer)

$$K(z, u) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 G(z, u)}{\partial z \partial \bar{z}}$$

## 1.4. Funciones Elípticas: Introducción a la Teoría de Weierstrass

En esta sección se presenta una exposición elemental sobre la Teoría de Funciones Elípticas, según las investigaciones de Weierstrass. Sólo se exponen los resultados que serán necesarios para comprender el material contenido en los próximos capítulos, suponiendo que el lector conoce los conceptos básicos de la Teoría de Funciones de Variable Compleja.

### 1.4.1. Preliminares

#### LATICES

**Definición 25** Una latiz del plano complejo es un subconjunto  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}$  tal que

- i.  $\mathcal{L}$  es un grupo con respecto a la suma, y
- ii. existe  $k > 0$  tal que para todo elemento no nulo  $z \in \mathcal{L}$ , se tiene  $|z| \geq k$ .

**Observación 1** Una latiz  $\mathcal{L}$  puede ser:

1. Trivial, cuando  $\mathcal{L} = 0$ .
2. Simple, cuando existe  $\omega \in \mathbb{C}$  no cero, tal que  $\mathcal{L} = \{m\omega \mid m \in \mathbb{Z}\}$ . Dicho elemento generador  $\omega$  claramente es único, salvo por un signo.
3. Doble, si existen  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ , tales que  $\mathcal{L} = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Proposición 26** Sea  $\mathcal{L}$  una latiz doble, generada por  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ . Si  $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$  cumplen  $ps - qr = \pm 1$ , entonces  $\omega'_1 = p\omega_1 + q\omega_2, \omega'_2 = r\omega_1 + s\omega_2$  son también generadores de  $\mathcal{L}$ .

**Prueba.**

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $ps - qr = 1$ . Entonces, resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= p\omega_1 + q\omega_2 \\ \omega'_2 &= r\omega_1 + s\omega_2\end{aligned}$$

para  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se tiene

$$\begin{aligned}\omega_1 &= s\omega'_1 - q\omega'_2 \\ \omega_2 &= -r\omega'_1 + p\omega'_2\end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier combinación lineal de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , con coeficientes enteros, es también combinación lineal con coeficientes enteros de  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$ . Es decir,  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$  son generadores de la latiz doble  $\mathcal{L}$ . ■

Sea  $\mathcal{L}$  una latiz compleja y sea  $z \in \mathbb{C}$ . El conjunto  $z + \mathcal{L} = \{z + \omega \mid \omega \in \mathcal{L}\}$  lo llamamos *clase residual* (mod  $\mathcal{L}$ ).

**Definición 27** Dada una latiz  $\mathcal{L}$ , llamaremos *región fundamental de  $\mathcal{L}$*  a cualquier subconjunto simplemente conexo del plano complejo que contenga exactamente un miembro de cada clase residual (mod  $\mathcal{L}$ ).

Para la latiz trivial, cada clase residual consiste de un sólo punto y la única región fundamental en este caso es todo el plano complejo. Si  $\mathcal{L}$  es una latiz simple generada por  $\omega$ , toda región fundamental asociada es una banda infinita, cuya frontera son dos curvas paralelas y ajenas, una de las cuales se obtiene al sumar  $\omega$  a los puntos de la otra.

Por otro lado, si  $\mathcal{L}$  es una latiz doble, existen muchos tipos de regiones fundamentales. La más simple, llamada *celda unitaria*, es un paralelogramo  $P_z = \{z + s\omega_1 + t\omega_2 \mid s, t \in [0, 1)\}$ , donde  $z$  es cualquier punto en  $\mathbb{C}$  y  $\omega_1, \omega_2$  cualquier par de generadores de  $\mathcal{L}$ .

### SUMAS SOBRE LATICES

Si  $\mathcal{L}$  es una latiz y  $f$  una función de variable compleja, denotaremos por  $\sum_{\omega \in \mathcal{L}} f(\omega)$  la suma de  $f$  sobre todos los elementos de  $\mathcal{L}$ ; denotamos por  $\sum_{\omega \in \mathcal{L}'} f(\omega)$  la suma sobre todos los elementos no nulos de  $\mathcal{L}$ .

**Lema 28** *Para cualquier latiz  $\mathcal{L}$  y cualquier número entero  $n > 2$ , la serie  $S_n = \sum_{\omega \in \mathcal{L}'} \frac{1}{\omega^n}$  es converge absolutamente.*

**Prueba.** Sabemos que la serie  $s_n = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$  converge absolutamente para  $n > 1$ . Si  $\mathcal{L}$  es simple generada por  $\omega$ , entonces para  $n$  par,  $S_n = \frac{1}{\omega^n} s_n$ ; y para  $n$  impar  $S_n = 0$  pues los términos  $\frac{1}{(r\omega)^n}$  y  $\frac{1}{(-r\omega)^n}$  se cancelan.

Si  $\mathcal{L}$  es doble, generada por  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , entonces los puntos de la latiz pueden distribuirse en conjuntos ajenos sobre los perímetros de una sucesión de paralelogramos concéntricos, similares a la celda unitaria. Aquellos puntos sobre el  $k$ -ésimo paralelogramo son de la forma  $p\omega_1 + q\omega_2$ , donde  $|p|, |q| \leq k$  y al menos uno es igual a  $k$ .

Denotemos por  $\sum_k f(\omega)$  la suma de  $f$  sobre los  $\omega$  en el  $k$ -ésimo paralelogramo; luego,

$$\sum_{\omega \in \mathcal{L}'} f(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_k f(\omega)$$

Si  $h$  es la menor altura de la celda unitaria (i.e. la menor de las distancias entre lados opuestos de la celda unitaria), entonces todo punto  $\omega$  sobre el  $k$ -ésimo paralelogramo satisface  $|\omega| \geq kh$  y hay  $8k$  de estos puntos. Luego,

$$\sum_k \frac{1}{|\omega|^n} < \frac{8k}{(kh)^n} = \frac{8}{k^{n-1}h^n}$$

de donde

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_k \frac{1}{|\omega|^n} < \frac{8}{h^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n-1}}$$

Como la serie a la derecha es absolutamente convergente, también lo es  $S_n$ . ■

## FUNCIONES Y PERÍODOS

**Definición 29** Sea  $f$  una función de variable compleja. Un período de  $f$  es una constante  $\omega$  tal que  $f(z + \omega) = f(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

La suma de dos períodos claramente es un período; y si  $\omega$  es un período, también lo es  $-\omega$ . Por lo tanto, el conjunto de períodos de una función forma un grupo bajo la suma.

**Lema 30** Supongamos que una función  $f$  tiene un período  $\omega \neq 0$  y es derivable en una región  $\mathbf{R}$ . Si el conjunto de sus períodos no nulos no es acotado inferiormente, entonces  $f$  es constante en  $\mathbf{R}$ .

**Prueba.** Sea  $\Omega$  el conjunto de períodos de  $f$ . Si  $\Omega \setminus \{0\}$  no es acotado inferiormente, existe una sucesión  $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega \setminus \{0\}$  tal que  $\omega_n \rightarrow 0$ . Sea  $z \in \mathbf{R}$ , como  $\omega_n$  es un período para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z + \omega_n) - f(z)}{\omega_n} = 0.$$

Por lo tanto  $f$  es constante en  $\mathbf{R}$ . ■

Una consecuencia inmediata de este lema es el siguiente

**Corolario 31** El conjunto de períodos de una función meromorfa no constante forma una latiz.

El cero es un período de toda función; si es el único, la función se llama *no periódica*. Si una función tiene una latiz simple o doble de períodos, la llamamos *simplemente* y *doblemente* periódica, respectivamente.

### 1.4.2. Funciones Elípticas

**Definición 32** Una función elíptica es una función de variable compleja, meromorfa en todo el plano y doblemente periódica.

Sea  $f$  una función elíptica, con latiz de períodos  $\mathcal{L}$ . Como  $f$  es constante en cada clase residual  $z + \mathcal{L}$ , puede pensarse como una función de las clases residuales, en lugar



de los puntos del plano complejo. Es decir, si conocemos una función elíptica en una región fundamental, la conocemos en todo el plano.

A continuación se enuncian algunos resultados conocidos de la teoría de funciones de variable compleja. Se omiten las demostraciones.

**Teorema 33 (Liouville)** *Toda función analítica y acotada en todo el plano complejo es constante.*

**Teorema 34 (Principio del Máximo)** *Toda función analítica en una región finita, incluyendo su frontera, es acotada. Más aún, una tal función alcanza su máximo en la frontera de la región.*

Observamos de lo anterior que una función elíptica, sin clases residuales de polos, es acotada en la región fundamental, y por lo tanto en todo el plano complejo, por lo que debe ser constante.

**Corolario 35** *Si dos funciones elípticas  $f$  y  $g$  tienen la misma latiz de períodos, las mismas clases residuales de polos y las mismas clases residuales de ceros, del mismo orden en cada caso, entonces  $f/g$  es una función constante distinta de cero.*

**Prueba.** Si  $f$  y  $g$  tienen un polo o un cero del mismo orden en un punto  $u \in \mathbb{C}$ , entonces  $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$  es analítica, no cero y doblemente periódica en  $z = u$ . Por la observación anterior,  $h$  debe ser constante. ■

**Corolario 36** *Si dos funciones elípticas  $f$  y  $g$  tienen la misma latiz de períodos, las mismas clases residuales de polos, con la misma parte principal en cada polo, entonces  $f - g$  es una función constante.*

**Prueba.** Sea  $u$  un polo de  $f$  y  $g$ . Como  $f$  y  $g$  tienen la misma parte principal en  $u$ , entonces  $h(z) = f(z) - g(z)$  es analítica en  $z = u$ . Luego,  $h$  es analítica en todo el plano y doblemente periódica. ■

La siguiente proposición es simple pero importante; su demostración se omite.

**Proposición 37** *La clase de funciones elípticas con latiz de períodos común  $\mathcal{L}$  es cerrada bajo suma, resta, multiplicación, división (por divisores no nulos) y diferenciación.*

**Teorema 38** *Sea  $\mathbf{R} \subset \mathbb{C}$  una región simplemente conexa, delimitada por una curva  $\mathbf{C}$ . Sea  $f$  una función meromorfa en  $\mathbf{R}$ , con ceros de orden  $m_1, m_2, \dots, m_h$  en  $a_1, a_2, \dots, a_h$ , polos de orden  $n_1, n_2, \dots, n_k$  en  $b_1, b_2, \dots, b_k$  con residuos  $r_1, r_2, \dots, r_k$ , respectivamente. Todos los polos y ceros en  $\mathbf{R}$  y no en  $\mathbf{C}$ . Entonces,*

$$1. \int_{\mathbf{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k r_j.$$

$$2. \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left( \sum_{j=1}^h m_j - \sum_{l=1}^k n_l \right).$$

De este teorema clásico de variable compleja se deduce lo siguiente.

**Teorema 39** *Sea  $f$  una función elíptica con latiz de períodos  $\mathcal{L}$ . Supongamos que  $f$  tiene ceros de orden  $m_1, m_2, \dots, m_h$  en las clases residuales  $a_1 + \mathcal{L}, a_2 + \mathcal{L}, \dots, a_h + \mathcal{L}$ , polos de orden  $n_1, n_2, \dots, n_k$  en las clases residuales  $b_1 + \mathcal{L}, b_2 + \mathcal{L}, \dots, b_k + \mathcal{L}$  con residuos  $r_1, r_2, \dots, r_k$ , respectivamente. Entonces,*

$$1. \sum_{j=1}^k r_j = 0.$$

$$2. \sum_{j=1}^h m_j = \sum_{l=1}^k n_l.$$

**Prueba.** Supongamos que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son generadores de la latiz de períodos  $\mathcal{L}$ . Sea  $C$  el contorno de una celda unitaria, empezando en un punto  $c$  y siguiendo el paralelogramo hacia  $c + \omega_1$ ,  $c + \omega_1 + \omega_2$ ,  $c + \omega_2$  y de vuelta a  $c$ . Escogemos  $c$  para que el contorno no pase por ningún cero o polo. Si  $\phi$  es cualquier función de variable compleja, haciendo cambios de variable y agrupando términos se tiene

$$\int_C \phi(z) dz = \int_c^{c+\omega_1} (\phi(z) - \phi(z + \omega_2)) dz + \int_c^{c+\omega_2} (\phi(z + \omega_1) - \phi(z)) dz \quad (1.5)$$

Como  $f$  es una función elíptica con latiz de períodos  $\mathcal{L}$  generada por  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , entonces  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  también lo es. Luego, si tomamos  $\phi(z) = f(z)$  o  $\phi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ , las integrales a la derecha de (1.5) se anulan, de donde se obtienen los resultados 1 y 2 del teorema. ■

**Definición 40** *El número de clases residuales de polos de una función elíptica, contados un número de veces igual a su orden, se llama el orden de la función. Es decir, si  $f$  es una función elíptica con polos de orden  $n_1, n_2, \dots, n_k$  en una región fundamental de su latiz de períodos, el orden de  $f$  es  $n = \sum_{j=1}^k n_j$ .*

**Teorema 41** *Ninguna función elíptica puede tener orden 1.*

**Prueba.** Una función elíptica de orden 1 tendría una sola clase residual de polos simples, digamos  $a + \mathcal{L}$ . Por tratarse de un polo simple, el residuo de  $f$  en  $a$  tiene la forma  $\frac{b}{z-a}$ , con  $b \neq 0$ . Esto contradice el resultado 1 del Teorema 39. ■

## LA FUNCIÓN ELÍPTICA DE WEIERSTRASS

**Teorema 42** Sea  $\mathcal{L}$  una latiz doble. La serie

$$f(z) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}} \frac{1}{(z - \omega)^3} \quad (1.6)$$

es una función meromorfa, cuyos polos son de orden 3 y coinciden con los puntos de  $\mathcal{L}$ .

