

# Optimización para el Mantenimiento de Sistemas Reparables

por

Víctor Hugo Muñiz Sánchez

I.I., Instituto Tecnológico de Puebla (1997)

Sometida a revisión al Departamento de Ciencias de la Computación  
en el cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Ciencias de la Computación y Matemáticas Industriales

en el

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.,

Noviembre 2004

© Centro de Investigación en Matemáticas A.C., 2004

Firma del autor .....  
Departamento de Ciencias de la Computación  
Noviembre de 2004

Certificado por .....  
Dr. Enrique Raúl Villa Diharce  
Grupo de Estadística Aplicada, Investigador Asociado C  
Director de Tesis

Certificado por .....  
Dr. Arturo Hernández Aguirre  
Grupo de Cómputo Matemático, Investigador Titular A  
Co-Director de Tesis

Aceptado por .....  
Dr. Salvador Botello Rionda  
Coordinador de la Maestría en Ciencias de la Computación



# Optimización para el Mantenimiento de Sistemas Reparables

por

Víctor Hugo Muñiz Sánchez

Sometida a revisión al Departamento de Ciencias de la Computación  
en Noviembre de 2004, en el cumplimiento parcial de los  
requisitos para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias de la Computación y Matemáticas Industriales

## Resumen

El presente trabajo se desarrolla dentro del área de Confiabilidad de Sistemas y aborda en específico, el problema de optimización para el mantenimiento de sistemas reparables.

Los sistemas que se analizan en este trabajo pueden estar formados por uno o varios componentes, y cada uno de estos tiene asociada una distribución de tiempos a la falla y una distribución de tiempos de reparación. Las distribuciones que se contemplan son las que comúnmente se usan en el área de confiabilidad.

Se asume que cada componente que forma el sistema falla y se repara en forma independiente de los otros y además, en cada reparación (o mantenimiento) se lleva a un estado “como nuevo”. El comportamiento de cada componente se modela usando la teoría de renovación, y la información relevante del sistema, como la disponibilidad o el costo por falla, se obtiene a través de sus componentes, entonces, se considera cada componente como un proceso de renovación independiente.

Uno de los objetivos que se pretende en este trabajo de tesis es la obtención de políticas óptimas de mantenimiento, tomando en cuenta las características del sistema analizado. Esta optimización abarca tanto al mantenimiento preventivo como al correctivo. En el primero, el objetivo es encontrar intervalos de tiempo óptimos para realizar mantenimiento preventivo, de forma tal que se minimicen los costos generados por fallas o mantenimientos y mantengan una disponibilidad deseada en el sistema en ese intervalo de tiempo. En el mantenimiento correctivo, el objetivo es encontrar los parámetros óptimos de la distribución del tiempo de reparación de los componentes de forma tal que se logre un nivel deseado de disponibilidad a largo plazo del sistema y minimice los costos asociados con este objetivo, que generalmente son los relacionados con la disminución del tiempo promedio de reparación en los componentes. Ambas técnicas pueden usarse en forma conjunta para lograr obtener un sistema con la disponibilidad deseada, ya sea adoptando un enfoque preventivo o correctivo de mantenimiento.

El otro objetivo que se persigue, es la implementación de técnicas evolutivas de optimización, las cuales han demostrado su eficacia en distintas áreas de aplicación. Se implementa también el enfoque de optimización multiobjetivo a través del concepto de dominancia de Pareto, mediante el cual es posible optimizar en forma simultánea dos o más funciones objetivo pudiendo incluir también restricciones. El algoritmo usado para los problemas de optimización planteados son resueltos mediante un algoritmo multiobjetivo llamado IS-PAES, el cual se mostró eficiente en todos los casos probados.

Director de Tesis: Dr. Enrique Raúl Villa Diharce  
Título: Grupo de Estadística Aplicada, Investigador Asociado C

Co-Director de Tesis: Dr. Arturo Hernández Aguirre  
Título: Grupo de Cómputo Matemático, Investigador Titular A

Este trabajo está dedicado

A mi madre,

A mis hermanos:

Marbella, porque sin ella nada hubiera sido posible,

Alejandro, por su invaluable ayuda y apoyo

## Agradecimientos

*A mis hermanas: Rita y Lulú, por todo su cariño y apoyo, a Nancy, por todo lo bueno que me inspira, a Araceli, por toda su ayuda, a mi padre y al resto de mi familia, la mejor que me pudo haber tocado.*

*De forma muy especial, y con todo cariño, agradezco a la familia Juárez Balderas: Francisco (padre e hijo), Lulú y María José, y a la familia Juárez Sánchez: Ramón, Micaela, Ariel y Jesús, por toda su ayuda, pero sobre todo, por tanta amistad y por haberme hecho sentir parte de ellos.*

*A mis asesores, Dr. Enrique Villa y Dr. Arturo Hernández, por su gran ayuda y por todo el tiempo invertido en este trabajo.*

*A los grandes amigos que he conocido: Moisés, Rosa, Rocky, Yolanda, Alonso, Julio, Angel, Jorge, Omar y Alma por su gran ayuda en momentos difíciles (entiéndase tareas, exámenes y pequeños accidentes) y por compartir tantos momentos gratos (entiéndase cine, lecturas, música y grandes paseos). A los grandes amigos que he conservado: Sandra, Beto, Pablo, Alfonso Sanz (y Cia.), Leti, Gabis, Yesica, Gabriel y Daniela. También agradezo a Gabriela (con mucho cariño) y Patricia Chavarría, por su apoyo.*

*A los Drs. Johan Van Horeebek, Rogelio Ramos y Graciela González, por sus consejos y su gran ayuda.*

*Al Conacyt y al CIMAT, por darme la oportunidad de haber estudiado esta maestría.*

# Índice general

<b>1. Introducción y alcance del trabajo</b>	<b>1</b>
<b>2. Análisis cualitativo del sistema</b>	<b>5</b>
2.1. Función de estructura . . . . .	6
2.2. Estructura en serie . . . . .	7
2.3. Estructura en paralelo . . . . .	7
2.4. Estructura $k$ de $n$ . . . . .	8
2.5. Análisis de la estructura del sistema . . . . .	9
2.5.1. Estructuras coherentes . . . . .	9
2.5.2. Características generales de sistemas coherentes . . . . .	10
2.5.3. Estructuras representadas por Trayectorias y Cortes . . . . .	11
2.5.4. Descomposición Pivotal . . . . .	15
2.5.5. Módulos de Estructuras Coherentes . . . . .	17
<b>3. Distribuciones de falla</b>	<b>20</b>
3.1. Tiempo a la falla . . . . .	20
3.2. Función de distribución acumulada . . . . .	21
3.3. Función de densidad de probabilidad . . . . .	21
3.4. Función de confiabilidad . . . . .	23
3.5. Función de riesgo o tasa de fallas . . . . .	23
3.6. Tiempo medio a la falla . . . . .	25

3.7.	Distribuciones IFR y DFR . . . . .	26
3.8.	Distribuciones paramétricas más comunes para modelar tiempos a la falla y de reparación . . . . .	27
3.8.1.	Distribución Exponencial . . . . .	27
3.8.2.	Distribución Gamma . . . . .	28
3.8.3.	Distribución Weibull . . . . .	30
3.8.4.	Distribución Normal . . . . .	31
3.8.5.	Distribución Lognormal . . . . .	33
<b>4.</b>	<b>Sistemas de componentes independientes</b>	<b>36</b>
4.1.	Introducción . . . . .	36
4.2.	Confiabilidad del sistema . . . . .	37
4.2.1.	Confiabilidad de estructuras en serie . . . . .	38
4.2.2.	Confiabilidad de estructuras en paralelo . . . . .	38
4.2.3.	Confiabilidad de estructuras $k$ de $n$ . . . . .	38
4.2.4.	Descomposición pivotal . . . . .	39
4.3.	Importancia de componentes . . . . .	39
4.3.1.	Importancia estructural . . . . .	39
4.3.2.	Medida de Birnbaum . . . . .	41
4.3.3.	Importancia de criticalidad . . . . .	42
<b>5.</b>	<b>Sistemas reparables de componentes independientes</b>	<b>44</b>
5.1.	Introducción . . . . .	44
5.2.	Conceptos . . . . .	45
5.3.	Modelación probabilística de sistemas reparables . . . . .	47
5.4.	Procesos de Poisson Homogéneos (HPP) y No Homogéneos (NHPP) . . . . .	47
5.5.	Procesos de Renovación . . . . .	49
5.5.1.	Distribución de $S_n$ . . . . .	49
5.5.2.	La distribución del número de renovaciones $N(t)$ . . . . .	50

5.5.3.	La función de renovación y densidad de renovación . . . . .	50
5.5.4.	Propiedades asintóticas . . . . .	51
5.5.5.	Procesos de Renovación Sobrepuestos . . . . .	52
5.5.6.	Procesos de renovación alternados . . . . .	53
5.6.	Disponibilidad . . . . .	55
5.6.1.	Disponibilidad puntual. . . . .	55
5.6.2.	Disponibilidad a largo plazo. . . . .	57
5.6.3.	Disponibilidad del sistema . . . . .	57
<b>6.</b>	<b>El Mantenimiento Preventivo en Sistemas Reparables</b>	<b>59</b>
6.1.	Introducción . . . . .	59
6.2.	Política tipo I ( <i>Age Based</i> ) . . . . .	60
6.3.	Política tipo II ( <i>Block Replacement</i> ). . . . .	62
<b>7.</b>	<b>Optimización para el Mantenimiento</b>	<b>64</b>
7.1.	Introducción . . . . .	64
7.2.	Selección óptima de periodos de mantenimiento preventivo . . . . .	65
7.2.1.	Definición del modelo a optimizar. Funciones objetivo y restricciones . . . . .	65
7.2.2.	¿Cuándo no debería aplicarse mantenimiento preventivo? . . . . .	68
7.3.	Optimización de parámetros en mantenimiento correctivo . . . . .	70
7.3.1.	Definición del modelo a optimizar. Funciones objetivo y restricciones . . . . .	70
<b>8.</b>	<b>El algoritmo de Optimización</b>	<b>72</b>
8.1.	Introducción . . . . .	72
8.2.	Breve introducción a las estrategias evolutivas para optimización . . . . .	72
8.2.1.	Estructura de un algoritmo evolutivo . . . . .	73
8.2.2.	Estrategias Evolutivas (EE) . . . . .	74
8.2.3.	Optimización multiobjetivo mediante el criterio de Dominancia de Pareto . . . . .	77
8.3.	El algoritmo de optimización IS-PAES . . . . .	80

<b>9. Ejemplos y resultados obtenidos</b>	<b>82</b>
9.1. Una comparación entre las políticas de mantenimiento I y II . . . . .	82
9.2. Parámetros óptimos en la distribución del tiempo de reparación . . . . .	85
9.3. Aplicación en un sistema <i>Lock and Dam</i> . . . . .	89
9.3.1. Obtención de los parámetros del tiempo de reparación . . . . .	90
9.3.2. El subsistema mecánico . . . . .	90
9.3.3. El subsistema eléctrico . . . . .	94
9.3.4. El sistema <i>lock and dam</i> . . . . .	98
9.3.5. Aplicación de una política tipo I de mantenimiento preventivo . . . . .	99
9.4. Un sistema altamente confiable . . . . .	105
<b>10. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>109</b>
<b>A. La transformada de Laplace y un método numérico para invertirla</b>	<b>111</b>
A.1. Un método numérico para invertir la transformada de Laplace . . . . .	112
<b>B. El software desarrollado para analizar y optimizar sistemas reparables</b>	<b>114</b>
B.1. Módulo de diseño . . . . .	114
B.2. El módulo de componentes . . . . .	115
B.3. El módulo de importancia de componentes . . . . .	117
B.4. El módulo de optimización . . . . .	118
B.5. El módulo de simulación . . . . .	120

# Índice de figuras

2.1. Componente $i$ ilustrado por un bloque . . . . .	5
2.2. Funcionamiento del sistema ilustrado por un diagrama de bloques de confiabilidad	6
2.3. Estructura en serie . . . . .	7
2.4. Estructura en paralelo . . . . .	7
2.5. Estructura 2 de 3 . . . . .	9
2.6. El componente 2 es irrelevante . . . . .	10
2.7. Sistema con 3 componentes . . . . .	12
2.8. Estructura puente . . . . .	12
2.9. Estructura puente representada como una estructura en paralelo de estructuras en serie de trayectorias minimales . . . . .	14
2.10. Estructura puente representada como una estructura en serie de estructuras en paralelo de cortes minimales . . . . .	15
2.11. Descomposición pivotal de la estructura puente . . . . .	16
2.12. Descomposición pivotal de la estructura puente . . . . .	16
2.13. Diagrama de bloques . . . . .	17
2.14. Estructura de “componentes compuestos” . . . . .	17
2.15. Las tres subestructuras . . . . .	18
3.1. Funciones usadas para caracterizar el tiempo a la falla $T$ . . . . .	22
3.2. Relación entre la función de distribución y de densidad. . . . .	23
3.3. Curva de “tina de baño” (bathtub curve) para la función de riesgo. . . . .	25

3.4. Comportamiento típico de una unidad . . . . .	26
3.5. Distribución Exponencial . . . . .	29
3.6. Distribución gamma . . . . .	30
3.7. Distribución Weibull . . . . .	32
3.8. Distribución normal . . . . .	33
3.9. Distribución lognormal . . . . .	35
5.1. Estados de un sistema reparable . . . . .	45
5.2. Proceso de renovación sobrepuesto . . . . .	53
5.3. Sistema de ejemplo . . . . .	57
6.1. Política de mantenimiento preventivo Tipo I . . . . .	60
6.2. Política de mantenimiento preventivo Tipo II . . . . .	62
8.1. El proceso de optimización de una EE . . . . .	78
8.2. Esquema del algoritmo IS-PAES . . . . .	81
9.1. Sistema de ejemplo . . . . .	84
9.2. Frente de Pareto en la optimización de los parámetros del tiempo de reparación .	87
9.3. Miter gate machinery . . . . .	91
9.4. Tainter valve machinery . . . . .	91
9.5. Dam gate machinery . . . . .	92
9.6. Lock machinery basic and mission reliability diagram . . . . .	93
9.7. Valve machinery basic and mission reliability diagram . . . . .	93
9.8. Dam machinery basic and mission reliability diagram . . . . .	94
9.9. Lock and dam electrical one-line diagram . . . . .	95
9.10. Lock and dam electrical mission reliability diagram . . . . .	96
9.11. Lock and dam electrical mission reliability diagram . . . . .	97
9.12. Lock and dam mechanical and electrical mission reliability diagram . . . . .	100
9.13. Frente de Pareto para el sistema lock and dam . . . . .	103

9.14. Simple SAN configuration . . . . .	106
9.15. Reliability block diagram for simple SAN . . . . .	106
9.16. Component data for simple SAN configuration . . . . .	107
9.17. Comparison of availability over three years . . . . .	107
B.1. El módulo de diseño . . . . .	115
B.2. El módulo de diseño. Agregar componentes. . . . .	116
B.3. El módulo de diseño. Agregar nodo final. . . . .	116
B.4. El módulo de componentes. . . . .	117
B.5. El módulo de importancia de componentes. . . . .	118
B.6. Optimización en mantenimiento preventivo. . . . .	119
B.7. Optimización de parámetros en mantenimiento correctivo. . . . .	119
B.8. El módulo de simulación. . . . .	120

# Índice de Tablas

9.1. Datos para el ejemplo 1 . . . . .	84
9.2. Periodos de mantenimiento preventivo para el ejemplo 1. Datos originales. . . . .	85
9.3. Disponibilidad límite para el ejemplo 1 . . . . .	85
9.4. Importancia estructural de componentes para el ejemplo 1 . . . . .	86
9.5. Costos para la optimización de parámetros de $F_D(t)$ en el ejemplo 1 . . . . .	86
9.6. Parámetros óptimos del tiempo de reparación para el ejemplo 1 . . . . .	87
9.7. Periodos óptimos de mantenimiento preventivo para el ejemplo 1 . . . . .	88
9.8. Simulación para el mantenimiento preventivo en el ejemplo 1 . . . . .	88
9.9. Mantenimiento preventivo considerando un costo por fallo del sistema . . . . .	89
9.10. Simulación del mantenimiento preventivo considerando un costo por fallo del sistema . . . . .	89
9.11. Lock Miter Gate Machinery (Failure rate per $10^6$ operating hours) . . . . .	92
9.12. Lock Tainter Valve Machinery (Failure rate per $10^6$ operating hours) . . . . .	92
9.13. Dam Gate Machinery (Failure rate per $10^6$ operating hours) . . . . .	94
9.14. Lock Electrical Distribution (Failure rate per $10^6$ operating hours) . . . . .	95
9.15. Lock Miter Gate & Lock Tainter Valve Electrical Equipment (Failure rate per $10^6$ operating hours) . . . . .	95
9.16. Dam Electrical Distribution (Failure rate per $10^6$ operating hours) . . . . .	96
9.17. Dam Gate Electrical Equipment (Failure rate per $10^6$ operating hours) . . . . .	96
9.18. Lock and Dam System . . . . .	99

9.19. Optimización de periodos de mantenimiento preventivo para el sistema Lock & Dam . . . . .	101
9.20. Optimización de periodos de mantenimiento preventivo para el subsistema eléctrico Lock & Dam . . . . .	102
9.21. Costos para la optimización de parámetros en $F_D(t)$ del sistema Lock & Dam . .	102
9.22. Parámetros óptimos de $F_D(t)$ para el sistema Lock & Dam . . . . .	103
9.23. Periodos óptimos de mantenimiento preventivo para el sistema Lock & Dam con los parámetros de $F_D(t)$ optimizados . . . . .	104
9.24. Simple SAN example . . . . .	105
9.25. Periodos óptimos de mantenimiento preventivo para el sistema SAN . . . . .	105
9.26. Periodos óptimos de mantenimiento preventivo para el sistema SAN . . . . .	108

# Capítulo 1

## Introducción y alcance del trabajo

La confiabilidad en sistemas ha tenido un campo de aplicación bastante amplio en las últimas décadas, pero uno de los más importantes ha sido sin duda aquel relacionado con el área industrial, donde los conceptos de confiabilidad han sido utilizados eficazmente en temas como análisis de riesgos, seguridad industrial, diseño y calidad de productos, entre otros. Cuando nos referimos a sistemas reparables, su campo de aplicación se dirige principalmente al área de mantenimiento, donde los sistemas son considerados unidades físicas formadas de componentes que se encuentran interrelacionados para lograr ciertos fines específicos, así, un sistema puede ser desde una tarjeta de computadora hasta un complejo sistema de producción en serie.

Las operaciones de mantenimiento o administración del mantenimiento en el ámbito industrial, se han convertido en un área clave en las industrias modernas, debido al gran impacto que tiene en la reducción de costos. La administración del mantenimiento comprende diversas actividades, tales como la capacitación del personal de mantenimiento (técnicos especializados, ayudantes, expertos), la programación de las actividades de mantenimiento y la coordinación de las actividades de reparación, que comprende a su vez la disposición de partes de repuesto, de instrucciones específicas para cada actividad del mantenimiento, etcétera. La administración del mantenimiento utiliza toda la información a su alcance con el propósito de tomar decisiones que sean las más adecuadas según los objetivos fijados. En este contexto, es de gran utilidad el contar con modelos matemáticos que proporcionen una adecuada información sobre los problemas específicos que se enfrentan en el mantenimiento de sistemas.

El presente trabajo, que forma parte del área de confiabilidad, pretende aportar ciertos conocimientos que pueden ser de ayuda en la toma de decisiones sobre el mantenimiento de sistemas reparables, en específico, sobre los temas de mantenimiento preventivo y correctivo. Algunos de los temas que se tratan en este trabajo son acerca de la selección de políticas óptimas

de mantenimiento, ya sea preventivo o correctivo.

El objetivo principal de una política de mantenimiento preventivo es la de minimizar los costos asociados, tanto a las fallas y reparaciones como a las actividades de prevención en si, buscando para ello, los periodos de tiempo óptimos para hacer los mantenimientos planeados que logren estos objetivos. Cuando se elige un enfoque de mantenimiento correctivo, algo que nos interesaría conocer es qué características debe poseer el sistema de mantenimiento correctivo para que se logre mantener cierta disponibilidad mínima requerida para el dispositivo en cuestión, al menor costo posible.

