Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Sobre la Estabilidad de un Sistema Mecánico de Tipo Sobolev

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Fidel Olivé Hernández

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Raúl Felipe Parada

CO-DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Andrés Fraguela Collar

Noviembre de 2003 Guanajuato, Gto., México

A mi familia y amigos.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Raúl Felipe Parada mi asesor de tesis, por el tiempo dedicado, por su preocupación y esmero para con este trabajo que van desde el inicio del mismo y hasta esta última versión, agradezco tambien al Dr. Andrés Fraguela Collar quien fungió como mi co-asesor de tesis, por su interés, su tiempo y a quien se deben muchas de las ideas fundamentales en la presente obra. Quiero extender tambien mis agradecimientos a todo el personal que labora en el Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (CIMAT) por las facilidades brindadas durante mi estancia en esta institución y a ésta por darme la oportunidad de estudiar la Maestría en Matemáticas Aplicadas; al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico recibido durante los años de la maestría, a mis compañeros estudiantes (y amigos) de generación por sus enseñanzas y por haber conformado un excelente grupo de estudio.

Guanajuato, Gto., México
Noviembre de 2003 FIDEL OLIVÉ HERNÁNDEZ.

Todo hay que reducirlo a su máxima simplicidad, pero no a más.

ALBERT EINSTEIN.

Índice General

Capítulo 0

Preliminares

En este capítulo se proporcionan algunos conceptos básicos relacionados con parte de la teoría matemática que se empleará en los capitulos subsecuentes. Iniciamos con una introducción sobre los antecedentes y la descripción del problema en estudio. Particularmente, damos una serie de conceptos y proposiciones relacionadas con la teoría de operadores en espacios de Hilbert con lo cual pretendemos definir al final del capítulo una introducción breve a los espacios de Krein. Algunos de los resultados vistos aquí serán empleados al final de este trabajo, principalmente aquellos relacionados con los Espacios de Pontriaguin Π_κ, importantes en análisis de la estabilidad de nuestro sistema mecánico.

0.1 Introducción

0.1.1 Antecedentes históricos

En 1943, S. L. Sobolev concluyó su trabajo [23] *"Sobre el movimiento de un trompo simétrico cuya cavidad está llena de un fluido"*. El movimiento de rotación uniforme del trompo con un punto fijo en su base está descrito por una ecuación de la forma

$$\frac{dR}{dt} = iBR + R_0, \qquad R(t=0) = R_0, \tag{i}$$

donde B es un operador lineal y R es un vector en el espacio fase (complejo e infinito dimensional). La solución de esta ecuación está dada por

$$R = e^{iBt}R^{(0)} + \int_0^t e^{iB(t-s)}R_0(s)\,ds,$$

donde $R(t=0) = R^{(0)}$. En este caso, el operador B resulta ser acotado de tal modo que para valores absolutos de $\lambda \in \mathbb{C}$ suficientemente grandes, existe la resolvente $\Gamma_\lambda = (\lambda I - B)^{-1}$. Entonces,

$$e^{iBt} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{i\lambda t}\Gamma_\lambda\,d\lambda,$$

donde γ es un círculo de radio suficientemente grande centrado en 0. Una forma hermítica $\langle QR_1, R_2\rangle$ puede ser construida en el espacio fase $\{R\}$. Su comportamiento está determinado por la cantidad

$$L = C_1 + C_2 - A_1 - A_2 - \frac{K}{\omega_0} \qquad (K = g\,(l_1M_1 + l_2M_2)),$$

donde:

a) K es el momento rotacional de la fuerza gravitacional y depende del ángulo el cual expresa la desviación del eje z relativo a la dirección vertical;

b) ω_0 es la frecuencia angular de la rotación del trompo alrededor de su eje de simetría (el eje z coincide con el eje de simetría del trompo y el origen del sistema de coordenadas es considerado en el punto fijo);

c) A_1 es el momento inercial del caparazón relativo a los ejes x y y asociados al trompo y A_2 es el momento inercial del líquido relativo a los mismos ejes;

d) C_1 y C_2 son los momentos de inercia del caparazón y del líquido relativos al eje z;

e) l_1 y l_2 son las distancias entre el punto fijo y los centros de masa del caparazón y del líquido respectivamente;

f) g es la aceleración gravitacional;

g) M_1 y M_2 son las masas del caparazón y del líquido respectivamente.

Si $L > 0$, entonces la forma de Q es definida positiva, y si $L < 0$, entonces Q es una forma indefinida con un solo cuadrado negativo.

El operador B es autoadjunto relativo a la forma Q. Por lo tanto, para $L > 0$ su espectro es real y e^{iBt} es un operador acotado. Si $L < 0$, entonces el operador B puede tener espectro no real. En este último caso existe un par de valores propios complejos conjugados. La presencia -o ausencia- de estos valores propios no reales tiene una influencia determinante en la estabilidad de la solución para la ecuación (i).

Extendiendo las investigaciones de Sobolev, L.S. Pontriaguin publicó en 1944 su trabajo dedicado al estudio de operadores autoadjuntos relativos a una forma hermítica con $\kappa < \infty$ cuadrados negativos. Si A es un operador con esta propiedad, entonces usando algunos métodos algebraicos sutiles, puede ser establecida la existencia de un par $(\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-)$ de subespacios invariantes para A, donde $\mathfrak{L}_+$ es un subespacio maximal no negativo y $\mathfrak{L}_-$ es un subespacio maximal no positivo con las siguientes propiedades que conciernen al espectro de $A|\mathfrak{L}_+$ y $A|\mathfrak{L}_-$: los valores propios en $\sigma(A, \mathfrak{L}_+)$ y $\sigma(A, \mathfrak{L}_-)$ son, dos a dos, complejos conjugados y las partes imaginarias de estos eigenvalores son no negativas para $\mathfrak{L}_+$ y no positivas para $\mathfrak{L}_-$. Como un reconocimiento a las contribuciones de Pontriaguin, los espacios de Hilbert con una métrica indefinida que tienen un número finito κ de cuadrados positivos (o negativos) son llamados *Espacios de Pontriaguin*. Usualmente estos espacios se denotan por Π_κ.

Posteriores avances relacionados con este problema se deben a M. Yurkin [29], [30], A.G. Kostyuchenko [15], R. Felipe y A. Fraguela [5], [6] y la tesis R. Felipe y A. Bohigas [7].

0.1.2 Descripción del problema

Aceptamos como principio básico que las ecuaciones que describen la dinámica de un cierto fluido [18] son respectivamente la *Ecuación de Euler* (no lineal) y la *Ecuación de Continuidad:*

$$\begin{gathered}\frac{du'}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla' p' = \mathbf{F}' - g\mathbf{k},\\ \operatorname{div}\mathbf{u}' = 0.\end{gathered} \tag{ii}$$

donde $\mathbf{u}'$ y p' denotan respectivamente la velocidad del fluido y su presión hidrodinámica, ρ y g son constantes y $\mathbf{F}'$ es cierto vector[1].

El objetivo de este trabajo es, primero, buscar soluciones particulares de la Ecuación de Euler (ii) que describan algún tipo de rotación alrededor de un eje para luego analizar su estabilidad lineal ante pequeñas perturbaciones.

Cuando se estudia una rotación con frecuencia angular ω_0 bajo la acción únicamente de la gravedad este movimiento corresponde a

$$\begin{gathered}\mathbf{u}'_{(0)}(x',\, y',\, z',\, t) = \omega_0 \mathbf{k}\times\mathbf{r}',\\ p'_{(0)}(x',\, y',\, z',\, t) = \rho\omega_0^2\tfrac{(x')^2+(y')^2}{2} - \rho g z'.\end{gathered}\tag{iii}$$

Aqui $x'y'z'$ denota un sistema de referencia inercial con origen O'.

Observe que a partir de (iii) se espera que si la frecuencia angular es variable, digamos $\omega_1(t)$, entonces la 'rotación con frecuencia angular variable' será de la forma

$$\begin{gathered}\mathbf{u}'_{(0)} = \omega_1(t)\mathbf{k}\times\mathbf{r}',\\ p'_{(0)} = \rho\omega_1^2(t)\tfrac{(x')^2+(y')^2}{2} - \rho g z'.\end{gathered}$$

Como veremos en el Capítulo 1, la dificultad consiste en que no se puede obtener una dinámica de este tipo cuando $\omega_1(t)$ es no constante, a menos que sobre el líquido actúe una fueza externa aparte de la gravedad. Esa fuerza debe ser

$$\mathbf{F}' = \dot\omega_1(t)\mathbf{k}\times\mathbf{r}'$$

Más adelante buscaremos expresar el sistema de referencia $x'y'z'$ en otro que se mueva junto con el cuerpo rígido, al cual denotaremos por xyz con origen $O(=O')$. Este último sistema rota con frecuencia angular no constante $\omega_2(t)$ (no necesariamente igual a $\omega_1(t)$). La vía que emplearemos para ello será mediante el cambio de variable

$$x' + iy' = e^{i\theta_2(t)}\,(x+iy)\,, \qquad z' = z$$

donde $\dot\theta_2(t) = \omega_2(t)$.

[1] En el Capítulo 1 daremos formalmente la descripción precisa de estos conceptos.

Al pasar de las variables x', y', z' a las variables x, y, z se llega al siguiente sistema para $(\mathbf{u},\, p)$ que son las transformadas de $(\mathbf{u}',\, p')$:

$$\begin{gathered}\tfrac{d\mathbf{u}}{dt} - 3\omega_2(t)\mathbf{u}\times\mathbf{k} + \omega_2(t)\left(x\tfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial y} - y\tfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right)x + \tfrac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{F} - g\mathbf{k},\\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0.\end{gathered}\tag{iv}$$

donde

$$\begin{gathered}\mathbf{F} = \left(\dot\omega_1(t) - \dot\omega_2(t)\right)\mathbf{k}\times\mathbf{r},\\ p = \widehat{p} - 2\rho\omega_2^2(t)\tfrac{x^2+y^2}{2}.\end{gathered}$$

Al hacer el cambio de coordenadas, las cantidades $(\mathbf{u}_0',\, p_0')$ se convierten en $(\mathbf{u}_0,\, p_0)$. La solución de referencia en el nuevo sistema es la siguiente:

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_{(0)} = \left(\omega_1(t) - \omega_2(t)\right)\mathbf{k}\times\mathbf{r},\\ p_{(0)} = \rho\left(\omega_1^2(t) - \omega_2^2(t)\right)\tfrac{x^2+y^2}{2} - \rho g z.\end{gathered}\tag{v}$$

Linealizando (iv) alrededor de $(\mathbf{u}_0,\, p_0)$ de (v), sustituyendo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$, $p = p_0 + h$ donde $\mathbf{v}$ y h denotan las magnitudes que miden las desviaciones de $\mathbf{u}$ y p con respecto de $\mathbf{u}_{(0)}$ y $p_{(0)}$ respectivamente, y despreciando el término cuadrático $\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ se llega a la siguiente ecuación lineal de las desviaciones en el nuevo sistema de coordenadas:

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \left(\omega_1(t) + 2\omega_2(t)\right)\mathbf{v}\times\mathbf{k} + \omega_1(t)\left(x\tfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} - y\tfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\right) + \tfrac{1}{\rho}\nabla h = \mathbf{0},\\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0.\end{gathered}$$

donde

$$h = p - \rho\left(\omega_1^2(t) - \omega_2^2(t)\right)\frac{x^2+y^2}{2} + \rho g z.$$

Comentario 0.1. El problema aquí planteado es distinto al estudiado por Sobolev [23]. Este es un problema más general, en el sentido que suponemos que el trompo y el líquido rotan con velocidades angulares no necesariamente iguales. Algunas aplicaciones aparecen frecuentemente en [17], [21] y [3].

A continuación definimos algunos conceptos básicos relacionados con la teoría matemática que emplearemos más adelante.

0.2 Funcionales lineales y operadores lineales acotados

Sea H un espacio de Hilbert. Sea D un subconjunto de H. Una función Φ la cual relaciona a cada punto $f \in D$ un número complejo denotado por $\Phi(f)$, es llamado un *funcional* en el espacio H con *dominio* D. Una función T, la cual relaciona a cada elemento $f \in D$ un elemento particular $Tf = g \in H$, es llamada un *operador* en el espacio H con dominio D. El conjunto Δ que consiste de todos los $g = Tf$, donde f recorre D, es llamado el *rango* de T.

Si el operador T envía cada par de elementos diferentes de D en un par de elementos diferentes de Δ, entonces T tiene un operador inverso T^{-1} el cual mapea los elementos de Δ en elementos de D ($T^{-1}g = f$ si, y sólo si, $f = Tg$).

Diremos que dos funcionales (u operadores) son equivalentes si sus dominios coinciden y si para cada elemento de su dominio común los valores de estos funcionales (u operadores) coinciden.

Si el dominio D_T del operador T contiene al dominio D_S del operador S i.e., si $D_S \subset D_T$, y si

$$Tf = Sf$$

para cada $f \in D_S$, entonces T es llamado una *extensión* de S y escribimos

$$S \subset T.$$

Decimos que T es *continuo* en un punto $f_0 \in D_T$ si

$$\lim_{f \longrightarrow f_0} Tf = Tf_0, \quad (f \in D_T).$$

Si el elemento f_0 no pertenece a D_T pero $\lim Tf = g_0$ existe cuando $f \longrightarrow f_0$ (independientemente de la dirección) con $f \in D_T$, entonces el operador T puede ser definido para f_0 haciendo $Tf_0 = g_0$. Procediendo exactamente en la misma forma con todos aquellos f_0 con esta propiedad, llegamos a la llamada *extensión por continuidad del operador*[2] T.

[2]Esto es equivalente a suponer que T es acotado al extënderlo a su clausura de esta manera

Sean S y T dos operadores tales que $\Delta_T \cap D_S \neq \varnothing$. En este caso definimos el *producto* ST de S y T como el operador tal que

$$STf = S(Tf)$$

para cada elemento f en su dominio, el cual está definido como el conjunto de todos los $f \in D_T$ para los cuales $Tf \in D_S$.

0.2.1 Funcionales lineales

Definición 0.1. Un funcional Φ se dice *lineal* si su dominio D es una variedad lineal y

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$$

para f, $g \in D$ y α, β números complejos arbitrarios.

Si además, la desigualdad

$$\sup_{f \in D(T),\, \|f\| \leq 1} |\Phi(f)| < \infty$$

se satisface, entonces Φ se dice *acotado*.

El miembro izquierdo de esta desigualdad es llamado la *norma* del funcional Φ y es denotada por el símbolo $\|\Phi\|_{D(T)}$ o si $D(T) = H$ simplemente por $\|\Phi\|$.

0.2.2 Operadores lineales acotados

Un operador T es *lineal* si su dominio de definición $D(T)$ es una variedad lineal y si

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$$

para f, $g \in D(T)$ y α, β números complejos cualesquiera.

Un operador lineal T es *acotado* si

$$\sup_{f\in D(T),\, \|f\|\leq 1} \|Tf\| < \infty.$$

El miembro izquierdo de esta desigualdad es llamado la *norma* del operador T y es denotada por el simbolo $\|T\|$ o algunas veces por $\|T\|_{D(T)}$.

Se tienen algunas propiedades validas para operadores lineales acotados:

1. La norma de un operador lineal acotado T puede ser definida equivalentemente por

$$\|T\| = \sup_{f\in D(T),\, f\neq 0} \frac{\|Tf\|}{\|f\|}.$$

2. Un operador lineal acotado es continuo en su dominio de definición.
3. Si un operador lineal es continuo en un punto, entonces es continuo en todos los puntos donde está definido[3].
4. La extensión por continuidad de un operador lineal acotado T conduce a un único operador lineal con la misma norma que el operador original.
5. Si S y T son operadores lineales, entonces $\alpha S + \beta T$, donde α, β son números complejos arbitrarios, es un operador lineal con la intersección $D_S \cap D_T$ de los dominios D_S, D_T como el dominio de definición.

En adelante supondremos, sin pérdida de generalidad, que los operadores acotados están definidos en todo el espacio.

0.2.3 Funcionales bilineales

Decimos que Ω es un funcional bilineal definido en H, si a cada par de elementos $f,\, g \in H$ corresponde un número complejo definido $\Omega(f,\, g)$ y

(a) $\Omega(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2,\, g) = \alpha_1 \Omega(f_1,\, g) + \alpha_2 \Omega(f_2,\, g)$,

(b) $\Omega(f,\, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \overline{\beta_1}\Omega(f,\, g_1) + \overline{\beta_2}\Omega(f,\, g_2)$,

(c) $\sup_{\|f\|\leq 1,\, \|g\|\leq 1} |\Omega(f,\, g)| < \infty$.

[3]Es fácil ver que la continuidad de un operador lineal es equivalente a su acotación.

0.2.4 La forma general de un funcional bilineal

Teorema 0.1. Todo funcional bilineal $\Omega(f,\, g)$ acotado tiene una representación de la forma

$$\Omega(f,\, g) = \langle Af,\, g\rangle.$$

En esta ecuación A es un operador lineal acotado con dominio H la cual está determinado de manera única por Ω. Más aún,

$$\|A\| = \|\Omega\|.$$

0.2.5 Operador adjunto (de un operador acotado)

Sea A un operador lineal acotado arbitrario definido en H. La expresión

$$\langle f,\, Ag\rangle$$

define un funcional bilineal en H con norma $\|A\|$. De acuerdo al teorema de la sección precedente existe un único operador lineal acotado A^* definido en H con norma $\|A^*\| = \|A\|$ tal que

$$\langle f,\, Ag\rangle = \langle A^* f,\, g\rangle$$

para $f,\, g \in H$. Este opreador A^* es llamado el *adjunto* de A. Se puede ver que $(A^*)^* = A^{**}$ es equivalente al operador original A.

Si A es acotado y $A^* = A$, entonces A se dice *autoadjunto*.

Sean A y B dos operadores lineales acotados definidos en H. Entonces

$$(ABf,\, g) = (Bf,\, A^* g) = (f,\, B^* A^* g),$$

lo cual implica que

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

Por lo tanto, el producto de dos operadores autoadjuntos es autoadjunto si, y sólo si, los operadores commutan.

0.3 Operadores de proyección ortogonal

Sea G un subespacio del espacio H y sea

$$F = H \ominus G$$

tal que

$$H = G \oplus F.$$

Entonces todo vector $h \in H$ está representado de manera única en la forma

$$h = g + f$$

donde $g \in G$ y $f \in F$. El vector g es llamado la proyección de h en G. El operador el cual asigna cada $h \in H$ en su proyección g en G es llamado el *operador de proyección* en G o simplemente un operador de proyección ortogonal. Este es denotado por P_G o algunas veces por P. De esta forma, si g y h estan relacionados como arriba,

$$g = Ph = P_G h.$$

Un operador de proyección es evidentemente lineal.

0.3.1 Propiedades de los operadores de proyección ortogonal

De la definición de un operador de proyección ortogonal se sigue que

1) $P^2 = P$,

2) $P^* = P$.

Teorema 0.2. Si P es un operador cualquiera definido en H tal que para cualesquiera $h_1, h_2 \in H$,

1) $\langle P^2 h_1, h_2\rangle = \langle Ph_1, h_2\rangle$,

2) $\langle Ph_1, h_2\rangle = \langle h_1, Ph_2\rangle$,

entonces existe un subespacio $G \subset H$ tal que P es el operador de proyección en G.

0.4 Conceptos generales y proposiciones en la teoría de operadores lineales

0.4.1 Operadores cerrados

Un operador T (no necesariamente lineal) es *cerrado* si las relaciones

$$f_n \in D_T, \ \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n = f, \ \lim_{n\longrightarrow\infty} Tf_n = g$$

implican que

$$f \in D_T, \quad Tf = g.$$

Definición 0.2. Un operador T (no necesariamente lineal) con dominio $D(T)$ *admite un operador clausura* $\overline{T}$ si satisface la siguiente propiedad: si $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones pertenecientes a $D(T)$ que convergen a un mismo punto y además $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{Tz_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen, entonces estas últimas convergen al mismo límite.

Si esta propiedad se cumple, entonces $D(\overline{T}) = \{x \in H | \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T), x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x \wedge \{Tx_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ converge}\}$, en este caso $\overline{T}x = \lim_{n\longrightarrow\infty} Tx_n$. Es fácil ver que $T \subset \overline{T}$.

0.4.2 La definición general de operador adjunto

Definición 0.3. Para un operador T con dominio $D(T)$ denso en un espacio de Hilbert H se define su adjunto T^* como

1) su dominio
$$D(T^*) = \{g \in H | \text{Existe } g^* \in H \text{ para el cual } \langle Tf, g\rangle = \langle f, g^*\rangle \text{ para todo } f \in D(T)\},$$

2) $T^*g = g^*$ para todo $g \in D(T^*)$.

De esta forma, si D_T es denso en H, entonces el operador T tiene un operador adjunto T^*.

Ahora damos una lista de propiedades concernientes a los operadores adjuntos:

1. El operador T^* es lineal.

2. Si $S \subset T$, entonces $T^* \subset S^*$.

3. El operador T^* es cerrado, independientemente que T lo sea o no.

4. Si el operador T tiene una clausura $\overline{T}$, entonces $(\overline{T})^* = T^*$.

5. Si el operador T^{**} existe, entonces

$$T \subset T^{**}.$$

0.5 Vectores propios, subespacios invariantes y reducibilidad de operadores lineales

Un número complejo λ es llamado un *valor propio* del operador lineal T, si existe un vector $f \neq 0$ tal que

$$Tf = \lambda f.$$

El vector f es llamado un *vector propio* del operador T.

Un subespacio $H_1 \subset H$ es llamado un *subespacio invariante* del operador T si todo elemento de $D(T)$ que pertenece a H_1 es aplicado por el operador T en un elemento que tambien pertenece a H_1 i.e., si la relación de inclusión

$$f \in D(T) \cap H_1$$

implica la relación de inclusión

$$Tf \in H_1.$$

El operador T determina un operador T_1 definido en el subespacio H_1 tal que

$$D(T_1) = D(T) \cap H_1, \quad T_1 \subset T.$$

Este operador T_1 es llamado la *restricción* del operador T en H_1.

Si H_1 es un subespacio invariante del operador T entonces su complemento ortogonal $H \ominus H_1$ puede ser o no un subespacio invariante de este operador. Supongamos que H_1 y $H_2 = H \ominus H_1$ son subespacios invariantes del operador T y que T_1 y T_2 son las restricciones del operador T a H_1 y H_2 respectivamente. Como para todo elemento $h \in H$ se tiene una única representación

$$h = h_1 + h_2$$

donde $h_1 \in H_1$ y $h_2 \in H_2$ se sigue que

$$Th = T_1h_1 + T_2h_2.$$

Si el operador T no está definido en todo H, entonces la propiedad resulta válida solamente bajo la condición adicional de que la proyección P_{H_1} en H_1 no mapea elemetos de D_T fuera de D_T.