**Prueba.** Sea  $R > 0$ . Escribimos

$$f(z) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}, |\omega| \leq 2R} \frac{1}{(z - \omega)^3} + \sum_{\omega \in \mathcal{L}, |\omega| > 2R} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

Probaremos que la serie

$$\sum_{\omega \in \mathcal{L}, |\omega| > 2R} \frac{1}{(z - \omega)^3} \quad (1.7)$$

es absoluta y uniformemente convergente en el disco  $D(0, R)$ :

Supongamos que  $|z| \leq R$  y que  $|\omega| > 2R$ . Entonces

$$(|\omega| - |z|)^3 = \left(1 - \frac{|z|}{|\omega|}\right)^3 |\omega|^3 > \left(1 - \frac{R}{2R}\right)^3 |\omega|^3 = \frac{|\omega|^3}{8}.$$

Como  $(|\omega| - |z|)^3 \leq |z - \omega|^3$ , de la desigualdad anterior y del Lema 28 se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \mathcal{L}, |\omega| > 2R} \frac{1}{|z - \omega|^3} &\leq \sum_{\omega \in \mathcal{L}, |\omega| > 2R} \frac{1}{(|\omega| - |z|)^3} \\ &= \sum_{\omega \in \mathcal{L}, |\omega| > 2R} \frac{1}{\left(1 - \frac{|z|}{|\omega|}\right)^3 |\omega|^3} \\ &< \sum_{\omega \in \mathcal{L}, |\omega| > 2R} \frac{8}{|\omega|^3} < \infty. \end{aligned}$$

De modo que la serie (1.7) representa una función analítica en  $D(0, R)$ . Además, (1.7) difiere de  $f(z)$  en la función racional

$$\sum_{\omega \in \mathcal{L}, |\omega| \leq 2R} \frac{1}{(z - \omega)^3},$$

cuyas únicas singularidades son polos de orden 3, en los puntos de  $\mathcal{L} \cap D(0, R)$ . Dado que  $R > 0$  es arbitrario, entonces  $f(z)$  es una función meromorfa en todo el plano complejo, con polos de orden 3 en los puntos de  $\mathcal{L}$ , como afirma el teorema. ■

**Observación 2** Consideremos la función  $f$  definida en (1.6). De la igualdad de conjuntos  $\mathcal{L} = -\mathcal{L}$  se sigue que

$$f(-z) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}} \frac{1}{(-z - \omega)} = - \sum_{\omega \in \mathcal{L}} \frac{1}{(z - (-\omega))} = - \sum_{\omega \in \mathcal{L}} \frac{1}{(z - \omega)} = -f(z).$$

Es decir,  $f$  es una función impar. Ahora, supongamos que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son un par de generadores de  $\mathcal{L}$ . Luego,  $\mathcal{L} - \omega_j = \mathcal{L}$ , para  $j = 1, 2$ . De donde,

$$f(z + \omega_j) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}} \frac{1}{(z + \omega_j - \omega)} = \sum_{\omega \in \mathcal{L}} \frac{1}{(z - (\omega - \omega_j))} = \sum_{\omega \in \mathcal{L}} \frac{1}{(z - \omega)} = f(z), \quad j = 1, 2.$$

Esto es,  $f$  es una función doblemente periódica. En resumen,  $f$ , siendo meromorfa y doblemente periódica, es una función elíptica y además impar. Su orden es 3, ya que sus polos son de orden 3 y coinciden con los puntos de  $\mathcal{L}$ .

Ahora usaremos la función  $f$  para construir una función elíptica de orden 2. Sean  $z_0 \in \mathbb{C}$  un punto arbitrario no perteneciente a la latiz  $\mathcal{L}$  y  $\gamma$  una curva suave que une  $z_0$  y otro punto  $z \in \mathbb{C}$  sin pasar por ningún polo de  $f$ . Integrando  $f$  término a término a lo largo de  $\gamma$  obtenemos

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz + c = -\frac{1}{2} \sum_{\omega \in \mathcal{L}} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{(z_0 - \omega)^2} \right] + c. \quad (1.8)$$

Como la serie (1.6) converge uniformemente en todo compacto ajeno a  $\mathcal{L}$ , lo mismo es cierto de la serie (1.8). Luego,  $\varphi(z)$  es meromorfa con sus polos sobre  $\mathcal{L}$ . Reescribimos  $\varphi(z)$  como sigue

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \mathcal{L}'} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{(z_0 - \omega)^2} \right] + c, \quad (1.9)$$

recalcando que la suma a la derecha se toma sobre los elementos no cero de  $\mathcal{L}$ . Notemos que  $\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}$  es una función meromorfa, que es regular en el origen, donde toma el valor

$$\left[ \varphi(z) + \frac{1}{2z^2} \right] \Big|_{z=0} = \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \mathcal{L}'} \left[ \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(z_0 - \omega)^2} \right] + c. \quad (1.10)$$

Tomando la constante  $c$  de manera que (1.10) se anule y calculando la resta (1.8) menos la derecha de (1.10) obtenemos

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathcal{L}'} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \right\} \quad (1.11)$$

La función que aparece entre llaves en (1.11), es decir  $-2\wp(z)$ , se llama *función elíptica de Weierstrass* y se denota por  $\wp$ . Esto es, por definición,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathcal{L}'} \left[ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]. \quad (1.12)$$

Claramente  $\wp(z)$  es una función meromorfa, cuyos polos son todos de orden 2 y coinciden con los puntos de  $\mathcal{L}$ . En cada punto de  $\mathcal{L}$ , la parte principal de  $\wp(z)$  es

$$\frac{1}{(z-\omega)^2}.$$

**Lema 43** *La serie en (1.12) es absolutamente convergente.*

**Prueba.** El omitir un número finito de términos no afecta la convergencia absoluta de la serie. Consideremos sólo los términos tales que  $|\omega| > 2|z|$ ; entonces

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{(2\omega-z)z}{\omega^2(z-\omega)^2} \right| \leq \frac{2|\omega|(1+\frac{|z|}{2|\omega|})|z|}{|\omega|^4(1-\frac{|z|}{|\omega|})^2} < \frac{10|z|}{|\omega|^3}$$

La prueba se sigue del Lema 28 y del criterio de comparación. ■

**Teorema 44** *La función de Weierstrass  $\wp(z)$  es una función elíptica par, de orden 2 y con latiz de períodos  $\mathcal{L}$ .*

**Prueba.** Probaremos primero la paridad:

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathcal{L}'} \left[ \frac{1}{(-z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathcal{L}'} \left[ \frac{1}{(z-(-\omega))^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] = \wp(z),$$

dado que  $-\mathcal{L} = \mathcal{L}$ . Por lo tanto  $\wp$  es par. Derivemos ahora la función de Weierstrass

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - \sum_{\omega \in \mathcal{L}'} \frac{2}{(z-\omega)^3} = -2f(z),$$

donde  $f$  es la función definida en (1.6). De acuerdo con la Observación 2,  $f$  es doblemente periódica, con latiz de períodos  $\mathcal{L}$ . Supongamos que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son un par de generadores de  $\mathcal{L}$ , luego

$$\wp'(z + \omega_j) - \wp'(z) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Integrando esta igualdad se tiene

$$\wp(z + \omega_j) - \wp(z) = c_j, \quad j = 1, 2.$$

De la paridad de  $\wp$  se deduce que  $c_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ , y de ello la periodicidad doble de  $\wp$ . Finalmente, como todos los polos de  $\wp$  son de orden 2 y coinciden con  $\mathcal{L}$ , la única clase residual de polos es  $0 + \mathcal{L}$ . Por lo tanto,  $\wp$  es una función elíptica de orden dos. ■

### EL CAMPO DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

Hemos visto que el conjunto de todas las funciones elípticas, con latiz de períodos  $\mathcal{L}$  dada, forma un campo (Proposición 37). Denotaremos dicho campo por  $E(\mathcal{L})$ . Del mismo modo, el conjunto de todas las funciones meromorfas en todo el plano forma un campo, del cual  $E(\mathcal{L})$  forma un subcampo, para cualquier latiz  $\mathcal{L}$  dada. El campo  $E(\mathcal{L})$  contiene al campo de los números complejos (las funciones constantes), por lo que puede considerarse una extensión de  $\mathbb{C}$ . A continuación, y para concluir esta sección, se exponen dos propiedades fundamentales que posee la función elíptica de Weierstrass.

**Teorema 45** *Toda función elíptica par puede expresarse como una función racional (con coeficientes complejos) de la función  $\wp z$ , con la misma latiz de períodos.*

**Prueba.** Sea  $f(z)$  una función elíptica par con latiz de períodos  $\mathcal{L}$ . Supongamos que  $f(z)$  tiene ceros de orden  $m_j$  en las clases residuales  $a_j + \mathcal{L}$  ( $j = 1, 2, \dots, h$ ) y polos de orden  $n_j$  en las clases residuales  $b_j + \mathcal{L}$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), aparte de cualquier cero o polo que hubiera en la clase residual nula  $0 + \mathcal{L}$ .

La clase residual nula consiste de polos de orden  $2s$ , o de ceros de orden  $-2s$ , o de puntos regulares, si la diferencia

$$s = \sum_{j=1}^h m_j - \sum_{j=1}^k n_k$$

es positiva, negativa, o cero, respectivamente. Ahora, la función

$$F(z) = \frac{\prod_{j=1}^h (\wp(z) - \wp(a_j))^{m_j}}{\prod_{j=1}^k (\wp(z) - \wp(b_j))^{n_j}}$$

tiene los mismos ceros y polos, del mismo orden, que  $f(z)$ . Luego, por el Corolario 35,  $\frac{f(z)}{F(z)}$  es una constante  $K$ . Es decir,

$$f(z) = K \frac{\prod_{j=1}^h (\wp(z) - \wp(a_j))^{m_j}}{\prod_{j=1}^k (\wp(z) - \wp(b_j))^{n_j}},$$

que es la expresión buscada. ■

**Teorema 46** *Toda función elíptica con latiz de períodos  $\mathcal{L}$  puede expresarse como*

$$P(\wp(z)) + \wp'(z)Q(\wp(z)),$$

donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son funciones racionales con coeficientes complejos.

**Prueba.** Sea  $f(z)$  una función elíptica con latiz de períodos  $\mathcal{L}$ . Sabemos que  $f(z) + f(-z)$  es una función par y que  $f(z) - f(-z)$  es impar. Dado que  $\wp'(z)$  es una función impar, entonces

$$\frac{f(z) - f(-z)}{\wp'(z)}$$

es una función par. Luego, del Teorema 45 se sigue que

$$\frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) = P(\wp(z)) \text{ y que} \quad (1.13)$$

$$\frac{\frac{1}{2}(f(z) - f(-z))}{\wp'(z)} = Q(\wp(z)), \quad (1.14)$$

donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son funciones racionales sobre  $\mathbb{C}$ . De (1.14) se deduce que  $\frac{1}{2}(f(z) - f(-z)) = \wp'(z)Q(\wp(z))$ . Y, sumando esta última igualdad con (1.13), se obtiene

$$f(z) = P(\wp(z)) + \wp'(z)Q(\wp(z)),$$

como afirma el teorema. ■

## Parte II

# Resultados Obtenidos



## Capítulo 2

# El Kernel de Szëgo Discreto

En el presente capítulo expondremos los resultados obtenidos en esta tesis sobre los kernels de reproducción discretos. En particular, obtenemos el análogo discreto del Kernel de Szëgo y estudiaremos algunas de sus propiedades. La teoría expuesta en la Sección 1.1 del Capítulo 1 será necesaria para comprender plenamente el contenido del presente capítulo.

### 2.1. Preliminares

En lo que sigue  $R_s$  denotará una región simple. Fijemos un punto arbitrario  $z_1 \in \partial R_s$  de su frontera. Como  $R_s$  está delimitada por una curva poligonal cerrada, podemos encontrar una cadena cerrada  $\{z_1, z_2, \dots, z_{k+1} = z_1\}$  que pase por cada vértice de  $\partial R_s$ .

**Definición 47** Diremos que la cadena  $\{z_1, z_2, \dots, z_{k+1} = z_1\}$  está orientada en sentido positivo, si recorre  $\partial R_s$  en sentido antihorario; es decir, de manera que el observador que recorre esta cadena, tenga siempre la región a su izquierda.

Sea  $\{z_1, z_2, \dots, z_{k+1} = z_1\}$  una cadena cerrada sobre  $\partial R_s$  orientada en sentido positivo, donde  $z_1$  es el punto fijado arriba. En adelante, identificaremos la cadena semiabierta  $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  con la frontera de  $R_s$ .

**Definición 48** Definimos el espacio de las funciones de cuadrado integrable sobre  $\partial R_s$ , denotado por  $L^2(\partial R_s)$ , como sigue

$$\begin{aligned} L^2(\partial R_s) &= \left\{ f : \partial R_s \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\partial R_s} |f(z)|^2 |dz| < \infty \right\} \\ &= \{f : \partial R_s \rightarrow \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

dotado del producto interior, para  $f, g \in L^2(\partial R_s)$

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\partial R_s} f(z) \overline{g(z)} |dz| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k f(z_j) \overline{g(z_j)} |z_{j+1} - z_{j-1}|,$$

donde  $z_0 = z_k$  y  $z_{k+1} = z_1$ .

**Observación 3** Dado que  $\partial R_s = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  es un conjunto finito, podemos representar una función  $f \in L^2(\partial R_s)$  por los valores que toma en cada punto de  $\partial R_s$ , es decir  $f$  es el  $k$ -vector complejo

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_k), \text{ donde } f_j = f(z_j), j = 1, 2, \dots, k.$$

Luego, podemos identificar el espacio  $[L^2(\partial R_s), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}]$  con el espacio de Hilbert  $[C^k, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}]$ . Por lo tanto  $[L^2(\partial R_s), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}]$  es un espacio de Hilbert de dimensión  $k$ . De hecho, si  $f, g \in C^k = L^2(\partial R_s)$ , entonces  $\langle f, g \rangle_{L^2} = f^t A g$ , donde  $A$  es la matriz diagonal, definida positiva, tal que

$$A_{ii} = \frac{|z_{i+1} - z_{i-1}|}{2} \in \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

**Notación 49** Denotaremos por  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) a las funciones canónicas

$$\begin{cases} \Phi_j : \partial R_s \rightarrow \mathbb{C} \\ \Phi_j(z_i) = \delta_{ij}. \end{cases}$$

que equivalen a los vectores canónicos  $\{e_j\}_{j=1}^k$  de  $C^k$ .

**Definición 50 (Espacio de Szégo)** Definimos el espacio de Szégo, denotado por  $L^2 A(\partial R_s)$ , como sigue

$$L^2 A(\partial R_s) = \{f \in L^2(\partial R_s) \mid \exists F : R_s \rightarrow \mathbb{C} \text{ analítica, con } F|_{\partial R_s} = f\}$$

Es decir,  $L^2 A(\partial R_s)$  consiste de las funciones de cuadrado integrable que se extienden analíticamente al interior de  $R_s$ .