En este trabajo se hace uso de la teoría probabilística de confiabilidad para modelar el comportamiento de los sistemas reparables y obtener información que ayude a seleccionar políticas óptimas de mantenimiento. El problema de optimización que encierra este trabajo se realiza mediante un enfoque que ha probado su efectividad en bastantes áreas de aplicación, nos referimos a las Estrategias Evolutivas de Optimización. En esta tesis se hace uso de un algoritmo bastante eficiente para todos los problemas de optimización planteados.

En los capítulos 2 a 5 se muestran los aspectos teóricos principales usados para esta tesis. En el capítulo 2 se muestra el análisis del sistema y sus componentes tomando en cuenta solamente sus estados (1 o 0). En el capítulo 3 se exponen las distribuciones de falla más usuales y sus características. En los capítulos 4 y 5 se muestra el análisis de sistemas independientes, considerando tanto los reparables como los no reparables, introduciendo las distribuciones de tiempos de falla y de reparación. En los capítulos 6 y 7 se presentan los modelos a optimizar, tanto las funciones objetivo (los costos) como las restricciones (disponibilidad). En el capítulo 8 se da una introducción a las técnicas evolutivas de optimización y se presenta el algoritmo empleado (IS-PAES). En el capítulo 9 se presentan los resultados obtenidos al aplicar los métodos desarrollados en este trabajo. Finalmente, el capítulo 10 muestra las conclusiones y el trabajo futuro a realizar.

## **Alcance del trabajo**

Por los modelos y los supuestos utilizados en este trabajo, se ha restringido la aplicación del mismo a sistemas reparables con ciertas características.

Este trabajo es aplicable a sistemas formados por uno o varios componentes, que se asumen, son independientes, es decir, las fallas y reparaciones realizados en cada uno de ellos no afectan el comportamiento de los otros. Bajo esta suposición, no será posible incluir sistemas con componentes en *standby*, es decir, aquellos cuya carga de trabajo es reducida y aumenta con la falla de algún otro componente. Otra restricción en cuanto a su aplicación es que se asume que

el sistema (o componentes del sistema, cuando está formado por varios de estos) es llevado a una condición “como si fuera nuevo” después de cada reparación o mantenimiento planeado.

Ciertamente, no todos los sistemas o componentes poseen las características antes mencionadas, pero siempre que se hacen uso de modelos matemáticos (o probabilísticos) para representar comportamientos del mundo real, las suposiciones son inevitables. Una lectura interesante sobre los factores del “mundo real” que podrían considerarse al modelar sistemas reparables y los problemas que representan, puede encontrarse en [5].

En la literatura, la forma más usual de modelar los sistemas reparables es suponer dicho sistema formado por una unidad o componente y aplicar los modelos ya establecidos para analizar su comportamiento, tal es el caso de los procesos de Poisson homogéneos y no homogéneos, o en otro caso, si se consideran sistemas multicomponentes, se asume que estos componentes están conectados en serie y cada uno corresponde a un proceso de Poisson homogéneo y así, el sistema resultante lo será también (esto corresponde, como se verá más adelante, a un proceso de renovación sobrepuesto). Estas suposiciones presentan también ciertas restricciones, como el hecho de descartar otras distribuciones, fuera de la exponencial, para modelar los tiempos a la falla de los componentes o el sistema, y el que no pueda introducirse un tiempo de reparación (aleatorio) para cada componente. También, los modelos de costos asociados a las políticas de mantenimiento preventivo generalmente son aplicables solamente a componentes individuales. Los modelos que incluyen tiempos de fallas y de reparación aleatorios y con diferentes funciones de distribución (no solamente la exponencial), tal es el caso de los procesos de renovación, se han aplicado también a componentes individuales, además de ser matemáticamente muy complejos.

En este trabajo se incorporan tiempos de reparación aleatorios, y con distintas funciones de distribución para cada componente dentro de un sistema formado por varios componentes, además de considerar también las distribuciones más comunes de tiempos a la falla para cada uno de estos. Para esto se ha hecho uso de la teoría de renovación para modelar el comportamiento de cada componente independiente dentro del sistema, entonces, cada componente representará un proceso de renovación dentro del sistema. El sistema formado por estos componentes *no* será un proceso de renovación, como se explica más adelante, así que, la información necesaria del sistema (como su disponibilidad o costo de fallos) se obtendrá a través de los componentes que la forman. Obviamente, al estar considerando procesos de renovación, no se evita la complejidad que representa, por este motivo, algunas métricas relacionadas con los componentes o el sistema, como es la disponibilidad puntual o el número de fallas o reparaciones completas en algún intervalo de tiempo  $(0, t)$ , quedará restringido en este trabajo a componentes con distribuciones de tiempos a la falla y de reparación del tipo exponencial, gamma o uniforme.

Este punto se tratará con mayor detalle en capítulos posteriores.

Con las consideraciones hechas anteriormente, y aún con las restricciones que representan, será posible analizar y optimizar una variedad considerable de sistemas y componentes, como por ejemplo, sistemas formados por componentes en serie, paralelo,  $k$  de  $n$  o cualquier combinación de estos, además, es aplicable a sistemas bastante complejos, como el de *Lock and Dam* (151 componentes en combinaciones de serie, paralelo y  $k$  de  $n$ ) expuesto en el capítulo 9. Al utilizar una política de mantenimiento tipo I (o *age based*), que se explicará más adelante, será posible hacer uso de las distribuciones más comunes tanto de tiempo a la falla como de reparación de los componentes.

## Capítulo 2

# Análisis cualitativo del sistema

Las relaciones estructurales entre un sistema y sus componentes pueden describirse y analizarse de varias formas, tales como FMEA (*Failure Mode and Effects Analysis*) o árboles de falla, entre otros. En este trabajo el análisis de los sistemas se realizará mediante el uso de **Diagramas de Bloques de Confiabilidad**.

Un diagrama de bloques de confiabilidad (o simplemente diagrama de bloques), es un red basada en el estado del correcto funcionamiento del sistema (*success-oriented*), que describe la función del sistema. Si el sistema tiene mas de una función, cada función es considerada individualmente, y se establece un diagrama de bloques por separado para cada función del sistema.

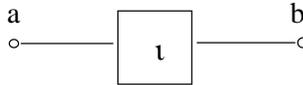


Figura 2.1. Componente  $i$  ilustrado por un bloque

Consideremos un sistema con  $n$  componentes diferentes, cada uno de estos  $n$  componentes se ilustran mediante un bloque como el que se muestra en la figura 2.1. Cuando hay una conexión entre los puntos finales  $a$  y  $b$ , decimos que el componente  $i$  está funcionando. Esto no significa necesariamente que el componente  $i$  funciona en todos los aspectos, sino solamente que una, o un conjunto especificado de funciones se cumplen (i.e., que algún modo específico de falla no ocurre). El significado de funcionamiento de un sistema debe ser especificado en cada caso y dependerá de los objetivos del estudio. La forma en que los  $n$  componentes están interconectados para cumplir una función especificada del sistema puede ilustrarse con un diagrama de bloques,

como se muestra en la figura 2.2. Si se tiene un conexión entre los puntos  $a$  y  $b$ , decimos que el funcionamiento especificado del sistema se cumple.

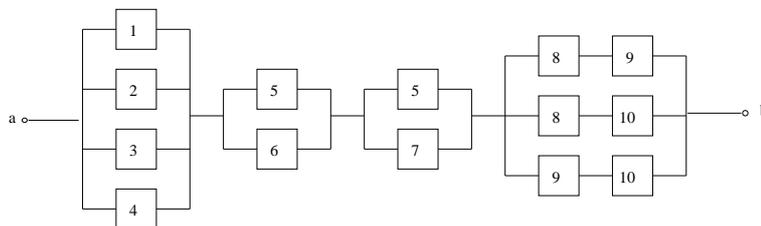


Figura 2.2. Funcionamiento del sistema ilustrado por un diagrama de bloques de confiabilidad

## 2.1. Función de estructura

En este capítulo nos limitaremos solamente a situaciones donde es suficiente distinguir entre dos estados solamente: funcionamiento y fallo. Esto se aplica a cada componente y al sistema completo. El estado del componente  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , puede describirse mediante una variable binaria  $x_i$ , donde

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el componente } i \text{ está funcionando} \\ 0 & \text{si el componente } i \text{ está en un estado de falla} \end{cases}$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es llamado el vector de estados. Además, asumimos que, conociendo los estados de los  $n$  componentes, conoceremos también si el sistema está funcionando o no. De forma similar, el estado del sistema puede describirse por una función binaria

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema está funcionando} \\ 0 & \text{si el sistema está en un estado de falla} \end{cases}$$

$\phi(\mathbf{x})$  es llamada la *función de estructura del sistema*, o solamente la *estructura*. Algunos ejemplos de estructuras que podrán usarse en el presente trabajo, se dan a continuación.

## 2.2. Estructura en serie

Un sistema que está funcionando si y solo si *todos* sus  $n$  componentes están funcionando es llamado una *estructura en serie*. La función de estructura es:

$$\phi(\mathbf{x}) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \prod_{i=1}^n x_i = \min_{i=1, \dots, n} x_i \quad (2.1)$$

Una estructura en serie con  $n$  componentes se muestra en la figura 2.3. La conexión entre  $a$  y  $b$  se interpreta como "funcionamiento de la estructura (sistema)".

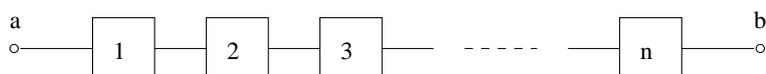


Figura 2.3. Estructura en serie

## 2.3. Estructura en paralelo

Un sistema que funciona si al menos uno de sus  $n$  componentes está funcionando es llamado una *estructura en paralelo*, esto se ilustra en la figura 2.4. En este caso, la función de estructura puede escribirse como:

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \quad (2.2)$$

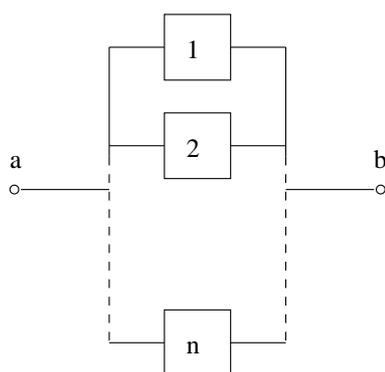


Figura 2.4. Estructura en paralelo

La expresión del lado derecho de (2.2) es escrita a menudo como  $\prod_{i=1}^n x_i$ , donde  $\prod$  se lee como “ip”

Por ejemplo, una estructura en paralelo con 2 componentes tiene la función de estructura

$$\phi(x_1, x_2) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) = \prod_{i=1}^2 x_i$$

La parte derecha de la expresión anterior puede escribirse también  $x_1 \prod x_2$ . Nótese que

$$\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1x_2$$

y como  $x_1$  y  $x_2$  son variables binarias,  $x_1 \prod x_2$  será igual al máximo de los  $x_i$ 's. De manera similar

$$\prod_{i=1}^n x_i = \max_{i=1, \dots, n} x_i$$

## 2.4. Estructura $k$ de $n$

Un sistema que funciona si y solo si al menos  $k$  de los  $n$  componentes están funcionando, es llamado una *estructura  $k$  de  $n$* . Una estructura en serie es entonces una estructura  $n$  de  $n$ , y una estructura en paralelo es una estructura 1 de  $n$ .

La función de estructura de una estructura  $k$  de  $n$  puede escribirse

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i < k \end{cases} \quad (2.3)$$

Consideremos por ejemplo una estructura 2 de 3, la cual se muestra en la figura 2.5. Un avión de tres turbinas, el cual puede permanecer en el aire si y solo si, al menos dos de sus tres turbinas están funcionando, es un ejemplo de una estructura 2 de 3.

La función de estructura de la estructura 2 de 3 de la figura 2.5 puede escribirse también como

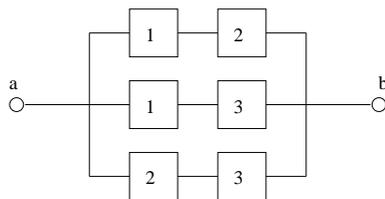


Figura 2.5. Estructura 2 de 3

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{x}) &= x_1x_2 \coprod x_1x_3 \coprod x_2x_3 \\
 &= 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_1x_3)(1 - x_2x_3) \\
 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1^2x_2x_3 - x_1x_2^2x_3 - x_1x_2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_3^2 \\
 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_1x_2x_3
 \end{aligned}$$

Nótese que, ya que  $x_i$  es una variable binaria,  $x_i^k = x_i$  para todo  $i$  y  $k$ .

## 2.5. Análisis de la estructura del sistema

### 2.5.1. Estructuras coherentes

Cuando se establece la estructura de un sistema, parece razonable descartar primero todos los componentes que no juegan un rol *directo* en el funcionamiento del sistema. Los componentes que se dejan dentro del sistema son llamados *relevantes*, mientras que los componentes que no son relevantes los llamaremos *irrelevantes*.

Si el componente  $i$  es irrelevante, entonces

$$\phi(1_i, \mathbf{x}) = \phi(0_i, \mathbf{x}) \quad \text{para todo } (\cdot, \mathbf{x}) \quad (2.4)$$

donde

- $\phi(1_i, \mathbf{x})$  representa un vector de estado donde el estado del  $i$ -ésimo componente = 1
- $\phi(0_i, \mathbf{x})$  representa un vector de estado donde el estado del  $i$ -ésimo componente = 0
- $\phi(\cdot, \mathbf{x})$  representa un vector de estado donde el estado del  $i$ -ésimo componente = 0 o 1

La figura 2.6 muestra un sistema donde el componente 2 es irrelevante.

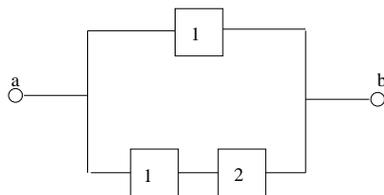


Figura 2.6. El componente 2 es irrelevante

A continuación definiremos en forma más clara lo que es un *sistema coherente*:

**Definición 2.1** *Se dice que un sistema de componentes es coherente si todos sus componentes son relevantes y la función de estructura es no decreciente en cada argumento.*

Debe evitarse la creencia de que todos los sistemas de interés deben ser coherentes, existen muchos casos en que uno o varios componentes irrelevantes son usados para prevenir la falla del sistema (como es el caso de redundancia de componentes o de componentes con carga compartida).

### 2.5.2. Características generales de sistemas coherentes

Se muestran a continuación tres teoremas importantes sobre sistemas coherentes, las demostraciones pueden encontrarse en [2].

**Teorema 2.1** *Sea  $\phi(\mathbf{x})$  una función de estructura de un sistema coherente, entonces*

$$\phi(\mathbf{0}) = 0 \quad y \quad \phi(\mathbf{1}) = 1$$

En otras palabras, lo que nos dice el teorema 2.1 es que, si todos los componentes en un sistema coherente están funcionando, entonces el sistema funciona, y si todos los componentes en un sistema coherente están fallados, el sistema está en un estado de falla.

**Teorema 2.2** *Sea  $\phi(\mathbf{x})$  la función de estructura de un sistema coherente con  $n$  componentes. Entonces*

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \phi(\mathbf{x}) \leq \prod_{i=1}^n x_i \quad (2.5)$$

El teorema 2.2 nos dice que cualquier sistema coherente funciona al menos tan bien como un sistema correspondiente donde todos los  $n$  componentes están conectados en serie y a lo más

tan bien como un sistema donde todos los  $n$  componentes están conectados en paralelo.

Sean  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vectores de estado, y  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  y  $\mathbf{x} \amalg \mathbf{y}$  definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n) \\ \mathbf{x} \amalg \mathbf{y} &= (x_1 \amalg y_1, x_2 \amalg y_2, \dots, x_n \amalg y_n)\end{aligned}$$

Tomando en cuenta lo anterior, se muestra ahora el siguiente resultado importante:

**Teorema 2.3** *Sea  $\phi$  una estructura coherente. Entonces*

$$\phi(\mathbf{x} \amalg \mathbf{y}) \geq \phi(\mathbf{x}) \amalg \phi(\mathbf{y}) \quad (2.6)$$

$$\phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{y}) \quad (2.7)$$

Una de las cosas que podemos interpretar del teorema 2.3 es que, obtenemos un “mejor” sistema introduciendo redundancia a nivel de componentes que introduciendo redundancia a nivel sistema.

### 2.5.3. Estructuras representadas por Trayectorias y Cortes

En esta sección, denotaremos el conjunto de  $n$  componentes de una estructura, numerados de 1 a  $n$  de la siguiente forma:

$$C = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

**Definición 2.2 (Conjuntos trayectoria, conjuntos trayectoria minimales)** *Un conjunto trayectoria  $P$  es un conjunto de componentes en  $C$ , los cuales al funcionar aseguran que el sistema está funcionando. Un conjunto trayectoria es minimal si no puede ser reducido sin perder su categoría como conjunto trayectoria.*

**Definición 2.3 (Conjuntos corte, conjuntos corte minimales)** *Un conjunto corte  $K$  es un conjunto de componentes en  $C$ , los cuales al fallar causan la falla del sistema. Un conjunto corte es minimal si no puede ser reducido sin perder su estatus como conjunto corte.*

Para ejemplificar lo anterior, usaremos las estructuras que se muestran en las figuras 2.7 y 2.8

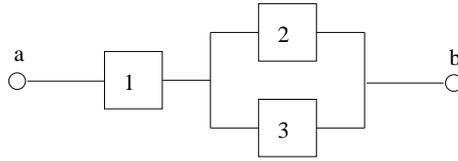


Figura 2.7. Sistema con 3 componentes

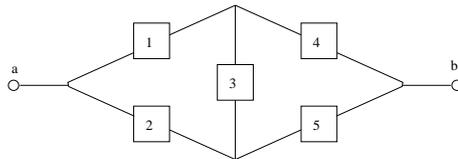


Figura 2.8. Estructura puente

Para el diagrama de bloques de la figura 2.7, el conjunto de componentes es:  $C = 1, 2, 3$

Conjuntos trayectoria	Conjuntos corte
$\{1, 2\}$	$\{1\}$
$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2\}$
	$\{1, 3\}$
	$\{1, 2, 3\}$

En este ejemplo los conjuntos trayectoria minimales son

$$P_1 = \{1, 2\} \quad \text{y} \quad P_2 = \{1, 3\}$$

y los conjuntos de corte minimales son:

$$K_1 = \{1\} \quad \text{y} \quad K_2 = \{2, 3\}$$

La estructura de componentes de la figura 2.8 nos muestra una estructura puente. Los conjuntos trayectoria minimales son

$$P_1 = \{1, 4\}, P_2 = \{2, 5\}, P_3 = \{1, 3, 5\} \text{ y } P_4 = \{2, 3, 4\}$$

y los conjuntos de corte minimales son:

$$K_1 = \{1, 2\}, K_2 = \{4, 5\}, K_3 = \{1, 3, 5\} \text{ y } K_4 = \{2, 3, 4\}$$

En estos ejemplos el número de conjuntos corte minimales coinciden con el número de conjuntos trayectoria minimales. Esto no es algo que usualmente suceda.

Consideremos ahora una estructura arbitraria con conjuntos trayectoria minimales  $P_1, P_2, \dots, P_p$  y conjuntos de corte minimales  $K_1, K_2, \dots, K_k$ . Al conjunto trayectoria minimal  $P_j$ , le asociamos la función binaria

$$\rho_j(\mathbf{x}) = \prod_{i \in P_j} x_i \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (2.8)$$

Nótese que  $\rho_j(\mathbf{x})$  representa la función de estructura de una estructura en serie compuesta de los componentes en  $P_j$ .  $\rho_j(\mathbf{x})$  es llamado entonces la  $j$ -ésima *estructura trayectoria en serie minimal*.

Como sabemos que la estructura funciona si y solo si al menos una de las estructuras trayectoria minimales en serie está funcionando,

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^p \rho_j(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^p (1 - \rho_j(\mathbf{x})) \quad (2.9)$$

Entonces, nuestra estructura puede interpretarse como una estructura en paralelo de estructuras trayectoria minimales en serie. De 2.8 y 2.9 obtenemos

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} x_i \quad (2.10)$$

En la estructura puente mostrada en la figura 2.8, los conjuntos trayectoria minimales fueron  $P_1 = \{1, 4\}, P_2 = \{2, 5\}, P_3 = \{1, 3, 5\}$  y  $P_4 = \{2, 3, 4\}$ . Las correspondientes estructuras minimales en serie son:

$$\begin{aligned}
\rho_1(\mathbf{x}) &= x_1x_4 \\
\rho_2(\mathbf{x}) &= x_2x_5 \\
\rho_3(\mathbf{x}) &= x_1x_3x_5 \\
\rho_4(\mathbf{x}) &= x_2x_3x_4
\end{aligned}$$

y la función de estructura puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= \prod_{j=1}^4 \rho_j(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^4 (1 - \rho_j(\mathbf{x})) \\
&= 1 - (1 - \rho_1(\mathbf{x}))(1 - \rho_2(\mathbf{x}))(1 - \rho_3(\mathbf{x}))(1 - \rho_4(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

Entonces, la estructura puente puede representarse por el diagrama de bloques mostrado en la figura 2.9.