Teorema 0.3. Si H_1 y su complemento ortogonal H_2 son subespacios invariantes de un operador lineal T y si $P_{H_1}D(T) \subset D(T)$, entonces para cada $f \in D_T$

$$Tf = T_1f_1 + T_2f_2,$$

donde T_1 y T_2 son las restricciones de T a H_1 y H_2 y f_1 y f_2 son las proyecciones de f en H_1 y H_2 respectivamente.

Si el subespacio H_1 satisface las condiciones del Teorema 0.3, entonces decimos que este *reduce* al operador T.

Teorema 0.4. Sea P el operador de proyección en un subespacio dado G. Entonces G reduce a T si, y sólo si,

1) $Pf \in D_T$ y

2) $PTf = TPf$ para todo $f \in D_T$.

es decir, si los operadores T y P commutan.

0.5.1 Operadores simétricos

Un operador lineal A se dice *simétrico* si:

1) su dominio $D(A)$ es denso en H y

2) para todo $f,\, g \in D(A)$

$$\langle Af,\, g\rangle = \langle f,\, Ag\rangle.$$

De esta definición se sigue que el producto escalar $\langle Af,\, f\rangle$ es real para $f \in D(A)$. Si para un operador A se tiene que

$$\langle Af,\, f\rangle \geq 0$$

para todo $f \in D(A)$, entonces se dice que el operador es *positivo*. Un operador *negativo* se define análogamente.

Si A es un operador simétrico, entonces

$$A \subset A^*.$$

Dado que el operador adjunto siempre es cerrado esta relación muestra que un operador simétrico siempre tiene una clausura.

Si B es una extesión simétrica del operador A entonces $B \subset A^*$ i.e., toda extensión simétrica del operador A es una restricción del operador adjunto A^*. Un operador A que coincide con su adjunto ($A = A^*$) se llama *autoadjunto*; este no tendrá por tanto una extesión simétrica propia.

Los siguientes teoremas serán fundamentales en la prueba de la existencia de los subespacios invariantes de dimensión finita que intervienen en la evolución del sistema mecánico.

Teorema 0.5. Un operador simétrico A tal que su rango Δ_A es todo H es autoadjunto.

Teorema 0.6. Los valores propios de un operador simétrico son reales.

Teorema 0.7. Los vectores propios f_1 y f_2 correspondientes a dos valores propios λ_1 y λ_2 distintos de un operador simétrico son ortogonales.

Teorema 0.8. Si G es un subespacio invariante del operador simétrico A y si el operador de proyección ortogonal P sobre G satisface la propiedad $PD_A \subset D_A$, entonces el subespacio G reduce al operador A.

0.5.2 El concepto de espectro (particularmente de un operador autoadjunto)

Supongamos que tenemos dado un operador T definido en una variedad D_T la cual es densa en H. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrario y consideremos la ecuación

$$Tf - \lambda f = g.$$

El estudio de esta ecuación se reduce a una investigación de la variedad lineal $\Delta_T(\lambda)$ (el rango de $T - \lambda I$) la cual consiste de los vectores $(T - \lambda I)f$ donde f recorre todo D_T.

Si $(T - \lambda I)^{-1}$ existe y es un operador acotado definido en todo H ($\Delta_T(\lambda) = H$), entonces λ es llamado un *punto regular* del operador T. Todos los otros puntos del plano complejo comprenden el espectro del operador T.

Teorema 0.9. La correspondencia entre D_T y Δ_T determinada por el operador $T - \lambda I$ es uno a uno si, y sólo si, λ no es valor propio del operador T.

Corolario 0.1. El espectro de un operador autoadjunto es un subconjunto del eje real.

Si A es un operador autoadjunto entonces el punto λ es un *punto regular* de A si $\Delta_A(\lambda) = H$ y λ es un *punto del espectro* si $\Delta_A(\lambda) \neq H$.

Decimos que el punto λ pertenece al *espectro puntual (discreto)* del operador autoadjunto A si $\overline{\Delta_A}(\lambda) \neq H$ y λ pertenece al *espectro continuo* si $\Delta_A(\lambda) \neq \overline{\Delta_A(\lambda)}$.

Teorema 0.10. El espectro de un operador autoadjunto es un conjunto cerrado.

0.6 Introducción a los espacios de Krein

Un *espacio de Krein* es un espacio lineal complejo $\mathcal{K}$ dotado con una forma hermítica $[\cdot,\, \cdot]_{\mathcal{K}}$, la cual introduce una descomposición del espacio en la forma

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-,$$

donde $\mathcal{K}^+$ y $\mathcal{K}^-$ son variedades lineales en $\mathcal{K}$ tales que $(\mathcal{K}^\pm,\, \pm[\cdot,\, \cdot]_{\mathcal{K}})$ son espacios de Hilbert y $[\mathcal{K}^+,\, \mathcal{K}^-]_{\mathcal{K}} = \{0\}$. Este tipo de descomposición es llamada *descomposición fundamental* del espacio de Krein $\mathcal{K}$.

Las dimensiones de los subespacios $\mathcal{K}^{\pm}$ son las mismas para cada descomposición fundamental del espacio de Krein $\mathcal{K}$, y los números cardinales $k^{\pm}(\mathcal{K}) = \dim \mathcal{K}^{\pm}$ son llamados la *signatura positiva* (respectivamente, *negativa*) del espacio de Krein $\mathcal{K}$. El número cardinal $k(\mathcal{K}) = \text{mín}\,\{k^{+}(\mathcal{K}),\, k^{-}(\mathcal{K})\}$ es llamado el *rango de indeterminación* del espacio $\mathcal{K}$.

Capítulo 1

Modelación del Sistema Físico

El propósito de este capítulo es hacer congruente el problema planteado con las leyes fisicas involucradas. Se inicia con una descripción general del sistema mecánico a estudiar y posteriormente se analizan aspectos sobre éste que dan condiciones suficientes para establecer un modelo matemático con el cual hacer un estudio posterior sobre su estabilidad.

1.1 Introducción

En esta tesis de maestría pretendemos estudiar el caso en que el sistema mecánico que consiste de un cuerpo rígido (trompo) con un punto fijo en su base y una cavidad interior llena completamente de un fluido, es asistido por un movimiento de rotación variable, bajo las siguientes condiciones: el cuerpo rígido (y por lo tanto la cavidad interna) es simétrico con respecto al eje vertical y la cavidad interna tiene un orden de simetría $m \geq 3$ bajo rotaciones con respecto a este eje vertical[1]. Tal sistema será denominado *de Tipo Sobolev*, o simplemente *Sistema de Sobolev*.

Supongamos que una masa de un fluido ideal de densidad constante ρ ocupa una región Ω fija del espacio y que además, ésta es simétrica con respecto a un eje vertical. Inicialmente, el fluido se encuentra bajo la acción de una fuerza externa (de torque) y su peso, rotando con una frecuencia angular variable $\omega_1(t)$ al rededor de este eje vertical. Nuestra principal prioridad por el momento será escribir las

[1]Si consideramos la cavidad interna Ω como un conjunto de puntos en el espacio, despues de una rotación de ángulo $2\pi/m$, recuperamos Ω.

ecuaciones que gobiernan las pequeñas oscilaciones de este fluido bajo perturbaciones externas. Para ello, es necesario introducir algun sistema de coordenadas ortogonal de $\mathbb{R}^3$, con respecto al cual se escribirán dichas ecuaciones. Aquí 'modelar las pequeñas oscilaciones' significa escribir un sistema de ecuaciones para la diferencia entre el valor de las magnitudes físicas que describen la hidrodinámica del fluido, antes y después de la perturbación. Estas diferencias, que en adelante llamaremos *desviaciones*, serán escritas en dos sistemas de coordenadas ortogonales bajo el siguiente programa:

(a) escribir las ecuaciones del fluido con respecto a un sistema ortogonal de coordenadas inercial $x'y'z'$ con origen en O' que además, coincide con el punto fijo del Sistema de Sobolev; en este sistema de coordenadas, el fluido rota con frecuencia angular variable $\omega_1(t)$ y el eje z' coincide con el eje de giro vertical,

(b) escribir las ecuaciones de (a) en un sistema de coordenadas ortogonal xyz que gire junto a la masa del fluido con frecuencia angular no constante $\omega_2(t)$ cuyo eje z y origen O coincidan, respectivamente, con el eje z' y el origen O' del sistema de coordenadas de (a).

1.2 Ecuaciones de la hidrodinámica

Sean u_1', u_2', u_3' las respectivas componentes paralelas a los ejes x', y', z' del campo de velocidad del fluido $\mathbf{u}'$ en el punto x', y', z' de Ω y en el instante de tiempo t. Si denotamos por p' a la presión hidrodinámica sobre la frontera de la región Ω, entonces las ecuaciones que gobiernan [18] el movimiento de las partículas del fluido son las denominadas *Ecuación de Euler* (no lineal) y la *Ecuación de Continuidad*, a las que en conjunto llamaremos *Sistema de Euler*, y las cuales son respectivamente,

$$\begin{array}{c} \frac{d\mathbf{u}'}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla' p' = \mathbf{F}' - g\mathbf{k}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u}' = 0 \end{array} \tag{1}$$

donde g es la constante gravitacional, $\mathbf{k} = (0,0,1)^T$, $\mathbf{F}'$ es el vector de las fuerzas externas totales (por unidad de masa) actuando sobre el fluido y $\frac{d\mathbf{u}'}{dt}$ es la *derivada*

material[2] de $\mathbf{u}'$, la cual está definida como

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla'\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'. \tag{2}$$

Comentario 1.1. La fuerza $\mathbf{F}'$ que aparece en (1) es introducida de manera artificial para producir el régimen de rotación no estacionario en el líquido.

1.3 Formulación del problema

En esta sección, nuestra meta será encontrar alguna solución variable del Sistema de Euler (1) para un fluido ideal incompresible que pueda interpretarse como una generalización de la rotación uniforme con frecuencia angular no constante. A continuación analizamos algunos aspectos sobre la viabilidad de la existencia de tal solución.

1.3.1 Imposibilidad de construir una solución correspondiente a una frecuencia angular no constante únicamente bajo la acción de la gravedad

Una primera cuestión con relación al sistema de ecuaciones (1) es la siguiente: ¿Es posible que exista algún tipo de movimiento del fluido que corresponda a una rotación con frecuencia angular no constante?, en otras palabras, ¿Puede tener el Sistema de Euler (1) soluciones de la forma

$$\begin{array}{c} \mathbf{u}'_{(0)} = \omega_1(t)\mathbf{k} \times \mathbf{r}', \\ p'_{(0)} = \rho\omega_1^2(t)\frac{(x')^2+(y')^2}{2} - \rho g z' \end{array} \tag{3}$$

[2]Para un campo de velocidad [18] de un fluido $\mathbf{u} = (u,v,w)^T$ su *matriz jacobiana* se define como

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

en donde $u = u(x,y,z,t)$, $v = v(x,y,z,t)$, $w = w(x,y,z,t)$.

con $\omega_1(t)$ una función escalar no constante?.

Antes de responder a estas interrogantes analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1. Supongamos que la única fuerza externa que aparece en este caso corresponde al peso del fluido, es decir, $\mathbf{F}' = \mathbf{0}$. Entonces de la definición de derivada material (2), la Ecuación de Euler de (1) se escribe como

$$\frac{d\mathbf{u}'_{(0)}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla' p'_{(0)} = \frac{\partial \mathbf{u}'_{(0)}}{\partial t} + \nabla'\mathbf{u}'_{(0)}\cdot\mathbf{u}'_{(0)} + \frac{1}{\rho}\nabla' p'_{(0)} = -g\mathbf{k},$$

y de (3) se sigue que

$$\frac{d\mathbf{u}'_{(0)}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla' p'_{(0)} = \dot{\omega}_1(t)\mathbf{k}\times\mathbf{r}' - \omega_1^2(t)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\omega_1^2(t)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} - g\mathbf{k}\right] = -g\mathbf{k},$$

lo cual implica $\dot{\omega}_1(t) = 0$, es decir, $\omega_1(t)$ es necesariamente constante en todo instante[3]. □

Observación 1.1. Nótese que si se introduce una fuerza externa de la forma $\mathbf{F}' = \varphi(t)(\mathbf{k}\times\mathbf{r}')$ para alguna función escalar φ, entonces, a partir del sistema (1), es posible la existencia de una tal $\omega_1(t)$ no constante.

Conclusión 1.1. Solamente en presencia de la acción de la gravedad *no* es posible encontrar un movimiento que represente una rotación uniforme con frecuencia angular no constante.

Queda una cuestión por analizar, ¿Es posible que si al introducir el cuerpo rígido con una cierta frecuencia angular no constante se pueda obtener la solución deseada y analizar la estabilidad en este caso?. La respuesta es afirmativa como veremos a continuación.

1.3.2 Propuesta de una solución correspondiente a una rotación con velocidad angular no constante para la masa de líquido

Consideremos el Sistema de Euler (1) dado en el sistema de coordenadas $x'y'z'$ para un fluido incompresible bajo la acción de su peso y una fuerza externa $\mathbf{F}'$. Tenemos la siguiente proposición.

[3]El punto sobre la letra indica derivación con respecto al tiempo.

Proposición 1.1. Sea $\mathbf{F}' = \mathbf{F}'(x', y', z', t)$ una fuerza externa de rotación no constante de la forma

$$\mathbf{F}' = \dot{\omega}_1(t)\mathbf{k}\times\mathbf{r}'. \tag{4}$$

Entonces, la solución del Sistema de Euler (1) correspondiente a la rotación uniforme es

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_{(0)} &= \omega_1(t)\mathbf{k}\times\mathbf{r}', \\ p'_{(0)} &= \rho\omega_1^2(t)\frac{(x')^2+(y')^2}{2} - \rho g z'. \end{aligned} \tag{5}$$

PRUEBA: Es inmediato que el campo de velocidad $\mathbf{u}'_{(0)}$ dado por (5) satisface la Ecuación de Continuidad de (1). Para la Ecuación de Euler de (1) encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}'_{(0)}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla' p'_{(0)} &= \frac{\partial \mathbf{u}'_{(0)}}{\partial t} + \nabla'\mathbf{u}'_{(0)}\cdot\mathbf{u}'_{(0)} + \frac{1}{\rho}\nabla' p'_{(0)} = \\ &= \dot{\omega}_1(t)\mathbf{k}\times\mathbf{r}' - \omega_1^2(t)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\omega_1^2(t)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} - g\mathbf{k}\right] = \\ &= \dot{\omega}_1(t)(\mathbf{k}\times\mathbf{r}') - g\mathbf{k} = \mathbf{F}' - g\mathbf{k}. \end{aligned}$$

□

A continuación escribiremos las ecuaciones (1) en el sistema xyz que rota junto con el cuerpo rígido.

1.4 Ecuaciones para el fluido

Denotemos por $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ al campo de velocidad en el sistema móvil xyz que rota junto con el cuerpo rígido. Denotemos tambien por p y $\mathbf{F}$ a la presión hidrodinámica y la fuerza externa en este nuevo sistema de coordenadas.

En adelante buscaremos expresar cada uno de los términos de la Ecuación de Euler de (1) en las nuevas coordenadas xyz. Para pasar del sistema $x'y'z'$ al sistema xyz ocuparemos el siguiente cambio de variable[4]:

[4]Obviamente $\theta_2(t)$ es dado adimensionalizado.

$$x' + iy' = e^{i\theta_2(t)}\left(x + iy\right), \qquad z' = z. \tag{6}$$

donde $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2(t)$.

Derivando (6) con respecto al tiempo t obtenemos de forma implícita las componentes de $\mathbf{u}'$ en las nuevas variables:

$$\begin{gathered} u_1' + iu_2' = e^{i\theta_2(t)}\left(u_1 + iu_2\right) + i\omega_2(t)e^{i\theta_2(t)}\left(x + iy\right), \\ u_3' = u_3. \end{gathered} \tag{7}$$

A partir de (7) encontramos una representación explícita para $\mathbf{u}'$ en este nuevo sistema de coordenadas:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \omega_2(t)\mathbf{k} \times \mathbf{r}.$$

Tambien de (6), tomando la parte real y la parte imaginaria, tenemos las componentes x', y', z' en el sistema xyz:

$$\begin{gathered} x' = x\cos\theta_2(t) - y\,sen\,\theta_2(t), \qquad y' = x\,sen\,\theta_2(t) + y\cos\theta_2(t), \\ z' = z. \end{gathered} \tag{8}$$

Luego, de (8) se tienen los siguientes operadores:

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial}{\partial x'} = \cos\theta_2(t)\tfrac{\partial}{\partial x} - sen\,\theta_2(t)\tfrac{\partial}{\partial y}, \quad \tfrac{\partial}{\partial y'} = \cos\theta_2(t)\tfrac{\partial}{\partial y} + sen\,\theta_2(t)\tfrac{\partial}{\partial x}, \\ \tfrac{\partial}{\partial z'} = \tfrac{\partial}{\partial z}. \end{gathered}$$

Para obtener las componentes del campo de velocidad $\mathbf{u}'$ en xyz derivamos (8) con respecto de t y empleamos los operadores de (9), de esta manera

$$\begin{gathered} u_1' = (u_1 - \omega_2(t)y)\cos\theta_2(t) - (u_2 + \omega_2(t)x)\,sen\,\theta_2(t), \\ u_2' = (u_2 + \omega_2(t)x)\cos\theta_2(t) + (u_1 - \omega_2(t)y)\,sen\,\theta_2(t), \\ u_3' = u_3. \end{gathered}$$

Las componentes del Sistema de Euler (1) están dadas en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial u_1'}{\partial t} + u_1'\tfrac{\partial u_1'}{\partial x'} + u_2'\tfrac{\partial u_1'}{\partial y'} + u_3'\tfrac{\partial u_1'}{\partial z'} + \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial p'}{\partial x'} = -\dot{\omega}_1(t)y', \\ \tfrac{\partial u_2'}{\partial t} + u_1'\tfrac{\partial u_2'}{\partial x'} + u_2'\tfrac{\partial u_2'}{\partial y'} + u_3'\tfrac{\partial u_2'}{\partial z'} + \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial p'}{\partial y'} = \dot{\omega}_1(t)x', \\ \tfrac{\partial u_3'}{\partial t} + u_1'\tfrac{\partial u_3'}{\partial x'} + u_2'\tfrac{\partial u_3'}{\partial y'} + u_3'\tfrac{\partial u_3'}{\partial z'} + \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial p'}{\partial z'} = -g, \\ \tfrac{\partial u_1'}{\partial x'} + \tfrac{\partial u_2'}{\partial y'} + \tfrac{\partial u_3'}{\partial z'} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

No es difícil ver que, usando las relaciones anteriores, la Ecuación de Continuidad de (1) se escribe en el sistema xyz como

$$\frac{\partial u_1'}{\partial x'} + \frac{\partial u_2'}{\partial y'} + \frac{\partial u_3'}{\partial z'} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0,$$

de donde

$$\operatorname{div}\mathbf{u}' = \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{10}$$

Observemos que, usando la notación introducida al principio, las ecuaciones (9) se pueden expresar complejificadamente como

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial\left(u_1' + iu_2'\right)}{\partial t} + s_1' + is_2' + \tfrac{1}{\rho}\left(\tfrac{\partial}{\partial x'} + i\tfrac{\partial}{\partial y'}\right)p' = i\dot{\omega}_1(t)(x' + iy'), \\ \tfrac{\partial u_3'}{\partial t} + s_3' + \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial p'}{\partial z'} = -g, \\ \tfrac{\partial u_1'}{\partial x'} + \tfrac{\partial u_2'}{\partial y'} + \tfrac{\partial u_3'}{\partial z'} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Por otra parte, los términos $\nabla' p'$ y $\mathbf{F}'$ correspondientes a la presión hidrodinámica y la fuerza externa se tratan respectivamente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \left(\tfrac{\partial}{\partial x'} + i\tfrac{\partial}{\partial y'}\right)p' \\ \tfrac{\partial p'}{\partial z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_2(t)}\left(\tfrac{\partial}{\partial x} + i\tfrac{\partial}{\partial y}\right)\widehat{p} \\ \tfrac{\partial \widehat{p}}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$i\dot{\omega}_1(t)\begin{pmatrix} x' + iy' \\ 0 \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} = i\dot{\omega}_1(t)\begin{pmatrix} e^{i\theta_2(t)}(x + iy) \\ 0 \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

o bien, en forma vectorial[5]:

$$\nabla' p' = \nabla \widehat{p}, \qquad \widehat{\mathbf{F}} = \dot{\omega}_1(t)\mathbf{k} \times \mathbf{r}. \tag{12}$$

A partir de las ecuaciones (9) podemos definir las siguientes funciones (que son las componentes del término $\nabla' \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'$ que aparece implícito en la Ecuación de Euler de (1)):

$$\begin{gathered} s_1' = u_1' \frac{\partial u_1'}{\partial x'} + u_2' \frac{\partial u_1'}{\partial y'} + u_3' \frac{\partial u_1'}{\partial z'}, \quad s_2' = u_1' \frac{\partial u_2'}{\partial x'} + u_2' \frac{\partial u_2'}{\partial y'} + u_3' \frac{\partial u_2'}{\partial z'}, \\ s_3' = u_1' \frac{\partial u_3'}{\partial x'} + u_2' \frac{\partial u_3'}{\partial y'} + u_3' \frac{\partial u_3'}{\partial z'}. \end{gathered} \tag{13}$$

Nuestra primera meta será expresar s_1', s_2', s_3' en el sistema de coordenadas xyz, a los cuales denotaremos respectivamente por s_1, s_2, s_3.