**Proposición 51** Sea  $f \in L^2 A(\partial R_s)$ , entonces su extensión analítica a  $R_s$  es única.

**Prueba.** Supongamos que existen dos extensiones analíticas de  $f$ ,  $F$  y  $G$ , al interior de  $R_s$ , entonces  $F - G$  es analítica sobre  $R_s$ . Luego, por el principio del máximo

$$\max_{R_s} |F - G| = \max_{\partial R_s} |F - G| = \max_{\partial R_s} |f - f| = 0$$

Por lo tanto  $F = G$ . ■

**Observación 4** En virtud de que las funciones analíticas discretas son una variedad lineal y dado que  $L^2(\partial R_s)$  es de dimensión finita, se tiene que  $L^2A(\partial R_s)$  es un subespacio cerrado de  $L^2(\partial R_s)$ , y por lo tanto es un espacio de Hilbert.

**Proposición 52** El espacio de Hilbert  $L^2A(\partial R_s)$  admite un kernel de reproducción (el kernel de Szégo discreto).

**Prueba.** Sea  $z_j \in \partial R_s$ ,  $j \in 1, 2, \dots, k$ . Definimos el funcional lineal

$$\begin{aligned}\varphi_j : L^2A(\partial R_s) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi_j(f) &= f(z_j).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}|\varphi_j(f)|^2 &= |f(z_j)|^2 \leq 2|f(z_j)|^2 |z_{j+1} - z_{j-1}| \\ &\leq \sum_{i=1}^k 2|f(z_i)|^2 |z_{i+1} - z_{i-1}| = 4\|f\|^2,\end{aligned}$$

luego  $|\varphi_j(f)| \leq 2\|f\|$  para todo  $f \in L^2A(\partial R_s)$ .

Es decir  $\varphi_j$  es un funcional lineal acotado para todo  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . En virtud del criterio de existencia (Teorema 19), se sigue que  $L^2A(\partial R_s)$  admite un kernel de reproducción. ■

## 2.2. Aspectos Geométricos

Introduciremos una terminología que servirá para el estudio de la geometría de las regiones simples.

**Definición 53** Sea  $z$  un punto de la malla. Al cuadrado unitario con vértices en  $z, z+1, z+1+i$  y  $z+i$  lo llamaremos el cuadrado unitario asociado a  $z$  o el cuadrado unitario en  $z$ .

**Definición 54** Si una región simple consta de  $k$  cuadrados unitarios, diremos que la región es de orden  $k$ , y denotaremos  $o(R_s) = k$ .

**Definición 55** Sea  $R_s$  una región simple de  $\mathcal{M}$ .

1. Diremos que un cuadrado unitario de  $R_s$  es una esquina exterior si tiene al menos dos lados adyacentes sobre  $\partial R_s$ . Una esquina exterior puede ser de

a) Tipo A. Cuando tiene dos y sólo dos lados sobre  $\partial R_s$  (Figura 2.1).

b) Tipo B. Cuando tiene al menos tres lados sobre  $\partial R_s$  (Figura 2.2).

2. Si dos esquinas exteriores de  $R_s$  coinciden en un sólo vértice de  $\partial R_s$ , diremos que la región tiene una esquina doble (Figura 2.3).

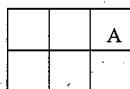


Figura 2.1: Esquina tipo A

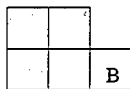


Figura 2.2: Esquina tipo B

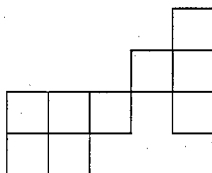


Figura 2.3: Esquina doble

**Lema 56** Sea  $R_s$  una región simple, de orden  $k \geq 2$ , sin esquinas dobles. Entonces es posible encontrar una esquina de  $R_s$  tal que al eliminarla se obtiene una región simple, sin esquinas dobles  $R_s'$ .

**Prueba.**

- Supongamos primero que  $R_s$  tiene una esquina  $C$  de tipo B. Como  $C$  sólo tiene un lado en común con los demás cuadrados de la región, entonces al eliminarla no se afecta la conexidad simple ni tampoco produce una esquina doble. Luego, la región resultante  $R_s'$  es simple y sin esquinas dobles.
- Ahora supongamos que la región  $R_s$  sólo tiene esquinas de tipo A y sea  $C$  una esquina arbitraria de la región. Como  $C$  tiene dos lados adyacentes sobre la frontera, éstos coinciden en un vértice  $z$  de la frontera. Sea  $z'$  el vértice diagonalmente opuesto a  $z$  en  $C$ . Supongamos que  $z'$  es un punto interior de  $R_s$ . Si eliminamos  $C$ ,

la región  $R_s'$  que obtenemos hereda la conexidad simple de  $R_s$  y no tiene esquinas dobles.

Por otro lado, si todas las esquinas de  $R_s$  tienen sus cuatro vértices sobre la frontera, entonces la región encierra al menos un cuadrado unitario no perteneciente a ella (ver un ejemplo en la Figura 2.4), lo cual contradice la conexidad simple de  $R_s$ . Por lo tanto, existe al menos una esquina con un vértice en el interior de  $R_s$ .

Hemos visto que en todos los casos puede eliminarse una esquina y obtener una región simple, sin esquinas dobles. Esto completa la prueba. ■

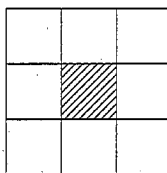


Figura 2.4: Región no simplemente conexa: sus esquinas tienen los cuatro vértices en la frontera; el cuadrado del centro no pertenece a la región.

**Lema 57** Sea  $R_s$  una región simple sin esquinas dobles, entonces  $\text{card}(\partial R_s) = 2n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ .

**Prueba.** La frontera de  $R_s$  es una curva poligonal cerrada y simple. Por lo tanto, por cada lado sobre  $\partial R_s$  que sea lado izquierdo de un cuadrado unitario en  $R_s$ , existe un lado sobre  $\partial R_s$  que sea lado derecho de un cuadrado unitario de la región. Lo mismo sucede con los lados inferiores y superiores. Por lo tanto, el número de lados sobre  $\partial R_s$  es par, digamos  $2n$ . Cada lado termina en dos puntos, dando un total de  $4n$  puntos. Como la región no tiene esquinas dobles, cada punto sobre la frontera pertenece a dos y sólo dos de sus lados. Contando una sola vez cada uno de estos puntos, tenemos  $2n$  puntos sobre  $\partial R_s$ . ■

**Definición 58** Sea  $R_s$  una región simple, sin esquinas dobles. En virtud del lema 57,  $\text{card}(\partial R_s) = 2n$ . Llamaremos el índice de la región, al entero  $n$ , y denotamos  $i(R_s) = n$ .

### 2.3. Una Base para el Espacio de Szëgo

En esta sección, ilustraremos la manera de obtener el *kernel de Szëgo discreto* para una región simple arbitraria  $R_s$ . Para esto, seguiremos los siguientes pasos:

1. Dada una región simple  $\mathbf{R}_s$ , daremos un método para encontrar un subconjunto  $\Omega \equiv \Omega(\mathbf{R}_s) \subset \partial\mathbf{R}_s$  tal que:

$$\begin{aligned} &\text{Para toda función } \hat{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \text{ existe una única función} & (2.1) \\ &f \in L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s), \text{ con } f|_{\Omega} = \hat{f}. \end{aligned}$$

Los valores de  $f$  sobre  $\partial\mathbf{R}_s \setminus \Omega$  son combinaciones lineales de sus valores en  $\Omega$ . Es decir, para cada  $z \in \partial\mathbf{R}_s \setminus \Omega$ , existen números complejos  $\{\alpha_{\omega}(z)\}_{\omega \in \Omega}$  tales que

$$f(z) = \sum_{\omega \in \Omega} \alpha_{\omega}(z) f(\omega). \quad (2.2)$$

2. Una vez encontrado  $\Omega$ , se emplearán las combinaciones lineales dadas en (2.2) para encontrar una base del espacio  $L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s)$ . La cardinalidad del conjunto  $\Omega$  serán los grados de libertad del espacio  $L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s)$ , i.e.  $\text{card}(\Omega) = \text{dim}(L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s))$ .
3. Aplicaremos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal  $B = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  de  $L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s)$ . A partir de esta base ortonormal construiremos el *kernel de Szégo*:

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^n \omega_j(x) \overline{\omega_j(y)}.$$

### 2.3.1. Ejemplos

Introduciremos, mediante los siguientes ejemplos, el método para obtener el conjunto  $\Omega$  definido en (2.1).

**Ejemplo 5** Consideremos una región simple  $\mathbf{R}_s$  de orden 1 (ver Figura 2.5); y sea  $f \in L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s)$  una función arbitraria. Empleamos la ecuación de analiticidad de Duffin,  $f_1 + if_2 - f_3 - if_4 = 0$ , en  $\mathbf{R}_s$  para despejar el valor de  $f$  en uno de los vértices, digamos  $z_3$ , en términos de los otros tres:

$$f_3 = f_1 + if_2 - if_4. \quad (2.3)$$

Así, el valor  $f_3$  queda determinado de manera única por una combinación lineal de los valores  $f_1, f_2, f_4$ . De modo que una función definida de manera arbitraria en los vértices  $z_1, z_2, z_4$  tiene una extensión analítica única a todo  $\partial\mathbf{R}_s$ , que viene dada por (2.3).

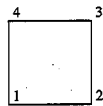


Figura 2.5: Región simple de orden 1.

En este caso sencillo, podemos elegir  $\Omega = \{z_1, z_2, z_4\}$ , y es claro que cumple con (2.1). Notemos también lo siguiente:

- Podemos elegir  $\Omega$  como cualquier otro conjunto de tres vértices de la región; es decir, la elección de  $\Omega$  no es única.
- El conjunto  $\Omega$  no puede contener menos de tres vértices, pues la extensión no sería única; tampoco puede contener los cuatro vértices ya que  $L^2(\partial R_s) \setminus L^2A(\partial R_s) \neq \emptyset$ .

Dado que el conjunto  $\Omega$  no es único, daremos un método general para construir uno que sólo dependa de la región simple y no de una elección particular. En los siguientes ejemplos se esboza este método, que será formalizado más adelante.

**Definición 59** Sea  $R_s$  una región simple y sea  $\Omega$  como en (2.1). Diremos que un vértice de  $\partial R_s$  queda fijo si pertenece a  $\Omega$ ; en otro caso, diremos que el vértice queda determinado.

**Ejemplo 6** Consideremos una región simple  $R_s$  de orden 2, como la que se muestra en la Figura 2.6. Sea  $f \in L^2A(\partial R_s)$  una función arbitraria. Como  $R_s$  no tiene puntos interiores, entonces  $f$  es una función analítica en los cuadrados de la región.

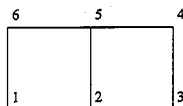


Figura 2.6: Región simple de orden 2.

Comenzamos por fijar los vértices inferiores de la región, es decir  $z_1, z_2$  y  $z_3$ . Después fijamos el primero a la izquierda de los vértices superiores,  $z_6$ . Usamos la analiticidad de  $f$  en el cuadrado izquierdo para expresar su valor en  $z_5$  en términos de los demás:

$$f_5 = f_1 + if_2 - if_6. \quad (2.4)$$

Así, el vértice  $z_5$  queda determinado. Ahora, usando la analiticidad en el cuadrado derecho, podemos expresar el valor  $f_4$  en términos de  $f_2, f_3, f_5$ :

$$f_4 = f_2 + if_3 - if_5. \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.4) en (2.5), se tiene

$$\begin{aligned} f_4 &= f_2 + if_3 - i(f_1 + if_2 - if_6) \\ &= -if_1 + 2f_2 + if_3 - f_6. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Luego, el vértice  $z_4$  queda determinado y hemos acabado:  $\Omega = \{z_1, z_2, z_3, z_6\}$ . Cualquier función definida en  $\Omega$  se extiende analíticamente a  $\partial R_s$ , de manera única, mediante (2.4) y (2.6).

Como ya se ha visto en los dos ejemplos anteriores, el método que se propone aquí consiste, en primer lugar, en fijar los vértices inferiores de la región. Después, se fija el primero a la izquierda de la fila inmediata superior y se usa la analiticidad hacia la derecha para determinar los demás vértices.

Cuando las regiones son rectangulares, como en los ejemplos 5 y 6, el método nos lleva a fijar la fila inferior y columna izquierda, determinando los demás vértices mediante la ecuación de Duffin. Sin embargo, es necesario extender este método a regiones más generales. Esto se ilustrará en un último ejemplo.

**Ejemplo 7** Sea  $R_s$  la región simple de orden 9 de la Figura 2.7. Notemos que los puntos de la frontera son  $\partial R_s = \{z_1, z_2, \dots, z_{14}\}$ , mientras que los puntos interiores de la región son  $z_{15}, z_{16}$  y  $z_{17}$ .

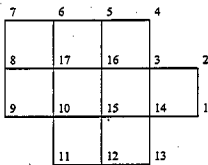


Figura 2.7: Región simple de orden 9.

Comenzamos fijando los puntos inferiores de la región, los cuales se encuentran en la fila inferior. En este caso,  $z_{11}, z_{12}$  y  $z_{13}$ . Después, fijamos el primero a la izquierda de la fila inmediata superior,  $z_9$ . Y, dado que el cuadrado en  $z_9 - i$  no pertenece a la región, el punto  $z_{10}$  no puede determinarse, por lo que debemos fijarlo.

El cuadrado en  $z_{10} - i$  pertenece a  $R_s$ . Usando analiticidad, determinamos el vértice



$z_{15}$  y posteriormente el vértice  $z_{14}$ . Como el cuadrado en  $z_{14} - i$  no está en la región, entonces fijamos el vértice  $z_1$ .

En la siguiente fila hacia arriba hacemos lo mismo. Fijamos el primer vértice a la izquierda, y usamos analiticidad a la derecha para determinar todos los demás vértices de la fila. Y repetimos este procedimiento en la fila superior de la región para concluir.

Haciendo el recuento de los puntos fijados y ordenándolos por subíndice, se obtiene  $\Omega = \{z_1, z_7, z_8, \dots, z_{13}\}$

### 2.3.2. El Método

En vista de los ejemplos anteriores, describiremos el método general para encontrar el subconjunto  $\Omega$  de vértices de la frontera de una región simple  $\mathbf{R}_s$ , que cumpla con las condiciones (2.1). Para ello hace falta introducir algo de terminología y notación.

Sea  $\mathbf{R}_s$  una región simple y supongamos su frontera  $\partial\mathbf{R}_s = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  orientada de forma positiva. Denotaremos por  $V(\mathbf{R}_s)$  (o simplemente  $V$ , cuando sea claro del contexto) al conjunto de vértices de la región.