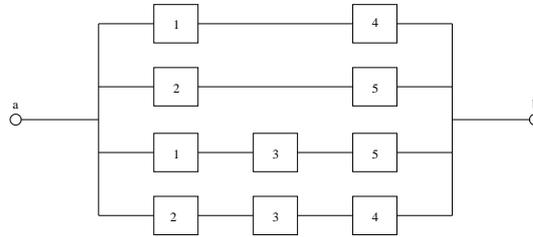


Figura 2.9. Estructura puente representada como una estructura en paralelo de estructuras en serie de trayectorias minimales

De manera similar podemos asociar la siguiente función binaria al conjunto corte minimal  $K_j$ :

$$\kappa_j(\mathbf{x}) = \prod_{i \in K_j} x_i = 1 - \prod_{i \in K_j} (1 - x_i), \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2.11)$$

Vemos que  $\kappa_j(\mathbf{x})$  representa la función de estructura de una estructura en paralelo compuesta de los componentes en  $K_j$ . Por esta razón,  $\kappa_j(\mathbf{x})$  es llamada la  $j$ -ésima estructura corte en paralelo minimal.

Como sabemos que la estructura falla si y solo si al menos una de las estructuras corte minimales en paralelo está fallada, entonces

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^k \kappa_j(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

Entonces, podemos representar esta estructura como una estructura en serie de las estructuras corte minimales en paralelo. Combinando 2.11 y 2.12 obtenemos

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} x_i \quad (2.13)$$

En la estructura puente los conjuntos de corte minimales fueron  $K_1 = \{1, 2\}$ ,  $K_2 = \{4, 5\}$ ,  $K_3 = \{1, 3, 5\}$  y  $K_4 = \{2, 3, 4\}$ . Las correspondientes estructuras en paralelo de corte minimales son

$$\begin{aligned} \kappa_1(\mathbf{x}) &= x_1 \amalg x_2 &= 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \\ \kappa_2(\mathbf{x}) &= x_4 \amalg x_5 &= 1 - (1 - x_4)(1 - x_5) \\ \kappa_3(\mathbf{x}) &= x_1 \amalg x_3 \amalg x_5 &= 1 - (1 - x_1)(1 - x_3)(1 - x_5) \\ \kappa_4(\mathbf{x}) &= x_2 \amalg x_3 \amalg x_4 &= 1 - (1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) \end{aligned}$$

y la función de estructura de esta estructura puente puede obtenerse insertando estas expresiones en (2.12). La estructura puente puede representarse, según lo anterior, por el diagrama de bloques que se muestra en la figura 2.10.

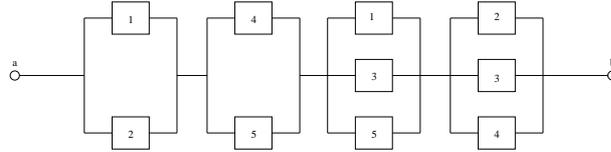


Figura 2.10. Estructura puente representada como una estructura en serie de estructuras en paralelo de cortes minimales

#### 2.5.4. Descomposición Pivotal

La siguiente identidad es válida para cualquier función de estructura  $\phi(\mathbf{x})$ :

$$\phi(\mathbf{x}) \equiv x_i \phi(1_i, \mathbf{x}) + (1 - x_i) \phi(0_i, \mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \quad (2.14)$$

Puede verse fácilmente que esta identidad es correcta a partir del hecho de que

$$x_i = 1 \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = 1 \cdot \phi(1_i, \mathbf{x}) \quad \text{y} \quad x_i = 0 \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = 1 \cdot \phi(0_i, \mathbf{x})$$

Por el uso repetido de (2.14) llegamos a  $\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}} \prod_j x_j^{y_j} (1 - x_j)^{1-y_j} \phi(\mathbf{y})$ , donde la suma se realiza sobre todos los vectores binarios  $n$ -dimensionales.

Para ejemplificar la descomposición pivotal consideraremos nuevamente la estructura puente de la figura 2.8. La función de estructura  $\phi(\mathbf{x})$  de este sistema puede determinarse por descomposición pivotal con respecto al componente 3:

$$\phi(\mathbf{x}) = x_3 \phi(1_3, \mathbf{x}) + (1 - x_3) \phi(0_3, \mathbf{x})$$

Aquí,  $\phi(1_3, \mathbf{x})$  es la función de estructura del sistema mostrado en la figura 2.11,

$$\phi(1_3, \mathbf{x}) = (x_1 \amalg x_2)(x_4 \amalg x_5) = (x_1 + x_2 - x_1 x_2)(x_4 + x_5 - x_4 x_5)$$

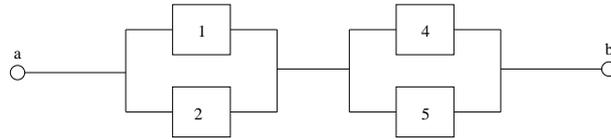


Figura 2.11. Descomposición pivotal de la estructura puente

mientras que  $\phi(0_3, \mathbf{x})$  es la función de estructura del sistema mostrado en la figura 2.12,

$$\phi(0_3, \mathbf{x}) = (x_1 x_4 \amalg x_2 x_5) = x_1 x_4 + x_2 x_5 - x_1 x_2 x_4 x_5$$

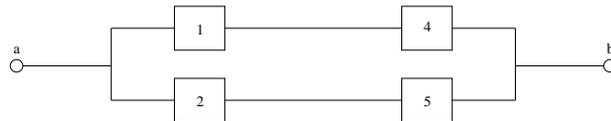


Figura 2.12. Descomposición pivotal de la estructura puente

Entonces, la función de estructura del sistema puente es:

$$\phi(\mathbf{x}) = x_3 (x_1 + x_2 - x_1 x_2)(x_4 + x_5 - x_4 x_5) + (1 - x_3)(x_1 x_4 + x_2 x_5 - x_1 x_2 x_4 x_5)$$

### 2.5.5. Módulos de Estructuras Coherentes

Supongamos que queremos encontrar bajo qué condiciones una estructura, por ejemplo, la que se muestra en la figura 2.13, está funcionando. Parece natural, inicialmente, interpretarla como una simple estructura de “componentes compuestos”, tal como se muestra en la figura 2.14, donde  $\boxed{\text{I}}$ ,  $\boxed{\text{II}}$  y  $\boxed{\text{III}}$  son como se muestra en la figura 2.15. Entonces, los subsistemas  $\boxed{\text{I}}$ ,  $\boxed{\text{II}}$  y  $\boxed{\text{III}}$  se analizan individualmente. Finalmente, los resultados se ponen juntos en forma lógica. Es importante hacer notar que la partición en subsistemas debe ser realizada en forma tal que *cada componente individual nunca aparezca dentro de más de uno de los subsistemas*.

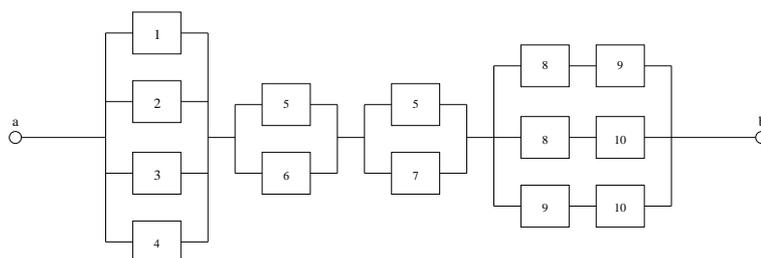


Figura 2.13. Diagrama de bloques



Figura 2.14. Estructura de “componentes compuestos”

Cuando esta partición se lleva a cabo de una forma específica, que se describe más adelante, el procedimiento es llamado *descomposición modular del sistema*. Para abordar este tema denotaremos un sistema con  $(C, \phi)$ , donde  $C$  es el conjunto de componentes y  $\phi$  la función de estructura. Sea  $A$  un subconjunto de  $C$ ,

$$A \subseteq C$$

y  $A^C$  denota el complemento de  $A$  con respecto a  $C$ ,

$$A^C = C - A$$

Denotaremos los elementos en  $A$  por  $i_1, i_2, \dots, i_\nu$ , donde  $i_1 < i_2 < \dots < i_\nu$ . Sea  $\mathbf{x}^A$  el vector de

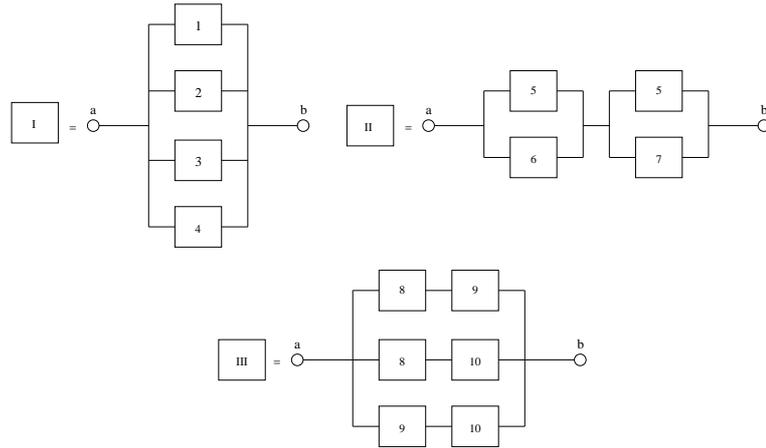


Figura 2.15. Las tres subestructuras

estado correspondiente a los elementos en  $A$ :

$$\mathbf{x}^A = (x_{i_1}, x_{i_1}, \dots, x_{i_\nu})$$

y sea

$$\chi(\mathbf{x}^A) = \chi(x_{i_1}, x_{i_1}, \dots, x_{i_\nu})$$

una función binaria de  $\mathbf{x}^A$ . Obviamente  $(A, \chi)$  puede interpretarse como un sistema (una estructura).

En nuestro ejemplo,  $C = \{1, 2, \dots, 10\}$ . Escojamos  $A = \{5, 6, 7\}$  y  $\chi(\mathbf{x}^A) = (x_5 \text{II} x_6)(x_5 \text{II} x_7)$ .  $(A, \chi)$  representa entonces la subestructura  $\text{II}$ . Con esta notación, se dará ahora una definición precisa del concepto de módulo coherente.

**Definición 2.4 (Módulos Coherentes)** Sea  $(C, \phi)$  una estructura coherente dada, y  $A \subseteq C$ . Se dice que  $(A, \chi)$  es un módulo coherente de  $(C, \phi)$ , si  $\phi(\mathbf{x})$  puede escribirse como una función de  $\chi(\mathbf{x}^A)$  y  $\mathbf{x}^{A^C}$ ,  $\psi(\chi(\mathbf{x}^A), \mathbf{x}^{A^C})$ , donde  $\psi$  es la función de estructura de un sistema coherente.

Aquí se consideran todos los componentes con el índice perteneciente a  $A$  como un “componente” con variable de estado  $\chi(\mathbf{x}^A)$ . Cuando se interpreta el sistema en esta forma, la función de estructura será

$$\psi(\chi(\mathbf{x}^A), \mathbf{x}^{A^C})$$

En nuestro ejemplo escogimos  $A = \{5, 6, 7\}$ , entonces

$$\psi(\chi(\mathbf{x}^A), \mathbf{x}^{A^C}) = \chi(x_5, x_6, x_7) \left( \prod_{i=1}^4 x_i \right) (x_8 x_9 \amalg x_8 x_{10} \amalg x_9 x_{10})$$

Así llegamos a la siguiente definición

**Definición 2.5 (Descomposición Modular)** *Una descomposición modular de una estructura coherente  $(C, \phi)$  es un conjunto de módulos disjuntos  $(A_i, \chi_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , junto con una estructura organizada  $\omega$ , tal que*

1.  $C = \bigcup_{i=1}^r A_i$  donde  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$
2.  $\phi(\mathbf{x}) = \omega [\chi_1(\mathbf{x}^{A_1}), \chi_2(\mathbf{x}^{A_2}), \dots, \chi_r(\mathbf{x}^{A_r})]$

## Capítulo 3

# Distribuciones de falla

Una distribución de falla describe matemáticamente la longitud de vida de un material, estructura o dispositivo, y en este capítulo se presentan diversas métricas cuantitativas para la confiabilidad de una unidad que no es reparada, y que se usarán en este trabajo. El hecho de que este trabajo de tesis trate sobre sistemas de componentes reparables no implica que no puedan utilizarse los conceptos que se mostrarán en este capítulo, los cuales son fundamentales en la teoría de confiabilidad. Posteriormente se mostrarán sus aplicaciones.

### 3.1. Tiempo a la falla

Por *tiempo a la falla* de una unidad, nos referimos al tiempo que transcurre desde que una unidad o dispositivo es puesto en operación hasta que falla por primera vez. Fijamos  $t = 0$  como el punto inicial y definiremos la variable aleatoria  $T$  como el tiempo a la falla del dispositivo en cuestión. El estado del dispositivo al tiempo  $t$  puede describirse por la variable de estado  $X(t)$ , la cual es también una variable aleatoria:

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si el dispositivo está funcionando al tiempo } t \\ 0 & \text{si el dispositivo está en un estado fallado al tiempo } t \end{cases}$$

Algo que es importante hacer notar es que el tiempo a la falla  $T$  no siempre se mide en una escala de tiempo, sino que puede medirse también por conceptos de tiempo más indirectos, tales como

- el número de veces que un switch es operado
- el número de kilómetros recorridos por un automóvil
- el número de metros cortados por una máquina cizalladora
- el número de ciclos trabajados por alguna unidad

Aunque el tiempo a la falla puede ser una variable discreta, aquí consideraremos que es una variable aleatoria continua y no negativa.

La distribución de probabilidad para el tiempo a la falla  $T$  puede caracterizarse por una función de distribución acumulada, una función de densidad de probabilidad, una función de confiabilidad, o una función de riesgo (o tasa de fallas). Estas funciones se describen más adelante y se muestran, para una distribución típica de tiempo a la falla, en la figura 3.1. La elección de cuál función o funciones usar depende de qué tan conveniente es según la especificación del modelo, la interpretación o desarrollo técnico. Todas estas funciones son importantes para un propósito u otro.

### 3.2. Función de distribución acumulada

La función de distribución acumulada (o función de distribución) de  $T$ ,  $F(T) = P(T \leq t)$ , da la probabilidad de que una unidad falle antes del tiempo  $t$ . Alternativamente,  $F(T)$  puede interpretarse como la proporción de unidades en la población (o tomadas de algún proceso estacionario) que fallarán antes del tiempo  $t$ . Un proceso estacionario puede definirse como aquel que genera unidades que tienen una  $F(t)$  que no cambia con el tiempo.

### 3.3. Función de densidad de probabilidad

La función de densidad de probabilidad (o función de densidad) para una variable aleatoria continua  $T$  se define como la derivada de  $F(T)$  con respecto a  $t$ :  $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ . La función de densidad puede usarse para representar la frecuencia relativa de tiempos de falla como una función del tiempo. Aunque la función de densidad es menos importante que las otras funciones para aplicaciones en confiabilidad, es usada en forma muy extensa en el desarrollo de resultados técnicos. Como puede verse en la figura 3.2, la función de distribución al tiempo  $t$  se calcula como el área bajo la función de densidad desde 0 hasta  $t$ , dando la probabilidad de falla antes de  $t$ , es decir,  $F(T) = \int_0^t f(x)dx$ .

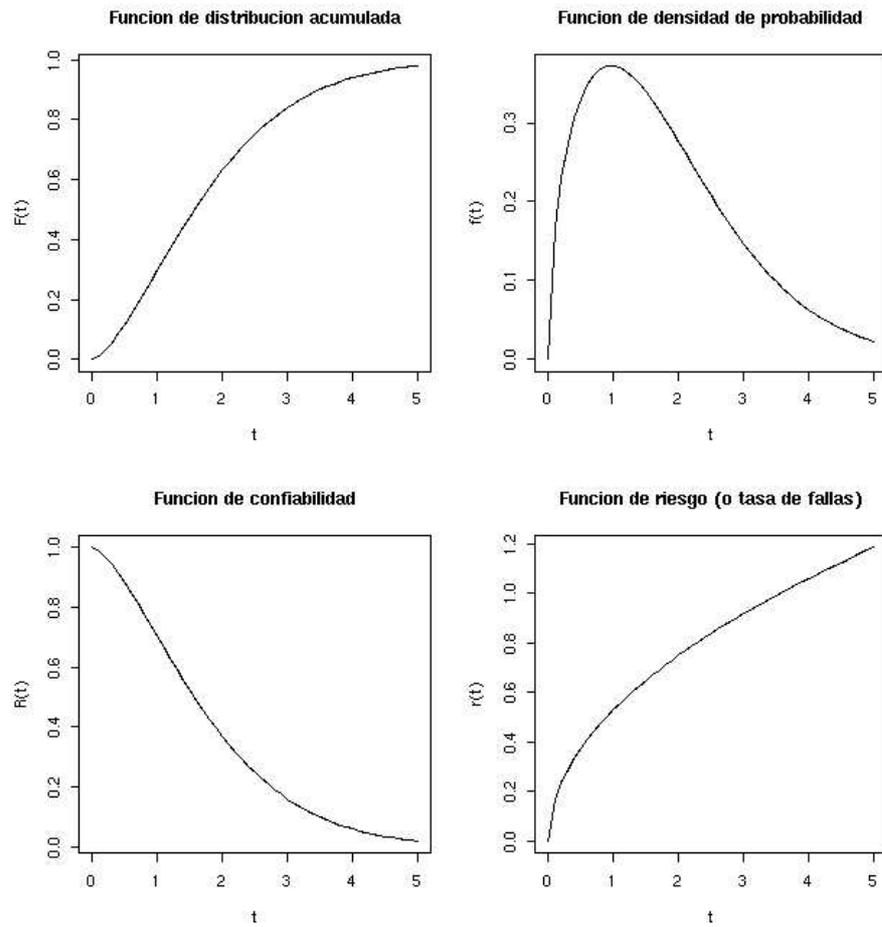


Figura 3.1. Funciones usadas para caracterizar el tiempo a la falla  $T$ .

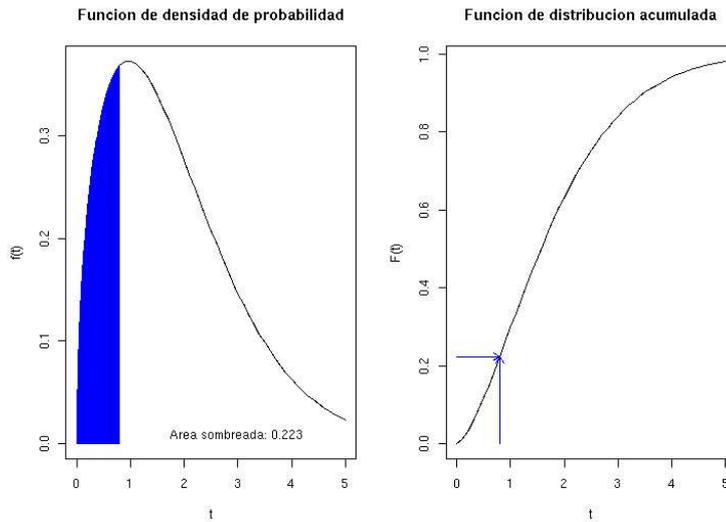


Figura 3.2. Relación entre la función de distribución y de densidad.

### 3.4. Función de confiabilidad

La función de confiabilidad de una unidad se define como

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(x)dx \quad (3.1)$$

Vemos que  $R(T)$  es la probabilidad de que la unidad no falle en el intervalo de tiempo  $(0, t]$  o, de forma equivalente, la probabilidad de que la unidad sobreviva el intervalo de tiempo  $(0, t]$  y que  *siga* funcionando al tiempo  $t$ . La función de confiabilidad  $R(t)$  es llamada también la *función de supervivencia*, y puede verse en la figura 3.1.