En las nuevas variables x, y, z y con respecto a las nuevas magnitudes u_1, u_2, u_3 resulta primeramente que

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_1'}{\partial x'} = \frac{\partial u_1}{\partial x} cos^2\theta_2(t) + \frac{\partial u_2}{\partial y} sen^2\theta_2(t) - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) sen\,\theta_2(t) cos\,\theta_2(t), \\ \frac{\partial u_1'}{\partial y'} = \frac{\partial u_1}{\partial y} cos^2\theta_2(t) - \frac{\partial u_2}{\partial x} sen^2\theta_2(t) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) sen\,\theta_2(t) cos\,\theta_2(t) - \omega_2(t), \\ \frac{\partial u_1'}{\partial z'} = \frac{\partial u_1}{\partial z} cos\,\theta_2(t) - \frac{\partial u_2}{\partial z} sen\,\theta_2(t), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_2'}{\partial x'} = \frac{\partial u_2}{\partial x} cos^2\theta_2(t) - \frac{\partial u_1}{\partial y} sen^2\theta_2(t) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) sen\,\theta_2(t) cos\,\theta_2(t) + \omega_2(t), \\ \frac{\partial u_2'}{\partial y'} = \frac{\partial u_2}{\partial y} cos^2\theta_2(t) + \frac{\partial u_1}{\partial x} sen^2\theta_2(t) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) sen\,\theta_2(t) cos\,\theta_2(t), \\ \frac{\partial u_2'}{\partial z'} = \frac{\partial u_2}{\partial z} cos\,\theta_2(t) + \frac{\partial u_1}{\partial z} sen\,\theta_2(t), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_3'}{\partial x'} = \frac{\partial u_3}{\partial x} cos\,\theta_2(t) - \frac{\partial u_3}{\partial y} sen\,\theta_2(t), \quad \frac{\partial u_3'}{\partial y'} = \frac{\partial u_3}{\partial y} cos\,\theta_2(t) + \frac{\partial u_3}{\partial x} sen\,\theta_2(t), \\ \frac{\partial u_3'}{\partial z'} = \frac{\partial u_3}{\partial z}. \end{gathered}$$

Empleando las ecuaciones anteriores, un calculo engorroso revela que las funciones en (13) se escriben como

[5] $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$.

$$\begin{gathered} s_1' = s_1 cos\,\theta_2(t) - s_2 sen\,\theta_2(t), \qquad s_2' = s_2 cos\,\theta_2(t) + s_1 sen\,\theta_2(t), \\ s_3' = s_3. \end{gathered} \tag{14}$$

donde

$$\begin{gathered} s_1 = u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \omega_2(t) \left(x \frac{\partial u_1}{\partial y} - y \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \omega_2(t) u_2 - \omega_2^2(t) x, \\ s_2 = u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \omega_2(t) \left(x \frac{\partial u_2}{\partial y} - y \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \omega_2(t) u_1 - \omega_2^2(t) y, \\ s_3 = u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} + \omega_2(t) \left(x \frac{\partial u_3}{\partial y} - y \frac{\partial u_3}{\partial x} \right), \end{gathered} \tag{15}$$

o bien, bajo la vía de la complejificación, (14) se escribe simplemente como

$$\begin{gathered} s_1' + i s_2' = e^{i\theta_2(t)} \left(s_1 + i s_2 \right), \\ s_3' = s_3. \end{gathered}$$

De (15) se tienen las siguientes expresiones en forma vectorial:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \quad \begin{pmatrix} x \frac{\partial u_1}{\partial y} - y \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ x \frac{\partial u_2}{\partial y} - y \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ x \frac{\partial u_3}{\partial y} - y \frac{\partial u_3}{\partial x} \end{pmatrix} = x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \\ \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{k} \times \mathbf{u}. \end{gathered} \tag{16}$$

Vectorialmente, de (16), las ecuaciones (15) se expresan más convenientemente como

$$\nabla \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \omega_2(t) \mathbf{u} \times \mathbf{k} + \omega_2(t) \left(x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) - \omega_2^2(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

El término $\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}$ que aparece implícito en la Ecuación de Euler de (1), se calcula a partir de (7) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial(u_1'+iu_2')}{\partial t} \\ \frac{\partial u_3'}{\partial t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{i\theta_2(t)}(u_1+iu_2)+i\omega_2(t)e^{i\theta_2(t)}(x+iy)\right] \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \\
&= e^{i\theta_2(t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial(u_1+iu_2)}{\partial t} + 2i\omega_2(t)\,(u_1+iu_2) + i\dot{\omega}_2(t)\,(x+iy) - \omega_2^2(t)\,(x+iy) \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

de donde resulta su expresión en forma vectorial en terminos de las nuevas coordenadas:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 2\omega_2(t)\mathbf{u}\times\mathbf{k} + \dot{\omega}_2(t)\mathbf{k}\times\mathbf{r} - \omega_2^2(t)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Luego entonces, a partir de (11) y usando los resultados anteriores, resulta el siguiente sistema de ecuaciones -complejificado- en el nuevo sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u_1+iu_2)}{\partial t} + 2i\omega_2(t)\,(u_1+iu_2) + s_1 + is_2 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\widehat{p} - \omega_2^2(t)\,(x+iy) &= \\
= i\,(\dot{\omega}_1(t) - \dot{\omega}_2(t))\,(x+iy)&, \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} + s_3 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \widehat{p}}{\partial z} = -g&, \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0&.
\end{aligned}$$

Luego, de (12), (17) y (18) el Sistema de Euler (1) se expresa en el sistema de coordenadas xyz de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{u}}{dt} - 3\omega_2(t)\mathbf{u}\times\mathbf{k} + \omega_2(t)\left(x\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla\widehat{p} - 2\omega_2^2(t)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} &= \\
= (\dot{\omega}_1(t) - \dot{\omega}_2(t))\,\mathbf{k}\times\mathbf{r} - g\mathbf{k}&,
\end{aligned} \tag{19}$$

o bien, definiendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= (\dot{\omega}_1(t) - \dot{\omega}_2(t))\,\mathbf{k}\times\mathbf{r}, \\
p &= \widehat{p} - 2\rho\omega_2^2(t)\tfrac{x^2+y^2}{2}
\end{aligned} \tag{20}$$

y teniendo en cuenta la Ecuación de Continuidad (10), obtenemos de esta forma el siguiente Sistema de Euler:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d\mathbf{u}}{dt} - 3\omega_2(t)\mathbf{u}\times\mathbf{k} + \omega_2(t)\left(x\tfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - y\tfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)x + \tfrac{1}{\rho}\nabla p &= \mathbf{F} - g\mathbf{k}, \\
\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0
\end{aligned} \tag{21}$$

Observación 1.2. Nótese que cuando el movimiento de rotación en el sistema de coordenadas xyz es nulo es decir $\omega_2(t) = 0$, entonces las ecuaciones (21) se reducen a las ecuaciones (1) pero escritas en el sistema inercial $x'y'z'$.

Capítulo 2

Linealización de las Ecuaciones

En este capítulo se efectúa un proceso de linealización del Sistema de Euler (21) alrededor de una solución de referencia $(\mathbf{u}_{(0)}, p_{(0)})$ escrita en el nuevo sistema de coordenadas. Primeramente, el propósito es obtener una ecuación en las desviaciones $(\mathbf{v}, h)$ que describa el movimiento del fluido y del cuerpo rígido en el sistema de coordenadas rotante. Posteriormente, efectuaremos un estudio particular sobre las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo rígido en este sistema de coordenadas. Con tal estudio se proporcionarán las ecuaciones que rigen el movimiento del cuerpo y el fluido, así como las condiciones de frontera involucradas, con lo cual se describirá completamente la dinámica del Sistema de Sobolev en estudio.

2.1 Ecuaciones para las desviaciones

Lema 2.1. El campo de velocidad $\mathbf{u}'_{(0)}$ de (3) se escribe en el sistema de coordenadas xyz de la manera siguiente:

$$\mathbf{u}_{(0)} = (\omega_1(t) - \omega_2(t))\, \mathbf{k} \times \mathbf{r}.$$

PRUEBA: Denotemos por $u_{1(0)}$, $u_{2(0)}$, $u_{3(0)}$ las componentes de $\mathbf{u}_{(0)}$. De (7) tenemos

$$\begin{aligned} u'_{1(0)} + iu'_{2(0)} &= e^{i\theta_2(t)} \left(u_{1(0)} + iu_{2(0)}\right) + i\omega_2(t) e^{i\theta_2(t)} (x + iy), \\ u'_{3(0)} &= u_{3(0)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Por otra parte, de (3) se tiene que

$$u'_{1(0)} + iu'_{2(0)} = i\omega_1(t)\,(x' + iy') = i\omega_1(t)e^{i\theta_2(t)}\,(x+iy)\,, \quad u'_{3(0)} = u_{3(0)}, \tag{24}$$

combinando (23) y (24) se obtiene

$$u_{1(0)} + iu_{2(0)} = i\,(\omega_1(t) - \omega_2(t))\,(x+iy)\,, \quad u_{3(0)} = u_{3(0)}$$

de donde obtenemos la expresión buscada para $\mathbf{u}_{(0)}$. □

Los siguientes resultados son válidos:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{(0)}}{\partial t} = (\dot\omega_1(t) - \dot\omega_2(t))\,\mathbf{k}\times\mathbf{r}, \quad \nabla\mathbf{u}_{(0)}\cdot\mathbf{u}_{(0)} = -\,(\omega_1(t)-\omega_2(t))^2\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix},$$
$$x\frac{\partial \mathbf{u}_{(0)}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathbf{u}_{(0)}}{\partial x} = -\,(\omega_1(t)-\omega_2(t))\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(0)}\times\mathbf{k} = (\omega_1(t)-\omega_2(t))\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Lema 2.2. La presión $p'_{(0)}$ de (3) se escribe en el sistema de coordenadas xyz como

$$p_{(0)} = \rho\left(\omega_1^2(t) - \omega_2^2(t)\right)\frac{x^2+y^2}{2} - \rho g z.$$

Prueba: Dado que no contamos con una expresión explícita para p' en el nuevo sistema de coodenadas, no podemos proceder a encontrar $p_{(0)}$ tal como se hizo para $\mathbf{u}_{(0)}$ en la prueba del Lema 2.1. Sin embargo, sustituyendo $\mathbf{u}_{(0)}$ en la Ecuación de Euler de (19) encontramos

$$\frac{d\mathbf{u}_{(0)}}{dt} - 3\omega_2(t)\mathbf{u}_{(0)}\times\mathbf{k} + \omega_2(t)\left(x\frac{\partial\mathbf{u}_{(0)}}{\partial y} - y\frac{\partial\mathbf{u}_{(0)}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla\widehat{p}_{(0)} - 2\omega_2^2(t)\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix} =$$
$$= (\dot\omega_1(t) - \dot\omega_2(t))\,\mathbf{k}\times\mathbf{r} - g\mathbf{k}. \tag{26}$$

Sustituyendo los resultados de (25) en (26) se tiene que

$$\frac{1}{\rho}\nabla\widehat{p}_{(0)} - \left(\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)\right)\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix} = -g\mathbf{k},$$

de donde

$$\widehat{p}_{(0)} = \rho\left(\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) - \rho g z \tag{27}$$

Luego, sustituyendo (27) en la expresión para p de (20) encontramos que

$$p_{(0)} = \widehat{p}_{(0)} - 2\rho\omega_2^2(t)\frac{x^2+y^2}{2}.$$

de donde se obtiene el resultado esperado para $p_{(0)}$. □

Proposición 2.1. Sea $\mathbf{F}$ la fuerza externa de rotación dada por (20). Entonces $(\mathbf{u}_{(0)}, p_{(0)})$ es la solución del Sistema de Euler (21) que corresponde a la rotación uniforme con velocidad angular no constante en el sistema de coordenadas xyz.

Prueba: Es claro que la Ecuación de Continuidad de (21) se satiface para $\mathbf{u}_{(0)}$. Haciendo uso de los resultados (25), de la Ecuación de Euler de (21) encontramos que

$$\frac{d\mathbf{u}_{(0)}}{dt} - 3\omega_2(t)\mathbf{u}_{(0)}\times\mathbf{k} + \omega_2(t)\left(x\frac{\partial\mathbf{u}_{(0)}}{\partial y} - y\frac{\partial\mathbf{u}_{(0)}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p_{(0)} =$$
$$= \frac{\partial\mathbf{u}_{(0)}}{\partial t} + \nabla\mathbf{u}_{(0)}\cdot\mathbf{u}_{(0)} - 3\omega_2(t)\mathbf{u}_{(0)}\times\mathbf{k} + \omega_2(t)\left(x\frac{\partial\mathbf{u}_{(0)}}{\partial y} - y\frac{\partial\mathbf{u}_{(0)}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p_{(0)} =$$
$$= (\dot\omega_1(t) - \dot\omega_2(t))\,\mathbf{k}\times\mathbf{r} - g\mathbf{k} = \mathbf{F} - g\mathbf{k}.$$

□

Las magnitudes $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{(0)}$ y $h = p - p_{(0)}$ denotarán, respectivamente, las desviaciones con respecto a la solución de referencia $(\mathbf{u}_{(0)}, p_{(0)})$ que miden las pequeñas oscilaciones debidas a la perturbación.

Sustituyendo las desviaciones de $\mathbf{u}$ y p en el Sistema de Euler de (21) resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{u}_{(0)}}{dt} - 3\omega_2(t)\mathbf{u}_{(0)} \times \mathbf{k} + \omega_2(t)\left(x\frac{\partial \mathbf{u}_{(0)}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathbf{u}_{(0)}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p_{(0)} + \\
&+ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u}_{(0)} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{(0)} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 3\omega_2(t)\mathbf{v} \times \mathbf{k} + \omega_2(t)\left(x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right) + \\
&+ \frac{1}{\rho}\nabla h = (\dot\omega_1(t) - \dot\omega_2(t))\,\mathbf{k} \times \mathbf{r} - g\mathbf{k} = \mathbf{F} - g\mathbf{k},
\end{aligned}$$

de donde, despreciando el término cuadrático $\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ y por el Lema 2.1, resulta que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u}_{(0)} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{(0)} - 3\omega_2(t)\mathbf{v} \times \mathbf{k} + \omega_2(t)\left(x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla h = \mathbf{0}. \tag{28}$$

Por otro lado, se tienen los siguientes resultados:

$$\nabla \mathbf{u}_{(0)} \cdot \mathbf{v} = -(\omega_1(t) - \omega_2(t))\,\mathbf{v} \times \mathbf{k}, \quad \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{(0)} = (\omega_1(t) - \omega_2(t))\left(x\tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - y\tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right).$$

Sustituyendo estos en la ecuación (28) y teniendo en cuenta que la Ecuación de Continuidad se satisface tambien para $\mathbf{v}$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones -linealizado- en el sistema rotante xyz:

$$\begin{gathered}
\tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\omega_1(t) + 2\omega_2(t))\,\mathbf{v} \times \mathbf{k} + \omega_1(t)\left(x\tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - y\tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right) + \tfrac{1}{\rho}\nabla h = \mathbf{0}, \\
\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.
\end{gathered} \tag{29}$$

donde

$$h = p - \rho\left(\omega_1^2(t) - \omega_2^2(t)\right)\frac{x^2 + y^2}{2} + \rho g z. \tag{30}$$

Observación 2.1. El caso estudiado por Sobolev [23] (en presencia únicamente de la gravedad) corresponde a $\omega_1(t) = 0$ y $\omega_2(t) = \omega_0$ con ω_0 constante es decir, el trompo y el líquido se mueven a una sola velocidad. En este caso vemos claramente como nuestro sistema de ecuaciones (29) se reduce al sistema de ecuaciones (1).

Ejemplo 2.1. En el caso particular que $\omega_1(t) = \omega_2(t) = \omega_0$ con ω_0 constante, entonces nuestro Sistema de Euler (29) se escribe en este caso como

$$\begin{gathered}
\tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - 3\omega_0 \mathbf{v} \times \mathbf{k} + \omega_0\left(x\tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - y\tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right) + \tfrac{1}{\rho}\nabla h = \mathbf{0}, \\
\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.
\end{gathered}$$

donde

$$h = \widehat{p} - 2\rho\omega_0^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \rho g z.$$

Claramente las magnitudes $(\mathbf{u}_{(0)}, p_{(0)})$ son soluciones de (29) en este caso (observe que $p_{(0)} = p - h$). Nótese tambien de (29) la presencia de un nuevo operador, a saber: $x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$. $\square$

A continuación describiremos las ecuaciones para el cuerpo rígido en un sistema que rota junto con éste.

2.2 Ecuaciones para el cuerpo rígido

Un cuerpo rígido es aquel en el que la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos se mantiene constante en el tiempo. Su posición es conocida cuando la posición de tres de sus puntos es conocida, ya que todo punto se determina a través de sus distancias a estos tres puntos. Cada uno de estos tres puntos tiene tres coordenadas, sin embargo existen tres relaciones entre las mismas, aquellas que determinan sus distancias mutuas. Por lo tanto, existirán seis coordenadas independientes.

Un resultado de la mecánica [11], [24] asegura que cualquier desplazamiento de un cuerpo rígido puede ser reducido a una sucesión de traslaciones y rotaciones. Evidentemente, si el cuerpo tiene un punto fijo, sólo podrán ocurrir rotaciones.

2.2.1 Ecuaciones para las pequeñas oscilaciones del trompo

Supongamos que un cuerpo rígido rota alrededor de un eje sobre el que se encuentran el punto fijo y el centro de masa y que dicho cuerpo rota con una frecuencia angular no constante $\omega_2(t)$. La ecuación de las oscilaciones de este cuerpo se escribe en la forma[1]

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{N}' \tag{31}$$

donde $\mathbf{L}'$ es el momento angular del cuerpo rígido respecto al punto fijo y $\mathbf{N}'$ es el torque externo con respecto al mismo punto. Sean X', Y', Z' las coordenadas del centro de masa. En ausencia de fuerzas externas actuando sobre el cuerpo rígido supondremos que las coordenadas del centro de masa son: $X' = Y' = 0$ y $Z' = l$ (condición inicial para la ecuación (31)). Puesto que existe un punto fijo que consideraremos ubicado en el origen de coordenadas, el movimiento del cuerpo será descrito completamente a través de $\mathbf{r'}_{\mathrm{CM}}$, el radio vector del centro de masa. En este caso,

$$\mathbf{L}' = \omega_2(t) I_{\|} \frac{\mathbf{r'}_{\mathrm{CM}}}{l} - I_{\perp} \frac{\dot{\mathbf{r}}'_{\mathrm{CM}} \times \mathbf{r'}_{\mathrm{CM}}}{l^2} \tag{32}$$

donde $\mathbf{r'}_{\mathrm{CM}} = (X', Y', \sqrt{l^2 - (X')^2 - (Y')^2})$, siendo $I_{\|}$ y $I_{\perp}$ momentos de inercia. Evidentemente $\mathbf{N}' = \mathbf{N'}_{\mathbf{P}} + \mathbf{N'}_{\mathrm{H}} + \mathbf{N'}_{\mathbf{e}}$, aquí $\mathbf{N'}_{\mathbf{P}}$ es el momento del peso del cuerpo rígido, $\mathbf{N'}_{\mathrm{H}}$ es el momento de la presión hidráulica o momento hidráulico y $\mathbf{N'}_{\mathbf{e}}$ es el momento de las fuerzas externas.

Tenemos que

$$\mathbf{N'}_{\mathbf{P}} = -gM\mathbf{r'}_{\mathrm{CM}} \times \mathbf{k} = gM(-Y',\, X',\, 0) \tag{33}$$

donde M denota la masa del cuerpo rígido. Por otra parte se puede ver que

$$\mathbf{N'}_{\mathrm{H}} = \int\limits_S p'\mathbf{r}' \times \mathbf{n}'\, dS \tag{34}$$

[1] Antes de la perturbación tiene lugar [20] el *principio de conservación del momento angular*, pues la resultante de los momentos de las fuerzas externas es nula.

en donde S denota la frontera de la región ocupada por el fluido, $\mathbf{n}'$ es la normal exterior a esta superficie S y p' es la misma que en (1). Mas adelante utilizaremos Ω para denotar la región del espacio limitada por el líquido, es decir la cavidad interior del cuerpo rígido (trompo) que está totalmente ocupada por el líquido.

Si proyectamos la ecuación (31) sobre los ejes x', y' y teniendo en cuenta (32), (33) y (34) resultan las siguientes ecuaciones:

$$I_{\|}\dot{\omega}_2(t)\frac{X'}{l} + I_{\|}\omega_2(t)\frac{\dot{X}'}{l} - \frac{I_{\perp}}{l^2}\left(\ddot{Y}'Z' - \ddot{Z}'Y'\right) = -gMY' + \\ + \int\limits_S p'\,(y'cosnz' - z'cosny')\; dS + \mathbf{N'}_{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{i},$$

$$I_{\|}\dot{\omega}_2(t)\frac{Y'}{l} + I_{\|}\omega_2(t)\frac{\dot{Y}'}{l} - \frac{I_{\perp}}{l^2}\left(\ddot{Z}'X' - \ddot{X}'Z'\right) = gMX' + \\ + \int\limits_S p'\,(z'cosnx' - x'cosnz')\; dS + \mathbf{N'}_{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{j}.$$

(36)

Si linealizamos las ecuaciones (36) en un entorno de $X'_{(0)} = Y'_{(0)} = 0$ y $Z'_{(0)} = l$ obtenemos las ecuaciones

$$I_{\perp}\frac{\ddot{X}'}{l} + I_{\|}\omega_2(t)\frac{\dot{Y}'}{l} + I_{\|}\dot{\omega}_2(t)\frac{Y'}{l} - gMX' - \int\limits_S p'\,(z'cosnx' - x'cosnz')\; dS = \mathbf{N'}_{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{j},$$

$$I_{\perp}\frac{\ddot{Y}'}{l} - I_{\|}\omega_2(t)\frac{\dot{X}'}{l} - I_{\|}\dot{\omega}_2(t)\frac{X'}{l} - gMY' + \int\limits_S p'\,(y'cosnz' - z'cosny')\; dS = -\mathbf{N'}_{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{i}.$$

(38)

Sea $\phi' = (X' + iY')/l$, entonces a partir de las ecuaciones (38) y suponiendo que $\mathbf{N'}_{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$ llegamos a la siguiente ecuación:

$$I_\perp \ddot{\phi}' - iI_\parallel \omega_2(t)\dot{\phi}' - iI_\parallel \dot{\omega}_2(t)\phi' - gMl\phi' - \int\limits_S p'\mu'\, dS = 0. \tag{39}$$

donde

$$\mu' = (z', iz', -(x'+iy'))^T \cdot \mathbf{n}'. \tag{40}$$

En el sistema xyz se tienen los siguientes resultados:

$$\phi' = e^{i\theta_2(t)}\phi, \quad \dot{\phi}' = e^{i\theta_2(t)}\left(\dot{\phi} + i\omega_2(t)\phi\right),$$
$$\ddot{\phi}' = e^{i\theta_2(t)}\left(\ddot{\phi} + i\dot{\omega}_2(t)\phi + 2i\omega_2(t)\dot{\phi} - \omega_2^2(t)\phi\right).$$

Por otra parte,

$$\int\limits_S p'\mu'\, dS = e^{i\theta_2(t)} \int\limits_S \widehat{p}\mu\, dS.$$

donde μ tiene la misma expresión que μ' pero en xyz y $\widehat{p}$ se obtiene de p' al cambiar de coordenadas.