Sean

$$\begin{aligned} y_{\min} &= \min\{y \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in \mathbb{Z} \text{ con } (x, y) \in V\}, \\ y_{\max} &= \max\{y \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in \mathbb{Z} \text{ con } (x, y) \in V\} \text{ y} \\ h &= y_{\max} - y_{\min}. \end{aligned}$$

Para  $p \in \{0, 1, \dots, h\}$ , llamaremos *conjunto de vértices de altura  $p$*  a  $V_p \equiv V_p(\mathbf{R}_s)$ , definido por

$$V_p := \{(x, y) \in V \mid y = y_{\min} + p\}$$

Ordenando los puntos de  $V_p$  por su parte real, escribimos

$$V_p = \{v_{p,1}, v_{p,2}, \dots, v_{p,l_p}\},$$

donde  $l_p = \text{card}(V_p)$  y  $\Re v_{p,1} < \Re v_{p,2} < \dots < \Re v_{p,l_p}$ .

Ahora describiremos el método, paso a paso, para encontrar el conjunto  $\Omega$  definido en (2.1).

**Método para encontrar  $\Omega$ :**

1. Altura 0: Fijamos todos los puntos de altura 0; es decir,  $V_0 \subset \Omega$ .

2. Altura  $p$  ( $1 < p \leq h$ ): Se fija el punto  $v_{p,1}$ .

- Si el cuadrado en  $v_{p,1} - i$  pertenece a  $\mathbf{R}_s$ , el punto  $v_{p,1} + 1 = v_{p,2}$  queda determinado; si no, fijamos el punto  $v_{p,2}$ .
- Si el cuadrado en  $v_{p,2} - i$  pertenece a  $\mathbf{R}_s$ , el punto  $v_{p,2} + 1 = v_{p,3}$  queda determinado; si no, fijamos el punto  $v_{p,3}$ .
- ⋮
- Si el cuadrado en  $v_{p,l_p-1} - i$  pertenece a  $\mathbf{R}_s$ , el punto  $v_{p,l_p-1} + 1 = v_{p,l_p}$  queda determinado; si no, fijamos el punto  $v_{p,l_p}$ .

**Observación 5** *Recalamos las siguientes propiedades que posee el método para construir  $\Omega$  descrito arriba.*

- i Los vértices que quedan determinados son aquellos que son esquina superior derecha de un cuadrado unitario de la región. En particular, todos los vértices interiores quedan determinados, lo cual es importante pues sólo debemos fijar vértices de la frontera.*
- ii. Todos los cuadrados unitarios de la región son empleados una sola vez en el proceso para determinar un punto de la región. Esto garantiza que podamos encontrar una extensión en  $L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s)$  para cualquier función definida en  $\Omega$ .*

### 2.3.3. Construcción de una Base para el Espacio de Szëgo

En las secciones anteriores describimos un método para encontrar un subconjunto  $\Omega \subset \partial\mathbf{R}_s$  que cumple las condiciones dadas en (2.1), donde  $\mathbf{R}_s$  era una región simple. Ahora explicaremos la manera en que podemos emplear este conjunto  $\Omega$  para construir una base para el espacio de Szëgo correspondiente.

#### Procedimiento

Sea  $\mathbf{R}_s$  una región simple de la malla y  $\partial\mathbf{R}_s = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  su frontera orientada positivamente. Supongamos que aplicamos a  $\mathbf{R}_s$  el método descrito en la sección anterior, para obtener un subconjunto  $\Omega \subset \partial\mathbf{R}_s$  que cumple (2.1), y sea  $\Delta$  el complemento de  $\Omega$  en  $\partial\mathbf{R}_s$ . Introducimos la siguiente notación para los conjuntos ajenos de índices:

$$I_\Omega = \{j \in \mathbb{N} \mid z_j \in \Omega\}$$

$$I_\Delta = \{j \in \mathbb{N} \mid z_j \in \Delta\},$$

Supongamos que  $f \in L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s)$  es una función dada. Entonces los valores de  $f$  en  $\Delta$  están determinados por una combinación lineal de sus valores en  $\Omega$ , digamos

$$f_i = \sum_{j \in I_\Omega} \alpha_{ij} f_j, \text{ para cada } i \in I_\Delta,$$

donde los coeficientes  $\alpha_{ij}$  no dependen de la función  $f \in L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s)$ , sino sólo de la región simple  $\mathbf{R}_s$  y del conjunto  $\Omega$  que se construyó. Entonces, podemos escribir  $f$  en términos de la base canónica de  $L^2(\partial\mathbf{R}_s)$ ,  $\{\Phi_j\}_{j=1}^k$ , como sigue:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^k f_j \Phi_j \\ &= \sum_{j \in I_\Omega} f_j \Phi_j + \sum_{i \in I_\Delta} f_i \Phi_i \\ &= \sum_{j \in I_\Omega} f_j \Phi_j + \sum_{i \in I_\Delta} \left( \sum_{j \in I_\Omega} \alpha_{ij} f_j \right) \Phi_i \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por otro lado, definimos los siguientes elementos de  $L^2(\partial\mathbf{R}_s)$ :

$$\omega_j = \Phi_j + \sum_{i \in I_\Delta} \alpha_{ij} \Phi_i, \quad j \in I_\Omega$$

El conjunto  $\{\omega_j\}_{j \in I_\Omega}$  es linealmente independiente, ya que la función canónica  $\Phi_j$  sólo aparece en  $\omega_j$ , para cada  $j \in I_\Omega$ . Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_\Omega} f_j \omega_j &= \sum_{j \in I_\Omega} f_j \left[ \Phi_j + \sum_{i \in I_\Delta} \alpha_{ij} \Phi_i \right] \\ &= \sum_{j \in I_\Omega} f_j \Phi_j + \sum_{i \in I_\Delta} \left( \sum_{j \in I_\Omega} \alpha_{ij} f_j \right) \Phi_i \\ &= f \end{aligned}$$

Es decir,  $f$  es combinación lineal de las  $\omega_j$ . Como  $f \in L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s)$  es arbitraria, se sigue que el conjunto  $\{\omega_j\}_{j \in I_\Omega}$  genera al espacio de Szégo,  $L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s)$ , y por lo tanto es una base para este espacio.

**Observación 6** *A partir de todo subconjunto  $\Omega \subset \partial\mathbf{R}_s$  que cumpla con (2.1) se puede construir una base para el espacio de Szégo mediante el procedimiento descrito arriba. En particular, como toda base tiene la misma cardinalidad, todos los conjuntos  $\Omega$  tienen el mismo número de elementos.*

Antes de pasar al resultado más importante de este capítulo, que relaciona la dimensión de  $L^2(\partial R_s)$  con la de  $L^2 A(\partial R_s)$ , ilustraremos con unos ejemplos la manera en que se obtienen los coeficientes  $\alpha_{ij}$  con los cuales se construye la base del espacio de Szégo.

**Ejemplo 8** Volvamos al Ejemplo 5. En primer lugar, tenemos que  $I_\Omega = \{1, 2, 4\}$  y  $I_\Delta = \{3\}$ . La ecuación (2.3) de este ejemplo nos dice cuales son los coeficientes  $\alpha_{ij}$ :

$$\alpha_{3,1} = 1, \quad \alpha_{3,2} = i, \quad \alpha_{3,4} = -i.$$

Así, los elementos de la base de Szégo, dados por  $\omega_j = \Phi_j + \sum_{i \in I_\Delta} \alpha_{ij} \Phi_i$  ( $j \in I_\Omega$ ), son

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Phi_1 + \Phi_3 \\ \omega_2 &= \Phi_2 + i\Phi_3 \\ \omega_4 &= \Phi_4 - i\Phi_3, \end{aligned}$$

según el procedimiento descrito antes.

**Ejemplo 9** Ahora invocamos el Ejemplo 6, en el cual analizamos una región de orden 2. En este caso,  $I_\Omega = \{1, 2, 3, 6\}$  y  $I_\Delta = \{4, 5\}$ . A partir de la ecuación (2.4) deducimos que

$$\alpha_{5,1} = 1, \quad \alpha_{5,2} = i, \quad \alpha_{5,3} = 0, \quad \alpha_{5,6} = -i.$$

y la ecuación (2.6) implica que

$$\alpha_{4,1} = -i, \quad \alpha_{4,2} = 2, \quad \alpha_{4,3} = i, \quad \alpha_{4,6} = -1,$$

Y construimos la base para el espacio de Szégo:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Phi_1 - i\Phi_4 + \Phi_5 \\ \omega_2 &= \Phi_2 + 2\Phi_4 + i\Phi_5 \\ \omega_3 &= \Phi_3 + i\Phi_4 \\ \omega_6 &= \Phi_6 - \Phi_4 - i\Phi_5. \end{aligned}$$

#### 2.3.4. Dimensión del espacio de Szégo

Ahora enunciaremos y probaremos el resultado más importante del capítulo.

**Teorema 60** Sea  $R_s$  una región simple sin esquinas dobles. Entonces,  $\dim(L^2 A(\partial R_s)) = i(R_s) + 1$ .

**Prueba.** Haremos la prueba por inducción sobre el orden de la región  $\mathbf{R}_s$ .

Una región de orden 1 tiene índice 2, y de acuerdo con el ejemplo 5, el espacio de Szégo para este caso es de dimensión  $3 = 2 + 1$ . Es decir, se cumple el resultado para regiones de orden 1.

Ahora supongamos que el resultado es válido para toda región simple de orden  $k \geq 1$ . Sea  $\mathbf{R}_s$  una región de orden  $k + 1$  y supongamos que  $i(\mathbf{R}_s) = n$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$ . En virtud de la Observación 6, basta probar que podemos encontrar un subconjunto  $\Omega$  de cardinalidad  $n + 1$ .

De acuerdo con el Lema 56, podemos elegir una esquina exterior  $\mathcal{C}$  de  $\mathbf{R}_s$  tal que al eliminarla se obtiene una región simple  $\mathbf{R}_s'$  sin esquinas dobles, con  $o(\mathbf{R}_s') = k$ .

**Caso I.** *La esquina  $\mathcal{C}$  es del tipo B.*

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el lado vertical izquierdo de  $\mathcal{C}$  es el que no está en la frontera de  $\mathbf{R}_s$  (ver el ejemplo de la Figura 2.8).

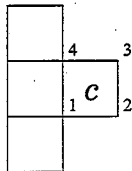


Figura 2.8: Esquina tipo B.

Como los vértices  $z_2$  y  $z_3$  están en la frontera de  $\mathbf{R}_s$  y ellos se eliminan al eliminar  $\mathcal{C}$ , entonces  $\text{card}(\partial\mathbf{R}_s') = 2n - 2 = 2(n - 1)$ ; luego  $i(\mathbf{R}_s') = n - 1$ .

Aplicamos el método descrito en 2.3.2 a  $\mathbf{R}_s'$  para obtener un conjunto  $\Omega'$ . Por hipótesis de inducción  $\text{card}(\Omega') = i(\mathbf{R}_s') + 1 = n$ . Definimos el conjunto

$$\Omega := \Omega' \cup \{z_2\}$$

y probaremos que  $\Omega$  así definido cumple con (2.1):

Definimos arbitrariamente una función  $\hat{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  y sea  $\hat{g} = \hat{f}|_{\Omega'}$ , entonces existe una única función  $g \in L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s')$  con  $g|_{\Omega'} = \hat{g}$ . Definimos ahora la función

$$f' = \begin{cases} g & \text{sobre } \partial\mathbf{R}_s' \\ \hat{f} & \text{en } z_2 \end{cases}$$

Usando la ecuación de analiticidad de Duffin en  $\mathcal{C}$ , extendemos  $f'$  a una función

$f$  definida en  $z_3$  mediante

$$f_3 = f'_1 + if'_2 - if'_4. \quad (2.8)$$

Claramente  $f \in L^2A(\partial R_s)$  y la extensión es única por construcción. Luego, el conjunto  $\Omega$  definido arriba cumple con (2.1). Como  $card(\Omega') = n$ , entonces  $card(\Omega) = n + 1$  y se tiene el resultado en este caso.

Caso II. *La esquina  $C$  es de tipo A.*

Como  $C$  es esquina tipo A y eliminable, entonces uno de su cuatro vértices, digamos  $z_s$ , está en el interior de  $R_s$ . El vértice diagonalmente opuesto se elimina junto con  $C$ , pero la región resultante  $R_s'$  tiene un punto frontera en  $z_s$ . Por lo tanto, el número de vértices frontera no se ve alterado con la eliminación de  $C$ , y por ende tampoco el índice; es decir  $i(R_s') = i(R_s) = n$ .

Al igual que en el caso I, aplicamos el método de 2.3.2 a  $R_s'$  y construimos un conjunto  $\Omega' \subset \partial R_s'$ . Por hipótesis de inducción,  $card(\Omega') = n + 1$ . Analicemos dos subcasos.

**Subcaso 1:** *La esquina  $C$  no es inferior izquierda.*

Dado que  $z_s$  es punto interior de  $R_s$  y  $C$  no es esquina inferior izquierda, el cuadrado unitario en  $z_s - 1 - i$ , del cual  $z_s$  es vértice superior derecho, pertenece a  $R_s'$ . Luego, el método empleado para construir  $\Omega'$  garantiza que el vértice  $z_s$  queda determinado (i.e  $z_s \notin \Omega'$ ). Ver la Figura 2.9 para un ejemplo.

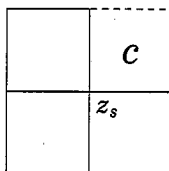


Figura 2.9: Esquina superior derecha tipo A, Subcaso 1.

Hacemos  $\Omega = \Omega'$  y sea  $\hat{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función arbitraria. Por hipótesis de inducción, existe una única  $f' \in L^2A(\partial R_s')$  tal que  $f'|_{\Omega} = \hat{f}$ . Extendemos  $f'$  a una función  $f$  definida en el vértice restante de  $\partial R_s$  mediante la ecuación de Duffin en  $C$ . Como  $f'$  se extiende analíticamente a todo  $R_s'$ , entonces  $f$  tiene extensión analítica a todo  $R_s$ . Esto es,  $f$  es la única función en  $L^2A(\partial R_s)$  tal que  $f|_{\Omega} = \hat{f}$ . Además,  $card(\Omega) = card(\Omega') = n + 1$ , como afirma el teorema.