### 3.5. Función de riesgo o tasa de fallas

La probabilidad de que una unidad falle en el intervalo de tiempo  $(t, t + \Delta t]$ , cuando sabemos que la unidad está funcionando al tiempo  $t$  es

$$P(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t) = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)}$$

La función de riesgo  $h(t)$ , conocida también como tasa de fallas, se obtiene dividiendo esta probabilidad entre la longitud del intervalo de tiempo  $\Delta t$ , y haciendo  $\Delta t \rightarrow 0$

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (3.2)$$

La función de riesgo expresa la propensión a la falla de la unidad en el siguiente pequeño intervalo de tiempo, dado que esta sobrevivió al tiempo  $t$ . Esto es, para un pequeño  $\Delta t$ ,

$$h(t) \times \Delta t \approx P(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t) \quad (3.3)$$

Las funciones de distribución, de densidad, de confiabilidad y de riesgo están estrechamente relacionadas, y los siguientes resultados nos ayudarán a mostrar tal relación:

Como

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}(1 - R(t)) = -R'(t)$$

entonces

$$h(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)} = -\frac{d}{dt}\ln R(t) \quad (3.4)$$

como  $R(0) = 1$  tenemos que:

$$\int_0^t h(u)du = -\ln R(t)$$

y

$$R(t) = e^{-\int_0^t h(u)du} \quad (3.5)$$

y las funciones de densidad y de distribución pueden obtenerse entonces mediante:

$$f(t) = h(t)e^{-\int_0^t h(u)du} \quad (3.6)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t h(u)du} \quad (3.7)$$

La función de riesgo puede interpretarse como una tasa de fallas en el siguiente sentido. Si hay un gran número de unidades (digamos,  $n(t)$ ) en operación al tiempo  $t$ , entonces  $n(t) \times h(t)$  es aproximadamente igual al número de fallas por unidad de tiempo. La función de riesgo tiene unidades de fracción falladas por unidad de tiempo. Debido a su estrecha relación con fallas de procesos y estrategias de mantenimiento, algunos ingenieros de confiabilidad han pensado en modelar tiempos de falla en términos de  $h(t)$ . La “curva de tina de baño” mostrada en la figura 3.3 nos da un modelo conceptual útil de la función de riesgo de algunas poblaciones

de unidades. En estas podrán haber fallas prematuras de unidades con defectos relacionados a la calidad (mortalidad infantil). Durante gran parte de la vida útil del producto, el riesgo será aproximadamente constante, porque las fallas son causadas por causas externas que ocurren aleatoriamente. Las fallas al final de la vida del producto se deben al desgaste.

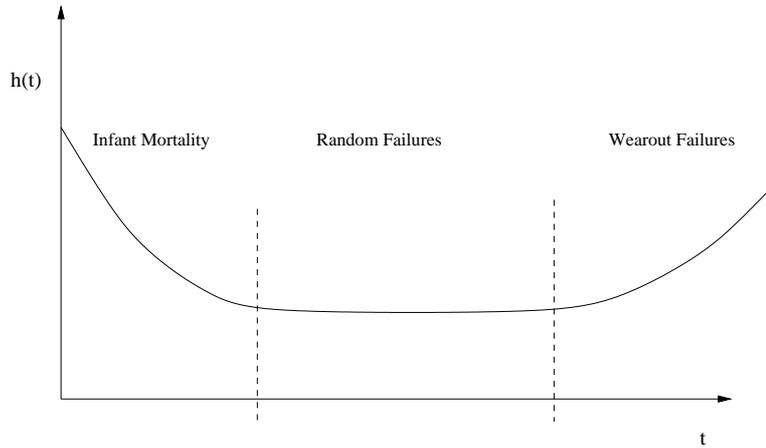


Figura 3.3. Curva de “tina de baño” (bathtub curve) para la función de riesgo.

### 3.6. Tiempo medio a la falla

El tiempo medio a la falla (*MTTF* por sus siglas en inglés) de una unidad se define como

$$MTTF = E(T) = \int_0^\infty t f(t) dt \tag{3.8}$$

Cuando el tiempo de reparación o reemplazo de la unidad fallada es muy corto comparado con *MTTF*, *MTTF* representa también el tiempo medio entre fallas (*MTBF* por sus siglas en inglés). Si el tiempo de reparación no es prescindible, *MTBF* también incluye el tiempo medio de reparación (*MTTR* por sus siglas en inglés). Esto se muestra en la figura 3.4.

Como  $f(t) = -R'(t)$ , y haciendo integración por partes

$$MTTF = -[tR(t)]_0^\infty + \int_0^\infty R(t) dt$$

Puede mostrarse que si  $MTTF < \infty$ ,  $[tR(t)]_0^\infty = 0$ , y obtenemos:

$$MTTF = \int_0^\infty R(t) dt \tag{3.9}$$

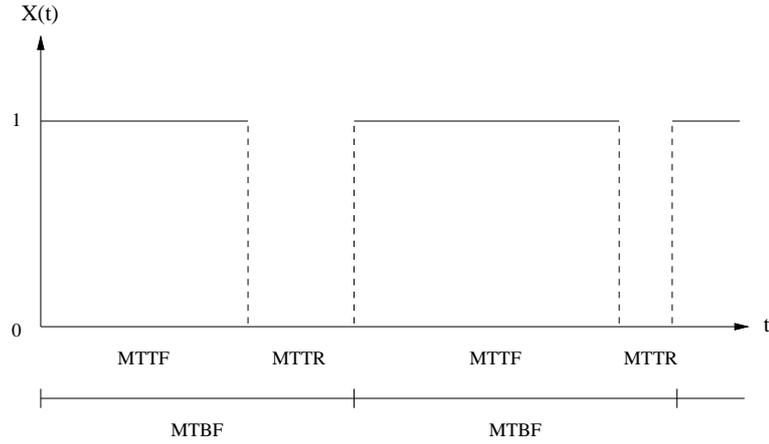


Figura 3.4. Comportamiento típico de una unidad

A menudo es más fácil determinar  $MTTF$  mediante (3.9) que mediante (3.8).

### 3.7. Distribuciones IFR y DFR

En la sección 3.5 vimos la correspondencia entre la función de distribución  $F(t)$  de una distribución de vida continua y su correspondiente función de tasa de fallas:

$$F(t) = 1 - e^{\int_0^t h(u)du} \quad \text{para } t > 0 \quad (3.10)$$

Una familia de distribuciones de tiempos de vida de especial interés son aquellas cuya tasa de fallas es creciente (no decreciente). Este tipo de distribuciones son llamadas IFR (Increasing Failure Rate distributions). De forma similar, las distribuciones que tienen una función de tasa de fallas decreciente son llamadas DFR (Decreasing Failure Rate distributions). Las definiciones de las distribuciones IFR y DFR no están restringidas solamente a distribuciones continuas, y se dan a continuación.

**Definición 3.1** Una distribución de tiempos de vida  $F$  es IFR si  $-\log(1 - F(t))$  es convexa para  $0 < t < F^{-1}(1)$ . Una distribución de tiempos de vida  $F$  es DFR si  $-\log(1 - F(t))$  es cóncava para  $0 < t < F^{-1}(1)$

Recuérdese que cuando  $F$  es continua, la función de tasa de fallas  $h(t)$  puede escribirse

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{d}{dt}(-\log(1 - F(t))) \quad \text{para } t > 0 \quad (3.11)$$

Ya que una función diferenciable convexa siempre tiene una derivada creciente (para distribuciones de vida continuas), la definición 3.1 sobre la propiedad IFR corresponde a una  $h(t)$  creciente (para distribuciones de vida continuas). Ya que una función diferenciable cóncava siempre tiene una derivada que es decreciente, por analogía, la definición 3.1 sobre la propiedad DFR corresponde a una  $h(t)$  decreciente para distribuciones de vida continuas).

### 3.8. Distribuciones paramétricas más comunes para modelar tiempos a la falla y de reparación

El tipo de distribuciones empleadas y descritas en este trabajo son del tipo (por ejemplo, para la función de distribución):  $P(T \leq t) = F(t; \theta)$ , donde  $\theta$  es un vector de parámetros. Excepto donde se indique, consideraremos que  $T, t > 0$ .

Algunas de las razones más importantes para el empleo de distribuciones paramétricas son:

- Los modelos paramétricos pueden ser descritos en forma concisa con solamente pocos parámetros, en lugar de tener que reportar una curva entera.
- Es posible usar un modelo paramétrico para extrapolar (en tiempo) a la cola más inferior o superior de una distribución.
- Los modelos paramétricos proveen estimaciones suaves de las distribuciones de tiempo a la falla.

A continuación se describirán brevemente las distribuciones más usadas (y que se emplean también en este trabajo) para modelar los tiempos a la falla de un sistema, así como sus funciones respectivas que son de interés en aplicaciones en confiabilidad, tales como la función de distribución, de densidad, de confiabilidad y de riesgo.

#### 3.8.1. Distribución Exponencial

Cuando  $T$  tiene una distribución exponencial con parámetro  $\lambda$  lo denotamos por  $T \sim \exp(\lambda)$ . Las funciones de esta distribución que son usadas en confiabilidad se muestran en la figura 3.5, y están dadas por:

$$\begin{aligned}
F(t; \lambda) &= 1 - e^{-\lambda t} \\
f(t; \lambda) &= \lambda e^{-\lambda t} \\
R(t; \lambda) &= e^{-\lambda t} \\
h(t; \lambda) &= \lambda
\end{aligned}$$

Una característica importante de la distribución exponencial es que la tasa de fallas de una unidad con esta distribución es constante, es decir no depende del tiempo, lo que implica que, para una unidad que no ha fallado, la probabilidad de fallar en el próximo pequeño intervalo de tiempo es independiente de la edad de la unidad (que es lo que se conoce como *pérdida de memoria*), y por esta razón, es muy conveniente usarla en algunos tipos de componentes electrónicos que corresponden a esta característica.

La exponencial es una distribución de vida usada frecuentemente en análisis de confiabilidad. Esto se debe a su simplicidad matemática y a que se ajusta a modelos de tiempos de vida reales para muchos tipos de unidades.

### 3.8.2. Distribución Gamma

Cuando  $T$  tiene una distribución gamma, lo denotamos mediante  $T \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$ . Las funciones usadas en confiabilidad para esta distribución se muestran en la figura 3.6, y se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
F(t; \alpha, \beta) &= \Gamma_1\left(\frac{t}{\beta}; \alpha\right) \\
f(t; \alpha, \beta) &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}
\end{aligned}$$

donde  $\alpha > 0$  es un parámetro de forma y  $\beta > 0$  es un parámetro de escala. Aquí,  $\Gamma(\alpha)$  es la función gamma y  $\Gamma_1(\nu; \alpha)$  es la función gamma incompleta y están definidas como:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\
\Gamma_1(\nu; \alpha) &= \frac{\int_0^\nu t^{\alpha-1} e^{-t} dt}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

Si  $\alpha = 1$ , vemos que la distribución gamma nos da la distribución exponencial como un caso especial. Como se muestra en la figura 3.6, la función de riesgo puede ser creciente o decreciente, pero en ambos casos se aproxima a una constante en periodos largos de vida. Otro hecho importante es que, si tenemos  $\alpha$  variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con parámetro  $\lambda = 1/\beta$ , y las sumamos, esta suma tiene una distribución gamma con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , incluso, una parametrización alternativa de la distribución gamma es mediante un parámetro de forma y otro de tasa de ocurrencia de eventos (en este caso, de

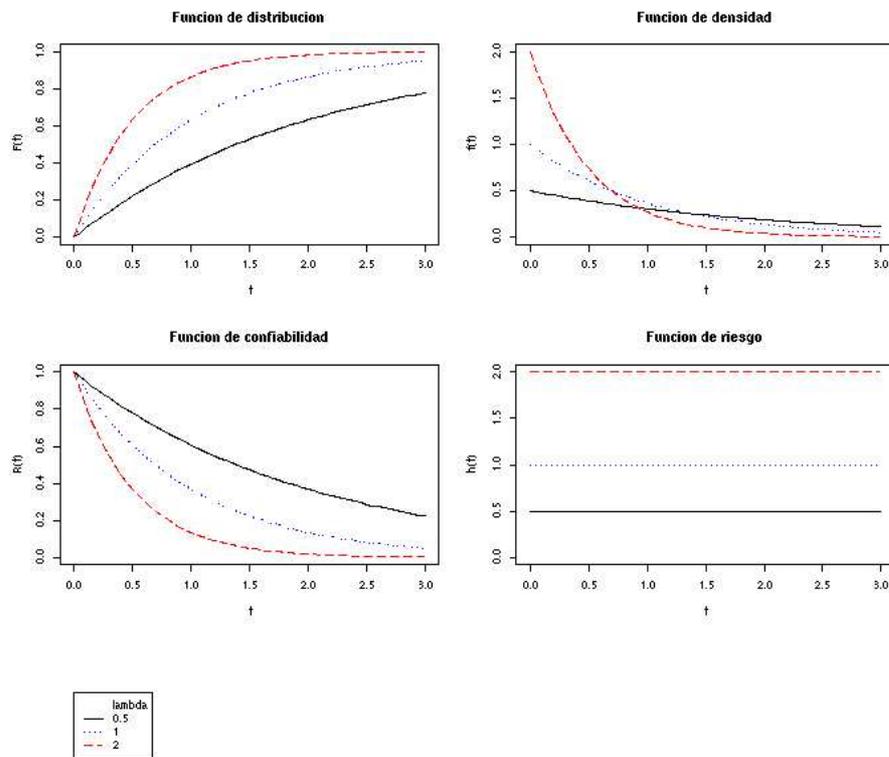


Figura 3.5. Distribución Exponencial

fallas). Esta propiedad puede usarse para motivar el uso de la distribución gamma en varias aplicaciones.

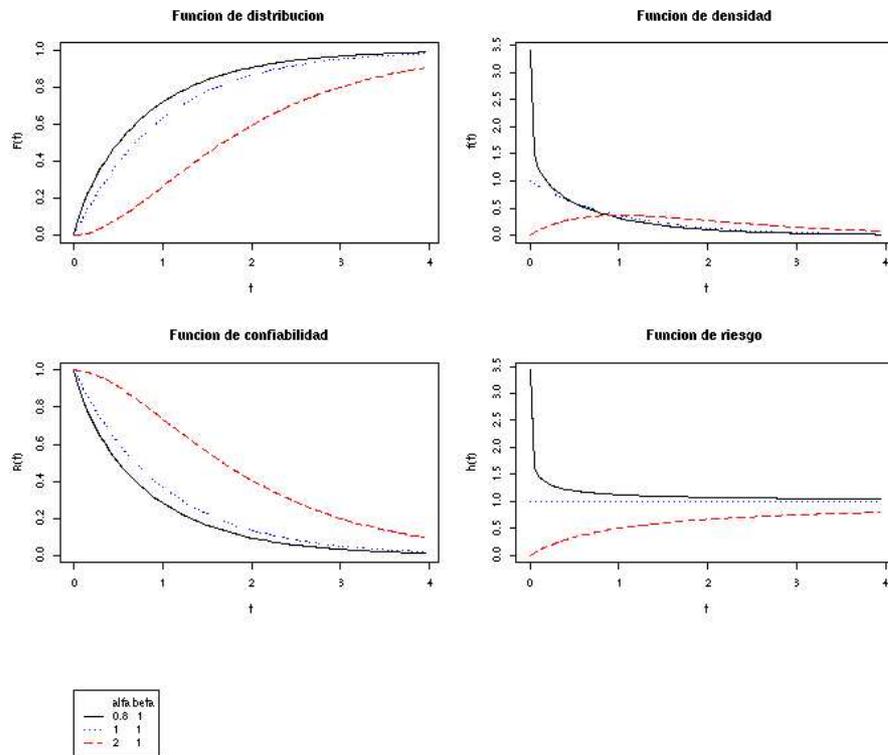


Figura 3.6. Distribución gamma

### 3.8.3. Distribución Weibull

Como se ha mencionado anteriormente, la función de riesgo podrá ser decreciente o creciente durante el periodo de vida de alguna unidad (ver por ejemplo la gráfica de “tina de baño”), y para la mayoría de unidades de tipo mecánico, la tasa de fallas será ligeramente creciente durante el periodo de vida útil del producto. En tales situaciones la distribución exponencial no será un modelo realista.

Una distribución usada muy a menudo en estos casos es la distribución Weibull, debido a su

habilidad para describir distribuciones de falla con distintas formas (shapes) que ocurren muy a menudo.

Si  $T$  tiene una distribución Weibull lo denotamos con  $T \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$ . Las funciones de la distribución Weibull usadas en confiabilidad se muestran en la figura 3.7, y están dadas por:

$$\begin{aligned} F(t; \alpha, \beta) &= 1 - e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha} \\ f(t; \alpha, \beta) &= \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha} \\ R(t; \alpha, \beta) &= e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha} \\ h(t; \alpha, \beta) &= \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

donde  $\alpha > 0$  es un parámetro de forma y  $\beta > 0$  es un parámetro de escala.

Cuando  $\alpha = 1$ , la tasa de falla es constante y la distribución Weibull se convierte en la distribución Exponencial, y cuando  $\alpha = 2$ , se convierte en la distribución de Rayleigh. Como vemos, la distribución Weibull es muy flexible y puede usarse para modelar distribuciones de vida donde la tasa de falla es decreciente, constante o creciente, y ha sido ampliamente usada en análisis de confiabilidad de semiconductores, rodamientos, turbinas y organismos biológicos, por ejemplo.

#### 3.8.4. Distribución Normal

La distribución más comúnmente usada en estadística es la Normal o Gaussiana. Si  $T$  tiene una distribución normal, lo denotamos con  $T \sim \text{Nor}(\mu, \sigma)$ , donde  $-\infty < \mu < \infty$  es un parámetro de localización y  $\sigma > 0$  es un parámetro de escala. Las funciones de esta distribución usadas en confiabilidad se muestran en la figura 3.8 y se mencionan a continuación.

$$F(t; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad (3.12)$$

$$f(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad (3.13)$$

$$R(t; \mu, \sigma) = 1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad (3.14)$$

$$h(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)} \quad (3.15)$$

Donde  $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$  y  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(w) dw$  son la función de densidad y de distribución, respectivamente de la distribución normal estándar.

La distribución normal es usada algunas veces como una distribución de tiempos de falla,

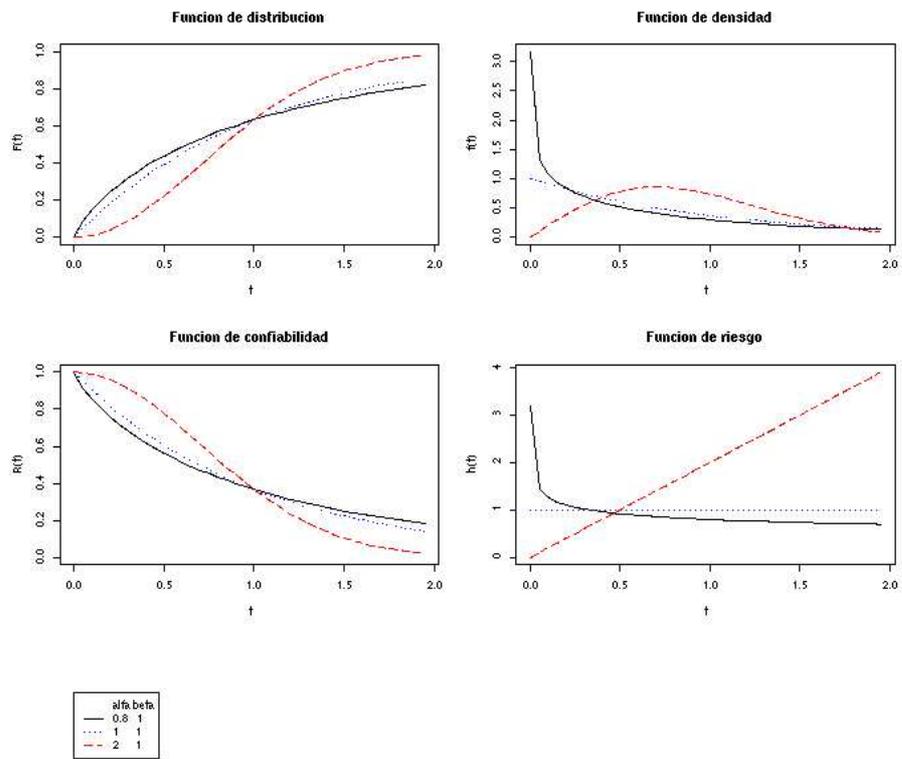


Figura 3.7. Distribución Weibull

aunque permite valores negativos con probabilidad positiva. También, como puede verse en la figura 3.8, su función de riesgo es creciente, y crece rápidamente cerca y antes de la vida media. La distribución normal ha probado ser útil para ciertos datos de vida cuando  $\mu > 0$  y el coeficiente de variación ( $\sigma/\mu$ ) es pequeño. Algunos ejemplos incluyen dispositivos con filamentos eléctricos (e.g., focos y tostadoras) y la resistencia de cubiertas de cables en circuitos integrados.