Sustituyendo estas expresiones en (39) obtenemos la Ecuación del Trompo (en forma complejificada) la cual describe las pequeñas oscilaciones del trompo en un sistema que gira con frecuencia angular $\omega_2(t)$ no constante:

$$I_\perp \ddot{\phi} - i\omega_2(t)(I_\parallel - 2I_\perp)\dot{\phi} - \left[gMl + (I_\perp - I_\parallel)(\omega_2^2(t) - i\dot{\omega}_2(t))\right]\phi + i\widetilde{N}(\widehat{p}) = 0. \tag{41}$$

En (41), $\phi = X + iY$ donde $X(t)$ y $Y(t)$ denotan las coordenadas del centro de masa del cuerpo rígido en el sistema que rota con frecuencia angular $\omega_2(t)$ y

$$\widetilde{N}(\widehat{p}) = i\int\limits_S \widehat{p}\mu\, dS. \tag{42}$$

En seguida expresamos las ecuaciones del trompo (41) y (42) sustituyendo $\widehat{p}$ por h pero de (20) y (30) resulta que

$$\widehat{p} = h + \rho\left(\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)\right) - \rho g z,$$

de donde

$$\widetilde{N}(\widehat{p}) = \widetilde{N}(h) + \rho\left(\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)\right)\int\limits_S \frac{x^2+y^2}{2}\mu\, dS - \rho g\int\limits_S z\mu\, dS. \tag{43}$$

Por el Teorema de la Divergencia [8],

$$\int\limits_S z\mu\, dS = \int\limits_S \left(z^2(\cos nx + i\cos ny) - z(x+iy)\cos nz\right) dS = -\int\limits_\Omega (x+iy)\, d\Omega$$

donde $S = \partial\Omega$.

Supongamos que en $\int_\Omega (x+iy)\, d\Omega$ la cavidad Ω tiene una simetría de orden $m > 1$, entonces haciendo un intercambio de variable en la integral correspondiente a una rotación de ángulo $2\pi/m$ se tiene que

$$\int\limits_\Omega (x+iy)\, d\Omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}\int\limits_\Omega (x+iy)\, d\Omega$$

de donde $\int\limits_\Omega (x+iy)\, d\Omega = 0$.

Calculemos a continuación $\int_S (x^2+y^2)\mu\, dS$.

$$\int\limits_S (x^2+y^2)\mu\, dS = \int\limits_S z(x^2+y^2)(\cos nx + i\cos ny)\, dS -$$
$$- \int\limits_S (x+iy)(x^2+y^2)\cos nz\, dS = 2\int\limits_\Omega z(x+iy)\, d\Omega. \tag{44}$$

Por un razonamiento análogo al anterior, la integral (44) es igual a cero. De esta forma, (43) se reduce a

$$\widetilde{N}(\widehat{p}) = \widetilde{N}(h). \tag{45}$$

2.2.2 Condiciones de contorno

A continuación haremos el cálculo de las condiciones de contorno. La componente normal de la velocidad del fluido $\mathbf{u}'$ en S debe evidentemente coincidir con la componente normal de la velocidad de los puntos de la superficie interior del trompo. Luego, en el sistema $x'y'z'$ tenemos que en S debe cumplirse la condición

$$\begin{aligned} u'_{n'} = \omega_2(t)\left[z'\frac{\dot{X}'}{l}\cos nx' + z'\frac{\dot{Y}'}{l}\cos ny' - \frac{x'\dot{X}'+y'\dot{Y}'}{l}\cos nz'\right] + \\ + \frac{z'}{l}\left[\dot{X}'\cos nx' + \dot{Y}'\cos ny'\right] - \frac{x'\dot{X}'+y'\dot{Y}'}{l}\cos nz'. \end{aligned} \tag{46}$$

Recordemos que en el sistema $x'y'z'$ μ' tiene la forma

$$\mu' = z'(\cos nx' + i\cos ny') - (x'+iy')\cos nz', \tag{47}$$

entonces (46) se escribe como

$$u'_{n'} = \omega_2(t)\left[z'\frac{\dot{X}'}{l}\cos nx' + z'\frac{\dot{Y}'}{l}\cos ny' - \frac{x'\dot{X}'+y'\dot{Y}'}{l}\cos nz'\right] + \frac{1}{2}\left(\overline{\mu'}\dot{\phi}' + \mu'\dot{\overline{\phi'}}\right).$$

Si definimos $\mathbf{u}' = \mathbf{v}' + \mathbf{u}'_{(0)}$, entonces

$$\begin{aligned} v'_{n'} = \omega_2(t)\left[z'\frac{\dot{X}'}{l}\cos nx' + z'\frac{\dot{Y}'}{l}\cos ny' - \frac{x'\dot{X}'+y'\dot{Y}'}{l}\cos nz'\right] - \\ - \omega_1(t)\mathbf{k}\times\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}' + \frac{1}{2}\left(\overline{\mu}\dot{\phi} + \mu\dot{\overline{\phi}}\right). \end{aligned} \tag{48}$$

Nótese que el término entre corchetes de (48) equivale a $\frac{\overline{\mu'}\phi' - \overline{\phi'}\mu'}{2i} + \mathbf{k}\times\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}'$ donde μ' está definida por (47).

Finalmente, de (48) se obtiene

$$v'_{n'} = \omega_2(t)\frac{\overline{\mu'}\phi' - \overline{\phi'}\mu'}{2i} - (\omega_1(t)-\omega_2(t))\,\mathbf{k}\times\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}' + \frac{1}{2}\left(\overline{\mu}\dot{\phi} + \mu\dot{\overline{\phi}}\right). \tag{49}$$

Pasemos ahora al sistema xyz que rota junto con el trompo con frecuencia angular $\omega_2(t)$. Entonces, de (40) y notando que $\mu' = e^{i\theta_2(t)}\mu$ (con μ dada en las variables xyz), por (49) se tiene la condición de contorno

$$v_n = \frac{1}{2}\left(\overline{\mu}\dot{\phi} + \mu\dot{\overline{\phi}}\right) - (\omega_1(t)-\omega_2(t))\,\mathbf{k}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} \tag{50}$$

donde

$$\mu = z(\cos nx + i\cos ny) - (x+iy)\cos nz. \tag{51}$$

2.2.3 Sistema de ecuaciones linealizado

Finalmente, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones linealizado alrededor de la rotación con frecuencia no constante que describe las pequeñas oscilaciones del trompo lleno con el fluido:

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\omega_1(t)+2\omega_2(t))\,\mathbf{v}\times\mathbf{k} + \omega_1(t)\left(x\tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - y\tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right) + \tfrac{1}{\rho}\nabla h = \mathbf{0}, \quad (\Omega) \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad (\Omega) \\ v_n\Big|_S = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\mu}\dot{\phi} + \mu\dot{\overline{\phi}}\right) - (\omega_1(t)-\omega_2(t))\,\mathbf{k}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}, \quad (\partial\Omega) \\ I_\perp\ddot{\phi} - i\omega_2(t)(I_\parallel - 2I_\perp)\dot{\phi} - \left[gMl + (I_\perp - I_\parallel)(\omega_2^2(t) - i\dot{\omega}_2(t))\right]\phi + i\widetilde{N}(h) = 0. \end{gathered} \tag{52}$$

donde el término $\widetilde{N}(h)$ está dado por (45).

Comentario 2.1. Recordemos que nuestro objetivo era estudiar la estabilidad lineal de la solución $(\mathbf{u}'_{(0)}, p'_{(0)})$ del sistema inicial por ello, mediante un cambio de variable, hemos pasado a un sistema en nuevas variables $\mathbf{u}$ y p y despues hemos pasado a un sistema linealizado en las magnitudes $\mathbf{v}$ y h que se tienen en (29). Por la definición de estabilidad de soluciones, $\|p\|$ está acotado solamente si $\|h\|$ está acotado, ya que p y h se diferencian solamente en una función no constante (30). Nótese que este problema es diferente al estudiado por Sobolev pues él estudió la estabilidad de una solución estacionaria del sistema inicial.

Capítulo 3

Análisis del Sistema Linealizado

El propósito de este capítulo es expresar al sistema de ecuaciones linealizado (52) en un sistema de ecuaciones escrito en los modos de vibración del sistema mecánico, con el objeto de reducir el estudio de este. Para ello se empleará una metodología inventada por Sobolev [23]. A partir de este momento suponemos $\omega_1(t)$ y $\omega_2(t)$ constantes aunque no necesariamente iguales, esto con el objeto de estudiar una ecuación de la forma $\dot{\mathbf{R}} = i\mathbf{A}\mathbf{R}$ (con coeficientes constantes).

3.1 Forma de Sobolev de las ecuaciones

En lo sucesivo haremos uso del sistema de ecuaciones (52) con $\omega_1(t) = \omega_1$ y $\omega_2(t) = \omega_2$ constantes pero no necesariamente iguales. Seguiremos un procedimiento similar al ralizado por Sobolev en su articulo [23].

Ahora realizamos el siguiente programa:

Sea φ una función de las variables reales x, y, z definidas en la región ocupada por el fluido. Introduzcamos coordenadas complejas,

$$x + iy = \xi, \qquad x - iy = \overline{\xi}.$$

A partir de φ se pueden introducir m nuevas funciones. Sea $s = 0, ..., m-1$, definimos

$$\varphi_{(s)}(\xi,\,\overline{\xi},\,z)=\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}e^{s2\pi il/m}\varphi(\xi e^{2\pi il/m},\,\overline{\xi}e^{-2\pi il/m},\,z). \tag{53}$$

De (53) es posible demostrar que

$$\varphi(\xi,\,\overline{\xi},\,z)=\sum_{s=0}^{m-1}\varphi_{(s)}(\xi,\,\overline{\xi},\,z),$$

de donde

$$\begin{aligned}\varphi_{(s)}(\xi e^{2\pi i/m},\,\overline{\xi}e^{2\pi i/m},\,z)&=\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}e^{s2\pi il/m}\varphi(\xi e^{2\pi i(l+1)/m},\,\overline{\xi}e^{-2\pi i(l+1)/m},\,z)=\\&=e^{-s2\pi i/m}\varphi_{(s)}(\xi,\,\overline{\xi},\,z).\end{aligned} \tag{54}$$

Nótese que $\varphi_{(s)}(\xi,\overline{\xi},z)$ tiene sentido aún para un entero arbitrario s. Las siguientes expresiones son una consecuencia directa de la definición de la transformación (s) dada por (53),

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{(s+1)}=\frac{\partial\varphi_{(s)}}{\partial\xi},\qquad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\xi}}\right)_{(s-1)}=\frac{\partial\varphi_{(s)}}{\partial\overline{\xi}}.$$

A continuación pasaremos a las variables ξ y $\overline{\xi}$ en las ecuaciones del sistema (52). Observemos primero que

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\overline{\xi}},\qquad\frac{\partial}{\partial y}=i\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\overline{\xi}}\right).$$

Hagamos

$$v_\xi=v_1+iv_2,\qquad v_{\overline{\xi}}=v_1-iv_2. \tag{55}$$

Observemos que las primeras cuatro ecuaciones de la Ecuación de Euler de (52) son

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial v_1}{\partial t}-(\omega_1+2\omega_2)v_2+\omega_1\left(x\tfrac{\partial v_1}{\partial y}-y\tfrac{\partial v_1}{\partial x}\right)+\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial h}{\partial x}=0,\\\tfrac{\partial v_2}{\partial t}+(\omega_1+2\omega_2)v_1+\omega_1\left(x\tfrac{\partial v_2}{\partial y}-y\tfrac{\partial v_2}{\partial x}\right)+\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial h}{\partial y}=0,\\\tfrac{\partial v_3}{\partial t}+\omega_1\left(x\tfrac{\partial v_3}{\partial y}-y\tfrac{\partial v_3}{\partial x}\right)+\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial h}{\partial z}=0,\\\tfrac{\partial v_1}{\partial x}+\tfrac{\partial v_2}{\partial y}+\tfrac{\partial v_3}{\partial z}=0\end{gathered}$$

que son equivalentes al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial v_\xi}{\partial t}+i(\omega_1+2\omega_2)v_\xi+i\omega_1\left(\xi\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\xi}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\overline{\xi}}\right)+\tfrac{2}{\rho}\tfrac{\partial h}{\partial\overline{\xi}}=0,\\\tfrac{\partial v_{\overline{\xi}}}{\partial t}-i(\omega_1+2\omega_2)v_{\overline{\xi}}+i\omega_1\left(\xi\tfrac{\partial v_{\overline{\xi}}}{\partial\xi}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_{\overline{\xi}}}{\partial\overline{\xi}}\right)+\tfrac{2}{\rho}\tfrac{\partial h}{\partial\xi}=0,\\\tfrac{\partial v_3}{\partial t}+\omega_1\left(\xi\tfrac{\partial v_3}{\partial\xi}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_3}{\partial\overline{\xi}}\right)+\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial h}{\partial z}=0,\\\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\xi}+\tfrac{\partial v_{\overline{\xi}}}{\partial\overline{\xi}}+\tfrac{\partial v_3}{\partial z}=0.\end{gathered} \tag{56}$$

Aplicando convenientemente los operadores (s) a cada una de las ecuaciones del sistema (56) y haciendo uso de (53) tenemos que

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial v_{\xi,\,(s-1)}}{\partial t}+i(\omega_1+2\omega_2)v_{\xi,\,(s-1)}+i\omega_1\left(\xi\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\xi}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\overline{\xi}}\right)_{(s-1)}+\tfrac{2}{\rho}\tfrac{\partial h_{(s)}}{\partial\xi}=0,\\\tfrac{\partial v_{\overline{\xi},\,(s+1)}}{\partial t}-i(\omega_1+2\omega_2)v_{\overline{\xi},\,(s+1)}+i\omega_1\left(\xi\tfrac{\partial v_{\overline{\xi}}}{\partial\xi}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_{\overline{\xi}}}{\partial\overline{\xi}}\right)_{(s+1)}+\tfrac{2}{\rho}\tfrac{\partial h_{(s)}}{\partial\xi}=0,\\\tfrac{\partial v_{3,\,(s)}}{\partial t}+i\omega_1\left(\xi\tfrac{\partial v_3}{\partial\xi}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_3}{\partial\overline{\xi}}\right)_{(s)}+\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial h_{(s)}}{\partial z}=0,\\\tfrac{\partial v_{\xi,\,(s-1)}}{\partial\xi}+\tfrac{\partial v_{\overline{\xi},\,(s+1)}}{\partial\overline{\xi}}+\tfrac{\partial v_{3,\,(s)}}{\partial z}=0.\end{gathered} \tag{57}$$

Dada la linealidad de los operadores (s) tenemos que

$$\begin{gathered}\left(\xi\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\xi}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\overline{\xi}}\right)_{(s-1)}=\left(\xi\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\xi}\right)_{(s-1)}-\left(\overline{\xi}\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\overline{\xi}}\right)_{(s-1)}=\xi\tfrac{\partial v_{\xi,\,(s-1)}}{\partial\xi}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_{\xi,\,(s-1)}}{\partial\overline{\xi}},\\\left(\xi\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\overline{\xi}}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_{\overline{\xi}}}{\partial\overline{\xi}}\right)_{(s+1)}=\left(\xi\tfrac{\partial v_{\overline{\xi}}}{\partial\xi}\right)_{(s+1)}-\left(\overline{\xi}\tfrac{\partial v_{\overline{\xi}}}{\partial\overline{\xi}}\right)_{(s+1)}=\xi\tfrac{\partial v_{\overline{\xi},\,(s+1)}}{\partial\xi}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_{\overline{\xi},\,(s+1)}}{\partial\overline{\xi}},\\\left(\xi\tfrac{\partial v_3}{\partial\xi}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_3}{\partial\overline{\xi}}\right)_{(s)}=\left(\xi\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\xi}\right)_{(s)}-\left(\overline{\xi}\tfrac{\partial v_\xi}{\partial\overline{\xi}}\right)_{(s)}=\xi\tfrac{\partial v_{3,\,(s)}}{\partial\xi}-\overline{\xi}\tfrac{\partial v_{3,\,(s)}}{\partial\overline{\xi}}.\end{gathered} \tag{58}$$

de los resultados (58) podemos escribir las ecuaciones (57) como

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_{\xi,(s-1)}}{\partial t} + i(\omega_1 + 2\omega_2)v_{\xi,(s-1)} + i\omega_1\left(\xi\frac{\partial v_{\xi,(s-1)}}{\partial\xi} - \overline{\xi}\frac{\partial v_{\xi,(s-1)}}{\partial\overline{\xi}}\right) + \frac{2}{\rho}\frac{\partial h_{(s)}}{\partial\overline{\xi}} = 0,\\
\frac{\partial v_{\overline{\xi},(s+1)}}{\partial t} - i(\omega_1 + 2\omega_2)v_{\overline{\xi},(s+1)} + i\omega_1\left(\xi\frac{\partial v_{\overline{\xi},(s+1)}}{\partial\xi} - \overline{\xi}\frac{\partial v_{\overline{\xi},(s+1)}}{\partial\overline{\xi}}\right) + \frac{2}{\rho}\frac{\partial h_{(s)}}{\partial\xi} = 0,\\
\frac{\partial v_{3,(s)}}{\partial t} + \omega_1\left(\xi\frac{\partial v_{3,(s)}}{\partial\xi} - \overline{\xi}\frac{\partial v_{3,(s)}}{\partial\overline{\xi}}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h_{(s)}}{\partial z} = 0,\\
\frac{\partial v_{\xi,(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial v_{\overline{\xi},(s+1)}}{\partial\overline{\xi}} + \frac{\partial v_{3,(s)}}{\partial z} = 0.
\end{gathered}$$

3.1.1 Condición de contorno

Veamos ahora la condición de contorno del sistema (52). Haciendo $\lambda = \cos nx + i\cos ny$ y recordando que $v_\xi = v_1 + iv_2$ y $v_{\overline{\xi}} = v_1 - iv_2$ tenemos que ésta se puede expresar como

$$v_n = \tfrac{1}{2}v_\xi\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}v_{\overline{\xi}}\lambda + v_3\cos nz, \qquad \mu = z\lambda - \xi\cos nz$$

de donde $v_{n,(s)}$ se expresa como

$$(v_n)_{(s)} = \frac{1}{2}\left((\overline{\mu})_{(s)}\dot{\phi} + \frac{1}{2}(\mu)_{(s)}\dot{\overline{\phi}} - (\omega_1 - \omega_2)\right)(\mathbf{k}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})_{(s)}. \tag{59}$$

Tenemos los siguientes resultados:

$$(\xi)_{(s)} = \begin{cases} 0, & s\not\equiv -1 \pmod m\\ \xi, & s\equiv -1 \pmod m\end{cases} \qquad (\overline{\xi})_{(s)} = \begin{cases} 0, & s\not\equiv 1 \pmod m\\ \overline{\xi}, & s\equiv 1 \pmod m\end{cases}$$

$$(\lambda)_{(s)} = \begin{cases} 0, & s\not\equiv -1 \pmod m\\ \lambda, & s\equiv -1 \pmod m\end{cases} \qquad (\overline{\lambda})_{(s)} = \begin{cases} 0, & s\not\equiv 1 \pmod m\\ \overline{\lambda}, & s\equiv 1 \pmod m),\end{cases}$$

de donde

$$(\mu)_{(s)} = z\,(\lambda)_{(s)} - (\xi)_{(s)}\cos nz = \begin{cases} 0, & s\not\equiv -1 \pmod m\\ z\lambda - \xi\cos nz, & s\equiv -1 \pmod m\end{cases}$$

$$(\overline{\mu})_{(s)} = z\,(\overline{\lambda})_{(s)} - (\overline{\xi})_{(s)}\cos nz = \begin{cases} 0, & s\not\equiv 1 \pmod m\\ z\overline{\lambda} - \overline{\xi}\cos nz, & s\equiv 1 \pmod m).\end{cases}$$

Calculemos $(\mathbf{k}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})_{(s)}$:

$$(\mathbf{k}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})_{(s)} = \frac{i}{2}\left(\xi\overline{\lambda} - \overline{\xi}\lambda\right)_{(s)} = \frac{i}{2}\left((\xi\overline{\lambda})_{(s)} - (\overline{\xi}\lambda)_{(s)}\right) = \frac{i}{2}\left(\xi(\overline{\lambda})_{(s+1)} - \overline{\xi}(\lambda)_{(s-1)}\right)$$

donde

$$(\overline{\lambda})_{(s+1)} = \begin{cases} 0, & s\not\equiv 0 \pmod m\\ \overline{\lambda}, & s\equiv 0 \pmod m\end{cases} \qquad (\lambda)_{(s-1)} = \begin{cases} 0, & s\not\equiv 0 \pmod m\\ \lambda, & s\equiv 0 \pmod m).\end{cases}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en (59) se tiene que

$$v_{n_{(s)}} = \begin{cases} \frac{i}{2}(\xi\overline{\lambda} - \overline{\xi}\lambda), s\equiv 0 \pmod m\\ 0, \quad s\not\equiv \pm 1, 0 \pmod m\\ \frac{1}{2}\mu\dot{\overline{\phi}} \quad s\equiv -1 \pmod m\\ \frac{1}{2}\overline{\mu}\dot{\phi}, \quad s\equiv 1 \pmod m\end{cases}$$

A partir de (53) se pueden demostrar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\lambda(\xi e^{2\pi i/m}, \overline{\xi}e^{-2\pi i/m}, z) &= e^{2\pi i/m}\lambda(\xi,\overline{\xi},z), & \mu(\xi e^{2\pi i/m}, \overline{\xi}e^{-2\pi i/m}, z) &= e^{2\pi i/m}\mu(\xi,\overline{\xi},z),\\
\overline{\lambda}(\xi e^{2\pi i/m}, \overline{\xi}e^{-2\pi i/m}, z) &= e^{-2\pi i/m}\overline{\lambda}(\xi,\overline{\xi},z), & \overline{\mu}(\xi e^{2\pi i/m}, \overline{\xi}e^{-2\pi i/m}, z) &= e^{-2\pi i/m}\overline{\mu}(\xi,\overline{\xi},z),
\end{aligned}$$

de donde

$$\lambda = \lambda_{(-1)}, \quad \overline{\lambda} = \overline{\lambda}_{(1)}, \quad \mu = \mu_{(-1)}, \quad \overline{\mu} = \overline{\mu}_{(1)}.$$

Ahora nuevamente pasaremos a coordenadas cartesianas pero antes observemos que

$$\begin{gathered}
\overline{v}_{\xi,(s-1)} = v_{\overline{\xi},(-s+1)}, \quad \overline{v}_{\overline{\xi},(s+1)} = v_{\xi,-(s+1)}, \quad \overline{v}_{z,(s)} = v_{z,(-s)},\\
\overline{p}_{(s)} = p_{(-s)}.
\end{gathered}$$

Definimos

$$\begin{gathered}
v_{1,[s]} = v_{\overline{\xi},(s+1)} + v_{\xi,(s-1)}, \quad v_{2,[s]} = i\big(v_{\overline{\xi},(s+1)} - v_{\xi,(s-1)}\big), \quad v_{3,[s]} = 2v_{3,(s)},\\
h_{[s]} = 2h_{(s)}.
\end{gathered}$$

Luego, de las relaciones (55) las siguientes identidades son ciertas:

$$\overline{v}_{1,[s]} = v_{1,[-s]}, \quad \overline{v}_{2,[s]} = v_{2,[-s]}, \quad \overline{v}_{3,[s]} = v_{3,[-s]}, \quad \overline{h}_{[s]} = h_{[-s]}. \tag{60}$$

Las relaciones que nos permiten recuperar las magnitudes iniciales son del tipo

$$v_x = \frac{1}{4}\left(\sum_{s=0}^{m-1} v_{x,[s]} + \overline{v}_{x,[s]}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{s=0}^{m-1} v_{x,[s]} + v_{x,[-s]}\right) = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{m-1} v_{x,[s]} + \frac{1}{4}\sum_{s=-(m-1)}^{0} v_{x,[s]}.$$

Expresiones similares son tambien válidas para v_y, v_z y p pero son omitidas por motivos de brevedad.