**Subcaso 2:** *La esquina  $\mathcal{C}$  es inferior izquierda.*

En este subcaso, los cuadrados unitarios a la izquierda y abajo de  $\mathcal{C}$  no pertenecen a  $\mathbf{R}_s'$ ;  $\mathcal{C}$  tampoco pertenece a  $\mathbf{R}_s'$ . Entonces, el método para construir  $\Omega'$  garantiza que los vértices  $z_s$ ,  $z_s - 1$  y  $z_s - i$  quedan fijos (i.e.  $z_s, z_s - 1, z_s - i \in \Omega'$ ). En la Figura 2.10 se muestra un ejemplo.

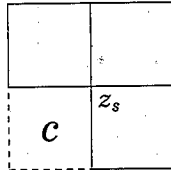


Figura 2.10: Esquina tipo A, Subcaso II.

Sean  $\Omega = (\Omega' \setminus \{z_s\}) \cup \{z_s - 1 - i\}$  y  $\hat{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función arbitraria. Usando la ecuación de analiticidad de Duffin en  $\mathcal{C}$ , extendemos analíticamente  $\hat{f}$  a  $z_s$ . Ahora, sean  $\hat{g} : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\hat{g} = \hat{f}|_{\Omega'}$  y  $g \in L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}'_s)$  su extensión única. Finalmente, definimos

$$f = \begin{cases} \hat{f} & \text{sobre } \Omega \\ g & \text{sobre } \partial\mathbf{R}_s \setminus \Omega \end{cases}$$

Como  $f$  se extiende analíticamente al vértice interior  $z_s$  y  $g$  se extiende analíticamente a todos los demás vértices interiores de  $\mathbf{R}_s$ , entonces  $f \in L^2\mathbf{A}(\partial\mathbf{R}_s)$ . Además,  $\text{card}(\Omega) = \text{card}(\Omega') = n + 1$  como quería demostrarse.

Habiendo agotado todos los casos, hemos probado el teorema. ■

## Capítulo 3

# Funciones Elípticas Discretas

En este capítulo daremos una propuesta para la definición de función elíptica discreta. Introduciremos los conceptos de latiz discreta y su correspondiente región fundamental, en analogía con el caso continuo, así como la noción de una función doblemente periódica discreta.

Como se explicó en el primer capítulo de esta tesis, no pretendemos construir aquí una teoría general sobre funciones elípticas discretas. Esto se debe a que algunos de los retos que se presentan para llegar a una teoría general, requieren de un estudio más profundo y quedan fuera de los límites de esta investigación. Algunas de estas dificultades quedarán de manifiesto en el desarrollo de este capítulo, y se proponen como problemas abiertos para investigaciones futuras.

En cambio, lo que aportamos en este capítulo son algunas ideas sobre las funciones elípticas discretas, que esperamos sean un punto de partida para una investigación más extensa del tema. Desarrollaremos en detalle algunos casos particulares que nos permiten suponer que las definiciones propuestas aquí son viables y razonables. Más aún, la teoría que proponemos surge de una aplicación del concepto de kernel de Szëgo discreto estudiado en el Capítulo 2 de esta tesis. Como se explicará en detalle en seguida, el conjunto de funciones elípticas discretas para una latiz de períodos dada, resulta ser un subespacio del espacio de Szëgo discreto en un región fundamental de dicha latiz.

### 3.1. Latices y Funciones Periódicas en la Malla

Las funciones analíticas discretas estudiadas por Duffin [3], como se vio en el Capítulo 1 de esta tesis, están definidas en la malla entera; es decir, el conjunto  $\mathcal{M} = \mathbb{Z} \times i\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ . Con el fin de construir una teoría de funciones elípticas discretas análoga al caso continuo, y para no modificar el dominio de definición, debemos considerar como latiz de períodos un subconjunto de la malla entera. Al mismo tiempo, no debemos perder de vista que la definición de analiticidad discreta está asociada a



un cuadrado unitario de la malla, por lo que las regiones de analiticidad para nuestras funciones elípticas deben ser uniones de cuadrados unitarios. De modo que, siguiendo estas ideas, proponemos la siguiente definición.

**Definición 61** Sean  $a$  y  $b$  enteros positivos. Definimos los siguientes conceptos:

1. Una latiz doble discreta es un subconjunto de la malla entera de la forma

$$\mathcal{L}_{a,b} = a\mathbb{Z} \times ib\mathbb{Z} = \{z = ma + inb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

En este caso, diremos que  $a$  y  $b$  son la longitud y la altura de  $\mathcal{L}_{a,b}$ , respectivamente. Los números  $\omega_1 = a$  y  $\omega_2 = ib$  se llaman elementos generadores de la latiz.

2. Dado un punto  $z \in \mathcal{M}$  arbitrario, llamaremos región fundamental de  $\mathcal{L}_{a,b}$  en  $z$  a la siguiente región simple de la malla

$$\mathcal{RF}_{a,b}(z) = \{z + r + is \mid r \in \{0, 1, \dots, a\}, s \in \{0, 1, \dots, b\}\}.$$

Es decir,  $\mathcal{RF}_{a,b}(z)$  es un rectángulo con base  $a$ , altura  $b$  y lados paralelos a los ejes coordenados, como el que aparece en Figura 3.1.

3. Dado un punto  $z \in \mathcal{M}$  arbitrario, la región de analiticidad de  $\mathcal{L}_{a,b}$  en  $z$ , denotada por  $\mathcal{RA}_{a,b}(z)$ , será aquella región que resulta de eliminar las cuatro esquinas de  $\mathcal{RF}_{a,b}(z)$  (ver Figura 3.2).

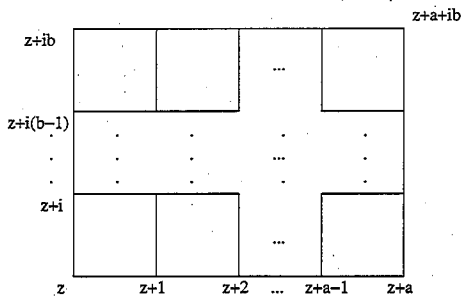


Figura 3.1: Región fundamental,  $\mathcal{RF}_{a,b}(z)$ .

Recordemos de la Sección 1.4 del primer capítulo, que la función elíptica de Weierstrass  $\wp$ , con latiz de períodos  $\mathcal{L}$ , es una función meromorfa, cuyos polos (todos de orden 2) coinciden con los puntos de  $\mathcal{L}$ , y que es analítica en todos los demás puntos. Es decir, si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  generan a  $\mathcal{L}$ , y  $Q$  es el paralelogramo con vértices en  $\{0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2\}$ , entonces la restricción de  $\wp$  a  $Q$  es una función meromorfa, con polos únicamente en los

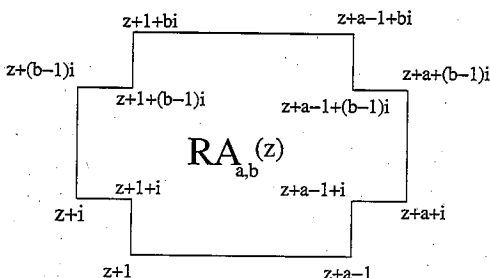


Figura 3.2: Región de analiticidad  $\mathcal{RA}_{a,b}(z)$ .

vértices de  $Q$  y analítica fuera de ellos. Además, gracias a la periodicidad doble de  $\wp$ , basta con conocer su restricción a  $Q$  para conocer la función en todo el plano complejo.

De forma análoga, la versión discreta de  $\wp$  debe cumplir una propiedad similar. Es decir, deberá ser suficiente conocer los valores que toma la función en una región fundamental (como la descrita en la Definición 61), para conocer los valores que toma en toda la malla entera. Más aún, la función elíptica de Weierstrass discreta deberá tener *polos* (concepto por definir) en las cuatro esquinas de la región fundamental y ser analítica en sus demás cuadrados unitarios, es decir, en  $\mathcal{RA}_{a,b}(z)$ .

Puesto que una región fundamental es rectangular, la región de analiticidad asociada, que se obtiene al eliminar sus esquinas, es una región simple de la malla, *i.e.* una unión finita y simplemente conexa de cuadrados unitarios. Las funciones elípticas que vamos a definir, serán funciones analíticas discretas en dichas regiones simples; es decir, son un subconjunto del espacio de Szégo asociado a la región. De hecho, veremos más adelante que estos subconjuntos son subespacios lineales del espacio de Szégo, y por ello será posible aplicar algunos resultados del Capítulo 2 a lo expuesto aquí.

### FUNCIONES PERIÓDICAS DISCRETAS

Supongamos que  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función dada. En analogía con el caso continuo, sería natural definir un período de  $f$  como un número  $\omega$  tal que  $f(z + \omega) = f(z)$  para todo  $z \in \mathcal{M}$ . Desde luego, esto sólo tiene sentido cuando  $z + \omega$  es un elemento del dominio de  $f$ , la malla entera, lo cual sucede si y sólo si  $\omega \in \mathcal{M}$ . Por otro lado, como el conjunto de períodos de una función es un grupo bajo la suma, podemos hablar de *latices discretas de períodos*, que pueden ser simples o dobles como en el caso usual. Ahora bien, dado que las funciones elípticas son doblemente periódicas, nosotros sólo consideraremos *latices dobles discretas* como las que se describen en la Definición 61. Tomando en cuenta lo anterior, damos paso a la siguiente definición formal.

**Definición 62** Sean  $a$  y  $b$  enteros positivos. Diremos que una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  es

doblemente periódica discreta con latiz de períodos  $\mathcal{L}_{a,b}$  si para cada  $z \in \mathcal{M}$  se tiene

$$f(z) = f(z + \omega), \text{ para todo } \omega \in \mathcal{L}_{a,b}.$$

Sea  $z \in \mathcal{M}$  un punto arbitrario y  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  una función doblemente periódica discreta, con latiz de períodos  $\mathcal{L}_{a,b}$ . Según la definición anterior,  $f$  toma el mismo valor en todo punto de la forma  $z + \omega$ , con  $\omega \in \mathcal{L}_{a,b}$ . Es decir, análogamente al caso continuo, podemos definir las clases residuales (mod  $\mathcal{L}_{a,b}$ ) como los conjuntos  $z + \mathcal{L}_{a,b}$  y pensar en  $f$  como una función, no de los puntos de la malla, sino de las clases residuales (mod  $\mathcal{L}_{a,b}$ ). Claramente, una región fundamental  $\mathcal{RF}_{a,b}(z)$  de la latiz de períodos contiene al menos un elemento de cada clase residual (dos para los puntos en la frontera de  $\mathcal{RF}_{a,b}(z)$ ), por lo que toda la información sobre la función se ve reflejada en su restricción a una región fundamental. Por este motivo, concentraremos nuestro estudio de las funciones doblemente periódicas en su restricción a una región fundamental de su latiz de períodos.

Lo que nos ocupa ahora es analizar una función doblemente periódica en su región de analiticidad. Para esto, es conveniente recalcar los siguientes lemas sencillos, pero útiles.

**Lema 63** Sean  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica discreta en una región  $R$  de la malla entera, y  $T_c : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  la traslación definida por  $T_c(z) = z - c$ , donde  $c$  es un punto fijo de la malla. Entonces, la composición  $g := f \circ T_c$  es una función analítica discreta en la región  $c + R$ .

**Prueba.** Sea  $S$  un cuadrado unitario de la región  $R$ , con vértices en  $\{z_0, z_0 + 1, z_0 + 1 + i, z_0 + i\}$ . Por hipótesis,  $f$  es analítica discreta en  $S$ , es decir

$$Lf(z_0) = f(z_0) + if(z_0 + 1) - f(z_0 + 1 + i) - if(z_0 + i) = 0.$$

Claramente,  $c + S$  es un cuadrado unitario de la región  $c + R$ , con vértices en  $\{c + z_0, c + z_0 + 1, c + z_0 + 1 + i, c + z_0 + i\}$ , y

$$\begin{aligned} Lg(c + z_0) &= g(c + z_0) + ig(c + z_0 + 1) - g(c + z_0 + 1 + i) - ig(c + z_0 + i) \\ &= f(T_c(c + z_0)) + if(T_c(c + z_0 + 1)) - f(T_c(c + z_0 + 1 + i)) - if(T_c(c + z_0 + i)) \\ &= f(c + z_0 - c) + if(c + z_0 + 1 - c) - f(c + z_0 + 1 + i - c) - if(c + z_0 + i - c) \\ &= f(z_0) + if(z_0 + 1) - f(z_0 + 1 + i) - if(z_0 + i) = 0. \end{aligned}$$

Como  $S$  es un cuadrado arbitrario de  $R$ , y cada cuadrado de  $c + R$  se obtiene sumando la constante  $c$  a uno de  $R$ , se sigue que  $g$  es analítica discreta en todo  $c + R$ . ■

**Lema 64** Sean  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  una función doblemente periódica discreta, con latiz de períodos  $\mathcal{L}_{a,b}$ . Si  $T_c : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  es la traslación definida por  $T_c(z) = z - c$ , donde  $c$  es un punto fijo de la malla, entonces la composición  $g := f \circ T_c$  es una función doblemente periódica discreta, con latiz de períodos  $\mathcal{L}_{a,b}$ .

**Prueba.** Sean  $z$  un punto de la malla entera y  $\omega \in \mathcal{L}_{a,b}$ . Entonces, en virtud de la periodicidad de  $f$  tenemos,

$$g(z + \omega) = f(T_c(z + \omega)) = f(z + \omega - c) = f((z - c) + \omega) = f(z - c) = f(T_c(z)) = g(z).$$

Como  $z$  y  $\omega$  son arbitrarios, se sigue que  $g$  es doblemente periódica discreta con latiz de períodos  $\mathcal{L}_{a,b}$ . ■

Tomando en cuenta todo lo dicho hasta ahora, podemos proponer una definición para función elíptica discreta. Recordemos que, dada una latiz discreta  $\mathcal{L}_{a,b}$ , la región fundamental  $\mathcal{R}\mathcal{F}_{a,b}(z)$  de  $\mathcal{L}_{a,b}$  en  $z$  es el rectángulo con vértices en  $\{z, z + a, z + a + bi, z + bi\}$  (ver Definición 61).

**Definición 65** Sean  $\mathcal{L}_{a,b}$  una latiz discreta y  $z_0$  un punto de la malla entera. Una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  se llama elíptica discreta, con clase residual de polos  $z_0 + \mathcal{L}_{a,b}$ , si

1.  $f$  es doblemente periódica discreta, con latiz de períodos  $\mathcal{L}_{a,b}$ , y
2.  $f$  es analítica discreta en  $\mathcal{R}A_{a,b}(z_0)$ .

Llamamos región de analiticidad de  $f$  a la región simple  $\mathcal{R}A_{a,b}(z_0)$ . Los cuatro vértices del rectángulo  $\mathcal{R}\mathcal{F}_{a,b}(z_0)$  (los puntos  $\{z_0, z_0 + a, z_0 + a + bi, z_0 + bi\}$ ) se llaman polos de  $f$ .