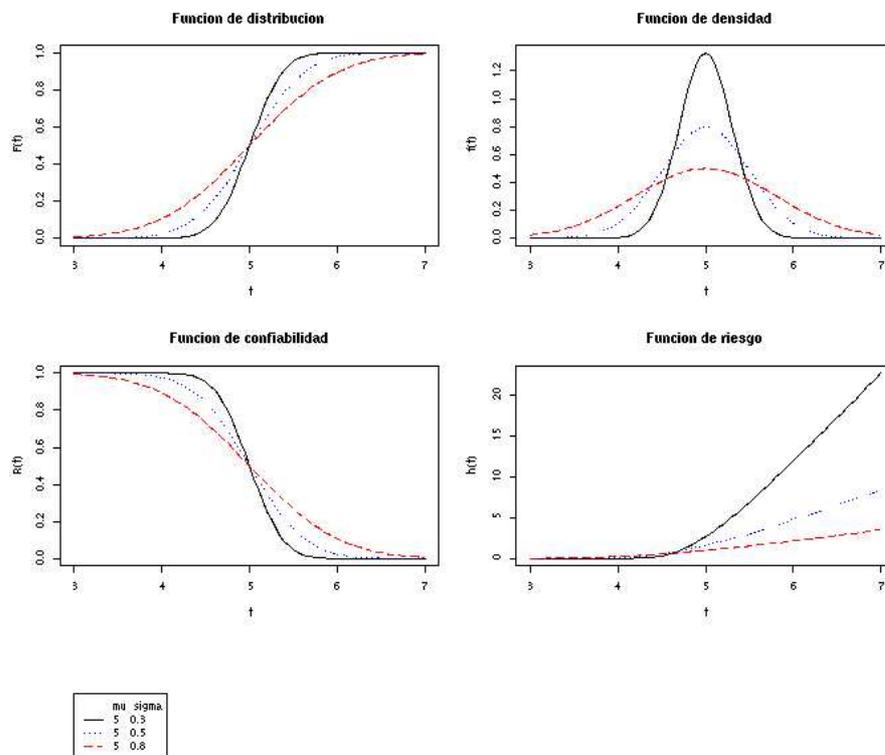


Figura 3.8. Distribución normal

### 3.8.5. Distribución Lognormal

Si  $T$  tiene una distribución Lognormal, lo indicamos mediante  $T \sim \text{Lognor}(\mu, \sigma)$ . Si  $T \sim \text{lognor}(\mu, \sigma)$  entonces  $Y = \log(T) \sim \text{nor}(\mu, \sigma)$ . Las funciones usadas en confiabilidad se muestran

a continuación.

$$F(t; \mu, \sigma) = \Phi \left[ \frac{\log(t) - \mu}{\sigma} \right] \quad (3.16)$$

$$f(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma t} \phi \left[ \frac{\log(t) - \mu}{\sigma} \right] \quad (3.17)$$

$$R(t; \mu, \sigma) = \Phi \left( \frac{\mu - \log(t)}{\sigma} \right) \quad (3.18)$$

$$h(t; \mu, \sigma) = \frac{\phi((\mu - \log(t))/\sigma)/\sigma t}{\Phi((\mu - \log(t))/\sigma)/\sigma} \quad (3.19)$$

Estas funciones se muestran en la figura 3.9 para algunos valores de  $\mu$  y  $\sigma$ . La distribución lognormal es comúnmente usada como una distribución del tiempo de reparación. La *tasa de reparación* se define de forma análoga a la tasa de falla. Cuando se modela el tiempo de reparación, es natural asumir que la tasa de reparación es creciente, al menos en una primera fase. Esto significa que la probabilidad de completar la acción de reparación dentro de un intervalo de tiempo corto crece conforme transcurre el tiempo de reparación. Cuando la reparación se ha prolongado por mucho tiempo, indica problemas serios, por ejemplo, que no hay partes de repuesto disponibles, entonces, es natural asumir que la tasa de reparación decrece después de un cierto periodo de tiempo.

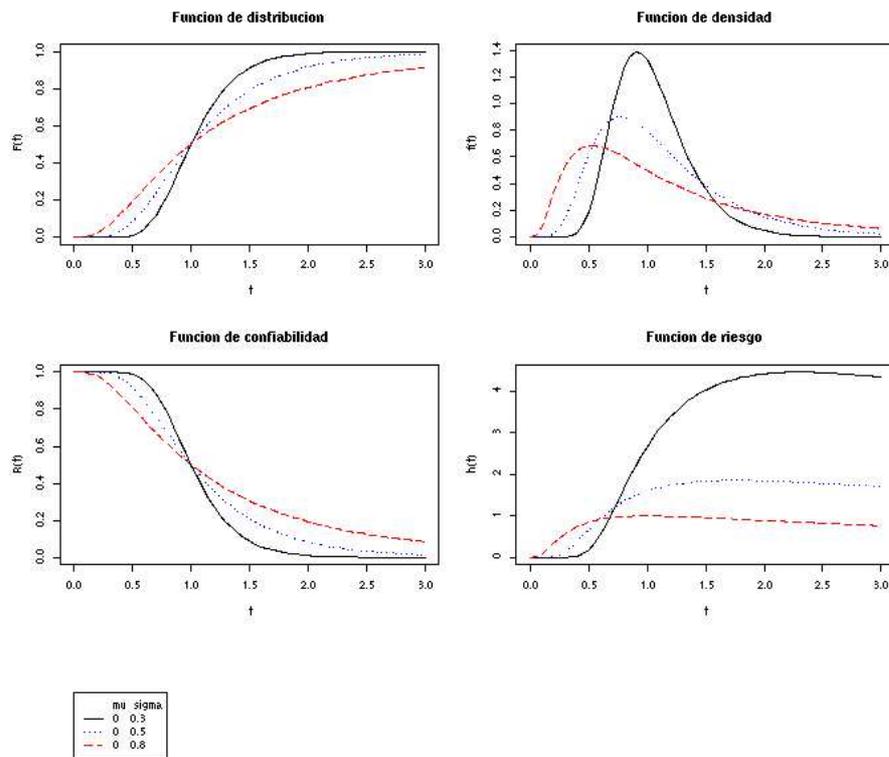


Figura 3.9. Distribución lognormal

## Capítulo 4

# Sistemas de componentes independientes

### 4.1. Introducción

En este capítulo se amplía el análisis cualitativo de un sistema al considerar las variables de estado de sus componentes en algún tiempo  $t$ , como variables aleatorias. Las variables de estado se denotarán entonces por

$$X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$$

donde  $n$  es el número de componentes del sistema. El vector de estados y su función de estructura, respectivamente, se denotarán mediante

$$\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)) \quad \text{y} \quad \phi(\mathbf{X}(t))$$

Tomando en cuenta estas consideraciones, algo que nos interesaría saber es la probabilidad de que algún componente o el sistema, se encuentre funcionando en algún momento  $t$  específico, es decir:

$$P(X_i(t) = 1) = p_i(t) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

$$P(\phi(\mathbf{X}(t)) = 1) = p_S(t) \quad (4.2)$$

La obtención de tales probabilidades se estudian en este capítulo. Estos resultados se restringirán

a sistemas donde las fallas de sus componentes se consideran independientes. En el siguiente capítulo se analizarán estas probabilidades para el caso de sistemas reparables.

## 4.2. Confiabilidad del sistema

Debido a que las variables de estado  $X_i(t)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  son binarias, tenemos que

$$E[X_i(t)] = 0 \cdot P(X_i(t) = 0) + 1 \cdot P(X_i(t) = 1) \quad (4.3)$$

$$= p_i(t) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

De manera similar, la confiabilidad del sistema al tiempo  $t$  es

$$p_S(t) = E[\phi(\mathbf{X}(t))] \quad (4.5)$$

Como vimos anteriormente, la función de estructura puede ser evaluada mediante operaciones de sumas y productos de sus componentes, tal es el caso de las estructuras en serie, paralelo o  $k$  de  $n$ , pero además, cualquier estructura puede ser reducida (mediante sus conjuntos corte o trayectoria) a estructuras en serie o paralelo. En este trabajo los sistemas se evalúan de este modo. Tomando en cuenta lo anterior y bajo el supuesto de independencia de los componentes, si sustituimos los estados de los componentes ( $x_i$ ), por sus probabilidades de funcionamiento ( $p_i(t)$ ), entonces la confiabilidad del sistema  $p_S(t)$  será función solamente de las confiabilidades de sus componentes:

$$p_S(t) = h[p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)] = h(\mathbf{p}(t)) \quad (4.6)$$

Si el sistema o los componentes no son reparados al fallar, entonces  $p_i(t)$  y  $p_S(t)$  serán  $R_i(t)$  y  $R_S(t)$ , la confiabilidad del componente  $i$  y del sistema, respectivamente. Si el sistema o los componentes son reparados, entonces  $p_i(t)$  y  $p_S(t)$  serán  $A_i(t)$  y  $A_S(t)$ , las disponibilidades del componente  $i$  y del sistema respectivamente, y (4.6) es aplicable en ambos casos. En este capítulo nos referiremos a tales probabilidades como confiabilidades.

### 4.2.1. Confiabilidad de estructuras en serie

Como vimos anteriormente, una estructura en serie de  $n$  componentes tiene la función de estructura

$$\phi(\mathbf{X}(t)) = \prod_{i=1}^n X_i(t)$$

Como se asume que los  $X_i(t)$  son independientes, la confiabilidad del sistema es

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}(t)) &= E[\phi(\mathbf{X}(t))] &= E\left(\prod_{i=1}^n X_i(t)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E[X_i(t)] &= \prod_{i=1}^n p_i(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nótese que

$$h(\mathbf{p}(t)) \leq \min_i(p_i(t))$$

Es decir, una estructura en serie es a lo mucho tan confiable como el componente menos confiable.

### 4.2.2. Confiabilidad de estructuras en paralelo

Una estructura en paralelo de  $n$  componentes tiene una función de estructura

$$\phi(\mathbf{X}(t)) = \prod_{i=1}^n X_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i(t))$$

Por la independencia de los componentes:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}(t)) &= E[\phi(\mathbf{X}(t))] &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - E(X_i(t))) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i(t)) &= \prod_{i=1}^n p_i(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

### 4.2.3. Confiabilidad de estructuras $k$ de $n$

Una estructura  $k$  de  $n$  funciona si al menos  $k$  componentes se encuentran funcionando y  $1 \leq k \leq n$ . Para obtener la confiabilidad del sistema, consideremos por simplicidad que todos los componentes tienen la misma confiabilidad,  $p_i(t) = p(t)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Por la suposición de independencia en los componentes, a un determinado tiempo  $t$ ,  $Y(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t)$  tendrá una distribución binomial con parámetros  $(n, p(t))$ , entonces:

$$P(Y(t) = y) = \binom{n}{y} p(t)^y (1 - p(t))^{n-y} \quad \text{para } y = 0, 1, \dots, n$$

Entonces, la confiabilidad de una estructura de componentes  $k$  de  $n$  con confiabilidades iguales es:

$$p_S(t) = P(Y(t) \geq k) = \sum_{y=k}^n \binom{n}{y} p(t)^y (1-p(t))^{n-y} \quad (4.9)$$

#### 4.2.4. Descomposición pivotal

Por descomposición pivotal, la función de estructura  $\phi(\mathbf{X}(t))$  al tiempo  $t$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{X}(t)) &= X_i(t) \cdot \phi(1_i, \mathbf{X}(t)) + (1 - X_i(t)) \cdot \phi(0_i, \mathbf{X}(t)) \\ &= X_i(t) \cdot [\phi(1_i, \mathbf{X}(t)) - \phi(0_i, \mathbf{X}(t))] + \phi(0_i, \mathbf{X}(t)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Cuando los componentes son independientes, la confiabilidad del sistema se vuelve

$$p_S(t) = p_i(t) \cdot E[\phi(1_i, \mathbf{X}(t))] + (1 - p_i(t)) \cdot E[\phi(0_i, \mathbf{X}(t))]$$

Denotemos con  $h(1_i, \mathbf{p}(t)) = E[\phi(1_i, \mathbf{X}(t))]$  y  $h(0_i, \mathbf{p}(t)) = E[\phi(0_i, \mathbf{X}(t))]$ , entonces

$$\begin{aligned} p_S(t) &= p_i(t) \cdot h(1_i, \mathbf{p}(t)) + (1 - p_i(t)) \cdot h(0_i, \mathbf{p}(t)) \\ &= p_i(t) \cdot [h(1_i, \mathbf{p}(t)) - h(0_i, \mathbf{p}(t))] + h(0_i, \mathbf{p}(t)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nótese que la confiabilidad del sistema es una función lineal de  $p_i(t)$  cuando todas las demás confiabilidades de los componentes se mantienen constantes.

### 4.3. Importancia de componentes

Es evidente que algunos componentes son más importantes que otros para la confiabilidad del sistema. Un componente en serie con el resto del sistema es un conjunto de corte de orden 1, y es generalmente más importante que un componente que es miembro de un conjunto de corte de orden mayor. Las medidas de importancia de componentes pueden usarse para clasificar los componentes, ya sea en forma individual o en grupos según algún criterio dado por estas medidas.

#### 4.3.1. Importancia estructural

Antes de mostrar la importancia estructural de los componentes, definamos lo siguiente.

**Definición 4.1** *Un vector trayectoria crítico para el componente  $i$  es un vector de estado  $(1_i, \mathbf{x})$  tal que*

$$\phi(1_i, \mathbf{x}) = 1 \quad \text{mientras que } \phi(0_i, \mathbf{x}) = 0$$

Lo anterior es equivalente a requerir que

$$\phi(1_i, \mathbf{x}) - \phi(0_i, \mathbf{x}) = 1 \quad (4.12)$$

En otras palabras, dados los estados de los otros componentes  $(\cdot_i, \mathbf{x})$ , el sistema funciona si y solo si, el componente  $i$  está funcionando.

**Definición 4.2** *Un conjunto trayectoria crítico  $C(1_i, \mathbf{x})$  correspondiente al vector trayectoria crítico  $(1_i, \mathbf{x})$  para el componente  $i$  se define por:*

$$C(1_i, \mathbf{x}) = \{i\} \cup \{j; x_j = 1, j \neq i\} \quad (4.13)$$

El número total de conjuntos trayectoria críticos (vectores trayectoria) para el componente  $i$  es

$$\eta_\phi(i) = \sum_{(\cdot_i, \mathbf{x})} [\phi(1_i, \mathbf{x}) - \phi(0_i, \mathbf{x})] \quad (4.14)$$

Como los  $x_j$ 's son variables binarias y pueden tomar solo dos valores, 0 y 1, el número total de vectores de estado  $(\cdot_i, \mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n)$  es  $2^{n-1}$ .

### Medida de importancia estructural de Birnbaum

Birnbaum (1969), propuso la siguiente medida para la importancia estructural del componente  $i$ :

$$B_\phi(i) = \frac{\eta_\phi(i)}{2^{n-1}} \quad (4.15)$$

La medida de Birnbaum  $B_\phi(i)$  expresa la proporción relativa de los  $2^{n-1}$  vectores de estado posibles  $(\cdot_i, \mathbf{x})$  que son vectores trayectoria críticos para el componente  $i$ .

### 4.3.2. Medida de Birnbaum

**Definición 4.3** La medida de importancia de Birnbaum del componente  $i$  al tiempo  $t$  es

$$I^B(i|t) = \frac{\partial h(\mathbf{p}(t))}{\partial p_i(t)} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.16)$$

La medida de Birnbaum es obtenida por diferenciación parcial de la confiabilidad del sistema con respecto a  $p_i(t)$ . Este enfoque es bien conocido en el clásico análisis de sensibilidad. Si  $I^B(i|t)$  es grande, un cambio pequeño en la confiabilidad del componente  $i$  resultará en un cambio comparativamente grande en la confiabilidad del sistema al tiempo  $t$ .

Usando descomposición pivotal (ver la sección 4.2.4), la medida de Birnbaum puede escribirse también mediante

$$I^B(i|t) = \frac{\partial h(\mathbf{p}(t))}{\partial p_i(t)} = h(1_i, \mathbf{p}(t)) - h(0_i, \mathbf{p}(t)) \quad (4.17)$$

donde  $h(1_i, \mathbf{p}(t))$  denota la probabilidad (condicional) de que el sistema esté funcionando cuando se sabe que el componente  $i$  está funcionando al tiempo  $t$ , y  $h(0_i, \mathbf{p}(t))$  denota la probabilidad (condicional) de que el sistema esté funcionando cuando se sabe que el componente  $i$  está fallado al tiempo  $t$ . Otra forma de expresar la medida de Birnbaum es la siguiente:

$$I^B(i|t) = E[\phi(1_i, \mathbf{X}(t))] - E[\phi(0_i, \mathbf{X}(t))] = E[\phi(1_i, \mathbf{X}(t)) - \phi(0_i, \mathbf{X}(t))]$$

Si las confiabilidades  $p_j(t) = 1/2$  para todo  $j \neq i$ , entonces, las diferentes realizaciones del vector estocástico

$$(\cdot_i, \mathbf{X}(t)) = (X_1(t), \dots, X_{i-1}(t), \cdot, X_{i+1}(t), \dots, X_n(t))$$

tendrán todas la probabilidad

$$\frac{1}{2^{n-1}}$$

ya que se asume independencia entre las  $X_i(t)$ 's. Entonces

$$\begin{aligned} I^B(t) &= E[\phi(1_i, \mathbf{X}(t)) - \phi(0_i, \mathbf{X}(t))] \\ &= \sum_{(\cdot_i, \mathbf{x})} [\phi(1_i, \mathbf{X}(t)) - \phi(0_i, \mathbf{X}(t))] \cdot P(\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{(\cdot_i, \mathbf{x})} [\phi(1_i, \mathbf{X}(t)) - \phi(0_i, \mathbf{X}(t))] \\ &= \frac{\eta_\phi(i)}{2^{n-1}} = B_\phi(i) \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde  $\eta_\phi(i)$  se define como en la sección 4.3.1.

Entonces, cuando todos los componentes tienen confiabilidades  $p_j(t) = 1/2$  para todo  $j \neq i$ , la medida de Birnbaum de la importancia de la confiabilidad del componente  $i$  y su medida de importancia estructural coinciden.

$$B_\phi(i) = I^B(t) \Big|_{p_j(t)=1/2, j \neq i} = \frac{\partial h(\mathbf{p}(t))}{\partial p_i(t)} \Big|_{p_j(t)=1/2, j \neq i} \quad (4.19)$$

### 4.3.3. Importancia de criticalidad

La importancia de criticalidad es una medida de importancia de componentes que es particularmente adecuada para priorizar las acciones de mantenimiento. Esta medida de importancia se relaciona con la medida de Birnbaum. Recordemos que un componente  $i$  es crítico para el sistema si los otros componentes del sistema se encuentran en un estado tal que el sistema funciona si y solo si el componente  $i$  está funcionando. El decir que el componente  $i$  es crítico es entonces una declaración sobre los otros componentes del sistema y no sobre el componente  $i$ .

Sea  $C(1_i, \mathbf{X}(t))$  el evento de que el sistema al tiempo  $t$  esté en un estado donde el componente  $i$  es crítico, entonces

$$P[C(1_i, \mathbf{X}(t))] = I^B(i|t) \quad (4.20)$$

Ya que los componentes del sistema son independientes, el evento  $C(1_i, \mathbf{X}(t))$  será independiente del estado del componente  $i$  al tiempo  $t$ .

La probabilidad de que el componente  $i$  sea crítico para el sistema y al mismo tiempo esté fallado al tiempo  $t$  es

$$P[C(1_i, \mathbf{X}(t)) \cap (X_i(t) = 0)] = I^B(i|t) \cdot (1 - p_i(t)) \quad (4.21)$$

Asumimos ahora que sabemos que el sistema está fallado al tiempo  $t$ , esto es,  $\phi(\mathbf{X}(t)) = 0$ . La probabilidad condicional (4.21) cuando sabemos que el sistema está fallado es

$$P[C(1_i, \mathbf{X}(t)) \cap (X_i(t) = 0) \mid \phi(\mathbf{X}(t)) = 0] \quad (4.22)$$

Como el evento  $C(1_i, \mathbf{X}(t)) \cap (X_i(t) = 0)$  implica que  $\phi(\mathbf{X}(t)) = 0$ , entonces

$$\frac{P[C(1_i, \mathbf{X}(t)) \cap (X_i(t) = 0)]}{P[\phi(\mathbf{X}(t)) = 0]} = \frac{I^B(i|t) \cdot (1 - p_i(t))}{1 - p_S(t)} \quad (4.23)$$

Este resultado es la importancia de criticalidad, y a continuación se dará su definición formal.