De esta manera, de las definiciones (60) podemos escribir el sistema (52) como

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_{1,[s]}}{\partial t} - (\omega_1 + 2\omega_2)v_{2,[s]} + \omega_1\left(x\frac{\partial v_{1,[s]}}{\partial y} - y\frac{\partial v_{1,[s]}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h_{[s]}}{\partial x} = 0,\\
\frac{\partial v_{2,[s]}}{\partial t} + (\omega_1 + 2\omega_2)v_{1,[s]} + \omega_1\left(x\frac{\partial v_{\overline{\xi},[s]}}{\partial y} - y\frac{\partial v_{\overline{\xi},[s]}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h_{[s]}}{\partial y} = 0,\\
\frac{\partial v_{3,[s]}}{\partial t} + \omega_1(t)\left(x\frac{\partial v_{3,[s]}}{\partial y} - y\frac{\partial v_{3,[s]}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h_{[s]}}{\partial z} = 0,\\
\frac{\partial v_{1,[s]}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2,[s]}}{\partial y} + \frac{\partial v_{3,[s]}}{\partial z} = 0.
\end{gathered} \tag{61}$$

De (61) se sigue que $\mathbf{v}_{[s]} = (v_{1,[s]}, v_{2,[s]}, v_{3,[s]})^T$ y $h_{[s]}$ satisfacen el siguiente sistema en forma vectorial,

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{v}_{[s]}}{\partial t} - (\omega_1 + 2\omega_2)(\mathbf{v}_{[s]} \times \mathbf{k}) + \omega_1\left(x\frac{\partial \mathbf{v}_{[s]}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathbf{v}_{[s]}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla h_{[s]} = \mathbf{0}, \quad (\Omega)\\
\operatorname{div}\mathbf{v}_{[s]} = 0 \quad (\Omega)\\
v_{[s]n} = \begin{cases} x\cos ny - y\cos nx, & s \equiv 0 \pmod m\\ \overline{\mu}\dot{\phi}, & s \equiv 1 \pmod m,\\ \mu\dot{\overline{\phi}}, & s \equiv -1 \pmod m\\ 0, & s \not\equiv \pm 1 \pmod m. \end{cases} \quad (\partial\Omega)
\end{gathered} \tag{62}$$

El término $\widetilde{N}(h)$ queda determinado a partir de (53) y (54) de la siguiente manera

$$\widetilde{N}(h) = \widetilde{N}\left(\sum_{s=0}^{m-1} h_{(s)}\right) = \sum_{s=0}^{m-1}\widetilde{N}(h_{(s)})$$

donde

$$2\widetilde{N}(h_{(s)}) = e^{(1-s)2\pi i/m}2\widetilde{N}(h_{(s)}),$$

entonces $\widetilde{N}(h_{(s)}) \neq 0$ si, y sólo si, $s = 1$ y además $\widetilde{N}(h) = \widetilde{N}(h_{(1)})$.

3.1.2 Modelos fundamentales para el análisis de la estabilidad del Sistema de Sobolev

De acuerdo a (62) se tienen los siguientes sistemas de ecuaciones:

Si $s \not\equiv \pm 1, 0 \pmod m$, entonces

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{v}_{[s]}}{\partial t} - (\omega_1 + 2\omega_2)\mathbf{v}_{[s]} \times \mathbf{k} + \omega_1\left(x\frac{\partial \mathbf{v}_{[s]}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathbf{v}_{[s]}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla h_{[s]} = \mathbf{0}, \quad (\Omega)\\
\operatorname{div}\mathbf{v}_{[s]} = 0, \quad (\Omega)\\
v_{[s]n} = 0, \quad (\partial\Omega)\\
I_\perp\ddot{\phi} - i\omega_2(I_\parallel - 2I_\perp)\dot{\phi} - \left[gMl + \omega_2^2(I_\perp - I_\parallel)\right]\phi = 0.
\end{gathered} \tag{63}$$

Si $s \equiv 0 \pmod m$, entonces

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{v}_{[0]}}{\partial t} - (\omega_1 + 2\omega_2)\mathbf{v}_{[0]} \times \mathbf{k} + \omega_1\left(x\frac{\partial \mathbf{v}_{[0]}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathbf{v}_{[0]}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla h_{[0]} = \mathbf{0}, \quad (\Omega)\\
\operatorname{div}\mathbf{v}_{[0]} = 0, \quad (\Omega)\\
v_{[0]n} = x\cos ny - y\cos nx, \quad (\partial\Omega)\\
I_\perp\ddot{\phi} - i\omega_2(I_\parallel - 2I_\perp)\dot{\phi} - \left[gMl + \omega_2^2(I_\perp - I_\parallel)\right]\phi = 0.
\end{gathered} \tag{64}$$

Si $s \equiv 1 \pmod m$, entonces

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{v}_{[1]}}{\partial t} - (\omega_1 + 2\omega_2)\mathbf{v}_{[1]} \times \mathbf{k} + \omega_1\left(x\frac{\partial \mathbf{v}_{[1]}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathbf{v}_{[1]}}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla h_{[1]} = \mathbf{0}, \quad (\Omega)\\
\operatorname{div}\mathbf{v}_{[1]} = 0, \quad (\Omega)\\
v_{[1]n} = \overline{\mu}\dot{\phi}, \quad (\partial\Omega)\\
I_\perp\ddot{\phi} - i\omega_2\left(I_\parallel - 2I_\perp\right)\dot{\phi} - \left[gMl + \omega_2^2(I_\perp - I_\parallel)\right]\phi + i\widetilde{N}(h_{[1]}) = 0,\\
\widetilde{N}(h_{[1]}) = \frac{i}{2}\int_S h_{[1]}\mu\, dS.
\end{gathered} \tag{65}$$

Si $s \equiv -1 \pmod{m}$, entonces

$$
\begin{array}{c}
\frac{\partial \mathbf{v}_{[-1]}}{\partial t} - (\omega_1 + 2\omega_2)\mathbf{v}_{[-1]} \times \mathbf{k} + \omega_1 \left(x\frac{\partial \mathbf{v}_{[-1]}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathbf{v}_{[-1]}}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho}\nabla h_{[-1]} = \mathbf{0}, \quad (\Omega) \\
\operatorname{div} \mathbf{v}_{[-1]} = 0, \qquad (\Omega) \\
v_{[-1]n} = \mu\dot{\overline{\phi}}, \qquad (\partial\Omega) \\
I_\perp \ddot{\overline{\phi}} + i\omega_2 \left(I_\parallel - 2I_\perp \right) \dot{\overline{\phi}} - \left[gMl + \omega_2^2 (I_\perp - I_\parallel) \right] \overline{\phi} - i\overline{\widetilde{N}}(h_{[-1]}) = 0, \\
\overline{\widetilde{N}}(h_{[-1]}) = -\frac{i}{2} \int\limits_S h_{[-1]} \overline{\mu}\, dS.
\end{array}
\tag{66}
$$

Observación 3.1. En los dos casos anteriores (63) y (64) la ecuación del trompo está desacoplada y en este caso es fácil ver que aún en el caso periódico hay estabilidad ya que el operador que se añade al giroscópico está tambien desacoplado.

Observación 3.2. Los sistemas de ecuaciones (65) y (66) son complejos conjugados, por lo tanto para el estudio de la estabilidad de estos sistemas de Sobolev será suficiente estudiar el caso $s \equiv 1 \pmod{m}$ del sistema (65).

3.2 Enfoque operacional de las ecuaciones

Sea Ω una región acotada del espacio $\mathbb{R}^3$. Denotamos por $L^2(\Omega)$ al espacio usual de funciones complejas en Ω las cuales son L^2. Este espacio está dotado con el producto escalar usual

$$(f, g) = \int\limits_\Omega f\overline{g}\, d\Omega, \qquad f, g \in L^2.$$

Sea $\widetilde{L}^2(\Omega) = \{L^2(\Omega)\}^3$. Más generalmente, para cualquier espacio funcional X denotamos por $\widetilde{X}$ el espacio X^3 dotado con la estructura producto y usaremos la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para el producto escalar en el espacio producto.

Sea

$$M_S = \left\{ \mathbf{u} \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \text{ y } u_n = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}.$$

Denotamos por S_2 a la clausura de M_S en $\widetilde{L}^2(\Omega)$ y por G_2 la clausura en $\widetilde{L}^2(\Omega)$ del conjunto formado por la totalidad de $\nabla\varphi$, donde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $\nabla\varphi \in$

$\widetilde{L}^2(\Omega)$; evidentemente, S_2 es el espacio de campos vectoriales solenoidales cuyas componentes están en $L^2(\Omega)$. Entonces $\widetilde{L}^2(\Omega) = S_2 \oplus G_2$. Sea P_0 el proyector ortogonal de $\widetilde{L}^2(\Omega)$ en S_2 y B el operador lineal definido de la siguiente forma, su dominio y su acción son respectivamente $D(B) = S_2$ y $B\mathbf{u} = iP_0(\mathbf{u} \times \mathbf{k})$ para todo $\mathbf{u} \in S_2$. El operador B es continuo y autoadjunto. Un segundo operador C tal que $D(C) = M_S$ y cuya acción sobre un $\mathbf{u} \in M_S$ es

$$C\mathbf{u} = iP_0 \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{u} \tag{67}$$

satisface propiedades convenientes como lo son linealidad y simetría.

Proposición 3.1. El operador C dado por (67) es simétrico.

Prueba: Evidentemente C está definido densamente. Veamos que $\langle C\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\widetilde{L}_2(\Omega)} = \langle \mathbf{u}, C\mathbf{v} \rangle_{\widetilde{L}_2(\Omega)}$.

$$
\begin{aligned}
\langle C\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\widetilde{L}_2(\Omega)} &= i \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^3 \left(x\frac{\partial u_k}{\partial y} - y\frac{\partial u_k}{\partial x} \right) \overline{v}_k\, d\Omega = i \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^3 u_k \left(-\frac{\overline{\partial x v_k}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial y v_k}}{\partial x} \right) = \\
&= \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^3 u_k \overline{\left[i\left(x\frac{\partial v_k}{\partial y} - y\frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \right]}\, d\Omega = \langle \mathbf{u}, C\mathbf{v} \rangle_{\widetilde{L}_2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto C es simétrico. □

Observación 3.3. Puesto que $C \subset C^*$ y C^* siempre es cerrado, existe la clausura $\overline{C}$ de C.

3.3 Cálculo del operador A

Sea ψ la solución del siguiente problema de Neumann (cambio de variable de Sobolev):

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0, & (\Omega) \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = \mu & (\partial\Omega) \end{cases}$$

la que existe y es única salvo por una constante aditiva. Esto se debe al siguiente resultado,

$$\int_{\partial\Omega} \mu\, dS = \int_{\partial\Omega} \nabla\psi \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla\psi)\, dV = \int_{\Omega} \Delta\psi\, dV = 0.$$

Tomando el producto escalar entre la Ecuación de Euler de (65) y el gradiente $\gamma = \nabla\overline{\psi}$ en ambos lados de esta ecuación, tenemos

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_{[1]}}{\partial t}, \gamma \right\rangle - (\omega_1 + 2\omega_2) \langle \mathbf{v}_{[1]} \times \mathbf{k}, \gamma \rangle + \omega_1 \left\langle \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{v}_{[1]}, \gamma \right\rangle + \\ + \frac{1}{\rho} \langle \nabla h_{[1]}, \gamma \rangle = 0. \tag{68}$$

Nótese ahora que el término de $\widetilde{N}(h_{[1]})$ de la presión en (65) se puede expresar como

$$2\widetilde{N}(h_{[1]}) = i \int_{\partial\Omega} h_{[1]} \mu\, dS = i \int_{\partial\Omega} h_{[1]} \overline{\gamma} \cdot \mathbf{n}\, dS = i \int_{\Omega} \nabla h_{[1]} \overline{\gamma}\, dV = i \langle \nabla h_{[1]}, \gamma \rangle . \tag{69}$$

Sustituyendo (69) en (68) resulta

$$2i\widetilde{N}(h_{[1]}) = \rho \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_{[1]}}{\partial t}, \gamma \right\rangle - \rho(\omega_1 + 2\omega_2) \langle \mathbf{v}_{[1]} \times \mathbf{k}, \gamma \rangle + \\ + \rho\omega_1 \left\langle \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{v}_{[1]}, \gamma \right\rangle \tag{70}$$

pero

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_{[1]}}{\partial t}, \gamma \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}_{[1]}}{\partial t} \cdot \nabla\psi\, dV = \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_{[1]} \cdot \mathbf{n})\, dS = \ddot{\phi} \int_{\partial\Omega} \psi\overline{\mu}\, dS = \\ = \ddot{\phi} \int_{\partial\Omega} \psi (\nabla\overline{\psi} \cdot \mathbf{n})\, dS = \ddot{\phi} \int_{\Omega} \nabla\psi\nabla\overline{\psi}\, dV = \ddot{\phi} \|\nabla\psi\|^2 = \ddot{\phi} d$$

donde $d = \|\nabla\psi\|^2$. Sustituyendo éste último resultado en (70) obtenemos

$$2i\widetilde{N}(h_{[1]}) = \rho d\ddot{\phi} - \rho(\omega_1 + 2\omega_2) \langle \mathbf{v}_{[1]} \times \mathbf{k}, \gamma \rangle + \rho\omega_1 \left\langle \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{v}_{[1]}, \gamma \right\rangle .$$

Regresando a la Ecuación del Trompo (65), por (70) resulta que

$$2I_\perp\ddot{\phi} - 2i\omega_2(I_\parallel - 2I_\perp)\dot{\phi} - 2\left[gMl + \omega_2^2(I_\perp - I_\parallel) \right] \phi + \\ + \rho d\ddot{\phi} - \rho(\omega_1 + 2\omega_2) \langle \mathbf{v}_{[1]} \times \mathbf{k}, \gamma \rangle + \rho\omega_1 \left\langle \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{v}_{[1]}, \gamma \right\rangle = 0. \tag{72}$$

Ahora efectuamos el cambio de variable[1] $\mathbf{v}_{[1]} = \mathbf{u} + \gamma\dot{\phi}$ en la ecuación (65) y en la ecuación del trompo (72) para obtener respectivamente

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \ddot{\phi}\gamma - (\omega_1 + 2\omega_2)\mathbf{u} \times \mathbf{k} - (\omega_1 + 2\omega_2)\dot{\phi}\gamma \times \mathbf{k} + \\ + \frac{1}{\rho}\nabla h_{[1]} + \omega_1 \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{u} + \omega_1\dot{\phi} \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \gamma = 0, \tag{73}$$

y

$$2I_\perp\ddot{\phi} - 2i\omega_2(I_\parallel - 2I_\perp)\dot{\phi} - 2\left[gMl + \omega_2^2(I_\perp - I_\parallel) \right] \phi + \\ + \rho d\ddot{\phi} - \rho(\omega_1 + 2\omega_2) \langle \mathbf{u} \times \mathbf{k}, \gamma \rangle + \rho\omega_1\dot{\phi} \langle \gamma \times \mathbf{k}, \gamma \rangle + \\ + \rho\omega_1 \left\langle \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{u}, \gamma \right\rangle + \rho\omega_1\dot{\phi} \left\langle \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \gamma, \gamma \right\rangle = 0. \tag{74}$$

Definamos

[1] Este cambio se hace para que en lugar de $\mathbf{v}_{[1]} \cdot \mathbf{n} = \overline{\mu}\dot{\phi}$ quede $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ en $\partial\Omega$ como condición de contorno es decir, para homogenizar las condiciones de contorno.

$$\dot{\phi} = i\alpha\zeta \tag{75}$$

donde α es una función escalar de ω_1 y ω_2 a seleccionar. Aplicando el operador de proyección ortogonal P_0 a la ecuación (73) obtenemos la siguiente ecuación de evolución

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &+ \ddot{\phi}P_0\gamma - (\omega_1+2\omega_2)P_0\mathbf{u}\times\mathbf{k} - (\omega_1+2\omega_2)\dot{\phi}P_0\gamma\times\mathbf{k} + \frac{1}{\rho}P_0\nabla h_{[1]} + \\ &+ \omega_1 P_0\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{u} + \omega_1\dot{\phi}P_0\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Asumiendo que $\mathbf{u}$ pertenece a la intersección de los dominios de los operadores B y C resulta[2]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + i(\omega_1+2\omega_2)B\mathbf{u} - i\omega_1 C\mathbf{u} - (\omega_1+2\omega_2)\alpha\zeta B\gamma + \omega_1\alpha\zeta C\gamma\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{76}$$

y de la ecuación (74) resulta

$$\begin{aligned}0 = i\alpha\dot{\zeta}(2I_\perp+\rho d) &+ i\Big[\rho\omega_1\left\langle\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma,\, \gamma\right\rangle - \\ &- \rho(\omega_1+2\omega_2)\left\langle\gamma\times\mathbf{k},\, \gamma\right\rangle - 2i\omega_2(I_\parallel - 2I_\perp)\Big]\alpha\zeta - 2\big[gMl + \\ &+ \omega_2^2(I_\parallel - I_\perp)\big]\phi - \rho(\omega_1+2\omega_2)\left\langle\mathbf{u}\times\mathbf{k},\, \gamma\right\rangle + \\ &+ \rho\omega_1\left\langle\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{u},\, \gamma\right\rangle.\end{aligned} \tag{77}$$

Dividiendo la ecuación (77) por $(2I_\perp + \rho d)\,\alpha \neq 0$ resulta que

[2]Nótese que $P_0\gamma$ y $P_0\nabla h_{[1]}$ se anulan pues S_2 es ortogonal a G_2.

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} = &-\frac{1}{2I_\perp+\rho d}\Big\{\Big[\rho\omega_1\left\langle\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma,\, \gamma\right\rangle - \\ &- \rho(\omega_1+2\omega_2)\left\langle\gamma\times\mathbf{k},\, \gamma\right\rangle - 2i\omega_2(I_\parallel - 2I_\perp)\Big]\Big\}\zeta - \frac{2i}{(2I_\perp+\rho d)\alpha}\Big[gMl + \\ &+ \omega_2^2(I_\parallel - I_\perp)\Big]\phi - \frac{i}{(2I_\perp+\rho d)\alpha}\Big[\rho(\omega_1+2\omega_2)\left\langle\mathbf{u}\times\mathbf{k},\, \gamma\right\rangle - \\ &- \rho\omega_1\left\langle\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{u},\, \gamma\right\rangle\Big].\end{aligned} \tag{78}$$

A partir de la ecuación (78) definamos las siguientes funciones:

$$\begin{gathered} f_2 = -\tfrac{\rho\omega_1}{2I_\perp+\rho d}, \quad f_3 = -\tfrac{\rho(\omega_1+2\omega_2)}{2I_\perp+\rho d}, \quad f_4 = \tfrac{2i\omega_2(I_\parallel-2I_\perp)}{2I_\perp+\rho d}, \\ f_5 = -\tfrac{2i}{(2I_\perp+\rho d)\alpha}\left[gMl + \omega_2^2(I_\parallel - I_\perp)\right], \quad f_6 = -\tfrac{i\rho(\omega_1+2\omega_2)}{(2I_\perp+\rho d)\alpha}, \\ f_7 = \tfrac{i\rho\omega_1}{(2I_\perp+\rho d)\alpha}. \end{gathered} \tag{79}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones (75), (76) y (78) resulta la siguiente ecuación canónica:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = i\mathbf{A}\mathbf{R} \tag{81}$$

donde $\mathbf{R} = (\mathbf{u},\, \phi,\, \zeta)^T$ y $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(i,\, j = 1,\, 2,\, 3)$ es la matriz operacional siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \omega_1 C - (\omega_1+2\omega_2)B & \mathbf{0} & a_{13} \\ f_N(\cdot) & 0 & \alpha \\ a_{31} & -if_5 & a_{33} \end{pmatrix} \tag{82}$$

donde

$$\begin{gathered} a_{13} = i\alpha\left[\omega_1 iP_0\left(x\tfrac{\partial}{\partial y} - y\tfrac{\partial}{\partial x}\right) - (\omega_1+2\omega_2)iP_0(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma, \\ a_{31} = -if_6\left\langle\mathbf{u}\times\mathbf{k},\, \gamma\right\rangle - if_7\left\langle\left(x\tfrac{\partial}{\partial y} - y\tfrac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{u},\, \gamma\right\rangle, \\ a_{33} = -if_2\left\langle\left(x\tfrac{\partial}{\partial y} - y\tfrac{\partial}{\partial x}\right)\gamma,\, \gamma\right\rangle - if_3\left\langle\gamma\times\mathbf{k},\, \gamma\right\rangle - if_4 \end{gathered}$$

donde f_N denota el funcional nulo, la entrada $a_{12} = \mathbf{0}$ denota el cero de S_2 y las funciones f_i, $(i = 2, ..., 7)$ están dadas por (79).