**Notación 66** Dada una latiz discreta  $\mathcal{L}_{a,b}$  y  $z \in \mathcal{M}$ , denotaremos el conjunto de todas las funciones elípticas discretas con clase residual de polos  $z + \mathcal{L}_{a,b}$  por

$$E(z + \mathcal{L}_{a,b}).$$

El conjunto de todas las funciones analíticas discretas asociadas a la latiz discreta  $\mathcal{L}_{a,b}$  lo denotamos por  $\mathcal{E}\mathcal{D}(\mathcal{L}_{a,b})$ , es decir

$$\mathcal{E}\mathcal{D}(\mathcal{L}_{a,b}) := \bigcup_{z \in \mathcal{M}} E(z + \mathcal{L}_{a,b}).$$

Es importante recalcar que el conjunto  $E(z + \mathcal{L}_{a,b})$  es no vacío para toda latiz  $\mathcal{L}_{a,b}$  y todo  $z \in \mathcal{M}$ , ya que las funciones constantes son analíticas en toda la malla entera y son doblemente periódicas con cualquier latiz de períodos.

Los lemas 63 y 64 serán de gran utilidad para nuestro estudio, ya que nos permiten elegir y fijar una región fundamental, para una latiz dada, y no perder generalidad en los resultados. Las propiedades que cumplan las funciones de  $E(z + \mathcal{L}_{a,b})$  serán válidas para toda función en  $\mathcal{ED}(\mathcal{L}_{a,b})$ , módulo una traslación de la variable independiente.

Dada una latiz discreta  $\mathcal{L}_{a,b}$ , fijemos su región fundamental  $\mathcal{RF}_{a,b}(0)$  y la región de analiticidad asociada  $\mathcal{RA}_{a,b}(0)$ . Los elementos de  $E(0 + \mathcal{L}_{a,b})$  son funciones analíticas discretas en  $\mathcal{RA}_{a,b}(0)$ , por lo que la restricción a  $\mathcal{RA}_{a,b}(0)$  de las funciones en  $E(0 + \mathcal{L}_{a,b})$  es un subconjunto del espacio de Szëgo asociado a dicha región. Más aún, veremos que se trata de un subespacio lineal.

**Proposición 67** *Sea  $\mathcal{L}_{a,b}$  una latiz discreta y sea  $z$  un punto arbitrario de la malla entera. Entonces, el conjunto  $E(z + \mathcal{L}_{a,b})$  es una variedad lineal.*

**Prueba.** Sean  $f, g \in E(z + \mathcal{L}_{a,b})$ , y sea  $h := f + g$ . Si  $\omega$  es un elemento de  $\mathcal{L}_{a,b}$ , de la periodicidad de  $f$  y  $g$  se sigue que

$$\begin{aligned} h(z + \omega) &= (f + g)(z + \omega) = f(z + \omega) + g(z + \omega) \\ &= f(z) + g(z) = (f + g)(z) \\ &= h(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $h$  es doblemente periódica con latiz de períodos  $\mathcal{L}_{a,b}$ . Si  $k \in \mathbb{C}$  es una constante arbitraria es claro que  $kf$  es también doblemente periódica con la misma latiz de períodos. Esto, junto con el hecho de que el conjunto de funciones analíticas discretas en una región común es una variedad lineal, implica el resultado. ■

De esta proposición se sigue que el conjunto de funciones

$$\Gamma_z = \left\{ f|_{\mathcal{RA}_{a,b}(z)} \right\}_{f \in E(z + \mathcal{L}_{a,b})}$$

es un subespacio lineal del espacio de Szëgo discreto asociado a la región de analiticidad en cuestión. Con base en este hecho, emplearemos los resultados del Capítulo 2 para estudiar las funciones elípticas discretas en algunos casos particulares.

### 3.2. Ejemplos Particulares

En esta sección vamos a considerar casos particulares de latices discretas y analizaremos las funciones elípticas discretas asociadas. Los resultados obtenidos en estos ejemplos sugieren que las definiciones propuestas son adecuadas y que el rumbo que sigue esta investigación es acertado. Sin embargo, no se tienen demostraciones que nos permitan generalizar las propiedades observadas. Lo deseable es que este trabajo sirva como referencia para investigaciones posteriores sobre funciones elípticas discretas.

En los siguientes ejemplos de latiz discretas, elegiremos la región fundamental  $\mathcal{R}\mathcal{F}_{a,b}(0)$  para desarrollar la discusión.

**EJEMPLO 1**

Consideremos la latiz discreta

$$\mathcal{L}_{3,3} := \{z = 3m + 3ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

La región fundamental  $\mathcal{R}\mathcal{F}_{3,3}(0)$  en este caso es el cuadrado con vértices en  $\{0, 3, 3 + 3i, 3i\}$ , como se ve en la Figura 3.3. La región de analiticidad asociada aparece en la Figura 3.4, donde por simplicidad hemos etiquetado los vértices, pero no debemos perder de vista que  $z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = i$ , etc.

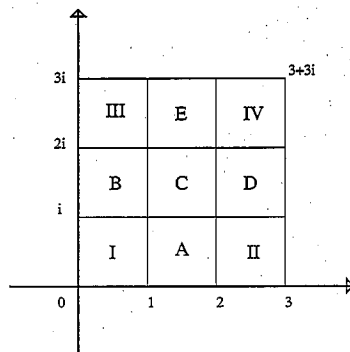


Figura 3.3:  $\mathcal{R}\mathcal{F}_{3,3}(0)$ - Región fundamental para  $\mathcal{L}_{3,3}$ .

Nos interesan las funciones elípticas discretas con clase residual de polos  $0 + \mathcal{L}_{3,3}$ , i.e. el conjunto  $E(0 + \mathcal{L}_{3,3})$ . Dado que  $\mathcal{R}\mathcal{A}_{3,3}(0)$  es una región simple de la malla, podemos hablar del espacio de Szëgo asociado a ella. En el capítulo 2 de esta tesis, se propuso un método para elegir un conjunto  $\Omega$  de vértices de la frontera, tal que si se define arbitrariamente una función en esos vértices, existe una única función analítica en todo  $\mathcal{R}\mathcal{A}_{a,b}(0)$  cuya restricción a  $\Omega$  coincide con la función arbitraria dada. La dimensión del espacio de Szëgo resultó ser la cardinalidad de  $\Omega$ . En el caso de las funciones elípticas discretas, se impone la condición adicional de la periodicidad, lo cual nos arroja una serie de restricciones que, como es de esperarse, nos reducen los grados de libertad en la elección de la función arbitraria. Más concretamente, el conjunto

$$\Gamma_0 = \left\{ f|_{\mathcal{R}\mathcal{A}_{3,3}(0)} \right\}_{f \in E(0 + \mathcal{L}_{3,3})}$$

será un subespacio propio del espacio de Szëgo asociado a  $\mathcal{R}\mathcal{A}_{3,3}(0)$ .

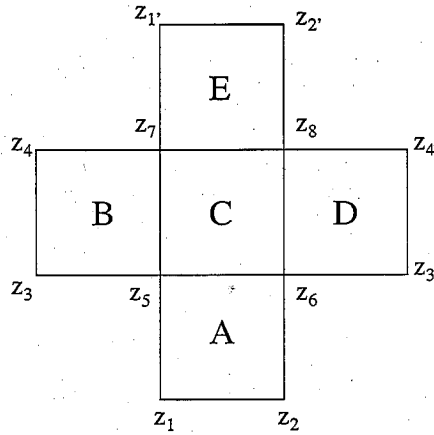


Figura 3.4:  $\mathcal{RA}_{3,3}(0)$ - Región de analiticidad de  $\mathcal{L}_{3,3}$ .

Ahora, analicemos esto con más detalle. En virtud de la Observación 5 del segundo capítulo, los vértices pertenecientes a  $\Omega$  son aquellos que no son esquina superior derecha de un cuadrado unitario de la región. En este caso tenemos que

$$\Omega = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_1', z_3'\}.$$

Sabemos, por lo visto en el capítulo anterior, que podemos dar valores arbitrarios a una función  $f$  en los puntos de  $\Omega$  y existe una única extensión analítica a todo  $\mathcal{RA}_{a,b}(0)$ . Si imponemos la condición adicional de periodicidad, una primera consecuencia es que los valores de  $f$  en los puntos  $z_1$  y  $z_1'$  deben coincidir, y lo mismo para sus valores en  $z_3$  y  $z_3'$ . Esto nos deja ya con un menor número de grados de libertad, ya que podemos eliminar de  $\Omega$  los puntos  $z_1'$  y  $z_3'$ . Esto nos deja con un nuevo subconjunto de vértices de la frontera de  $\mathcal{RA}_{a,b}(0)$

$$\Omega' = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}.$$

Ahora reduciremos otros grados de libertad, imponiendo la periodicidad en los demás puntos de la frontera ( $z_2$  y  $z_4$ ) a través de la ecuación de analiticidad de Duffin. Supongamos que  $f$  es un elemento de  $\Gamma_0$ . Por ser analítica, la ecuación de Duffin en el cuadrado  $A$  nos da el valor de  $f$  en  $z_6$ , en términos de  $z_1, z_2$  y  $z_5$  (recordemos la notación  $f_j = f(z_j)$ ):

$$\begin{aligned} A : f_1 + if_2 - f_6 - if_5 &= 0 \\ \iff \\ f_6 &= f_1 + if_2 - if_5. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ahora usamos la ecuación de Duffin en  $B$  para despejar el valor de  $f$  en  $z_7$ :

$$\begin{aligned} B : f_3 + if_5 - f_7 - if_4 &= 0 \\ \iff \\ f_7 &= f_3 + if_5 - if_4. \end{aligned} \tag{3.2}$$

De la misma manera, empleamos la ecuación de analiticidad en  $C$ :

$$\begin{aligned} C : f_5 + if_6 - f_8 - if_7 &= 0 \\ \iff \\ f_8 &= f_5 + if_6 - if_7. \end{aligned}$$

Sustituimos (3.1) y (3.2) en esta última ecuación para obtener

$$\begin{aligned} f_8 &= f_5 + i(f_1 + if_2 - if_5) - i(f_3 + if_5 - if_4) \\ &= if_1 - f_2 - if_3 - f_4 + 3f_5 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Empleamos la ecuación de Duffin en el cuadrado  $D$ , recordando que  $f_{3'} = f_3$  y  $f_{4'} = f_4$ , y sustituyendo (3.1) y (3.3), para encontrar una primera ecuación que toma en cuenta la periodicidad:

$$\begin{aligned} D : f_6 + if_3 - f_4 - if_8 &= 0 \\ \Rightarrow \\ (f_1 + if_2 - if_5) + if_3 - f_4 - i(if_1 - f_2 - if_3 - f_4 + 3f_5) &= 0 \\ \Rightarrow \\ 2f_1 + 2if_2 + (-1 + i)f_3 + (-1 + i)f_4 - 4if_5 &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Finalmente, utilizamos la analiticidad en  $E$ , sustituyendo (3.2) y (3.3), para hallar la última ecuación que considera la periodicidad ( $f_{1'} = f_1$  y  $f_{2'} = f_2$ ):

$$\begin{aligned} E : f_7 + if_8 - f_2 - if_1 &= 0 \\ \Rightarrow \\ (f_3 + if_5 - if_4) + i(if_1 - f_2 - if_3 - f_4 + 3f_5) - f_2 - if_1 &= 0 \\ \Rightarrow \\ (-1 - i)f_1 + (-1 - i)f_2 + 2f_3 - 2if_4 + 4if_5 &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Hemos encontrado un sistema de dos ecuaciones con cinco variables, por lo que es de esperarse que tengamos tres o más grados de libertad. En efecto, escogiendo las



variables  $f_1, f_3, f_5$  como variables libres, y  $f_2, f_4$  como variables básicas del sistema, escribimos

$$\begin{aligned} 2if_2 + (-1+i)f_4 &= -2f_1 + (1-i)f_3 + 4if_5 \\ (-1-i)f_2 - 2if_4 &= (1+i)f_1 - 2f_3 - 4if_5 \end{aligned}$$

El determinante del sistema es igual a 2, por lo que existe una solución única en términos de las variables libres,

$$f_2 = (1+2i)f_1 - 2f_3 + (2-2i)f_5 \quad (3.6)$$

$$f_4 = -2f_1 + (1-2i)f_3 + (2+2i)f_5. \quad (3.7)$$

Por lo tanto, los valores en cada punto de  $\mathcal{R}\mathcal{A}_{a,b}(0)$  de toda función de  $\Gamma_0$  quedan determinados de manera única por los valores que toma en los puntos  $\{z_1, z_3, z_5\}$ . Es decir,  $\Gamma_0$  es un subespacio de dimensión 3 del espacio de Szëgo correspondiente.

Por otra parte, hasta ahora hemos hecho a un lado el valor común,  $f_p$ , que toma  $f$  en los polos  $\{0, 3, 3i, 3+3i\}$ . Como no se le exige a una función elíptica ninguna condición en los cuadrados I, II, III y IV de su región fundamental, el valor  $f_p$  puede ser cualquier número complejo. Es decir, dos funciones distintas de  $E(0 + \mathcal{L}_{3,3})$  pueden coincidir en la región de analiticidad  $\mathcal{R}\mathcal{A}_{a,b}(0)$ , y diferir sólo en el valor que toman en los polos. Así que tenemos en realidad 4 grados de libertad. Por supuesto, lo mismo es válido en el espacio  $E(z + \mathcal{L}_{3,3})$  para cualquier  $z \in \mathcal{M}$ , con base en los lemas 63 y 64. Luego, hemos obtenido el primer resultado de este ejemplo: *El espacio vectorial  $E(z + \mathcal{L}_{3,3})$  tiene dimensión 4, para todo  $z \in \mathcal{M}$ .*

Construyamos una base para el espacio  $E(0 + \mathcal{L}_{3,3})$ , usando las ecuaciones (3.1), (3.2), (3.3), (3.6) y (3.7). Al no ser muy grande la región fundamental de este ejemplo particular, podemos dar explícitamente los valores que toman los elementos de la base en cada cada punto. De forma semejante a lo hecho en el capítulo 2, para cada  $j = 1, 2, \dots, 8$ , definimos las funciones  $\phi_j$  tales que

$$\phi_j(z_k) = \delta_{jk},$$

y la función  $\phi_p$  que vale uno en los polos y cero en otra parte.