**Definición 4.4** *La medida de importancia de componentes llamada importancia de criticalidad  $I^{CR}(i|t)$  del componente  $i$  al tiempo  $t$  es la probabilidad de que el componente  $i$  es crítico para el sistema y está fallado al tiempo  $t$ , cuando sabemos que el sistema está fallado al tiempo  $t$ .*

$$I^{CR}(i|t) = \frac{I^B(i|t) \cdot (1 - p_i(t))}{1 - p_S(t)} \quad (4.24)$$

La importancia de criticalidad es, en otras palabras, la probabilidad de que el componente  $i$  haya causado la falla del sistema, cuando sabemos que el sistema está fallado al tiempo  $t$ . Cuando el componente  $i$  es reparado, el sistema empezará a funcionar de nuevo, y esa es la razón por la que esta medida de importancia puede usarse para priorizar las acciones de mantenimiento en sistemas complejos.

## Capítulo 5

# Sistemas reparables de componentes independientes

### 5.1. Introducción

En los capítulos anteriores se expusieron los conceptos básicos de un sistema que se suponía era descartado cuando fallaba. En este capítulo y los siguientes se tratarán los sistemas que son reparados al fallar, de modo tal, que pueden continuar realizando su función requerida bajo las especificaciones dadas. Los dos tipos básicos de reparación o mantenimiento de un sistema se conocen como *mantenimiento correctivo* y *mantenimiento preventivo*. Aunque ambos tipos de mantenimiento pueden aplicarse en sistemas con ciertas características, en particular, si tenemos un sistema cuya distribución de tiempos a la falla es IFR, entonces un enfoque de mantenimiento preventivo es el adecuado para reducir las fallas del sistema (y en consecuencia, sus costos) en un periodo de tiempo dado. El mantenimiento preventivo se divide en dos categorías o políticas: aquellas basadas en la edad (*age based*) del sistema en cuestión y las basadas en periodos fijos (*block replacement*), así que una parte del presente trabajo se dedicará a analizar y comparar ambas políticas, con el fin de mostrar bajo qué características del sistema son aplicables y cuál de ellas sería la más adecuada para un caso en particular. Algunas de las cantidades de interés para analizar el mantenimiento de un sistema reparable son:

- la probabilidad de que una unidad o sistema que es reparado a la falla estará en funcionamiento a un tiempo especificado
- la probabilidad de que una unidad o sistema estará en operación por un tiempo  $t$  o mayor

durante un intervalo de tiempo especificado

- la cantidad esperada de tiempo en que la unidad o sistema estará en funcionamiento durante un intervalo de tiempo especificado

Todos estos temas referentes a sistemas reparables pueden ser abordados haciendo uso de los modelos ya establecidos y usados en la literatura, siendo los más comunes los Procesos de Poisson (homogéneos y no homogéneos) y los Procesos de Renovación. En este trabajo se usará la teoría de renovación para modelar los sistemas reparables, y antes de mostrar los aspectos básicos de esta teoría se expondrán algunos conceptos y definiciones necesarias y que se usarán a lo largo del trabajo.

## 5.2. Conceptos

La siguiente definición es tomada de [5].

**Definición 5.1 (Sistema Reparable)** *Un sistema el cual, después de fallar en realizar al menos una de sus funciones requeridas, puede ser restaurado para realizar todas sus funciones requeridas por cualquier otro método que no sea el reemplazo del sistema entero.*

Vale la pena señalar nuevamente que cuando se haga mención a un sistema, este podrá estar formado por uno o varios componentes.

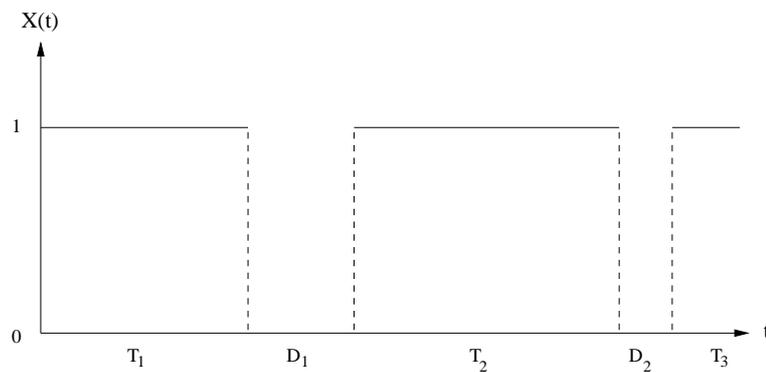


Figura 5.1. Estados de un sistema reparable

El esquema básico de un sistema reparable se muestra en la figura 5.1. El sistema es puesto en operación y se encuentra funcionando al tiempo  $t = 0$ . Cuando el sistema falla, es reparado

y llevado a una condición “como si fuera nuevo” (*as good as new*). Tenemos entonces una secuencia de tiempos de vida o *tiempos de funcionamiento*  $T_1, T_2, \dots$  para el sistema.

Por el estado que guarda el sistema después de cada reparación (como si fuera nuevo), podemos asumir que  $T_1, T_2, \dots$  son independientes e idénticamente distribuidos (*i.i.d.*), con cierta función de distribución  $F_T(t) = P(T_i \leq t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , y tiempo medio a la falla *MTTF*. Cuando el sistema falla, estará fuera de servicio por un cierto periodo, al que llamaremos *tiempo de reparación* del sistema. Asumiremos que los tiempos de reparación  $D_1, D_2, \dots$  son *i.i.d.* con función de distribución  $F_D(t) = P(D_i \leq t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , y tiempo medio de reparación *MTTR*. También asumiremos que  $T_i + D_i$  para  $i = 1, 2, \dots$  son independientes. Si  $D_i = 0$ , es decir, si el tiempo de reparación es despreciable (por ejemplo, si se reemplaza el componente por uno nuevo del mismo tipo), entonces  $T_1, T_2, \dots$  son llamados también *tiempos interarribos*.

El estado del sistema estará dado por la variable de estado:

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema se encuentra funcionando al tiempo } t \\ 0 & \text{si el sistema está en reparación al tiempo } t \end{cases}$$

La variable de estado  $X(t)$  se ilustra en la figura 5.1.

Las siguientes definiciones son de gran importancia en el estudio de sistemas reparables.

**Definición 5.2** *La disponibilidad  $A(t)$  al tiempo  $t$  de un sistema reparable es igual a la probabilidad de que el sistema se encuentre funcionando al tiempo  $t$ :*

$$A(t) = P(X(t) = 1)$$

Notemos que, si el sistema no es reparado,  $A(t) = R(t)$ , la confiabilidad del sistema.

**Definición 5.3** *La indisponibilidad  $\bar{A}(t)$  al tiempo  $t$  de un sistema reparable es igual a la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado fallado al tiempo  $t$ :*

$$\bar{A}(t) = 1 - A(t) = P(X(t) = 0)$$

**Definición 5.4** *La disponibilidad promedio  $A_{avg}(0, \tau)$  en el intervalo de tiempo  $(0, \tau]$  de un sistema reparable se define como*

$$A_{avg}(0, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} A(t) dt$$

La disponibilidad promedio puede interpretarse como la proporción promedio de  $(0, \tau]$  en que el sistema se encuentra funcionando.

**Definición 5.5** *La disponibilidad límite o a largo plazo  $A_{lim}$  se define como*

$$A_{lim} = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$$

cuando el límite existe.

### 5.3. Modelación probabilística de sistemas reparables

La forma de modelar un sistema reparable es mediante procesos estocásticos. Un proceso estocástico se define como una colección de variables aleatorias que ocurren a través del tiempo, en nuestro caso, los eventos son fallas o reparaciones. Las tres formas más comunes de modelación de un sistema reparable son los Procesos de Poisson Homogéneos (HPP, por sus siglas en inglés), Procesos de Poisson No Homogéneos (NHPP) y Procesos de Renovación.

### 5.4. Procesos de Poisson Homogéneos (HPP) y No Homogéneos (NHPP)

Lo definimos de la siguiente manera:

**Definición 5.6** *El proceso de conteo  $\{N(t), t \geq 0\}$  es un HPP, con tasa  $\lambda$ , para  $\lambda > 0$  si*

1.  $N(0) = 0$
2. *El proceso tiene incrementos independientes y estacionarios*
3.  $P[N(\Delta t) = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$
4.  $P[N(\Delta t) \geq 2] = o(\Delta t)$

donde  $o(\Delta t)$  denota una función de  $\Delta t$  con la propiedad de que  $\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ .

A partir de esta definición, puede deducirse lo siguiente (ver [2], por ejemplo):

1. Los tiempos interarribos  $T_1, T_2, \dots$  son *iid* distribuidos exponencialmente, con media  $1/\lambda$
2. El número de fallas en el intervalo  $(t_1, t_2)$  se distribuye Poisson con media  $\lambda(t_2 - t_1)$

$$P[N(t_2) - N(t_1) = n] = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^n}{n!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \text{ para todo } t_2 > t_1 > 0$$

3. El número esperado de fallas en  $(t_1, t_2)$  es

$$W(t_2) - W(t_1) = E[N(t_2) - N(t_1)] = \lambda(t_2 - t_1)$$

4.  $S_n$  tiene una distribución Gamma con parámetros  $n$  y  $\lambda$ , y su función de densidad es

$$f(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t} \text{ para } t \geq 0$$

El modelo NHPP difiere del HPP en que la tasa de ocurrencias (fallas o reparaciones) varía con el tiempo en vez de ser constante. Esto implica que en el modelo NHPP los tiempos interocurrencias no son ni independientes ni idénticamente distribuidos. El NHPP es usado generalmente para modelar sistemas reparables que están sujetos a una estrategia de reparación mínima con tiempos de reparación prescindibles. En este contexto, la reparación mínima significa que un sistema fallado es restaurado solamente para que vuelva a un estado de funcionamiento y después de esta reparación mínima el sistema continua como si nada hubiera pasado. La verosimilitud de la falla del sistema es la misma inmediatamente antes y después de una falla. Entonces, una reparación mínima restaura el sistema a una condición “como viejo” (*as bad as old*). El NHPP es una generalización del HPP.

Los procesos de renovación son también una generalización de un HPP, y por las consideraciones que se tienen en este trabajo de tesis en cuanto a los sistemas (tiempos de reparación no despreciables, reparaciones a un estado como si fuera nuevo, entre las más importantes), es lo que se usará para modelar el comportamiento de los sistemas reparables. En la siguiente sección se exponen los conceptos más básicos de la teoría de renovación, haciendo énfasis en sistemas con distribución de fallas IFR, la mayor parte se ha extraído de [1] y [2], para mayor referencia, recurrir a ambos textos.

## 5.5. Procesos de Renovación

La teoría de renovación tiene sus orígenes en el estudio de estrategias de reemplazo de componentes técnicos y en la ciencia actuarial, pero posteriormente fue desarrollada como una teoría general dentro de los procesos estocásticos.

Un proceso de renovación se define como una secuencia de variables aleatorias independientes, no negativas e idénticamente distribuidas,  $T_1, T_2, \dots$ , con función de distribución  $F_T(t) = P(T_i \leq t)$  para  $t \geq 0, i = 1, 2, \dots$ . Se considera además, que no son todas cero con probabilidad uno.

Los eventos observados (fallas o reparaciones) son llamados *renovaciones* y  $F_T(t)$  es la distribución subyacente del proceso de renovación. Asumiremos que  $E(T) = \mu$  y  $\text{var}(T) = \sigma^2 < \infty$ . En principio se usará  $T$ , el tiempo a la falla como la variable aleatoria de interés, posteriormente se incluirán las reparaciones como parte del proceso de renovación.

Algunas de las características más importantes de analizar en un proceso de renovación, y que son las que serán de utilidad en este trabajo son las siguientes:

- El tiempo hasta la  $n$ -ésima renovación  $S_n$

$$S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n = \sum_{i=1}^n T_i \quad (5.1)$$

- El número de renovaciones en el intervalo de tiempo  $(0, t]$

$$N(t) = \max \{n; S_n \leq t\} \quad (5.2)$$

- La función de renovación  $W(t)$  y densidad de renovación  $w(t)$

$$W(t) = E(N(t)) \quad (5.3)$$

$$w(t) = \frac{d}{dt}W(t) \quad (5.4)$$

### 5.5.1. Distribución de $S_n$

Sea  $F^{(n)}(t)$  la función de distribución de  $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ . Podemos escribir  $S_n = S_{n-1} + T_n$ , y como  $S_{n-1}$  y  $T_n$  son independientes, la distribución de  $S_n$  es la convolución de las funciones

de distribución  $S_{n-1}$  y  $T_n$ ,

$$F^{(n)}(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x) dF_T(x) \quad (5.5)$$

y su función de densidad

$$f^{(n)}(t) = \int_0^t f^{(n-1)}(t-x) f_T(x) dx \quad (5.6)$$

### 5.5.2. La distribución del número de renovaciones $N(t)$

Por las definiciones de  $N(t)$  y  $S_n$ , tenemos que

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t) = F^{(n)}(t) \quad (5.7)$$

y

$$P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) \quad (5.8)$$

si  $t$  es grande, puede usarse la siguiente aproximación (ver [2], sección 7.3.3).

$$P(N(t) \leq n) \approx \Phi \left( \frac{n - (t/\mu)}{\sigma \sqrt{t/\mu^3}} \right) \quad (5.9)$$

donde  $\Phi(\cdot)$  es la función de distribución normal estándar.

### 5.5.3. La función de renovación y densidad de renovación

Usando (5.7) y (5.8), podemos expresar la función de renovación como:

$$W(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} n P[N(t) = n] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) \quad (5.10)$$

Una ecuación integral para  $W(t)$  puede obtenerse combinando (5.10) y (5.5):

$$W(t) = \int_0^t [1 + W(t-x)] dF_T(x) = F_T(t) + \int_0^t W(t-x) dF_T(x) \quad (5.11)$$

La ecuación (5.11) se conoce como la *ecuación fundamental de renovación*.

Si  $F_T(t)$  tiene densidad  $f_T(t)$ , entonces, diferenciando con respecto a  $t$  (5.10) y (5.11)

obtenemos las siguientes expresiones para la densidad de renovación:

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_T^{(n)}(t) \quad (5.12)$$

$$w(t) = \int_0^t [1 + w(t-x)]f_T(x)dx = f_T(t) + \int_0^t w(t-x)f_T(x)dx \quad (5.13)$$

Otra forma de obtener expresiones para  $W(t)$  y  $w(t)$  es mediante transformadas de Laplace (ver [1]). La transformada de Laplace de (5.13) es

$$w^*(s) = f_T^*(s) + w^*(s) \cdot f_T^*(s)$$

entonces

$$w^*(s) = \frac{f_T^*(s)}{1 - f_T^*(s)} \quad (5.14)$$

De manera similar, obteniendo la transformada de Laplace de (5.11), obtenemos:

$$W^*(s) = \frac{F_T^*(s)}{1 - F_T^*(s)} = \frac{w^*(s)}{s} = \frac{f_T^*(s)}{s(1 - f_T^*(s))} \quad (5.15)$$

Entonces, es posible (al menos en teoría), obtener las expresiones para  $w(t)$  y  $W(t)$  invirtiendo (5.14) y (5.15).

#### 5.5.4. Propiedades asintóticas

Se mostrarán a continuación tres resultados importantes y que son de gran utilidad para calcular, por ejemplo, las disponibilidades a largo plazo. Puede recurrirse a [1] para las demostraciones correspondientes.

#### **Teorema 5.1 (Teorema Elemental de Renovación)**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad (5.16)$$

Cuando las renovaciones corresponden a fallas de los componentes, el número promedio de fallas en  $(0, t]$  es aproximadamente

$$E(N(t)) \approx \frac{t}{\mu} = \frac{t}{MTTF} \quad \text{cuando } t \text{ es grande}$$

**Teorema 5.2 (Teorema de Blackwell)** Para un proceso de renovación con distribución subyacente  $F_T(t)$  que es una distribución nonlattice<sup>1</sup>

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (W(t+h) - W(t)) = \frac{h}{\mu} \quad \text{para } h > 0 \quad (5.17)$$

**Teorema 5.3 (Teorema Fundamental de Renovación)** Si  $Q$  tiene una variación acotada en el intervalo  $[0, \infty]$  y  $F_T(t)$  es nonlattice, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t+x) dW(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} Q(u) du \quad (5.18)$$

### 5.5.5. Procesos de Renovación Sobrepuestos

Un proceso de renovación sobrepuesto (SRP por sus siglas en inglés) se desarrolla de la siguiente forma: supongamos que  $n$  procesos de renovación se encuentran operando de forma independiente cada uno. Entonces, el proceso formado por la unión de todos los eventos se conoce como un SRP. Si se considera que los  $n$  procesos de renovación independientes corresponden a los componentes de un sistema, entonces los  $n$  componentes deben formar una estructura en serie, tal como se muestra en la figura 5.2.

En general, el SRP *no* será un proceso de renovación. En [5] se muestra que si la sobreposición de dos procesos de renovación independientes es un proceso de renovación, entonces los tres procesos deben ser HPP's. Se ha mostrado también que la sobreposición de un número infinito de procesos de renovación *en equilibrio* es un HPP. El problema principal al utilizar SRP para modelar sistemas complejos es determinar en qué momento se alcanza el equilibrio de cada uno de los SRP independientes o qué tan grande debe ser  $n$  para asumir un HPP. En [5] se analizan en más detalle estas preguntas, pero (dependiendo obviamente del tipo de sistemas y componentes de que se trate), en general, el tiempo requerido para alcanzar un estado estable es grande, y un número de componentes  $n$  finito tiene menos efecto comparado con el efecto de considerar un tiempo  $t$  finito. Es más fácil entonces suponer HPP's para cada componente, lo que descarta el uso de otras distribuciones de uso común en la modelación de tiempos de reparación, como la Weibull, gamma o lognormal, además de limitar la consideración de incluir una distribución de tiempos a la falla.

---

<sup>1</sup>Nonlattice o no periódica. Una definición de este tipo de distribuciones puede encontrarse, por ejemplo en [3] pag. 290.

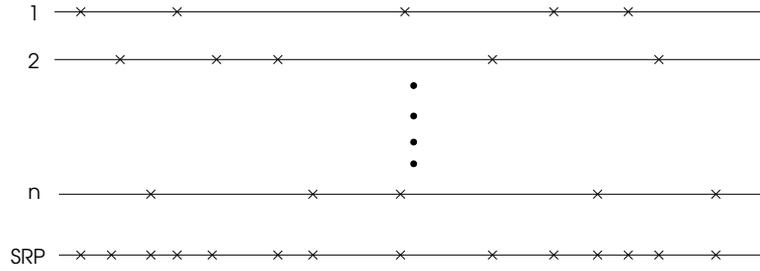


Figura 5.2. Proceso de renovación sobrepuesto

### 5.5.6. Procesos de renovación alternados

En esta sección se analizará el comportamiento de un sistema reparable descrito en 5.2 al introducir un tiempo de reparación en el sistema. Los resultados que se muestren en esta sección serán aplicables a sistemas considerados como una unidad.

Un sistema cuyo comportamiento corresponde al mostrado en la figura 5.1 es llamado un Proceso de Renovación Alternado (ARP por sus siglas en inglés).

Si consideramos las renovaciones como los eventos que ocurren cuando una reparación se completa, los periodos de renovación serán

$$Y_i = T_i + D_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots$$

y su función de distribución y de densidad estarán dadas por la convolución de las funciones de distribución y de densidad de  $T$  y  $D$ , tal como se muestra

$$H(y) = P(Y \leq y) = \int_0^y F_T(y-t) dF_D(t) \quad (5.19)$$

$$h(y) = \int_0^y f_T(y-t) f_D(t) dt \quad (5.20)$$

### Número promedio de renovaciones

Denotemos el estado de funcionamiento del sistema con 1 y el estado fallado con 0. Sea  $N_{ij}(t)$  el número de visitas al estado  $j$  en  $(0, t)$ , dado que el sistema entra al estado  $i$  en  $t = 0$ .