3.3.1 Estudio de un caso nuevo en la estabilidad de Sistemas de Sobolev

Motivado por la aparición del operador $C - 3B$, tomemos $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ con ω_0 constante[3] en la matriz (82), entonces esta se escribe como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \omega_0(C-3B) & \mathbf{0} & a_{13} \\ f_N(\cdot) & 0 & \alpha \\ \frac{\rho\omega_0\left\langle \cdot, iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3((\cdot)\times\mathbf{k})\right]\gamma\right\rangle}{(2I_\perp + \rho d)\alpha} & \frac{\omega_0 L}{2I_\perp + \rho d} & \frac{\omega_0 K}{2I_\perp + \rho d} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} a_{13} &= \alpha\omega_0 iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3((\cdot)\times\mathbf{k})\right]\gamma, \\ K &= i\rho\left\langle \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma, \gamma\right\rangle + 3i\rho\left\langle \gamma\times\mathbf{k}, \gamma\right\rangle + 2(I_\parallel - 2I_\perp), \\ L &= -\frac{2}{\alpha\omega_0}\left(gMl + \omega_0^2(I_\parallel - I_\perp)\right) \end{aligned} \tag{83}$$

A partir de este momento y en adelante usaremos $\alpha = \omega_0$. Supongamos además que $2I_\perp + \rho d > 0$ y que $L < 0$. Entonces el sistema canónico a estudiar es el siguiente:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = i\mathbf{A}\mathbf{R}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \omega_0(C-3B) & \mathbf{0} & \omega_0^2 iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3((\cdot)\times\mathbf{k})\right]\gamma \\ f_N(\cdot) & 0 & \omega_0 \\ \frac{\rho\left\langle \cdot, iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3((\cdot)\times\mathbf{k})\right]\gamma\right\rangle}{2I_\perp + \rho d} & \frac{\omega_0 L}{2I_\perp + \rho d} & \frac{\omega_0 K}{2I_\perp + \rho d} \end{pmatrix} \tag{84}$$

[3] Nótese que este no es el caso estudiado por Sobolev. Nótese tambien que α es funcion de la frecuencia angular ω_0 y por lo tanto $\dot{\alpha}$ se anula.

donde K y L están dadas por (83) (con $\alpha = \omega_0$).

Comentario 3.1. A partir de este capítulo hemos considerado a ω_1 y ω_2 ambas constantes pero no necesariamente iguales. La presencia del nuevo operador C nos indude a hacer un estudio de la estabilidad lineal (en el sentido de Liapunov) de la solución nula cuando ambas son iguales y constantes, para de esta manera analizar zonas de inestabilidad, tal como en el caso estudiado por Sobolev [23]. Un estudio de bandas de inestabilidad se presenta cuando ω_1 y ω_2 son diferentes.

Capítulo 4

Acotación del Grado de Inestabilidad

En el presente capítulo se emplean algunos resultados relacionados con la teoría de los Espacios de Pontriaguin Π_κ con métrica indefinida que nos permitirán dar una estimación del grado de inestabilidad de la ecuación canónica $\dot{\mathbf{R}} = i\mathbf{A}\mathbf{R}$ obtenida en el capítulo anterior. Tambien se prueban algunos teoremas relacionados con el nuevo operador obtenido en este trabajo con el objeto de analizar la estabilidad lineal pero ahora de la ecuación $\dot{\mathbf{R}} = i\overline{\mathbf{A}}\mathbf{R}$, donde $\overline{\mathbf{A}}$ es la clausura de $\mathbf{A}$.

4.1 Preámbulo

Iniciamos con un breve resumen de la teoría de operadores en espacios con métrica indefinida. Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$. Supongamos que se ha dado otro producto interno o métrica $[\cdot,\,\cdot]$ pero en este caso indefinida. Es posible probar [1], [2] que existe un operador autoadjunto J tal que su dominio $D(J)$ es todo H y $[x,\,y] = \langle Jx,\,y\rangle$ para todo $x,\,y \in H$. Podemos decir que J es el operador asociado al producto interno indefinido $[\cdot,\,\cdot]$.

Observación 4.1. Recordemos que el producto usual en $S_2 \times \mathbb{C}^2$ es

$$\langle \mathbf{R}_1,\,\mathbf{R}_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \phi_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \phi_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{u}_1,\,\mathbf{u}_2\rangle_{\tilde{L}_2(\Omega)} + \phi_1\overline{\phi}_2 + \zeta_1\overline{\zeta}_2$$

donde $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{u}_1,\, \phi_1,\, \zeta_1)^T$, $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{u}_2,\, \phi_2,\, \zeta_2)^T \in S_2 \times \mathbb{C}^2$.

Introducimos en $S_2 \times \mathbb{C}^2$ el siguiente operador:

Definición 4.1. Sea

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\omega_0^2}\mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ f_N(\cdot) & -L & 0 \\ f_N(\cdot) & 0 & -(2I_\perp + \rho d) \end{pmatrix}$$

donde su dominio $D(\mathbf{Q})$ es $S_2 \times \mathbb{C}^2$.

Resulta que $\mathbf{Q}$ es un operador autoadjunto y además existe su inverso $\mathbf{Q}^{-1}$ como veremos a continuación.

Lema 4.1. El operador $\mathbf{Q}$ es autoadjunto e inversible.

Prueba: Veamos primero que $\mathbf{Q}$ es autoadjunto. Sean $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{u}_1,\, \phi_1,\, \zeta_1)^T$, $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{u}_2,\, \phi_2,\, \zeta_2)^T$ en $D(\mathbf{Q}) = S_2 \times \mathbb{C}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{Q}\mathbf{R}_1,\, \mathbf{R}_2\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\omega_0^2}\mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ f_N(\cdot) & -L & 0 \\ f_N(\cdot) & 0 & -(2I_\perp + \rho d) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \phi_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \phi_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}\right\rangle = \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\omega_0^2}\mathbf{u}_1 \\ -L\phi_1 \\ -(2I_\perp + \rho d)\zeta_1 \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \phi_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}\right\rangle = \\
&= \int_\Omega \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\left(-\frac{\rho}{\omega_0^2}\mathbf{u}_2\right)}\, d\Omega + \phi_1 \cdot \overline{(-L\phi_2)} + \zeta_1 \cdot \overline{(-(2I_\perp + \rho d)\zeta_2)} = \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \phi_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\omega_0^2}\mathbf{u}_2 \\ -L\phi_2 \\ -(2I_\perp + \rho d)\zeta_2 \end{pmatrix}\right\rangle = \\
&= \langle \mathbf{R}_1,\, \mathbf{Q}\mathbf{R}_2\rangle
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\mathbf{Q}$ admite inverso. Sea $\mathbf{R} = (\mathbf{u},\, \phi,\, \zeta)^T$ y denotemos por Θ al vector operacional $(\mathbf{0},\, 0,\, 0)^T$ de $S_2 \times \mathbb{C}^2$, entonces si

$$\mathbf{Q}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\omega_0^2}\mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ f_N(\cdot) & -L & 0 \\ f_N(\cdot) & 0 & -(2I_\perp + \rho d) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\omega_0^2}\mathbf{u} \\ -L\phi \\ -(2I_\perp + \rho d)\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces necesariamente $\mathbf{R} = \Theta$ es decir, $\mathbf{Q}$ es inversible. □

Observación 4.2. Con la ayuda del Lema 4.1 se verifica fácilmente que la función compleja-valuada $[\cdot,\, \cdot] = \langle \mathbf{Q},\, \cdot\rangle$ define un producto interno indefinido[1] en $S_2 \times \mathbb{C}^2$.

Observación 4.3. El espacio $S_2 \times \mathbb{C}^2$ se descompone en la siguiente suma directa ortogonal

$$S_2 \times \mathbb{C}^2 = L_1 [\dot{+}] L_\infty$$

donde

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \\ 0 \end{pmatrix} : \phi \in \mathbb{C} \right\}, \qquad L_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \\ \zeta \end{pmatrix} : \mathbf{u} \in S_2,\, \zeta \in \mathbb{C} \right\}.$$

donde $[\dot{+}]$ denota la suma directa $\mathbf{Q}$-ortogonal. Nótese que L_1 es $\mathbf{Q}$-positivo y L_∞ es $\mathbf{Q}$-negativo.

Teorema 4.1. La matriz $\mathbf{A}$ es $\mathbf{Q}$-simétrica.

[1] Para $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$ en $S_2 \times \mathbb{C}^2$ y $\alpha_1,\, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ se cumple que

1) $[\mathbf{R}_1,\, \mathbf{R}_2] = \overline{[\mathbf{R}_2,\, \mathbf{R}_1]}$,

2) $[\alpha_1\mathbf{R}_1 + \alpha_2\mathbf{R}_2,\, \mathbf{R}_3] = \alpha_1[\mathbf{R}_1,\, \mathbf{R}_3] + \alpha_2[\mathbf{R}_2,\, \mathbf{R}_3]$.

Además, para $\mathbf{R} = (\mathbf{u},\, \phi,\, \zeta)^T \in S_2 \times \mathbb{C}^2$

$$[\mathbf{R},\, \mathbf{R}] = -\frac{\rho}{\omega_0^2}\|\mathbf{u}\|^2 - L|\phi|^2 - (2I_\perp + \rho d)|\zeta|^2 \in \mathbb{R}$$

el cual puede ser > 0, < 0 ó $= 0$, dependiendo de la elección de $\mathbf{Q}$.

PRUEBA: Nótese que $\mathbf{A}$ está definido densamente en $S_2 \times \mathbb{C}^2$. Sean $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{u}_1,\, \phi_1,\, \zeta_1)^T$ y $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{u}_2,\, \phi_2,\, \zeta_2)^T$ en $S_2 \times \mathbb{C}^2$.

Calculemos primero $\mathbf{QAR}_1$:

$$\mathbf{AR}_1 = \begin{pmatrix} \omega_0(C-3B)\mathbf{u}_1 + \omega_0^2\zeta_1 iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma \\ \omega_0\zeta_1 \\ \frac{1}{2I_\perp+\rho d}\left[\rho\left\langle \mathbf{u}_1,\, iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma\right\rangle + \omega_0 L\phi_1 + \omega_0 K\zeta_1\right] \end{pmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{QAR}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\omega_0}(C-3B)\mathbf{u}_1 - \rho\zeta_1 iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma \\ -\omega_0 L\zeta_1 \\ -\rho\left\langle \mathbf{u}_1,\, iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma\right\rangle - \omega_0 L\phi_1 - \omega_0 K\zeta_1 \end{pmatrix}$$

Entonces, por el Lema 4.1,

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{QAR}_1,\, \mathbf{R}_2\rangle = \\
&= \left\langle -\frac{\rho}{\omega_0}(C-3B)\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2\right\rangle + \zeta_1\left\langle -\rho iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma,\, \mathbf{u}_2\right\rangle - \\
&- \omega_0 L\zeta_1\overline{\phi_2} - \rho\overline{\zeta_2}\left\langle \mathbf{u}_1,\, iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma\right\rangle - \\
&- \omega_0 L\phi_1\overline{\zeta_2} - \omega_0 K\zeta_1\overline{\zeta_2} = \\
&= \left\langle -\frac{\rho}{\omega_0}(C-3B)\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2\right\rangle - \rho\overline{\zeta_2}\left\langle \mathbf{u}_1,\, iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma\right\rangle - \\
&- \omega_0 L\phi_1\overline{\zeta_2} - \zeta_1\langle\rho iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma,\, \mathbf{u}_2\rangle - \\
&- \omega_0 L\zeta_1\overline{\phi_2} - \omega_0 K\zeta_1\overline{\zeta_2} = \\
&= -\left\langle \mathbf{u}_1,\, \frac{\rho}{\omega_0}(C-3B)\mathbf{u}_2\right\rangle - \left\langle \mathbf{u}_1,\, \rho\zeta_2 iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma\right\rangle - \\
&- \phi_1\overline{(\omega_0 L\zeta_2)} - \zeta_1\overline{\left\langle \mathbf{u}_2,\, \rho iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma\right\rangle} - \\
&- \zeta_1\overline{(\omega_0 L\phi_2)} - \zeta_1\overline{(\omega_0 K\zeta_2)} = \\
&= -\left\langle \mathbf{u}_1,\, \frac{\rho}{\omega_0}(C-2B)\mathbf{u}_2 + \rho\zeta_2 iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma\right\rangle - \phi_1\overline{(\omega_0 L\zeta_2)} - \\
&- \zeta_1\overline{\left(\left\langle \mathbf{u}_2,\, \rho iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma\right\rangle + \omega_0 L\phi_2 + \omega_0 K\zeta_2\right)} = \\
&= \langle \mathbf{R}_1,\, \mathbf{QAR}_2\rangle.
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$[\mathbf{AR}_1,\, \mathbf{R}_2] = \langle \mathbf{QAR}_1,\, \mathbf{R}_2\rangle = \langle \mathbf{R}_1,\, \mathbf{QAR}_2\rangle = [\mathbf{R}_1,\, \mathbf{AR}_2]\,.$$

Por consiguiente, $\mathbf{A}$ es $\mathbf{Q}$-simétrico. $\square$

4.2 Estudio del operador A

Resulta que el espacio $S_2 \times \mathbb{C}^2$ es un *espacio de Pontriaguin*[2] de orden 1.

El siguiente resultado es conocido pero la demostración será dada por completitud de la exposición.

Lema 4.2. Sea T un operador continuo y definido en todo H donde H es un espacio de Hilbert. Entonces T es cerrado.

PRUEBA: Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y $Tx_n \longrightarrow y$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Es claro que $x \in D(T)$ pues por hipótesis $D(T) = H$. Veamos que $y = Tx$.

$$\|Tx - y\| = \|Tx - y \pm Tx_n\| \leq \|Tx_n - y\| + \|T\|\|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty.$$

pues T es acotado y $\|Tx_n - y\| \longrightarrow 0$ y $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Por lo tanto $y = Tx$. □

Observación 4.4. El operador $\mathbf{A}$ se puede descomponer como $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ donde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3\omega_0 B & \mathbf{0} & \omega_0^2 iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma \\ f_N(\cdot) & 0 & \omega_0 \\ \frac{\rho\left\langle \cdot, iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma\right\rangle}{2I_\perp + \rho d} & \frac{\omega_0 L}{2I_\perp + \rho d} & \frac{\omega_0 K}{2I_\perp + \rho d} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \omega_0 C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ f_N(\cdot) & 0 & 0 \\ f_N(\cdot) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

y donde $\mathbf{A}_1$ es $\mathbf{Q}$-autoadjunto y cerrado por ser un operador continuo y definido en todo $S_2 \times \mathbb{C}^2$ (Lema 4.2).

La matriz operacional $\mathbf{A}_2$ de la Observación 4.4 admite clausura $\overline{\mathbf{A}_2}$ como veremos a continuación en el siguiente lema.

[2] Los espacios de Krein con un rango finito de indeterminación son llamados *espacios de Pontriaguin*. Un espacio de Krein con signatura positiva κ ($\kappa = 0, 1, 2, \ldots$) denotado por Π_κ es un espacio de Pontriaguin.

Lema 4.3. Existe $\overline{\mathbf{A}_2}$ y

$$\overline{\mathbf{A}_2} = \begin{pmatrix} \omega_0 \overline{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ f_N(\cdot) & 0 & 0 \\ f_N(\cdot) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

PRUEBA: La prueba se sigue teniendo en cuenta que $\mathbf{A}_2$ es simétrico en $S_2 \times \mathbb{C}^2$ con respecto al producto escalar usual y que $\mathbf{A}_2 \subset \mathbf{A}_2^*$ donde $\mathbf{A}_2^*$ es siempre cerrado.□

Lema 4.4. Sea $T = T_1 + T_2$ un operador definido sobre un espacio de Hilbert H tal que T_1 es acotado y definido en todo H y supongamos además que existe la clausura de T_2. Entonces existe $\overline{T}$ y más aún, $\overline{T} = T_1 + \overline{T_2}$.

PRUEBA: Veamos primero que T admite clausura. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones del dominio de T ($D(T) = D(T_1) \cap D(T_2)$) tales que $x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} z$ y $y_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} z$ y además las sucesiones $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen. Hay que probar que $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a un mismo límite. Nótese que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son de Cauchy, entonces dado que T_1 está acotado y definido sobre todo H, las sucesiones $\{T_1x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{T_1y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tambien son de Cauchy ($\|T_1x_n - T_1x_m\| \leq \|T_1\|\|x_n - x_m\|$ y $\|T_1y_n - T_1y_m\| \leq \|T_1\|\|y_n - y_m\|$ para $m, n \in \mathbb{N}$) y además $T_1x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} T_1z$ y $T_1y_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} T_1z$ ($\|T_1x_n - T_1z\| \leq \|T_1\|\|x_n - z\|$ y $\|T_1y_n - Tz\| \leq \|T\|\|y_n - z\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Teniendo en cuenta que $T_2x_n = Tx_n - T_1x_n$ y $T_2y_n = Tx_n - T_1x_n$, resulta que $\{T_2x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{T_2y_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen. Como existe $\overline{T_2}$ los límites de $\{T_2x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{T_2y_n\}_{n=1}^{\infty}$ coinciden. Por lo tanto, los límites $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$ coinciden pues $Tx_n = T_1x_n + T_2x_n$ y $Ty_n = T_1y_n - T_2y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora la segunda parte de la prueba. Hay que demostar que $D(\overline{T}) = D(T_1) \cap D(\overline{T_2}) = D(T_1 + \overline{T_2})$ y $T_1 + \overline{T_2}\big|_{D(\overline{T})} = \overline{T}$ y $\overline{T} = \big|_{D(T_1+\overline{T})} = T_1 + \overline{T_2}$ y. Veamos primero que $D(\overline{T}) = D(T_1) \cap D(\overline{T_2})$). Sea $x \in D(\overline{T})$ entonces por definición existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T) = D(T_1) \cap D(T_2)$ tal que $x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x$ y la sucesión $\{Tx_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente. Ahora, por hipótesis $D(T_1) = H$. Por otra parte $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T_2)$ de donde se sigue que $x \in D(\overline{T_2}) = D(T_1) \cap D(\overline{T_2})$. Ahora, si $x \in D(T_1) \cap D(\overline{T_2}) = D(\overline{T_2})$, entonces existe $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T_2)$ tal que $y_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x$ y $\{T_2y_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge. Ahora T_1x_n tambien converge pues T_1 es acotado y definido en todo H, es decir $\{(T_1 + T_2)y_n = Ty_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente pero esto significa que $x \in D(\overline{T})$.

Veamos que $T_1+\overline{T_2}|_{D(T)} = \overline{T}$. Si $x \in D(\overline{T})$, entonces existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T) = D(T_1) \cap D(\overline{T_2})$ tal que $x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x$ y $\{Tx_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente pero como ya hemos visto, en este caso las sucesiones $\{T_1x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{T_2x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen de donde

$$\begin{aligned}\overline{T}x = \lim_{n\longrightarrow\infty} Tx_n = \lim_{n\longrightarrow\infty}(T_1+T_2)x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} T_1x_n + \lim_{n\longrightarrow\infty} T_2x_n = T_1x + \overline{T_2}x = \\ = (T_1+\overline{T_2})x.\end{aligned}$$

La prueba de que $\overline{T} = |_{D(T_1+\overline{T})} = T_1+\overline{T_2}$ se sigue de manera análoga notando que $T_1x = \lim_{n\longrightarrow\infty} T_1x_n$ y $\overline{T_2}x = \lim_{n\longrightarrow\infty} T_2x_n$. □

Lema 4.5. El operador $\mathbf{A}$ admite clausura $\overline{\mathbf{A}}$ y

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \omega_0(\overline{C}-3B) & \mathbf{0} & \omega_0^2 iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)-3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma \\ f_N(\cdot) & 0 & \omega_0 \\ \frac{\rho\langle\cdot,\, iP_0\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)-3(\cdot)\times\mathbf{k}\right]\gamma\rangle}{2I_\perp+\rho d} & \frac{\omega_0 L}{2I_\perp+\rho d} & \frac{\omega_0 K}{2I_\perp+\rho d}\end{pmatrix}.$$

PRUEBA: Por la Observación 4.4 la matriz $\mathbf{A}$ se descompone como $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ donde $\mathbf{A}_1$ es un operador acotado y definido en todo $S_2\times\mathbb{C}^2$ en particular, $\mathbf{A}_1 = \overline{\mathbf{A}_1}$. Por otra parte, del Lema 4.3 existe $\overline{\mathbf{A}_2}$, y con esto se prueba el lema. □

Teorema 4.2. $D(\overline{\mathbf{A}}) = D(\overline{C})\times\mathbb{C}^2$.

PRUEBA: Por el Lema 4.5 existe $\overline{\mathbf{A}}$ y por la Observación 4.4 la matriz $\overline{\mathbf{A}}$ se descompone como $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_1 + \overline{\mathbf{A}_2}$. Entonces $D(\overline{\mathbf{A}}) = D(\mathbf{A}_1)\cap D(\overline{\mathbf{A}_2}) = S_2\times\mathbb{C}^2 \cap D(\overline{C})\times\mathbb{C}^2 = D(\overline{C})\times\mathbb{C}^2$. □

Hemos visto que C es un operador simétrico (Proposición 3.1) y que C admite clausura $\overline{C}$. El siguiente teorema muestra que esta clausura es tambien simétrica.

Teorema 4.3. Sea $\overline{T}$ la clausura de un operador simétrico T. Entonces $\overline{T}$ es tambien un operador simétrico.

PRUEBA: Sean $x,\, y \in D(\overline{T})$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenecientes a $D(T)$ tales que $x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x$ y $y_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} y$ y además $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen, entonces

$$\langle\overline{T}x,\, y\rangle = \lim_{m,n\longrightarrow\infty}\langle Tx_n,\, y_m\rangle = \lim_{m,n\longrightarrow\infty}\langle x_n,\, Ty_m\rangle = \langle x,\, \overline{T}y\rangle.$$

□

Corolario 4.1. El operador $\overline{C}$ es simétrico.

PRUEBA: Se sigue del Teorema 4.3. □

Teorema 4.4. El operador $\overline{\mathbf{A}}$ es $\mathbf{Q}$-simétrico en un espacio de Pontriaguin de orden uno con respecto a la $\mathbf{Q}$-métrica.

PRUEBA: La prueba es similar a la del Teorema 4.1. □

4.3 Soluciones fundamentales

Observación 4.5. Teniendo en cuenta que $\mathbf{A} \subset \overline{\mathbf{A}}$ es suficiente estudiar la ecuación

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = i\overline{\mathbf{A}}\mathbf{R}.$$

Observación 4.6. El espectro no real de un operador J-autoadjunto en un espacio Π_κ está situado simétricamente con respecto al eje real y consiste de a lo más 2κ valores propios (tomando en cuenta la multiplicidad) [16]; i.e., la suma de la multiplicidad algebraica de todos los valores propios no reales no es mas grande que 2κ.