Dando a  $\{f_1, f_3, f_5\}$  los valores  $\{1, 0, 0\}$ ,  $\{0, 1, 0\}$  y  $\{0, 0, 1\}$ , construimos la siguiente

base:

$$v_1 := \phi_1 + (1 + 2i)\phi_2 - 2\phi_4 + (-1 + i)\phi_6 + 2i\phi_7 + (1 - i)\phi_8$$

$$v_2 := -2\phi_2 + \phi_3 + (1 - 2i)\phi_4 - 2i\phi_6 + (-1 - i)\phi_7 + (1 + i)\phi_8$$

$$v_3 := (2 - 2i)\phi_2 + (2 + 2i)\phi_4 + \phi_5 + (2 + i)\phi_6 + (2 - i)\phi_7 - \phi_8$$

$$v_4 := \phi_p$$

Ahora tenemos la certeza de que no todas las funciones elípticas discretas son constantes. De hecho, como veremos a continuación, las funciones constantes tienen la propiedad de ser las únicas funciones elípticas enteras, como en el caso continuo.

Hasta ahora hemos hecho a un lado lo que sucede en las cuatro esquinas de la región fundamental, ocupados solamente de la región de analiticidad. Lo que sabemos hasta este momento es que toda función de  $E(0 + \mathcal{L}_{3,3})$  está determinada por sus valores en cuatro vértices. Tres de ellos garantizan la analiticidad y la periodicidad en  $\mathcal{RA}_{3,3}(0)$  y el cuarto, que corresponde a la clase residual de polos, no aporta nada. Impondremos algunas condiciones en las esquinas de la región fundamental para descubrir otras propiedades.

Volvamos a la región fundamental de nuestro ejemplo (ver la Figura 3.3). Supongamos que  $f \in E(0 + \mathcal{L}_{3,3})$  es una función entera discreta. En particular, esto implica que, además de satisfacer las ecuaciones obtenidas arriba, la función  $f$  cumple con la ecuación de Duffin en los cuadrados I, II y III. Denotamos por  $f_p$  al valor común que toma  $f$  en los polos  $\{0, 3, 3i, 3 + 3i\}$  y, escribiendo todo en términos de  $\{f_1, f_3, f_5\}$ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\text{I} \quad \Rightarrow \quad f_p + if_1 - if_3 - f_5 = 0$$

$$\text{II} \quad \Rightarrow \quad if_p + (2 + 3i)f_1 - 5f_3 + (3 - 4i)f_5 = 0$$

$$\text{III} \quad \Rightarrow \quad -if_p - 5f_1 + (2 - 3i)f_3 + (3 + 4i)f_5 = 0$$

Escogemos  $f_5$  como variable libre y reescribimos el sistema

$$f_p + if_1 - if_3 = f_5$$

$$if_p + (2 + 3i)f_1 - 5f_3 = -(3 - 4i)f_5$$

$$-if_p - 5f_1 + (2 - 3i)f_3 = -(3 + 4i)f_5$$

El determinante de la matriz asociada es igual a  $-18$  por lo que el sistema tiene

solución única en términos de  $f_5$ , dada por

$$f_p = f_5$$

$$f_1 = f_5$$

$$f_3 = f_5.$$

En primer lugar, la igualdad  $f_1 = f_3 = f_5$  implica que la función debe ser constante en la región de analiticidad. Esto se debe a que sus valores en  $\mathcal{R}\mathcal{A}_{3,3}(0)$  vienen dados de manera única por estos tres números, y en particular cualquier función constante cumple con la igualdad en cuestión. Esto, junto con la igualdad  $f_p = f_5$ , implica que la función debe ser constante en la región fundamental, y por periodicidad en toda la malla. Hemos demostrado otra propiedad para este caso particular: *toda función elíptica discreta, con latiz de períodos  $\mathcal{L}_{3,3}$ , y entera es constante.*

### EJEMPLO 2

En este ejemplo, vamos a considerar la latiz discreta

$$\mathcal{L}_{5,4} := \{z = 5m + 4ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Estudiaremos las funciones elípticas discretas para este caso, en la misma forma que lo hicimos en el ejemplo anterior. Su región fundamental en 0 aparece en la Figura 3.5, donde las funciones de  $E(0 + \mathcal{L}_{4,5})$  están definidas.

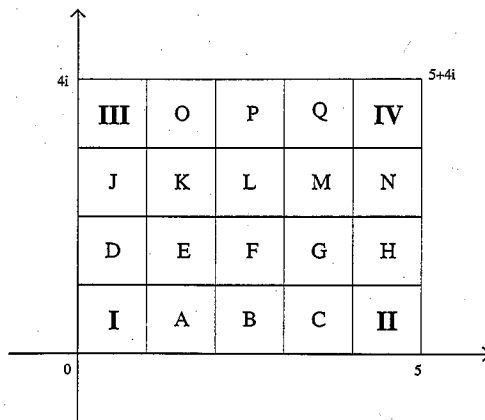


Figura 3.5:  $\mathcal{R}\mathcal{F}_{5,4}(0)$ - Región fundamental para  $\mathcal{L}_{5,4}$ .

En la figura 3.6 se muestra la región de analiticidad  $\mathcal{R}\mathcal{A}_{5,4}(0)$ , que por definición, se obtiene eliminando las cuatros esquinas de la región fundamental en cuestión. Hemos

etiquetado los vértices de  $\mathcal{R}A_{5,4}(0)$  de manera que, cuando hablemos del vértice  $z_j$  nos referimos a aquél que aparece en la figura marcado con  $j$ , sin perder de vista el número complejo que representa cada vértice:  $z_1 = 1, \dots, z_5 = i, z_6 = 1 + i$ , etc.

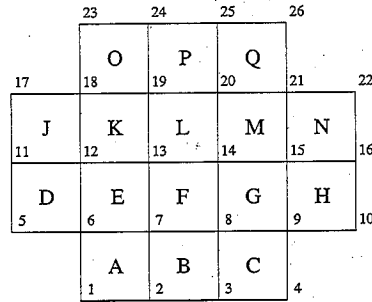


Figura 3.6:  $\mathcal{R}A_{5,4}(0)$ - Región de analiticidad de  $\mathcal{L}_{5,4}$ .

Lo primero que haremos será encontrar la dimensión del espacio  $E(0 + \mathcal{L}_{5,4})$  siguiendo los mismos pasos del ejemplo anterior. En primer lugar, nos concentramos en la región de analiticidad y en el espacio lineal

$$\Gamma_0 = \left\{ f|_{\mathcal{R}A_{5,4}(0)} \right\}_{f \in E(0 + \mathcal{L}_{5,4})}$$

que es subespacio del espacio de Szëgo asociado a la región de analiticidad. Supongamos que  $f \in E(0 + \mathcal{L}_{5,4})$  es una función arbitraria. Encontraremos la dependencia lineal de los valores de  $f$  en cada vértice, en términos de su valores en la frontera. De acuerdo con el método descrito en el Capítulo 2, construimos el conjunto  $\Omega$  que consta de los vértices que no son esquina superior derecha de algún cuadrado en la región,

$$\Omega = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_{10}, z_{11}, z_{17}, z_{23}\}.$$

La periodicidad en los vértices  $z_1$  y  $z_5$  implica que  $f_1 = f_{23}$  y  $f_5 = f_{10}$ , que son las primeras ecuaciones que reducen los grados de libertad. Eliminando los vértices  $z_{10}$  y  $z_{23}$  de  $\Omega$ , obtenemos el conjunto

$$\Omega' = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_{11}, z_{17}\}$$

con dos vértices menos. Ahora usaremos la ecuación de Duffin para construir el sistema de ecuaciones que nos dará la dependencia buscada. Mediante la ecuación de Duffin en el cuadrado  $A$  encontramos el valor de  $f_7$  en términos de  $\{f_1, f_2, f_6\}$ ,

$$f_7 = f_1 + if_2 - if_6$$

Luego, en el cuadrado  $B$  encontramos el valor de  $f_8$  en términos de  $\{f_2, f_3, f_7\}$ , y sustituimos el valor de  $f_7$  encontrado en el paso anterior para dejar todo en función de los valores de  $f$  en  $\Omega'$ ,

$$\begin{aligned} f_8 &= f_2 + if_3 - if_7 \\ &= f_2 + if_3 - i(f_1 + if_2 - if_6) \\ &= -if_1 + 2f_2 + if_3 - f_6 \end{aligned}$$

Continuamos de esta manera, empleando la ecuación de Duffin en cada cuadrado de  $\mathcal{R}A_{5,4}(0)$  y sustituyendo recursivamente los valores obtenidos en el paso anterior, para obtener el sistema de ecuaciones deseado.

La primera ecuación del sistema se obtiene al llegar, por este procedimiento, al cuadrado  $H$  donde la periodicidad implica que  $f_{11} = f_{16}$ . Similarmente, al llegar al cuadrado  $N$  obtendremos la segunda ecuación, cuando la periodicidad impone  $f_{17} = f_{22}$ . Siguiendo de esta manera obtenemos otras tres ecuaciones, al llegar a los cuadrados  $O$ ,  $P$  y  $Q$ , en virtud de las igualdades  $f_2 = f_{24}$ ,  $f_3 = f_{25}$  y  $f_4 = f_{26}$ , que establece la periodicidad. Es decir, tenemos una ecuación por cada cuadrado de la columna derecha de  $\mathcal{R}A_{5,4}(0)$  (los cuadrados  $H$  y  $N$ ) y de la fila superior ( $O$ ,  $P$  y  $Q$ ), lo cual nos da un sistema de cinco ecuaciones en ocho variables:

$$\begin{aligned} -10if_2 + 6f_3 + 2if_4 - (1+i)f_{11} &= 6f_1 - (1+i)f_5 - 8if_6 \\ 36f_2 + 16if_3 - 4f_4 + 10f_{11} - (1+I)f_{17} &= 24if_1 + (1-9i)f_5 + 40f_6 \\ 6f_{11} - 2if_{17} &= 2if_1 - 4if_5 + 6f_6 \\ -8if_2 - 16if_{11} - 4f_{17} &= 8f_1 - 12f_5 - 24if_6 \\ -32f_2 - 8if_3 - 30f_{11} + 6if_{17} &= -26if_1 + 24if_5 - 62f_6. \end{aligned}$$

Como se ve en el sistema, hemos escogido los valores de  $f$  en los vértices  $z_1 = 1$ ,  $z_5 = i$  y  $z_6 = 1 + i$  como variables libres, siguiendo las ideas del primer ejemplo. La matriz asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} -10i & 6 & 2i & -(1+I) & 0 \\ 36 & 16i & -4 & 10 & -(1+I) \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2i \\ -8i & 0 & 0 & -16i & -4 \\ -32 & -8i & 0 & -30 & 6i \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es igual a  $256 - 1280i$ .

Por lo tanto, el sistema tiene solución única en términos de las variables libres que

viene dada por

$$\begin{aligned} f_2 &= \left(-\frac{3}{26} + \frac{11}{26}i\right) f_1 + \left(-\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i\right) f_5 + \left(\frac{31}{26} - \frac{1}{26}i\right) f_6 \\ f_3 &= \left(\frac{15}{26} - \frac{3}{26}i\right) f_1 + \left(\frac{5}{13} - \frac{1}{13}i\right) f_5 + \left(\frac{1}{26} + \frac{5}{26}i\right) f_6 \\ f_4 &= \left(-\frac{1}{26} + \frac{21}{26}i\right) f_1 + \left(-\frac{9}{13} - \frac{6}{13}i\right) f_5 + \left(\frac{45}{26} - \frac{9}{26}i\right) f_6 \\ f_{11} &= \left(\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i\right) f_1 + \left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i\right) f_5 + \left(\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i\right) f_6 \\ f_{17} &= \left(-\frac{7}{13} - \frac{9}{13}i\right) f_1 + \left(\frac{17}{13} - \frac{6}{13}i\right) f_5 + \left(\frac{3}{13} + \frac{15}{13}i\right) f_6. \end{aligned}$$

Los valores de  $f$  en los demás puntos de  $\mathcal{RA}_{5,4}(0)$  también se expresan como combinación lineal de  $f_1$ ,  $f_5$  y  $f_6$ , sustituyendo esta solución en las ecuaciones encontradas al principio de este ejemplo a través la ecuación de Duffin y sustitución recursiva.

Hemos llegado a un resultado similar al que obtuvimos en el primer ejemplo. El espacio de funciones  $\Gamma_0$  de este caso particular tiene dimensión 3. Igual que antes, el valor que toma cualquier función de  $E(0 + \mathcal{L}_{5,4})$  en los polos no tiene ninguna restricción, así que tenemos un total de cuatro grados de libertad. Es decir, *el espacio de funciones  $E(0 + \mathcal{L}_{5,4})$  tiene dimensión 4. Y, en virtud de los lemas 63 y 64, lo mismo es válido en el espacio  $E(z + \mathcal{L}_{5,4})$  para todo  $z \in \mathcal{M}$ .*

Podemos construir una base para el espacio  $E(0 + \mathcal{L}_{5,4})$  empleando funciones del tipo

$$\phi_j(z_k) = \delta_{jk},$$

dando los valores  $\{1, 0, 0\}$ ,  $\{0, 1, 0\}$  y  $\{0, 0, 1\}$  a  $\{f_1, f_5, f_6\}$ , de la misma manera en que se hizo en el ejemplo 1. No escribiremos explícitamente la base para este ejemplo, pues cada elemento de la base consta de muchos términos.