Entonces  $W_{ij}(t) = E(N_{ij}(t))$  está dado por (ver [1] cap. 3.6):

$$W_{11}(t) = \int_0^t W_{01}(t-x) dF_T(x) \quad (5.21)$$

$$W_{01}(t) = \int_0^t [1 + W_{11}(t-x)] dF_D(x) \quad (5.22)$$

$$W_{10}(t) = \int_0^t [1 + W_{00}(t-x)] dF_T(x) \quad (5.23)$$

$$W_{00}(t) = \int_0^t W_{10}(t-x) dF_D(x) \quad (5.24)$$

Tomando transformadas de Laplace en ambos lados de estas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} W_{11}^*(s) &= W_{01}^*(s)F_T^*(s) \\ W_{01}^*(s) &= F_D^*(s) + W_{11}^*(s)F_D^*(s) \\ W_{10}^*(s) &= F_T^*(s) + W_{00}^*(s)F_T^*(s) \\ W_{00}^*(s) &= W_{10}^*(s)F_D^*(s) \end{aligned}$$

Realizando el álgebra correspondiente, obtenemos las siguientes expresiones:

$$W_{11}^*(s) = \frac{F_T^*(s)F_D^*(s)}{1 - F_T^*(s)F_D^*(s)} \quad (5.25)$$

$$W_{01}^*(s) = \frac{F_D^*(s)}{1 - F_T^*(s)F_D^*(s)} \quad (5.26)$$

$$W_{10}^*(s) = \frac{F_T^*(s)}{1 - F_T^*(s)F_D^*(s)} \quad (5.27)$$

$$W_{00}^*(s) = \frac{F_T^*(s)F_D^*(s)}{1 - F_T^*(s)F_D^*(s)} \quad (5.28)$$

Invirtiendo las ecuaciones anteriores podemos obtener, al menos en teoría,  $W(t)$  para el ARP.

También podemos expresar  $W_{ij}$  mediante las funciones de densidad de  $T$  y  $D$ . Tomando las derivadas respecto a  $t$  de (5.21), (5.22), (5.23) y (5.24) y obteniendo sus transformadas de Laplace, obtenemos:

$$\begin{aligned} w_{11}^*(s) &= w_{01}^*(s)f_T^*(s) \\ w_{01}^*(s) &= f_D^*(s) + w_{11}^*(s)f_D^*(s) \\ w_{10}^*(s) &= f_T^*(s) + w_{00}^*(s)f_T^*(s) \\ w_{00}^*(s) &= w_{10}^*(s)f_D^*(s) \end{aligned}$$

Según (5.15), obtenemos

$$W_{11}^*(s) = \frac{f_T^*(s)f_D^*(s)}{s[1 - f_T^*(s)f_D^*(s)]} \quad (5.29)$$

$$W_{01}^*(s) = \frac{f_D^*(s)}{s[1 - f_T^*(s)f_D^*(s)]} \quad (5.30)$$

$$W_{10}^*(s) = \frac{f_T^*(s)}{s[1 - f_T^*(s)f_D^*(s)]} \quad (5.31)$$

$$W_{00}^*(s) = \frac{f_T^*(s)f_D^*(s)}{s[1 - f_T^*(s)f_D^*(s)]} \quad (5.32)$$

Invirtiendo las ecuaciones anteriores podemos obtener, al menos en teoría,  $W(t)$  para el ARP.

## 5.6. Disponibilidad

Como se definió en 5.2, la disponibilidad es la probabilidad de que el sistema se encuentre funcionando al tiempo  $t$ . Para un proceso de renovación alternado, la disponibilidad está dada por (ver [3], pag. 305-306):

$$A(t) = 1 - F_T(t) + \int_0^t A(t-y)dH(y)$$

$$A(t) = 1 - F_T(t) + \int_0^t (1 - F_T(t-x))dW_H(x) \quad (5.33)$$

donde

$$W_H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H^{(n)}(t)$$

es la función de renovación para un proceso de renovación con distribución subyacente  $H(t)$ .

### 5.6.1. Disponibilidad puntual.

Tomando transformadas de Laplace de (5.33), obtenemos

$$A^*(s) = \frac{1}{s} - F_T^*(s) + \left[ \frac{1}{s} - F_T^*(s) \right] w_H^*(s)$$

Como  $F^*(s) = \frac{1}{s}f^*(s)$ , tenemos que

$$A^*(s) = \frac{1}{s} [1 - f_T^*(s)] [1 + w_H^*(s)]$$

Si las renovaciones son los eventos donde se ha completado una reparación, entonces

$$w_H^*(s) = sW_{11}^*(s)$$

Según (5.29), lo anterior nos proporciona la siguiente expresión:

$$A^*(s) = \frac{1}{s} [1 - f_T^*(s)] \left[ 1 + \frac{f_T^*(s)f_D^*(s)}{1 - f_T^*(s)f_D^*(s)} \right]$$

Finalmente, obtenemos la siguiente expresión para la transformada de Laplace de la disponibilidad puntual:

$$A^*(s) = \frac{1 - f_T^*(s)}{s [1 - f_T^*(s)f_D^*(s)]} \quad (5.34)$$

La disponibilidad  $A(t)$  puede obtenerse, al menos en teoría, al invertir (5.34), para cualquier elección de distribuciones de tiempos a la falla y de reparación.

En el trabajo de tesis desarrollado es posible obtener las expresiones para  $W_{ij}(t)$  y  $A(t)$  solamente para ciertas distribuciones de tiempos a la falla y de reparación. El método numérico que se emplea para invertir la transformada de Laplace requiere la expresión a invertir, y en este trabajo se hace uso de la Función Generadora de Momentos (MGF por sus siglas en inglés) para obtener tal expresión. Como se sabe, la MGF ( $M(t)$ ) para una variable aleatoria  $X$  continua cuyo dominio son los positivos es la transformada de Laplace con el argumento negativo:

$$M(t) = E(e^{Xt}) = \int_0^{\infty} e^{xt} f(x) dx$$

pero, para ciertas distribuciones no existe  $M(t)$  en forma cerrada, por ese motivo solo fue posible obtener la transformada de Laplace y su inversa para tiempos a la falla o de reparación con distribuciones exponencial, gamma o uniforme.

### 5.6.2. Disponibilidad a largo plazo.

Ya que  $H(t)$  es una distribución *nonlattice*, puede aplicarse el Teorema 5.3 con  $Q(t) = 1 - F_T(t)$  y se obtiene

$$\int_0^t [1 - F_T(t - x)] dW_H(x) \rightarrow \frac{1}{E(Y)} \int_0^\infty (1 - F_T(t)) dt = \frac{E(T)}{E(T) + E(D)}$$

Como  $F_T(t) \rightarrow 1$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , tenemos que la disponibilidad límite o a largo plazo puede obtenerse mediante

$$A_{lim} = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{E(T)}{E(T) + E(D)} = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} \quad (5.35)$$

### 5.6.3. Disponibilidad del sistema

Consideremos un sistema con  $n$  componentes y función de estructura  $\phi(\mathbf{X}(t))$ . Si las variables de estado  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$  son variables aleatorias independientes, la disponibilidad del sistema  $A_S(t)$  puede determinarse mediante el procedimiento descrito en la sección 4.2, es decir:

$$A_S(t) = E[\phi(\mathbf{X}(t))] = h[A_1(t), \dots, A_n(t)] \quad (5.36)$$

El siguiente ejemplo muestra el uso de las disponibilidades a largo plazo para obtener la disponibilidad del sistema.

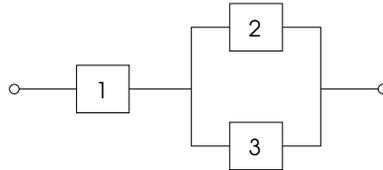


Figura 5.3. Sistema de ejemplo

El sistema mostrado en la figura 5.3 tiene una función de estructura

$$\phi(\mathbf{X}(t)) = X_1(t) [X_2(t) + X_3(t) - X_2(t)X_3(t)]$$

Se asume que cada uno de los tres componentes fallan y son reparados independientemente de los otros. Los tiempos medios de funcionamiento y de fallo  $MTTF$  y  $MTTR$  para cada

componente se dan a continuación, junto con sus disponibilidades, que se calculan mediante

$$A_{avg,i} = \frac{MTTF_i}{MTTF_i + MTTR_i} \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

$i$	$MTTF_i$ (hours)	$MTTR_i$ (hours)	$A_{avg,i}$
1	1000	10	0.990
2	500	10	0.980
3	500	10	0.980

La disponibilidad promedio del sistema es

$$A_S = A_{avg,1}(t) [A_{avg,2}(t) + A_{avg,3}(t) - A_{avg,2}(t)A_{avg,3}(t)] \approx 0,9896$$

y la indisponibilidad promedio del sistema es de  $\bar{A}_S \approx 0,0104$ , lo que significa que el sistema estará fuera de servicio aproximadamente 91 horas al año, suponiendo que el sistema opera continuamente.

Es muy importante recalcar que para el empleo de la aproximación mostrada en el ejemplo anterior, hemos supuesto que los componentes fallan y se reparan independientemente de los demás, lo que implica que la operación y mantenimiento de un componente no son influenciados por el estado de los otros componentes. Como es de esperarse, esta consideración limita el empleo de las características de ciertos sistemas, como aquellos que tienen carga compartida (donde la carga en un componente incrementa si uno o más componentes redundantes falla), y en general, aquellos sistemas donde la falla de algún componente altera el estado de los demás. En el presente trabajo no es posible modelar este tipo de sistemas.

## Capítulo 6

# El Mantenimiento Preventivo en Sistemas Reparables

### 6.1. Introducción

Como ya se mencionó en el capítulo 5, las dos formas principales de dar mantenimiento a un sistema reparable es mediante un enfoque correctivo (llamado también reparación) o preventivo (mantenimiento planeado). Por razones que se explicarán un poco más adelante, el mantenimiento preventivo es el enfoque preferido para cierto tipo de sistemas, y en este capítulo se expondrán las dos políticas principales de mantenimiento preventivo y sus costos asociados. Los resultados que se presentarán son aplicables a sistemas considerados como una unidad o componente. Las modificaciones en los modelos de costos para un sistema formado por varios componentes será tratada en el capítulo siguiente.

Un sistema cuya distribución de tiempos de falla es IFR presentará un desgaste a través del tiempo y por lo tanto será más propenso a fallar a medida que transcurra el tiempo y el sistema siga funcionando. La falla de una unidad, sobre todo en un ambiente de uso industrial, es muy costosa, y si esta unidad es parte de un sistema mayor y su fallo provoca el fallo del sistema, el costo es aún mas grande. Los costos asociados a estas fallas pueden incluir, entre otros, aquellos provocados por pérdidas de producción, paros de línea, inutilización de personal, pagos extras para personal de mantenimiento, adquisición de partes de repuesto emergentes, gastos logísticos, etcétera.

Tomando en cuenta lo anterior, la adopción de un método preventivo de mantenimiento es la opción ideal. El mantenimiento preventivo puede prevenir fallas prematuras y reducir su

frecuencia o al menos la severidad de estas y sus consecuencias, por lo tanto, reduce los costos generales y ayuda a obtener una administración más eficaz del mantenimiento.

Las dos políticas principales para aplicar un mantenimiento preventivo en sistemas que se deterioran son aquellas basadas en la *edad* del sistema y en periodos fijos de tiempo. Estas dos políticas son conocidas también como Tipo I y Tipo II, respectivamente, y a continuación se explican las características principales y los modelos de costos asociadas a cada una.

## 6.2. Política tipo I (*Age Based*)

Bajo una política tipo I, un sistema es reparado o reemplazado cuando falla o cuando cumple cierto tiempo de operación  $\tau$  específico, lo que suceda primero. Si falla, el periodo de mantenimiento planeado  $\tau$  se reprograma a partir de ese momento. La figura 6.1 ilustra esta política de mantenimiento.

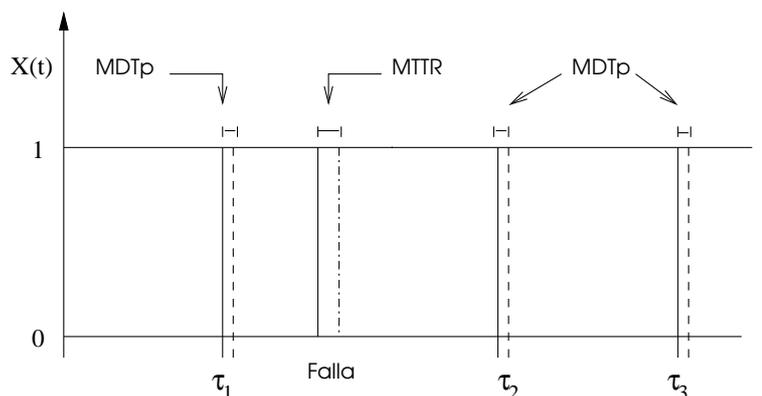


Figura 6.1. Política de mantenimiento preventivo Tipo I

Si el sistema se mantiene operando sin fallar hasta el tiempo  $\tau$  establecido, estará fuera de funcionamiento el tiempo que dure el mantenimiento preventivo, el cual será determinístico y denotaremos con  $MDT_p$  (Mean Down Time for planned replacement). Si en cada mantenimiento preventivo el sistema es reemplazado y el tiempo en que se realiza este reemplazo es relativamente muy pequeño,  $MDT_p$  podrá considerarse igual a cero.

Si el sistema falla antes del periodo  $\tau$ , tendrá que ser reparado y estará fuera de funcionamiento durante el tiempo  $MTTR$  (Mean Time To Repair), el cual consideramos que es aleatorio.

La política tipo I tiene sentido si el costo por fallo del sistema es mayor que el costo por

mantenimiento planeado. La función de costo asociada a esta política de mantenimiento se obtiene como se indica a continuación.

Consideremos un sistema al que se le aplica una política tipo I al tiempo  $\tau$ , el cual no es aleatorio. Sea  $T$  el tiempo (potencial) a la falla del sistema, el cual se asume que es continuo con función de distribución  $F_T(t)$ , de densidad  $f_T(t)$  y tiempo medio a la falla  $MTTF$ . Sea  $D$  el tiempo requerido para reparar o reemplazar el sistema al momento de fallar, que igualmente consideramos es continuo con cierta función de distribución  $F_D(t)$ , de densidad  $f_D(t)$  y tiempo medio de reparación  $MTTR$ . Después de cada renovación (ya sea por falla o por mantenimiento preventivo), el sistema es llevado a un estado “como nuevo”. Cuando el sistema ha alcanzado el tiempo  $\tau$ , el costo de un mantenimiento preventivo es  $c_p$ , y el costo de reparar o reemplazar el sistema fallado (antes de  $\tau$ ) es  $c_p + c_f$ . El costo  $c_p$  cubre el costo por personal, repuestos, y demás necesidades para el mantenimiento preventivo, mientras que el costo  $c_f$  cubrirá los costos por el fallo del sistema, algunos de los cuales se mencionaron al inicio del capítulo.

El costo total por periodo de renovación es igual al costo por mantenimiento mas el costo extra por fallo del sistema, siempre que este ocurra. El costo promedio por periodo de reemplazo es entonces

$$c_p + c_f \cdot P(T < \tau) = c_p + c_f \cdot F_T(\tau) \quad (6.1)$$

Según el esquema de renovaciones mostrado en la figura 6.1, el tiempo promedio entre renovaciones ( $MTBR$ ), con periodo de mantenimiento preventivo  $\tau$ , estará formado por el tiempo en que el sistema estará funcionando<sup>1</sup> ( $MUT(\tau)$ ) mas el tiempo promedio en que el sistema estará fuera de funcionamiento ( $MDT(\tau)$ ), ya sea por fallas<sup>2</sup> ( $MDT_F$ ) o por mantenimiento planeado ( $MDT_P$ ). Tenemos entonces la siguiente expresión para  $MTBR$ :

$$MTBR(\tau) = MUT(\tau) + MDT(\tau)$$

$$MUT(\tau) = \int_0^{\tau} t f_T(t) dt + \tau \cdot P(T \geq \tau) \quad (6.2)$$

$$MDT(\tau) = MDT_F \cdot F_T(\tau) + MDT_P \cdot (1 - F_T(\tau)) \quad (6.3)$$

---

<sup>1</sup>En la Política tipo I, usaremos  $MUT(\tau)$  en lugar de  $MTTF$  para denotar el tiempo medio a la falla (o tiempo medio funcionando) en algún periodo de tiempo de longitud  $\tau$

<sup>2</sup>Usaremos  $MDT_F$  en lugar de  $MTTR$  para denotar el tiempo medio de reparación (o tiempo medio fuera de funcionamiento debido a falla).

No es difícil mostrar, para (6.2) que

$$MUT(\tau) = \int_0^\tau t f_T(t) dt + \tau \cdot P(T \geq \tau) = \int_0^\tau (1 - F_T(t)) dt$$

Entonces, podemos obtener  $MTBR$  con la siguiente expresión:

$$MTBR(\tau) = \int_0^\tau (1 - F_T(t)) dt + MDT_F \cdot F_T(\tau) + MDT_P \cdot (1 - F_T(\tau)) \quad (6.4)$$

El costo total por unidad de tiempo ( $C_I(\tau)$ ) para un sistema reparado bajo una política tipo I de mantenimiento preventivo, en un intervalo de tiempo de longitud  $\tau$  está dada por

$$C_I(\tau) = \frac{c_p + c_f \cdot F_T(\tau)}{\int_0^\tau (1 - F_T(t)) dt + MDT_F \cdot F_T(\tau) + MDT_P \cdot (1 - F_T(\tau))} \quad (6.5)$$

### 6.3. Política tipo II (*Block Replacement*).

Bajo una política tipo II, un sistema (subsistema o componente), es reparado o reemplazado en periodos de tiempo  $k\tau$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) y al momento de fallar. Barlow y Hunter (1960), introdujeron la noción de mantenimiento periódico con reparación mínima en cualquier intervención debido a fallas. En este modelo se asume que la tasa de fallas del sistema permanece inalterada por cualquier reparación realizada al sistema entre los mantenimientos periódicos fijados. La figura 6.2 ilustra esta política de mantenimiento.

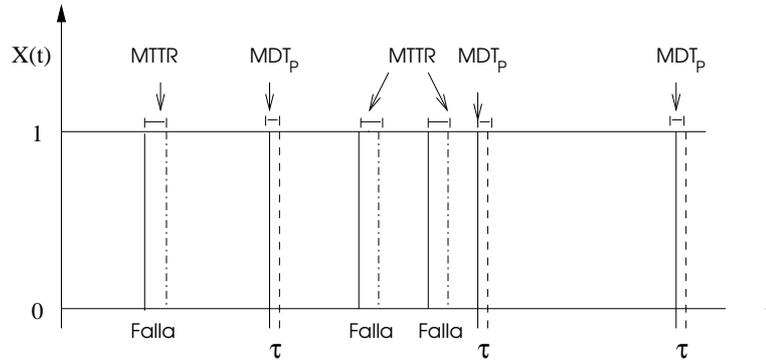


Figura 6.2. Política de mantenimiento preventivo Tipo II

Consideremos un sistema que es puesto en operación al tiempo  $t = 0$  y al que se le aplica una política de mantenimiento tipo II. El tiempo a la falla  $T$  tiene función de distribución  $F_T(t)$ , de densidad  $f_T(t)$  y tiempo medio a la falla  $MTTF$ . Denotamos con  $D$  el tiempo

requerido para reparar o reemplazar el sistema al momento de fallar, con cierta función de distribución  $F_D(t)$ , de densidad  $f_D(t)$  y tiempo medio de reparación  $MTTR$ . En una política tipo II, consideraremos las renovaciones como el tiempo de reemplazo o mantenimiento  $\tau$  mas el tiempo requerido en realizar este mantenimiento o reemplazo ( $MDTP$ ). Después de cada renovación, el sistema es llevado a un estado “como nuevo”, y el costo asociado a esta operación es  $c_p$ , si el sistema falla antes del periodo de tiempo  $\tau$ , el sistema será mínimamente reparado, según se explicó anteriormente, y en cada una de estas reparaciones el costo será  $c_f$ .