Observación 4.7. La ecuación canónica de la Observación 4.6 tiene soluciones de la forma

$$\mathbf{U}_1(t) = e^{i\lambda t}\mathbf{R}_1, \quad \mathbf{U}_2(t) = ie^{i\lambda t}(t\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2), \quad \mathbf{U}_3(t) = ie^{i\lambda t}\left(\tfrac{t^2}{2}\mathbf{R}_1 - t\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3\right),$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{U}_m(t) = ie^{i\lambda t}\left(\tfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathbf{R}_1 - \tfrac{t^{m-2}}{(m-2)!}\mathbf{R}_2 + \ldots + (-1)^{m-1}t\mathbf{R}_m\right) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

si, y sólo si,

1) $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de $\mathbf{A}$ y
2) los vectores $\mathbf{R}_n,\, -i\mathbf{R}_{n+1},\, -i\mathbf{R}_{n+2},\, i\mathbf{R}_{n+3}$ para $n = 2k+1$, $k = 0, 2, 4, \ldots$ forman una cadena de Jordan de longitud m donde $\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{0}$.

De aquí que para estudiar la estabiliadad de nuestro Sistema de Sobolev, bastará comenzar con el análisis de la acotación de estas soluciones:

En nuestro caso $k = 1$, entonces

1) puede existir un par de valores propios complejos conjugados de los cuales uno de ellos producirá inestabilidad.

2) pueden existir valores propios reales de multiplicidad > 1 en cuyo caso las soluciones son no acotadas.

Capítulo 5

Análisis de la Estabilidad en el Caso de una Cavidad Elipsoidal

Siguiendo los resultados conocidos de Sobolev sobre la estabilidad en cavidades elipsoidales [23], en este capítulo haremos un análisis similar con este tipo de cavidades. Estas son particularmente especiales porque es sabido [29] que con ellas se obtiene un número finito de zonas de inestabilidad (dos en el caso estudiado por Sobolev). La aparición del operador C nos ha llevado a revisar el trabajo de Sobolev para analizar la estabilidad en este nuevo caso. En este capítulo presentamos los resultados obtenidos con nuestro modelo.

5.1 Cálculo de $\overline{\mathrm{A}}$ para el caso elipsoidal

Supongamos que la región Ω ocupada por el líquido es la parte interior del elipsoide de revolución

$$\Omega = \left\{ (x,\, y,\, z)^T \in \mathbb{R}^3 \middle| \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} < 1, \quad a \neq c \right\}.$$

Sea $\psi(s_1,\, s_2,\, h)$ el siguiente campo vectorial en $\{C^\infty(\Omega)\}^3$ definido como

$$\psi(s_1,\, s_2,\, h) = \begin{pmatrix} s_1(z-h) \\ s_1 i(z-h) \\ s_2(x+iy) \end{pmatrix}$$

con la particularidad de que $\operatorname{div}\psi(s_1, s_2, h) = 0$, entonces

$$P_0(\psi(s_1, s_2, h)) = \psi(s_1, s_2, h) - \nabla P_\psi \tag{85}$$

donde P_ψ es la solución del siguiente problema de Neumann:

$$\begin{cases} \Delta P_\psi = 0, & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial P_\psi}{\partial n} = \psi(s_1, s_2, h)\cdot \mathbf{n}, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{86}$$

Observación 5.1. Para que el vector P_ψ sea solución del problema (86), se exige que $\psi - \nabla P_\psi \in S_2$:

$$\begin{cases} 0 = \operatorname{div}(\psi - \nabla P_\psi) = \operatorname{div}(\psi) - \operatorname{div}(\nabla P_\psi) = \Delta P_\psi, & \text{en } \Omega \\ (\psi - \nabla P_\psi)\cdot \mathbf{n} = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lema 5.1. El proyector P_0 aplicado a $\psi(s_1, s_2, h)$ es el siguiente vector:

$$P_0(\psi(s_1, s_2, h)) = \frac{s_1 - s_2}{a^2 + c^2}\begin{pmatrix} a^2(z-l) \\ a^2 i(z-l) \\ -c^2(x+iy) \end{pmatrix}.$$

PRUEBA: La prueba se reduce a resolver el Problema de Neumann (86).

El elipsoide de revolución Ω tiene la siguiente parametrización:

$$x = a\cos\theta\cos\phi, \quad y = a\,sen\,\theta\cos\phi, \quad z = c\,sen\,\phi + l$$

donde $a > 0$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$.

De esta forma, para los cosenos directores se tienen las siguientes expresiones:

$$\cos nx + i\cos ny = \frac{c\cos\phi\, e^{i\theta}}{\sqrt{a^2 sen^2\phi + c^2\cos^2\phi}}, \quad \cos nz = \frac{c\,sen\,\phi}{\sqrt{a^2 sen^2\phi + c^2\cos^2\phi}}. \tag{87}$$

Usando las relaciones (87) obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi(s_1, s_2, h)\cdot\mathbf{n}\Big|_{\partial\Omega} &= \begin{pmatrix} s_1(z-h) \\ is_1(z-h) \\ s_2(x+iy) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos nx \\ \cos ny \\ \cos nz \end{pmatrix}\Bigg|_{\partial\Omega} = \\
&= s_1(z-h)(\cos nx + i\cos ny)\big|_{\partial\Omega} + s_2(x+iy)\cos nz\big|_{\partial\Omega} = \\
&= \frac{s_1(c\,sen\,\phi + l - h)c\cos\phi\, e^{i\theta}}{\sqrt{a^2 sen^2\phi + c^2\cos^2\phi}} + \frac{s_2 a^2 e^{i\theta}\cos\phi\, sen\,\phi}{\sqrt{a^2 sen^2\phi + c^2\cos^2\phi}} = \\
&= \frac{s_1c^2 + s_2a^2}{a^2+c^2}\left[\frac{(a^2+c^2)e^{i\theta} sen\,\phi\cos\phi}{\sqrt{a^2 sen^2\phi + c^2\cos^2\phi}}\right] + \frac{s_1(l-h)c\cos\phi\, e^{i\theta}}{\sqrt{a^2 sen^2\phi + c^2\cos^2\phi}} = \\
&= \frac{s_1c^2 + s_2a^2}{a^2+c^2}\Big[\nabla(x+iy)\cdot(z-l)\Big]\cdot\mathbf{n}\Big|_{\partial\Omega} + [\nabla(x+iy)s_1(l-h)]\cdot n\Big|_{\partial\Omega}.
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que

$$\psi(s_1, s_2, h)\cdot\mathbf{n}\Big|_{\partial\Omega} = \{\nabla[(x+iy)(m(z-l) + s_1(l-h))\cdot(z-l)]\}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\partial\Omega}$$

donde $m = \frac{s_1c^2+s_2a^2}{a^2+c^2}$.

Sea $P_\psi = m(x+iy)(z-l) + s_1(l-h)(x+iy)$ i.e $\frac{\partial P_\psi}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \nabla P_\psi\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = \psi\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega}$.
Como P_ψ es un polinomio de orden 1 con respecto a x, y, z entonces $\Delta P_\psi = 0$.

Regresemos al cálculo de $P_0(\psi(s_1, s_2, h)) = \psi(s_1, s_2, h) - \nabla P_\psi$

$$\begin{aligned}
P_0(\psi) &= \begin{pmatrix} s_1(z-h) \\ is_1(z-h) \\ s_2(x+iy) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m(z-l) + s_1(l-h) \\ im(z-l) + is_1(l-h) \\ m(x+iy) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (s_1-m)(z+l) \\ i(s_1-m)(z+l) \\ (s_2-m)(x+iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z+l)\frac{(s_1-s_2)a^2}{a^2+c^2} \\ -i(z+l)\frac{(s_1-s_2)c^2}{a^2+c^2} \\ (s_2-m)(x+iy) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Del Lema 5.1 se sigue que si definimos

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = a^2(z-l)(\cos nx + i\cos ny)\big|_{\partial\Omega} - c^2(x+iy)\cos,\, nz\big|_{\partial\Omega} =$$
$$= a^2 c\, \mathrm{sen}\,\phi\left(\frac{c\cos\phi\, e^{i\theta}}{\sqrt{a^2 \mathrm{sen}^2\phi + c^2\cos^2\phi}}\right) - \frac{c^2a^2e^{i\theta}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi}{\sqrt{a^2\mathrm{sen}^2\phi + c^2\cos^2\phi}} = 0.$$

Veamos la segunda parte de la afirmación. De los lemas 5.2 y 5.1 y del hecho que $\mathbf{u}_0 \in M_S$ encontramos que

$$\left(\overline{C} - 3B\right)\mathbf{u}_0 = \overline{C}\mathbf{u}_0 - 3B\mathbf{u}_0 = \tau\mathbf{u}_0 - 3\sigma\mathbf{u}_0 = (\tau - 3\sigma)\mathbf{u}_0 = \eta\mathbf{u}_0$$

donde $\eta = \tau - 3\sigma = \frac{3a^2-c^2}{a^2+c^2}$ es el valor propio asociado al operador $\overline{C} - 3B$. □

Recordemos que $\gamma = \nabla\overline{\psi}$ donde ψ es la solución del problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0, & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = \mu, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde μ está dado por la fórmula (51)

$$\mu = \psi(1,\,-1,\,0)\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = \nabla[(x+iy)(m(z-l)+l)]\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega}$$

donde $m = \frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}$, esto es,

$$\psi = (x+iy)\left(\frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}(z-l)+l\right),$$

de donde $\gamma = \frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}(z-l,\, i(z-l),\, x+iy)^T \in M_S$. Esto prueba el siguiente lema:

Lema 5.4. En el caso en que Ω es el interior del elipsoide de revolución

$$\gamma = \frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}\begin{pmatrix} z-l \\ i(z-l) \\ x+iy \end{pmatrix}.$$

Calculemos ahora $P_0(\gamma\times\mathbf{k})$ y $P_0\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma$:

$$P_0(\gamma\times\mathbf{k}) = \frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}P_0\left(\begin{pmatrix} z-l \\ i(z-l) \\ 0 \end{pmatrix}\times\mathbf{k}\right) = \frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}P_0\begin{pmatrix} i(z-l) \\ -(z-l) \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}iP_0\begin{pmatrix} z-l \\ i(z-l) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mi}{a^2+c^2}\begin{pmatrix} a^2(z-l) \\ a^2 i(z-l) \\ -c^2(x+iy) \end{pmatrix},$$

entonces $P_0(\gamma\times\mathbf{k}) = \frac{mi}{a^2+c^2}\mathbf{u}_0$.

Por otra parte,

$$\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma = mx\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} - my\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = mi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x+iy \end{pmatrix},$$

de donde

$$P_0\left(\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma\right) = miP_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x+iy \end{pmatrix} = miP_0(\psi(0,\,1,\,0)) = -\frac{mi}{a^2+c^2}\mathbf{u}_0.$$

De estos resultados se sigue que

$$iP_0\left(\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma - 3(\gamma\times\mathbf{k})\right) = \frac{4m}{a^2+c^2}\mathbf{u}_0.$$

De estos calculos se tiene que en el caso del elipsoide de revolución

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \omega_0(\overline{C}-3B) & \mathbf{0} & \frac{4\omega_0^2 m}{a^2+c^2}\mathbf{u}_0 \\ f_N(\cdot) & 0 & \omega_0 \\ \frac{4m\rho}{(2I_\perp+\rho d)(a^2+c^2)}\langle\cdot,\,\mathbf{u}_0\rangle & \frac{\omega_0 L}{2I_\perp+\rho d} & \frac{\omega_0 K}{2I_\perp+\rho d} \end{pmatrix}. \tag{88}$$

5.2 Existencia de un subespacio invariante de dimensión finita

Tenemos la siguiente descomposición en suma directa ortogonal:

$$S_2 \times \mathbb{C}^2 = \text{gen}\{\mathbf{u}_0\} \times \mathbb{C}^2 \oplus (\text{gen}\{\mathbf{u}_0\})^{\perp} \times \{\theta\}^2$$

donde $\theta = (0,\, 0)$ es el cero de $\mathbb{C}^2$.

En efecto,

$$(\text{gen}\{\mathbf{u}_0\} \times \mathbb{C}^2)^{\perp} = (\text{gen}\{\mathbf{u}_0\})^{\perp} \times \{\theta\}^2.$$

Proposición 5.1. Los subespacios $G = \text{gen}\{\mathbf{u}_0\} \times \mathbb{C}^2$ y $G^{\perp} = (\text{gen}\{\mathbf{u}_0\})^{\perp} \times \{\theta\}^2$ son subespacios invariantes de $\overline{\mathbf{A}}$.

PRUEBA: Teniendo en cuenta que $\mathbf{u}_0 \in M_S$ para demostrar que H es un subespacio invariante de $\overline{\mathbf{A}}$ basta ver que $\overline{\mathbf{A}}G \subset G$.

Sea $(\alpha\mathbf{u}_0,\, W,\, Z)^T \in G$. Hay que probar que

$$\overline{\mathbf{A}}(\alpha\mathbf{u}_0,\, W,\, Z)^T \in G$$

pero de (88) y notando que $(\overline{C} - 3B)\mathbf{u}_0 = (\tau - 3\sigma)\mathbf{u}_0$ encontramos

$$\overline{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{u}_0 \\ W \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\omega_0(\tau - 3\sigma) + 4\omega_0^2 mZ)\mathbf{u}_0 \\ \omega_0 Z \\ \frac{4m\alpha\rho\|\mathbf{u}_0\|^2}{2I_\perp + \rho d} + \frac{\omega_0 LW}{2I_\perp + \rho d} + \frac{\omega_0 KZ}{2I_\perp + \rho d} \end{pmatrix} \in G.$$

Veamos ahora que $G^{\perp}$ es un subespacio invariante de $\overline{A}$.

Sea dado $(\mathbf{v},\, 0,\, 0)^T$ donde $\mathbf{v} \in (\text{gen}\{\mathbf{u}_0\})^{\perp} \cap D(\overline{C})$. Nótese que $\omega_0(\overline{C} - 3B)\mathbf{v} \in (\text{gen}\{\mathbf{u}_0\})^{\perp}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \left\langle \omega_0(\overline{C} - 3B)\mathbf{v},\, \mathbf{u}_0 \right\rangle &= \omega_0 \left\langle (\overline{C} - 3B)\mathbf{v},\, \mathbf{u}_0 \right\rangle = \omega_0 \left\langle \mathbf{v},\, (\overline{C} - 3B)\mathbf{u}_0 \right\rangle = \\ &= \omega_0 \left\langle \mathbf{v},\, (\tau - 3\sigma)\mathbf{u}_0 \right\rangle = \omega_0(\tau - 3\sigma)\langle \mathbf{v},\, \mathbf{u}_0 \rangle = 0, \end{aligned}$$

de donde que

$$\overline{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0(\overline{C} - 3B)\mathbf{v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in G^{\perp}.$$

□

Proposición 5.2. Sea P el operador de proyección ortogonal de $S_2 \times \mathbb{C}^2$ en $G = \text{gen}\{\mathbf{u}_0\} \times \mathbb{C}^2$, entonces $PD(\overline{A}) \subset D(\overline{A})$.

PRUEBA: Antes de probar la proposición recordemos que

$$D(\overline{A}) = D(\overline{C}) \times \mathbb{C}^2.$$

Sea $(\mathbf{u},\, W,\, Z)^T \in D(\overline{A})$. Entonces es claro que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ W \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{u}_0 \\ W \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

de donde que $\langle \mathbf{u}_0,\, \mathbf{v} \rangle = 0$ i.e.,

$$P \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ W \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{u}_0 \\ W \\ Z \end{pmatrix}$$

y como $\mathbf{u}_0 \in M_S$, $\alpha\mathbf{u}_0$ tambien está en $M_S \subset D(\overline{C})$. Por tanto,

$$P \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ W \\ Z \end{pmatrix} \in D(\overline{C}) \times \mathbb{C}^2 = D(\overline{\mathbf{A}}).$$

□

Por tanto, por el Teorema 0.3 dado en el Capítulo 0 de este trabajo, el operador $\overline{A}$ se puede descomponer como

$$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{R} = (\overline{\mathbf{A}})_1\mathbf{R}_1 + (\overline{\mathbf{A}})_2\mathbf{R}_2 \tag{89}$$

donde $(\overline{\mathbf{A}})_1 = \overline{\mathbf{A}}\big|_G$ y $(\overline{\mathbf{A}})_2 = \overline{\mathbf{A}}\big|_{G^\perp}$ y $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ con $\mathbf{R}_1 \in G$, $\mathbf{R}_2 \in G^{\perp}$.

Observación 5.2. De (89) se sigue que a los efectos de la estabilidad lineal basta estudiar el espectro de $(\overline{\mathbf{A}})_1$ y $(\overline{\mathbf{A}})_2$. En efecto,

1) si $\mathbf{R} \in G$, entonces $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{0}, 0, 0)^T$, luego $\overline{A}\mathbf{R} = (\overline{\mathbf{A}})_1\mathbf{R}_1$,

2) si $\mathbf{R} \in G^\perp$, entonces $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{0}, 0, 0)^T$ y $\overline{A}\mathbf{R} = (\overline{\mathbf{A}})_2\mathbf{R}_2$.

Observación 5.3. Notemos que

$$(\overline{\mathbf{A}})_2 = \begin{pmatrix} \omega_0(\overline{C} - 3B) & \mathbf{0} & 0 \\ f_N(\cdot) & 0 & 0 \\ f_N(\cdot) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En efecto, si $\mathbf{R} \in G^\perp$ entonces $\mathbf{R} = (\mathbf{v}, 0, 0)^T$ donde $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_0 \rangle = 0$ entonces

$$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \omega_0(\overline{C} - 3B)\mathbf{v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De donde que $(\overline{\mathbf{A}})_2$ es simétrico y por lo tanto los valores propios de este operador son reales y simples.

Observación 5.4. El operador $(\overline{\mathbf{A}})_1$ es $\mathbf{Q}$-simétrico es decir, este operador puede tener a lo sumo dos valores propios no reales que serán, si existen, complejos conjugados, de los cuales uno producirá inestabilidad.

Observación 5.5. Si

$$(\overline{\mathbf{A}})_1\mathbf{R}_1 = s\mathbf{R}_1, \quad \mathbf{R}_1 \in G$$

$$(\overline{\mathbf{A}})_2\mathbf{R}_2 = t\mathbf{R}_2, \quad \mathbf{R}_1 \in G^\perp$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$, entonces por el Teorema 0.3,

$$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{R} = s\mathbf{R}_1 + t\mathbf{R}_2.$$

Entonces, $\mathbf{R}$ no es vector propio, a menos que $s = t$ pero de la simetría del operador $(\overline{\mathbf{A}})_2$ eso implicaría que s sea real. Recíprocamente, si

$$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{R} = q\mathbf{R},$$

entonces, nuevamente por el Teorema 0.3,

$$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{R} = (\overline{\mathbf{A}})_1\mathbf{R}_1 + (\overline{\mathbf{A}})_2\mathbf{R}_2 = q\mathbf{R}_1 + q\mathbf{R}_2 \tag{90}$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_1 \in G$, $\mathbf{R}_2 \in G^\perp$. De (90) se sigue que

$$(\overline{\mathbf{A}})_1\mathbf{R}_1 = q\mathbf{R}_1, \quad (\overline{\mathbf{A}})_2\mathbf{R}_2 = q\mathbf{R}_2$$

lo cual implica que $q \in \mathbb{R}$ y es simple.

De la Observación 5.5 hemos visto que basta estudiar los valores propios de $(\overline{\mathbf{A}})_1$.

5.3 Estudio de la estabilidad del Sistema de Sobolev

En definitiva, el estudio de la estabilidad lineal en el caso en que la cavidad interior es un elipsoide de revolución se reduce a estudiar la ecuación

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = i(\overline{\mathbf{A}})_1\mathbf{R} \tag{91}$$

cuando $\mathbf{R} \in G$ para todo $t \geq 0$. Nótese que sustituyendo $\mathbf{R} = (X(t)\mathbf{u}_0, W(t), Z(t))^T$ en (91) resulta

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(t)\mathbf{u}_0 \\ \dot{W}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \left(\omega_0\eta X(t) + \frac{4\omega_0^2 m}{a^2+c^2}Z(t)\right)\mathbf{u}_0 \\ \omega_0 Z(t) \\ \frac{4m\rho\|\mathbf{u}_0\|^2}{(2I_\perp+\rho d)(a^2+c^2)}X(t) + \frac{\omega_0 L}{2I_\perp+\rho d}W(t) + \frac{\omega_0 K}{2I_\perp+\rho d}Z(t) \end{pmatrix},$$

de donde se tiene el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{X}(t) = i\left(\omega_0\eta X(t) + \frac{4\omega_0^2 m}{a^2+c^2}Z(t)\right) \\ \dot{W}(t) = i\omega_0 Z(t) \\ \dot{Z}(t) = \frac{i}{2I_\perp+\rho d}\left(\frac{4m\rho\|\mathbf{u}_0\|^2}{a^2+c^2}X(t) + \omega_0 L W(t) + \omega_0 K Z(t)\right) \end{array}\right. \tag{92}$$

Nótese que $(X(t),\, W(t),\, Z(t))^T \in \mathbb{C}^3$ para todo $t \geq 0$.