Ahora, imponemos la condición de analiticidad en los cuadrados I, II y III para obtener un sistema de ecuaciones que relacione los valores  $\{f_1, f_5, f_6\}$  con el valor de la función en los polos,  $f_p$ . El sistema que se obtiene es el siguiente

$$\begin{aligned} \text{I} &\Rightarrow f_p + if_1 - if_5 = f_6 \\ \text{II} &\Rightarrow if_p + \left(-\frac{1}{13} + \frac{8}{13}i\right) f_1 + \left(-\frac{31}{13} - \frac{12}{13}i\right) f_5 = \left(-\frac{32}{13} + \frac{9}{13}i\right) f_6 \\ \text{III} &\Rightarrow -if_p + \left(-\frac{31}{13} - \frac{12}{13}i\right) f_1 + \left(\frac{27}{13} - \frac{8}{13}i\right) f_5 = \left(-\frac{4}{13} - \frac{33}{13}i\right) f_6 \end{aligned}$$

La matriz asociada a este sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ i & -\frac{1}{13} + \frac{8}{13}i & -\frac{31}{13} - \frac{12}{13}i \\ -i & -\frac{31}{13} - \frac{12}{13}i & \frac{27}{13} - \frac{8}{13}i \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es igual a

$$-\frac{96}{13} - \frac{64}{13}i.$$

Luego, el sistema tiene solución única en términos de  $f_6$  y viene dada por

$$f_p = f_6$$

$$f_1 = f_6$$

$$f_5 = f_6.$$

Las únicas funciones elípticas que satisfacen estas igualdades, al igual que en el ejemplo anterior, son las funciones constantes. En resumen, hemos demostrado un resultado similar al del primer caso particular: *si  $f$  es una función entera y elíptica discreta, con latiz de períodos  $\mathcal{L}_{5,4}$ , entonces  $f \equiv cte$ .*

Notemos que, en ambos ejemplos, basta conocer la latiz discreta y los valores de una función elíptica discreta en  $\{0, 1, 1+i, i\}$  para conocerla en toda la región fundamental y por periodicidad en toda la malla entera. Y por otro lado, si definimos arbitrariamente una función en esos cuatro puntos, existe una única extensión a toda la región fundamental que es elíptica discreta. Esto sugiere un resultado general, que quedará como un problema por resolver y que plantearemos con detalle en la siguiente sección.

### 3.3. Problemas Abiertos

En esta sección plantearemos formalmente algunas conjeturas que se derivan de los ejemplos particulares estudiados. No solamente tomando en cuenta los dos ejemplos expuestos en detalle aquí, sino también otros casos particulares que no fueron desarrollados en este texto por evitar la repetición.

El resultado obtenido en los ejemplos de la sección anterior sobre la dimensión del espacio de funciones elípticas discretas nos acerca a la primera conjetura que queremos enunciar. Cuando estudiamos el comportamiento de dichas funciones en la región de

analiticidad, no es casualidad que haya 3 variables más que ecuaciones en el sistema que de ahí surge. De hecho, veremos que para cualquier latiz discreta, se cumple esta propiedad.

Para deducir esto, pensemos por un momento en la forma que tiene cualquier región de analiticidad (ver Figura 3.2); es decir, un rectángulo de base  $a$  y altura  $b$  sin sus cuatro esquinas. Supongamos que tenemos una función  $F$ , doblemente periódica y analítica en la región en cuestión ( $\mathcal{R}\mathcal{A}_{a,b}(z)$ ). Siguiendo el mismo procedimiento que en los ejemplos, encontramos un conjunto de vértices  $\Omega \subset \partial\mathcal{R}\mathcal{A}_{a,b}(0)$  por el método del Capítulo 2. Por simple inspección, vemos que los vértices que no son esquina superior derecha de un cuadrado unitario de la región son:

1. Todos los vértices inferiores,  $\{1, 2, \dots, a-1\}$
2. Todos los vértices del lado izquierdo,  $\{i, 2i, \dots, i(b-1)\}$
3. Y tres vértices más,  $\{1+i, a+i, 1+ib\}$ .

En total son

$$(a-1) + (b-1) + 3 = a+b+1,$$

es decir,  $\text{card } \Omega = a+b+1$ . Ahora bien, hay dos pares de vértices en  $\Omega$  que pertenecen a la misma clase residual, ellos son  $\{1, 1+ib\}$  y  $\{i, a+i\}$ . Esto nos deja con dos grados menos de libertad, ya que  $F(1) = F(1+ib)$  y  $F(i) = F(a+i)$ . Definimos un nuevo conjunto  $\Omega' = \Omega \setminus \{1+ib, a+i\}$ , que tiene cardinalidad  $a+b-1$ .

Por otro lado, el sistema de ecuaciones que surge de considerar la analiticidad y la periodicidad doble, se obtiene al usar la ecuación de Duffin en cada cuadrado de la región, en orden de izquierda a derecha y de abajo a arriba, y escribir el valor de  $F$  en cada vértice de  $\mathcal{R}\mathcal{A}_{a,b}(0)$ , en términos de los valores que toma en los vértices de  $\Omega'$ . Cada ecuación aparece en este proceso, cuando hemos llegado a un cuadrado de la columna derecha o de la fila superior de  $\mathcal{R}\mathcal{A}_{a,b}(0)$ . Así, la primera ecuación se obtiene cuando usamos iterativamente la ecuación de Duffin y llegamos al cuadrado inferior de la columna derecha, es decir aquél con vértices en  $\{a-1+i, a+i, a+2i, a-1+2i\}$ . Las demás ecuaciones lineales se obtienen en los otros cuadrados de la columna derecha y en los de la fila superior de  $\mathcal{R}\mathcal{A}_{a,b}(0)$ .

En total, los cuadrados de la columna derecha son  $b-2$  y los de la fila superior son  $a-2$ , es decir, tenemos  $a+b-4$  ecuaciones lineales, en  $a+b-1$  variables que son los valores de  $F$  en  $\Omega'$ . De modo que hay exactamente 3 variables más que ecuaciones, como habíamos afirmado.

Por otra parte, falta una demostración general para el hecho de que el sistema tiene en efecto tres variables libres. Lo que sabemos es que el sistema siempre tiene solución, pues toda función constante lo satisface. Lo que hace falta probar es que el



sistema es siempre linealmente independiente, es decir, que nunca aparece una ecuación redundante en el sistema, independientemente de la latiz de períodos  $\mathcal{L}_{a,b}$  de que se trate.

Sin embargo, lo observado en los ejemplos particulares sugiere que nunca aparece una ecuación redundante en el sistema, y que por lo tanto hay 3 grados de libertad en la región de analiticidad, y uno adicional por el valor de la función en los polos. De modo que, hemos llegado al planteamiento de una primera conjetura: *si  $\mathcal{L}_{a,b}$  es una latiz discreta, toda función elíptica discreta con clase residual de polos  $z + \mathcal{L}_{a,b}$  está únicamente determinada por sus valores en los vértices  $\{z, z + 1, z + i, z + 1 + i\}$ , independientemente de la latiz de períodos.*

Otro resultado que observamos reiteradamente en los ejemplos particulares es el concerniente a las funciones elípticas discretas y enteras. Vimos que, al imponer la condición de analiticidad en tres de las esquinas de la región fundamental, surge un sistema de tres ecuaciones lineales, en cuatro variables que son los valores de la función en los vértices  $\{0, 1, i, 1 + i\}$ . Al resolver el sistema en función de una de las variables, vimos que las únicas funciones que lo satisfacen son las constantes. Esto parece ser un patrón que sugiere otra conjetura: *si  $\mathcal{L}_{a,b}$  es una latiz discreta, toda función entera discreta y al mismo tiempo elíptica discreta, con latiz de períodos  $\mathcal{L}_{a,b}$ , es constante; independientemente de la latiz de períodos.*

Finalmente, estudiemos brevemente un problema que no fue discutido en este trabajo. Si observamos detenidamente la definición propuesta de función elíptica discreta (Definición 65), podemos pensar que es un tanto restrictiva. Hemos construido funciones elípticas con una sola clase residual de polos, lo cual no es enteramente análogo al caso continuo, donde una función elíptica puede tener cualquier número finito de clases residuales de polos. Este problema puede atacarse mediante una definición que admita varias clases residuales de polos. Una propuesta para esta definición es la siguiente:

*Una función elíptica discreta múltiple  $f$ , con clases residuales de polos  $z_1 + \mathcal{L}_{a,b}, z_2 + \mathcal{L}_{a,b}, \dots, z_n + \mathcal{L}_{a,b}$ , es tal que puede descomponerse en*

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n \quad (3.8)$$

*donde  $f_k$  es elíptica discreta, con clase residual de polos  $z_k + \mathcal{L}_{a,b}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).*

Supongamos que  $f$  es una función elíptica discreta múltiple de acuerdo con esta definición. Claramente  $f$  es doblemente periódica con latiz de períodos  $\mathcal{L}_{a,b}$ . Además, dado que las funciones analíticas discretas en una región común son una variedad lineal,

$f$  es analítica en la región

$$R_A = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{R}A_{a,b}(z_k),$$

pues cada  $f_k$  es analítica en  $\mathcal{R}A_{a,b}(z_k)$ . De modo que parece razonable este concepto de función elíptica con varias clases residuales de polos. El problema aquí es que ya no resulta tan sencillo estudiar el comportamiento de estas funciones en su región de analiticidad, pues ésta no necesariamente es una región simple de la malla y por ello no aplican directamente los resultados del capítulo 2. Por otra parte, no es evidente si la descomposición dada en (3.8) es única, y aún si lo fuera, los valores de cada función  $f_k$  en cada cuadrado de la región fundamental se *empalman* por lo que a primera vista no será fácil recuperar esta descomposición a partir de la función original.

Éste y otros problemas interesantes surgen de considerar conceptos cada vez más generales. Lo planteado aquí se espera que pueda despertar la curiosidad en el lector y que sirva de referencia para quien se proponga hacer una investigación de mayor alcance sobre estos temas.

## Capítulo 4

### Conclusiones

En la teoría de funciones analíticas discretas hay todavía una enorme gama de problemas sin resolver. Uno debe escoger entre muchos caminos posibles cuando desea desarrollar una investigación en este campo. A cada paso de la investigación se abren nuevas ramificaciones y nos vemos obligados a elegir una de ellas, basados en la experiencia, en la literatura científica y muchas veces en la intuición. Sin embargo, no hay garantía de que las decisiones tomadas sean las más adecuadas y con frecuencia nos damos cuenta de que hemos tomado la ruta equivocada, obligados a volver al cruce en el camino.

En el desarrollo de esta tesis nos enfrentamos muchas veces con esta situación. En primer lugar, fue necesario elegir el *tipo* de función analítica discreta a considerar. La teoría en que se basó principalmente este trabajo, el artículo de R.J. Duffin de 1956 [3], considera funciones definidas en el conjunto

$$\mathbb{Z} \times i\mathbb{Z},$$

llamado la malla entera. Estas funciones poseen propiedades interesantes, que resultan ser analogías claras con la teoría continua en muchos casos. Por ello fue que decidimos trabajar en este dominio y tratar de desarrollar algunos aspectos aún inexplorados.

Por momentos estuvimos tentados a considerar otras mallas para definir las funciones. Por ejemplo, mallas de tipo

$$\varepsilon\mathbb{Z} \times i\varepsilon\mathbb{Z}$$

para  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeño, y construir funciones analíticas discretas sobre los nodos. Una característica deseable de la discretización de la teoría es que en el paso al límite se recuperen las funciones continuas. Es decir que la función discreta sea una aproximación en cierto sentido de la continua. Desde luego, también es posible llevar

la teoría a mallas más generales, que no sean necesariamente cuadradas como las propuestas aquí, o que sus nodos no estén a intervalos regulares. Todas estas posibilidades cruzaron nuestra mente a lo largo de esta investigación, pero fue necesario restringir el estudio con miras a cumplir los plazos en que debe completarse.

En la literatura hay todo un espectro de funciones analíticas discretas que llevan a resultados y aplicaciones importantes. Por un lado, se encuentra el trabajo de L. Lovász [5], quien considera funciones analíticas discretas y armónicas, definidas sobre grafos, o conjuntos de vértices y aristas. También tenemos las investigaciones recientes realizadas por C. Mercat [7], que trabaja sobre superficies de Riemann discretas y ha publicado diversos artículos sobre el tema en los últimos años. Otra aproximación es la de Zeilberger [11], con funciones definidas sobre la malla entera y considerando series infinitas para encontrar demostraciones alternativas de resultados obtenidos por Duffin y otros autores.

Todas estas propuestas resultan de gran interés y hablan de las diversas posibilidades que ofrece la teoría de funciones analíticas discretas. Incluso en la malla entera se han propuesto otras definiciones de analiticidad discreta, como la de R. Isaacs

$$i[f(z+1) - f(z)] = f(z+i) - f(z)$$

que da pie a formulaciones más simples, pero no cumple con la ecuación Laplaciana en diferencias usual [3].

Otra conclusión que se deriva de este trabajo es que uno no debe nunca suponer que la ruta tomada es la única correcta. Debemos estar abiertos a otras propuestas, que pueden llevar a mejores resultados en ciertas direcciones. La experiencia sugiere que unas definiciones son más adecuadas para atacar determinados problemas que otras. Todo depende del objetivo que se tenga en mente, ya que no hay lineamientos o normas a seguir. Aunque no debemos olvidar lo que ya está hecho para tratar de adaptarlo a otros casos.

Finalmente, es importante mencionar que una de las razones principales por la cual realizamos este trabajo es que la teoría de funciones analíticas discretas tiene un amplio dominio de aplicación. Esta tesis no tiene por objetivo llegar a la aplicación directa de los resultados obtenidos, pero sí fue de gran motivación la creencia de que puedan ser empleados en problemas concretos. Como muchas otras investigaciones en el área, esperamos que lo expuesto aquí sirva de base para futuros trabajos de investigación aplicada.

## Bibliografía

- [1] N. Aronszajn. *La théorie générale des noyaux reproduisants et ses applications, première partie*. Proc. Cambridge Philos. Soc. vol. 39 (1944) p. 133.
- [2] Patrick Du Val. *Elliptic Functions and Elliptic Curves*. Cambridge University Press, G.B., 1973.
- [3] R.J. Duffin. *Basic properties of discrete analytic functions*. Duke Math. J., **23** (1956), 335-363.
- [4] R. Kenyon *The laplacian and Dirac operators on critical planar graphs*. Invent. Math., t. 150 (2002), no. 2, p. 409-439, <http://arXiv.org/abs/math-ph/0202018>.
- [5] László Lovász. *Discrete analytic functions: an exposition*. Manuscrito (2000) disponible en <http://research.microsoft.com/users/lovasz/analytic.pdf>
- [6] A.I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable, Volume III*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- [7] C. Mercat. *Discrete polynomials and discrete holomorphic approximation*. (arXiv:math-ph/0206041 v1).
- [8] C. Mercat. *Exponentials form a basis for discrete holomorphic functions*. Bull. Soc. math. France, 132 (2), 2004, p. 305-326.
- [9] S. Saitoh. *Theory of reproducing kernels and its applications*. Longman Scientific and Technical. G.B., 1988.
- [10] E.M. Stein. *The Cauchy kernel, the Szégo Kernel, and the Riemann mapping function*. Math. Ann. vol. 236 (1978) p. 85-93.
- [11] D. Zeilberger. *A new approach to the theory of discrete analytic functions*. J. Math. Anal. Appl., 57:350-367, 1977.
- [12] D. Zeilberger y H. Dym. *Further properties of discrete analytic functions*. J. Math. Anal. Appl., 58:405-418, 1977.