De (92) se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ W \\ Z \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} \omega_0\eta & 0 & \frac{4\omega_0^2 m}{a^2+c^2} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ \frac{4m\rho\|\mathbf{u}_0\|^2}{(2I_\perp+\rho d)(a^2+c^2)} & \frac{\omega_0 L}{2I_\perp+\rho d} & \frac{\omega_0 K}{2I_\perp+\rho d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ W \\ Z \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Observación 5.6. La matriz del sistema de ecuaciones (93) es $\mathbf{Q}_3$-simétrica tomando

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\omega_0^2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & -(2I_\perp + \rho d) \end{pmatrix}.$$

En este caso, $\mathbb{C}^3$ se descompone en la siguiente suma $\mathbf{Q}_3$-ortogonal:

$$\mathbb{C}_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}[\dot{+}]\text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Denotando por $\Delta(\lambda,\, \omega_0)$ al polinomio característico de la matriz del sistema (93) encontramos

$$\Delta(\lambda,\, \omega_0) = \begin{vmatrix} \omega_0\eta - \lambda & 0 & \frac{4\omega_0^2 m}{a^2+c^2} \\ 0 & -\lambda & \omega_0 \\ \frac{4m\rho\|\mathbf{u}_0\|^2}{(2I_\perp+\rho d)(a^2+c^2)} & \frac{\omega_0 L}{2I_\perp+\rho d} & \frac{\omega_0 K}{2I_\perp+\rho d} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + \widehat{b}\left(\frac{\omega_0}{2I_\perp + \rho d}\right)\lambda^2 + \widehat{c}\left(\frac{\omega_0^2}{2I_\perp + \rho d}\right)\lambda - \widehat{d}\left(\frac{\omega_0^3}{2I_\perp + \rho d}\right)$$

donde

$$\widehat{b} = K + \eta\,(2I_\perp + \rho d)\,, \quad \widehat{c} = L - \eta K + \frac{16m^2\rho\|\mathbf{u}_0\|^2}{(a^2+c^2)^2}, \quad \widehat{d} = \eta L. \tag{95}$$

y en donde a su vez,

$$\begin{array}{c} K = 2\left(I_\parallel - 2I_\perp\right) - \rho\pi^2\left(\frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}\right)^2(a^2+6c^2)\,, \quad m = \frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}, \quad \eta = \frac{3a^2-c^2}{a^2+c^2}, \\ L = -\frac{2}{\omega_0^2}\left[gMl + \left(I_\parallel - I_\perp\right)\omega_0^2\right], \quad \|\mathbf{u}_0\|^2 = \frac{\pi^2 a^2 c^4}{2}. \end{array} \tag{96}$$

Analicemos ahora las raices del siguiente polinomio:

$$\lambda^3 - \widehat{b}\left(\frac{\omega_0}{2I_\perp + \rho d}\right)\lambda^2 - \widehat{c}\left(\frac{\omega_0^2}{2I_\perp + \rho d}\right)\lambda + \widehat{d}\left(\frac{\omega_0^3}{2I_\perp + \rho d}\right) = 0. \tag{97}$$

De (95) observamos que

$$\widehat{d} = \eta\widehat{c} + \eta^2\widehat{b} - \eta^3\,(2I_\perp + \rho d) - \eta\frac{16m^2\rho\|\mathbf{u}_0\|^2}{(a^2+c^2)^2}.$$

Entonces podemos expresar la ecuación (97) en términos de las constantes $\widehat{b}$ y $\widehat{c}$:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \frac{\omega_0}{2I_\perp + \rho d}\widehat{b}\lambda^2 - \frac{\omega_0^2}{2I_\perp + \rho d}\widehat{c}\lambda + \\ + \frac{\omega_0^3}{2I_\perp + \rho d}\left(\eta\widehat{c} + \eta^2\widehat{b} - \eta^3\,(2I_\perp + \rho d) - \eta\frac{16m^2\rho\,\|\mathbf{u}_0\|^2}{(a^2+c^2)^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Definiendo $\varepsilon = 1/(2I_\perp + \rho d)$ (el cual es positivo) la ecuación anterior se puede escribir más brevemente como

$$\lambda^3 - \omega_0\varepsilon\widehat{b}\lambda^2 - \omega_0^2\varepsilon\widehat{c}\lambda + \omega_0^3\varepsilon\widehat{d}\left(\eta\widehat{c} + \eta^2\widehat{b} - \eta^3\,(2I_\perp + \rho d) - \eta\frac{16m^2\rho\,\|\mathbf{u}_0\|^2}{(a^2+c^2)^2}\right) = 0. \tag{98}$$

Denotemos por $D = D(\lambda, \omega_0)$ al discriminante de la ecuación (98). Se tienen las siguientes condiciones[1] para D:

[1] Para un polinomio cúbico [27] real $p(x)$ con coeficientes constantes b, c, d de la forma

a) si $D > 0$, entonces la ecuación (98) tiene tres raices reales distintas

b) si $D = 0$, la ecuación (98) tiene al menos dos raices reales iguales

c) si $D < 0$, la ecuación (98) tiene una sóla raíz real y dos complejas conjugadas.

Un pequeño cálculo revela que $D = \omega_0^6 \varepsilon^2 \widehat{D}$, donde

$$\widehat{D} = \left(18\widehat{b}\widehat{c}\delta + 4\widehat{c}^3\right)\varepsilon + \left(4\widehat{b}^3\delta + \widehat{b}^2\widehat{c}^2\right)\varepsilon^2 - 27\delta^2 \tag{99}$$

en donde

$$\delta = \eta\widehat{c} + \eta^2\widehat{b} - \eta^3\left(2I_\perp + \rho d\right) - \eta\frac{16m^2\rho\left\|\mathbf{u}_0\right\|^2}{\left(a^2+c^2\right)^2}.$$

Observemos que el signo de $\widehat{D}$ es el mismo que el de D, por lo tanto bastará estudiar el signo de este polinomio.

Ahora, retomando las definiciones (95) y definiendo

$$\nu = \frac{16\omega_0^2 m^2\rho\|\mathbf{u}_0\|^2 - \left\{2gMl + \omega_0^2\left[2\left(I_\parallel - I_\perp\right) + \eta K\right]\right\}\left(a^2+c^2\right)^2}{\left(a^2+c^2\right)^2},$$

podemos expresar al polinomio de (99) en la siguiente forma:

$$\widehat{D} = \frac{18}{\omega_0^2}\left[K + \eta\left(2I_\perp + \rho d\right)\right]\nu\varepsilon + \frac{4}{\omega_0^6}\nu^3\varepsilon + 4\widehat{b}^3\delta\varepsilon^2 + \frac{1}{\omega_0^4}\nu^2\widehat{b}^2\varepsilon^2 - 27\delta^2$$

de donde, definiendo $\widetilde{D} = \omega_0^6\widehat{D}$, obtenemos el siguiente polinomio (de nuevo, el signo de $\widetilde{D}$ es el signo de $\widehat{D}$):

$$\widetilde{D} = \left(4\widehat{b}^3\delta\varepsilon^2 - 27\delta^2\right)\omega_0^6 + 18\left[K + \eta\left(2I_\perp + \rho d\right)\right]\nu\varepsilon\omega_0^4 + \nu^2\widehat{b}^2\varepsilon^2\omega_0^2 + 4\nu^3\varepsilon. \tag{100}$$

$$p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

su discriminante D está dado por

$$D = 18bcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4c^3 - 27d^2$$

5.3.1 Consideración sobre el momento rotacional K

Detengámonos [23] en el caso particular $K = 0$ esto es, el caso en que el eje de simetría del trompo se mueve alrededor del eje donde se encuentra su centro de gravedad. Entonces se tienen los siguientes resultados:

$$\widehat{b} = \eta\left(2I_\perp + \rho d\right), \quad \delta = -2\eta\left(\frac{gMl}{\omega_0^2} + \left(I_\parallel - I\perp\right)\right);$$
$$\nu = \frac{16\omega_0^2 m^2\rho\|\mathbf{u}_0\|^2 - 2\left[gMl + \omega_0^2\left(I_\parallel - I\perp\right)\right]\left(a^2+c^2\right)^2}{\left(a^2+c^2\right)^2}$$

De esta manera el polinomio $\widetilde{D}$ de (100) se puede escribir como

$$\widetilde{D} = \left(4\widehat{b}^3\delta\varepsilon^2 - 27\delta^2\right)\omega_0^6 + 18\eta\nu\omega_0^4 + \nu^2\eta^2\omega_0^2 + 4\nu^3\varepsilon. \tag{101}$$

Definiendo $W_0 = \omega_0^2$ y un mediante un cálculo extensivo se puede ver que el polinomio $\widetilde{D}$ de (101) se puede expresar como

$$\widetilde{D} = \widetilde{a}W_0^3 + \widetilde{b}W_0^2 + \widetilde{c}W_0 + \widetilde{d} \tag{102}$$

donde

$$\widetilde{d} = -\frac{32(gMl)^3}{2I_\perp + \rho d},$$

$$\widetilde{c} = -108\eta^2\left(gMl\right)^2 + 4\eta^2\left(gMl\right)^2 + \frac{gMl}{2I_\perp+\rho d}\left[\frac{384m^2\rho\|\mathbf{u}_0\|^2}{\left(a^2+c^2\right)^2} - 96\left(gMl\right)^2\left(I_\parallel - I_\perp\right)\right],$$

$$\widetilde{b} = -\eta^2 gMl\left[8\eta^2\left(2I_\perp + \rho d\right) + 216\left(I_\parallel - I_\perp\right)\right] - 36\eta gMl + \eta^2 gMl\Bigg[8\left(I_\parallel - I_\perp\right) -$$
$$- \frac{64m^2\rho\left\|\mathbf{u}_0\right\|^2}{\left(a^2+c^2\right)^2} + \Bigg] + \frac{gMl}{2I_\perp + \rho d}\Bigg[-\frac{6144m^4\rho^2\left\|\mathbf{u}_0\right\|^4}{\left(a^2+c^2\right)^4} + \frac{1536m^2\rho\left\|\mathbf{u}_0\right\|^2}{\left(a^2+c^2\right)^2}\left(I_\parallel - I_\perp\right) -$$
$$- 48\left(I_\parallel - I_\perp\right)^2\Bigg]$$

$$\begin{aligned}\widetilde{a} = &-\eta^2\left[8\eta^2\left(2I_\perp+\rho d\right)+108\left(I_\parallel-I_\perp\right)\right]\left(I_\parallel-I_\perp\right)+\\ &+\eta\left[\frac{288m^2\rho\left\|\mathbf{u}_0\right\|^2}{\left(a^2+c^2\right)^2}-36\left(I_\parallel-I_\perp\right)\right]+\frac{m^2\rho\left\|\mathbf{u}_0\right\|^2}{\left(a^2+c^2\right)^2}\left(\frac{256m^2\rho\left\|\mathbf{u}_0\right\|^2}{\left(a^2+c^2\right)^2}-\right.\\ &\left.-64\eta^2\left(I_\parallel-I_\perp\right)\right)+4\left(I_\parallel-I_\perp\right)^2+\frac{m^2\rho\left\|\mathbf{u}_0\right\|^2}{\left(2I_\perp+\rho d\right)\left(a^2+c^2\right)^2}\left[\frac{16384m^4\rho^2\left\|\mathbf{u}_0\right\|^4}{\left(a^2+c^2\right)^4}-\right.\\ &\left.-\frac{6144m^2\rho\left\|\mathbf{u}_0\right\|^2}{\left(a^2+c^2\right)^2}\left(I_\parallel-I_\perp\right)+384\left(I_\parallel-I_\perp\right)^2\right]-\frac{32\left(I_\parallel-I_\perp\right)^3}{2I_\perp+\rho d}\end{aligned}$$

Por otra parte, usando la hipótesis de que $K=0$ y tomando en cuenta las definiciones (95), se puede ver que la ecuación (97) se puede factorizar de la siguiente manera:

$$(\lambda-\omega_0\eta)\left[\lambda^2+\frac{2}{2I_\perp+\rho d}\left(gMl+\omega_0^2\left(I_\parallel-I\perp\right)\right)\right]-\frac{16\omega_0^2m^2\rho\left\|\mathbf{u}_0\right\|^2}{\left(2I_\perp+\rho d\right)\left(a^2+c^2\right)^2}\lambda=0,$$

o bien, teniendo en cuenta los resultados de (96), esta ecuación se puede escribir tambien como

$$\begin{aligned}\left[\lambda-\omega_0\left(\frac{3a^2-c^2}{a^2+c^2}\right)\right]\left[\lambda^2+\frac{2}{2I_\perp+\rho d}\left(gMl+\omega_0^2\left(I_\parallel-I\perp\right)\right)\right]-&\\ -\frac{16\omega_0^2\left(c^2-a^2\right)^2\rho\pi^2a^2c^4}{2\left(2I_\perp+\rho d\right)\left(a^2+c^2\right)^4}\lambda=0.&\end{aligned} \tag{103}$$

5.3.2 Estudio de algunos casos especiales

Analicemos a continuación algunos casos especiales con respecto a las raices de la ecuación (103).

Ejemplo 5.1. Si elegimos los ejes del elipsoide mediante la relación $c=\sqrt{3}a$, entonces el polinomio (103) se escribe como

$$\lambda\left[\lambda^2+\frac{16\left(gMl+\omega_0^2\left(I_\parallel-I_\perp\right)\right)-3\omega_0^2\rho\pi^2}{8\left(2I_\perp+\rho d\right)}\right]=0,$$

de donde, los valores propios son

$$\lambda_0=0,\quad \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\tfrac{3\omega_0^2\rho\pi^2-16\left(gMl+\omega_0^2\left(I_\parallel-I_\perp\right)\right)}{8(2I_\perp+\rho d)}}.$$

Observemos que si el discriminante de $\lambda_{1,2}$ es positivo, entonces según el criterio dado anteriormente tendremos λ_1 y λ_2 reales y distintos de cero es decir, en este caso $I_\parallel-I_\perp>\frac{3}{16}\rho\pi^2$ y

$$\omega_0>4\sqrt{\frac{gMl}{3\rho\pi^2-16\left(I_\parallel-I_\perp\right)}}. \tag{104}$$

En otro caso ellos serán complejos conjugados (imaginarios puros). Recordemos que las soluciones de la ecuación (91) son de la forma vista en la Observación 4.7. □

Ejemplo 5.2. En el caso en que el elipsoide se deforma a una esfera, i.e. $c=a$, la ecuación (103) se expresa como

$$(\lambda-\omega_0)\left[\lambda^2+\frac{2}{2I_\perp+\rho d}\left(gMl+\omega_0^2\left(I_\parallel-I_\perp\right)\right)\right]=0$$

de donde se tienen los valores propios

$$\lambda_0=\omega_0,\quad \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-\tfrac{2}{2I_\perp+\rho d}\left(\omega_0^2\left(I_\parallel-I_\perp\right)-gMl\right)}.$$

Para este caso, el discriminante de $\lambda_{1,2}$ será positivo si $I_\perp>I_\parallel$, es decir, cuando

$$\omega_0>\sqrt{-\frac{gMl}{I_\parallel-I_\perp}} \tag{105}$$

y entonces tendremos tres raices reales distintas. □

Observación 5.7. De los ejemplos 5.1 y 5.2 vemos que si tomamos $c < a$ o $c > \sqrt{3}a$ los valores propios son negativos y para $a < c < \sqrt{3}a$ tenemos valores propios positivos, en ambos casos de multiplicidad algebraica igual a uno, lo que garantiza que las soluciones sean acotadas en el sentido de Liapunov, y el sistema mecánico sea estable.

Conclusión 5.1. En el caso estudiado en esta sección ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 =$ constante y $\Omega =$ elipsoide de revolución) aparecen a lo sumo dos zonas de inestabilidad. De los resultados conocidos para el número de zonas de inestabilidad en cavidades elipsoidales [29], se sigue que aún en este caso estas cavidades siguen siendo las más estables.

Capítulo 6

Conclusiones

Se presenta a continuación una descripción general de los puntos más relevantes de cada capítulo, así como la conclusión final de este trabajo de tesis.

6.1 Resumen de los capítulos

Capítulo 1. Se estudió un sistema mecánico de Tipo Sobolev bajo la acción de una fuerza adicional a la gravedad (Proposición 1.1). Se expresó al Sistema de Euler en un nuevo sistema de coordenadas ortogonal.

Capítulo 2. Se construyó la solución correspondiente al Sistema de Euler obtenido en el Capítulo 1 (Proposición 2.1) y se siguió un proceso de linealización de la ecuación (21), con lo cual se obtuvo un sistema de ecuaciones (29) para las desviaciones. Junto con las ecuaciones del trompo se dieron las condiciones de contorno. Finalmente, se dió un sistema de ecuaciones (52) en terminos de las frecuencias angulares del trompo y del líquido que describe completamente la acción de ambos bajo las pequeñas perturbaciones.

Capítulo 3. Después de seguir una metodología conocida [23], se obtuvieron un par de sistemas de ecuaciones (65)-(66) que resultan ser complejos conjugadas y que por lo tanto, a los efectos de la estabilidad, es suficiente estudiar solamente una de ellas. Finalmente, se obtuvo una ecuación canónica (81) en términos de las frecuencias angulares constantes pero no necesariamente iguales. Tambien se estudiaron algunas propiedades como son linealidad, simetría y clausura del nuevo operador.

Capítulo 4. Ha sido posible la introducción de los espacios de Pontriaguin Π_k ($\kappa = 1$ en este caso) con métrica indefinida para acotar el grado de inestabilidad de nuestro Sistema de Sobolev. Tambien, dadas las propiedades del nuevo operador, nos hemos restringido a estudiar la ecuación $\dot{\mathbf{R}} = i\overline{\mathbf{A}}\mathbf{R}$, en donde se ha visto que el operador $\overline{\mathbf{A}}$ admite propiedades convenientes para nuestros propósitos como lo son Q-simetría y la clausura [existencia de a lo más dos valores propios (salvo multilplicidad) [16]].

Capítulo 5. En el caso particular en que la cavidad del sistema mecánico es un elipsoide de revolución, se obtuvo que el vector propio descubierto por Sobolev [23] para el operador de Ralston [19] es tambien un vector propio del nuevo operador C (Teorema 5.1). Esto nos ha permitido obtener dos subespacios invariantes de $\overline{\mathbf{A}}$ uno de los cuales es de dimensión 3 (Observación 5.5). De aqui que el estudio de la estabilidad lineal se redujo al estudio de un polinomio de grado 3. El estudio de los valores propios nos ha conducido a la la existencia de a lo más dos zonas de inestabilidad (Sección 5.3).

6.2 Conclusión final

Conclusión 6.1. En el trabajo conocido de S.L. Sobolev [23] se estudia la estabilidad lineal de un sistema mecánico bajo la acción únicamente de la gravedad. Nuestro trabajo considera el caso en que sobre un sistema mecánico (de Tipo Sobolev) actúa además de la gravedad, otra fuerza externa exactamente del tipo $\mathbf{F}' = \dot{\omega}_1(t)\mathbf{k}\times\mathbf{r}'$ donde $\omega_1(t)$ es una frecuencia angular no constante. Esto conduce a que en las ecuaciones finales escritas en un sistema que rota con otra frecuencia angular $\omega_2(t)$ tambien no constante y no necesariamente igual a la anterior, aparezca un operador nuevo que no aparece cuando $\omega_1(t) = 0$ es decir, cuando el trompo y el fluido rotan con una sola velocidad angular (caso de Sobolev). Finalmente, se estudia un caso diferente al estudiado por Sobolev y además se logra acotar el grado de inestabilidad de la cavidad Ω, y en el caso cuando ésta es un elipsoide de revolución, se demuestra la existencia de a lo más un par de zonas de inestabilidad.

Un aporte de este trabajo es que a partir de la modelación física y operacional realizada, estamos en condiciones de atacar otros casos nuevos por ejemplo, $\omega_1(t)$ y $\omega_2(t)$ periódicas no constantes, donde las técnicas matemáticas son diferentes.

Bibliografía

[1] N.I. Akhiezer, I.M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Frederick Ungar Publishing Co., Vol. I, 1966.

[2] J. Bognár, *Indefinite Inner Product Spaces*, Sringer-Verlag, 1st Ed. 1974.

[3] G.P. Collins, *Bose-Einstein Condensates are one of the hottest areas in experimental physics*, Scientific American, December 2000.

[4] Ju. L. Daleckii, M.G. Krein, *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*, Translations of Mathematical Monographs AMS, Vol. 43, 1974.

[5] R. Felipe, A. Fraguela, *About the Stability of the Rotational Motion of a Top with a Cavity Filled up with a Viscous Fluid*, Fundamental and Applied Mathematics, Vol. **1**, No. 1, pp. 69-92, 1997 (en ruso).

[6] R. Felipe, A. Fraguela, *About the Stability of Sobolev's System in the Case of Viscous Fluid* , Journal of Mathematical Analysis and Applications **227**, pp. 25-42, 1998.

[7] R. Felipe, A. Bohigas, *Sobolev Systems with Several Ellipsoidal Cavities*, preprint of the ICTP, Trieste, Italy, 1992.

[8] G.B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton, 2nd Ed.

[9] A. Gheondea, G. Popescu, *Journal of Functional Analysis* 197 (2003) 68-109.

[10] S. Goldberg, *Unbounded Linear Operators. Theory and Applications*, Dover Publications, Inc., 1966.

[11] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 4th Ed. 1956.

[12] S.G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, Vol. 29, Translations of Mathematical Monographs (AMS), 1971.

[13] V. Khatskevich, D. Shoiykhet H., *Differentiable Operators and Non-linear Equations*, Birkhauser, 1994.

[14] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, 2nd Ed. 1976.

[15] A.G. Kostyuchenko, A. A. Shkalikov, M. Yu. Yurkin, *On the Stability of a Top with a Cavity Filled with a Viscous Fluid*, Journal of Functional Analysis and Its Applications, Vol. **32**, No. 2, 1998.

[16] M.G. Krein, *Foundations of the Theory of λ-zones of Stability of a Canonical System of Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*, Traducción de la American Mathematical Society, Vol. **120**, 1983.

[17] K.W. Madison, F. Chevy, V. Bretin J. Dalibard, *Stationary States of a Rotating Bose-Einstein Condesate: Routes to Vortex Nucleation*, Physical Review Letters, Vol. 86, No. 20, 2001.

[18] J.E. Marsden, A.J. Chorin, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, 3rd Ed. 1990.

[19] J.V. Ralston, *On Stationary Modes in Inviscid Rotating Fluids*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **44**, 366-383 (1973).

[20] R. Resnick, D. Halliday, K. S. Krane, *Física*, Vol. 1, CECSA, 1999.

[21] P. Rosenbush, D.S. Petrov, S. Shina, F. Chevy, V. Bretin, Y. Castin, G. Shlyapnikov, J. Dalibard, *Critical Rotation of a Harmonically Trapped Bose Gas*, Physical Review Letters, Vol. 88, No. 35, 2002.

[22] D. A. Sánchez, *Ordinary Differential Equations and Stability: an Introduction*, Dover, 1st Ed. 1979.

[23] S.L. Sobolev, *About the Movement of a Symmetric Top with a Cavity Filled of a Fluid*, Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. (3) (1960), 20-55 (en Ruso)

[24] A. Sommerfeld, *Mechanics*, Lectures on theoretical physics, Vol. 1, Academic Press, 1942.

[25] *Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric I.* Amer. Math. Soc. Transl. (2) 13 (1960), 105-175.

[26] *Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric I.* Amer. Math. Soc. Transl. (2) 34 (1963), 283-373.

[27] H. Tapia Recillas, *Ecuaciones polinomiales*, 2do Coloquio del Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Agosto de 1981.

[28] V. I. Yudovich, *The Linearization Method in Hydrodimamical Stability Theory*, Traducción de Metod Linearizatsii v Gidrodinamicheskoi Teorii Ustoichivosti por la American Mathematical Society, 170pp., 1989.

[29] M. Yu. Yurkin, *The Finite Dimension Property of Small Oscillations of a Top with a Cavity Filled with an Ideal Fluid*, Journal of Functional Analysis and Its Applications, Vol. **31**, No. 1, 1997.

[30] M. Yu. Yurkin, *Stability of Small Oscillations of a Rotating Asymmetric Gyroscope Filled by a Fluid*, Journal of Doklady Mathematics, Vol. **58**, No. 2, pp. 209-212, 1998.