Sea  $N(\tau)$  el número de fallas o reemplazos en un intervalo de tiempo de longitud  $\tau$ , y  $W_{10}(\tau) = E(N(\tau))$  el número promedio de fallas o reemplazos, el cual se obtiene como se indica en la la sección 5.5.6. Entonces, el costo total por unidad de tiempo ( $C_{II}(\tau)$ ) para un sistema reparable bajo una política tipo II de mantenimiento preventivo, en un intervalo de tiempo de longitud  $\tau$  está dada por

$$C_{II}(\tau) = \frac{c_p + c_f \cdot W_{10}(\tau)}{\tau + MDTP} \quad (6.6)$$

## Capítulo 7

# Optimización para el Mantenimiento

### 7.1. Introducción

La optimización que se realiza en este trabajo corresponde tanto al mantenimiento preventivo como al correctivo. Para ambos casos suponemos un sistema formado por  $n$  componentes independientes ( $n = 1, 2, \dots$ ), refiriéndonos con esto a que estos componentes fallan y se reparan independientemente de los demás, lo que implica que la operación y mantenimiento de un componente no son influenciados por el estado de los otros componentes.

Cada componente diferente del sistema es modelado mediante la teoría de renovación, por lo que cada componente diferente representa un proceso de renovación independiente. Es importante hacer notar que, aunque cada uno de estos componentes nos representan un proceso de renovación, el sistema formado por estos no es un proceso de renovación, ni se considera así en este trabajo. Se sabe que para que pueda asumirse esto último (ver la sección 5.5.5), cada proceso de renovación debe ser un Proceso de Poisson Homogéneo (HPP), con todas las limitantes que esto implica, tanto en la distribución del tiempo a la falla del componente, como en el tiempo de reparación (cuando se asume un HPP, el tiempo de reparación se considera insignificante), y el proceso de renovación resultante es también un HPP.

En este trabajo se pretende considerar, tanto en los tiempos a la falla como de reparación, las distribuciones de probabilidad más usuales (aunque en algunas ocasiones quedarán ciertas restricciones, como se verá más adelante), lo que significa que, en nuestro caso, el tiempo de reparación puede no ser insignificante.

## 7.2. Selección óptima de periodos de mantenimiento preventivo

Como se mencionó anteriormente, el mantenimiento preventivo se divide en dos políticas, las basadas en la *edad* del sistema (age based) y las basadas en periodos fijos de mantenimiento (block replacement). En ambos casos, se busca encontrar periodos óptimos de mantenimiento preventivo de forma tal que minimicen los costos asociados a reparaciones y mantenimientos planeados en los componentes del sistema, pero que mantengan cierto nivel de disponibilidad del mismo. A continuación se describe más a detalle los modelos a optimizar.

### 7.2.1. Definición del modelo a optimizar. Funciones objetivo y restricciones

**Política tipo I (Age Based).** El modelo usado para el costo de cada componente es el descrito en la sección 6.2. Como ya se mencionó anteriormente, en la optimización, además de minimizar los costos relacionados con la política de mantenimiento, queremos que el sistema se mantenga disponible durante cierto tiempo dentro mientras se le aplica mantenimiento preventivo a sus componentes. La disponibilidad promedio en el intervalo  $\tau$ , para un componente del sistema la obtenemos mediante la expresión

$$\begin{aligned} A_{avg}(\tau) &= \frac{MUT(\tau)}{\text{long. esperada del intervalo}} \\ &= \frac{\int_0^\tau (1 - F(t))dt}{\int_0^\tau (1 - F(t))dt + MDT_F \cdot F(\tau) + MDT_P \cdot (1 - F(\tau))} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Como puede verse, la expresión anterior nos proporciona el valor promedio esperado de disponibilidad del sistema en el intervalo de longitud  $\tau$ .

Entonces, el problema de optimización para un sistema formado por componentes independientes sujetos a una política de mantenimiento tipo I, queda expresado en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min_{\tau} \quad & \sum_{i=1}^n C_{I_i} \\ \text{sujeto a} \quad & A_S(\tau) \geq c \end{aligned} \quad (7.2)$$

donde  $C_{I_i}$  se calcula según (6.5),  $c \in (0, 1)$  es un valor dado, y  $A_S$  es la disponibilidad esperada promedio del sistema en el intervalo de longitud  $\tau$ .

En (7.2) hemos considerado solamente los costos por mantenimiento o fallas de los componentes. Otro costo que puede contemplarse es aquel relacionado con el fallo del sistema.

Es evidente que en un sistema formado por varios componentes, el fallo de alguno de ellos puede o no ocasionar el fallo del sistema, esto dependerá de la posición del componente en el sistema y su disponibilidad a un determinado tiempo  $t$ . Una forma de asociar una probabilidad de fallo del sistema debido a un componente en particular es mediante las medidas de importancia de componentes, dos de las cuales se muestran en el capítulo 4. Supongamos en principio que es posible obtener una medida de importancia para cada componente de forma tal que pueda relacionarse en forma efectiva su falla con la falla del sistema. Denotaremos con  $I_c$  dicha medida de importancia, entonces, la función objetivo a minimizar será:

$$C_I(\tau) = \frac{c_p + c_f \cdot F(\tau) + F(\tau) \cdot I_c \cdot c_s}{\int_0^\tau (1 - F(t))dt + MDT_F \cdot F(\tau) + MDT_P \cdot (1 - F(\tau))} \quad (7.3)$$

donde  $c_s$  es el costo por fallo del sistema. Se tendrá entonces que sustituir esta ecuación en el modelo a optimizar dado en (7.2).

Vale la pena hacer algunos comentarios al respecto. Es cierto que el incluir un costo por fallo del sistema es un enfoque más realista de las situaciones en que se tiene un sistema formado por varios componentes, sin embargo, el incluir esta consideración presenta muchos inconvenientes. Las medidas de importancia de componentes dadas por ejemplo en el capítulo 4, y algunas otras, se basan en las *confiabilidades* de los componentes. Para un sistema reparable esta métrica no es muy útil cuando se consideran intervalos de tiempo relativamente grandes, en los que el componente o sistema sufrirá fallas y reparaciones. Si se pensara en introducir valores de disponibilidad del componente en lugar de su confiabilidad, restringiría su uso, ya que no es posible incluir algunas distribuciones de fallas y reparación, por el requerimiento de obtener su transformada de Laplace e invertirla (ver el capítulo 5). El obtener dicha medida de importancia quedó fuera del alcance de esta tesis, sin embargo, se hicieron algunos intentos por aproximarla, basados sobre todo, en importancias estructurales de los componentes. El primer intento fue el considerar la medida de importancia estructural de Birnbaum (ver 4.3), pero, en sistemas con varios componentes, este valor es muy pequeño (dado que es una proporción), y realmente no refleja la importancia de los componentes respecto al sistema total (por ejemplo, uno en serie cuya falla ocasiona la falla del sistema). Luego, se pensó en asignarle a  $I_c$  valores de 1 o 0 para cada componente, dependiendo si este, al fallar, causaba o no la falla del sistema, pero esta medida no considera el estado de los demás componentes con el estado del sistema, por ejemplo, mientras transcurre el tiempo de reparación de un componente que ha fallado, puede fallar otro que, al combinarse con la falla del primero, ocasione la falla del sistema. Otro intento fue el de normalizar el valor de importancia estructural de Birnbaum, de forma tal que el componente con mayor valor tuviera una  $I_c = 1$ . Aunque esto último fue el que mejores resultados dió (por

ser el que produjo un valor de costo menos alejado del valor correcto), se tiene el problema que, si todos los componentes tienen la misma medida de importancia, todos tendrán valor de 1, independientemente de si causan o no la falla del sistema, considérese por ejemplo, un sistema formado por componentes en paralelo, donde a todos se les asignaría valor 1 y no es verdad que la falla de cualquiera de esos componentes ocasionará la falla del sistema. Algunos resultados obtenidos con esta última aproximación se muestra en el capítulo 9. Otra forma de considerar el costo de fallo del sistema a través de sus componentes, es incluirlo en los costos de fallo de los componentes, tomando en cuenta la importancia que tiene cada uno en el sistema, para lo cual puede emplearse, por ejemplo, la medida de Birnbaum.

Debido a todo lo anterior, el modelo a minimizar será el que se indica en 7.2, o lo que es igual, utilizando la función de costo 7.3, pero con  $I_c = 0$ .

**Política tipo II (*Block Replacement*).** Para un componente, el costo asociado con esta política es el que se describe en la sección 6.3. La restricción de disponibilidad promedio en un intervalo  $\tau$  para esta política de mantenimiento estará dada por:

$$A_{avg}(\tau) = \frac{MUT(\tau)}{\text{long. esperada del intervalo}} = \frac{\tau - MDT_F \cdot W_{10}(\tau)}{\tau + MDT_P} \quad (7.4)$$

Entonces, el problema de optimización para un sistema formado por componentes independientes sujetos a una política de mantenimiento tipo II, es expresado mediante:

$$\begin{aligned} & \underset{\tau}{\text{mín}} && \sum_{i=1}^n C_{II_i} \\ & \text{sujeto a} && A_S(\tau) \geq c \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde  $c \in (0, 1)$  es un valor dado, y  $A_S$  es la disponibilidad esperada promedio del sistema.

Como en la política tipo I, al costo de los componentes puede añadirse el costo por fallo del sistema y con el mismo criterio usado en la política anterior. Entonces, el costo a minimizar es el siguiente:

$$C_{II}(\tau) = \frac{c_p + c_f \cdot W_{10}(\tau) + W_{10}(\tau) \cdot I_c \cdot c_s}{\tau + MDT_P} \quad (7.6)$$

Dadas las limitantes que se tienen al obtener  $W_{10}(\tau)$ , esta política de mantenimiento será válida solo para tiempos a la falla y de reparación que correspondan a una distribución exponencial, gamma o uniforme.

### 7.2.2. ¿Cuándo no debería aplicarse mantenimiento preventivo?

Al igual que cuando tenemos un sistema formado por un solo componente, cuando tenemos un sistema multicomponente hay casos en que no es recomendable adoptar un enfoque de mantenimiento preventivo, aunque las razones son un poco diferentes.

Como se explicó en el capítulo 6, el mantenimiento preventivo generalmente es aplicable cuando la distribución del tiempo a la falla es IFR, es decir, que sufre desgaste a través del tiempo. En el caso de un componente cuya distribución de fallas es DFR, las razones por las que no debería usarse mantenimiento preventivo son bastante obvias. No tiene ningún sentido práctico o económico renovar periódicamente un sistema que va mejorando con el tiempo.

Un caso especial es cuando la distribución de tiempos a la falla de un componente no es ni IFR ni DFR, como es el caso de la distribución exponencial. Debido a que la tasa de fallas permanece constante y a la capacidad de “pérdida de memoria” de un componente con este tipo de distribución, el realizar un mantenimiento preventivo no tiene ningún efecto en el sistema, es decir, en cualquier momento del tiempo, el realizar un mantenimiento preventivo tendrá el mismo efecto (es decir, ninguno positivo sobre el componente) que realizar una reparación, pero con el costo adicional que implica el mantenimiento preventivo. Entonces, en este caso, tampoco tiene sentido aplicar este tipo de mantenimiento. Existe otra característica a considerar cuando se trata de un componente. En [1], capítulo 4, se muestra que, el minimizar el costo por unidad de tiempo asociado a una política de mantenimiento preventivo implica el maximizar la disponibilidad del componente. En este caso no tendría ningún sentido imponer alguna restricción de disponibilidad en la optimización. Esto es diferente cuando se trata de un sistema con varios componentes.

Según el enfoque adoptado en este trabajo desarrollado, un sistema podrá estar formado por varios componentes independientes, cada uno con un costo relacionado a su falla y a su mantenimiento preventivo, se asume además que cada componente tendrá asociado cierto tiempo fuera de funcionamiento (*downtime*) en cada falla o en cada mantenimiento o reemplazo planeado que se realice. Por lo general, el costo por fallos es mucho mayor que el costo por mantenimiento preventivo, y una forma de reducir este costo es realizar mantenimientos planeados en intervalos de tiempo cortos. Si no se consideraran tiempos perdidos en cada mantenimiento (o incluso en cada fallo, como se asume muchas veces en la literatura), la disponibilidad promedio no se vería afectada, porque estos mantenimientos se consideran instantáneos. Al considerar los los tiempos fuera de funcionamiento por cada mantenimiento que se realice, podemos ver que la disponibilidad, en cierto periodo de tiempo, puede empezar a disminuir, a medida que estos mantenimientos se realicen con mayor frecuencia, ya que el tiempo

fuera de funcionamiento será mayor. Entonces, el imponer una restricción de disponibilidad empieza a tener sentido, ya que, si bien el costo puede disminuir al aumentar la frecuencia de mantenimientos, la disponibilidad se reduce también, y esto es algo que no es deseable. Todo esto dependerá mucho, obviamente, de los costos que se consideren y de los tiempos *muertos* en cada operación de mantenimiento preventivo o de reparación por fallos.

Otro panorama que se presenta es cuando se considera que la falla de un componente puede ocasionar a la vez la falla del sistema y que esto ocasionará un costo, que cabría suponerse, es mucho mayor que el del componente. Es entonces cuando entran en juego los costos por fallo del sistema y los costos por fallo de los componentes. Una forma de disminuir los costos por fallo del sistema es aumentando la disponibilidad promedio de los componentes, que bajo un enfoque de mantenimiento preventivo, puede lograrse al realizar mantenimientos preventivos en intervalos de tiempo más cortos (sobre todo si el tiempo de reparación de los componentes es mayor que el tiempo de mantenimientos planeados), pero cuando el número de componentes es relativamente grande, o los costos por realizar mantenimientos preventivos son grandes también, entonces el fallo del sistema empezará a pesar menos considerando los costos de mantener cada componente de ese sistema. En estos casos, el imponer una restricción de disponibilidad en el sistema es lógico también, tanto para reducir los costos totales como para mantener al sistema operando en un nivel aceptable. En un sistema formado por varios componentes la consideración anterior respecto a la distribución IFR aplicable a un componente puede no aplicarse, particularmente en el caso de una distribución de tiempos a la falla exponencial. Si bien es cierto que un mantenimiento preventivo no beneficia en nada a un componente por separado, si puede ayudar a evitar la falla del sistema, y esto hace que tenga sentido el aplicar mantenimiento preventivo en los componentes de este tipo. Esto sucede cuando hay mucha disparidad en las tasas de falla de los componentes, por ejemplo, si en un sistema de dos componentes uno tiene una tasa de falla de  $\lambda = 0,000015$  y el otro de  $\lambda = 0,015$ , el funcionamiento del sistema dependerá mucho de ese componente con la tasa de fallas más alta (dependiendo también de su posición en la estructura del sistema), en este caso podría pensarse en aplicar un mantenimiento preventivo en periodos relativamente cortos de tiempo o también usar redundancias en este componente (por ejemplo, varios componentes del mismo tipo en paralelo). Un caso fácilmente identificable en el que no sería recomendable adoptar un enfoque preventivo para un sistema formado por varios componentes, sería aquel en que sus componentes son “altamente confiables”, es decir, cuando el tiempo de vida de sus componentes es tan grande que es más probable que se desche el sistema por ser obsoleto que por fallos del mismo.

Como puede suponerse, la aplicación del enfoque desarrollado en este trabajo tiene más sentido en sistemas complejos, donde vale la pena tomar en consideración cada componente para

aplicar una política de mantenimiento preventivo. Varias de estas consideraciones se ilustrarán en los ejemplos en que se aplicaron los métodos desarrollados.

### 7.3. Optimización de parámetros en mantenimiento correctivo

Bajo un esquema de mantenimiento correctivo, un sistema (subsistema o componente) es reparado o reemplazado cada vez que falla. La disponibilidad a largo plazo, está dada por las distribuciones de tiempos a la falla y de reparación y sus parámetros. El mejorar la disponibilidad de un sistema sujeto a mantenimiento correctivo implica el modificar los parámetros de estas distribuciones. Por lo general, no resulta posible o es al menos muy difícil modificar los parámetros de la distribución del tiempo a la falla, ya que esto implicaría incluso el cambio completo del sistema o componente en cuestión. Entonces, es mucho más factible modificar los parámetros de la distribución del tiempo de reparación, que implicaría acciones como capacitación del personal encargado de realizar tales mantenimientos, el abastecimiento planeado de partes de repuesto, emplear técnicas más eficaces de detección de fallas, entre otras, que son más fáciles de implementar.

#### 7.3.1. Definición del modelo a optimizar. Funciones objetivo y restricciones

Cuando se optimiza bajo un esquema de mantenimiento correctivo, se buscan los parámetros de la distribución del tiempo de reparación tales que proporcionen un valor determinado de disponibilidad a largo plazo. Esta optimización implica disminuir el valor esperado del tiempo de reparación ( $MTTR = E(D)$ ), a través de los parámetros  $\theta$ , de  $F_D(t; \theta)$ , donde  $\theta$  es un vector de parámetros, lo que implica obviamente un costo. La función de costo relacionada con esta disminución del valor esperado la denotaremos por  $C_R(\theta_k)$  y está dada por

$$C_R(\theta_k) = x [E(D; \theta_0) - E(D; \theta_k)]^y \quad (7.7)$$

donde  $\theta_0$  es el vector de parámetros iniciales, y  $E(D; \theta_k) \leq E(D; \theta_0)$ .  $x$  es la escala monetaria asociada a esta disminución y  $y$  representa el esfuerzo necesario para disminuir este valor esperado.

El problema de optimización queda entonces de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\theta}_k} \quad & \sum_{i=1}^m C_{R_i}(\boldsymbol{\theta}_k) \\ \text{sujeto a} \quad & A_{lim} \geq c \end{aligned} \tag{7.8}$$

donde  $c \in (0, 1)$  es un valor dado,  $A_{lim}$  es la disponibilidad límite del sistema y  $m \leq n$  son los componentes del sistema a optimizar. Esta optimización es usada para un sistema de componentes sujetos a mantenimiento correctivo, o simplemente, para mejorar de la disponibilidad límite del componente o sistema.

Otra forma de atacar este problema de optimización, y que también se usó en este trabajo, fue el enfoque multiobjetivo. Entonces, la optimización se convierte en un problema de optimización multiobjetivo sin restricciones, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\theta}_k} \quad & F = [f_1(\boldsymbol{\theta}_k), f_2(\boldsymbol{\theta}_k)] \\ & f_1 = \sum_{i=1}^m C_{R_i}(\boldsymbol{\theta}_k) \\ & f_2 = \bar{A}_{lim} \end{aligned} \tag{7.9}$$

donde  $\bar{A}_{lim} = 1 - A_{lim}$ .

## Capítulo 8

# El algoritmo de Optimización

### 8.1. Introducción

En este capítulo se presentará el algoritmo usado para la optimización de sistemas según se expuso en el capítulo anterior. El algoritmo usado llamado IS-PAES, forma parte de los métodos evolutivos de optimización, así que antes de explicar el funcionamiento de dicho algoritmo, se dará una breve introducción a los métodos evolutivos y a ciertos conceptos relacionados y que serán aplicados en este trabajo de tesis, como la optimización multiobjetivo y dominancia de Pareto.

### 8.2. Breve introducción a las estrategias evolutivas para optimización

Los algoritmos evolutivos (algoritmos genéticos, estrategias evolutivas, programación evolutiva) son algoritmos estocásticos que mantienen un conjunto (*población*) de *individuos*  $P(t) = \{x_1^t, \dots, x_n^t\}$  en cada iteración  $t$  y cada individuo representa una solución potencial al problema de optimización en cuestión.

Estos algoritmos están inspirados en un modelo de evolución biológica natural y tratan de modelar el proceso colectivo de aprendizaje dentro de una *población* de *individuos*, cada uno de los cuales representan no solo un punto de búsqueda en el espacio de soluciones potenciales a un problema dado, sino también puede contener conocimiento actual sobre las “leyes” del medio ambiente.

### 8.2.1. Estructura de un algoritmo evolutivo

Una estructura general de un algoritmo evolutivo se muestra a continuación:

*begin*

*t* ← 0 *initialize* *P*(*t*)

*evaluate* *P*(*t*)

*while* (*not termination-condition*) *do*

*begin*

*t* ← *t* + 1

*select* *P*(*t*) *from* *P*(*t* - 1)

*alter* *P*(*t*)

*evaluate* *P*(*t*)

*end*

*end*

Algunos términos de importancia en estos algoritmos son:

- Individuo:

$$x \in \mathbb{R}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Población o generación a un tiempo *t*:

$$P(t) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \quad m = \text{num. individuos}$$

- Función de aptitud:

$$f(x), \quad \text{donde: } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

- Operadores genéticos:

$$\Omega = \{w_{\theta_1}, \dots, w_{\theta_z} \mid w_{\theta_i}: P(t) \rightarrow P(t+1)\}$$

Es un conjunto de operadores genéticos probabilísticos  $w_{\theta_i}$ , capaces de transformar una población  $P(t)$  en otra  $P(t+1)$ . Cada uno de estos operadores es controlado por parámetros específicos  $\theta_i \in \mathbb{R}$ .

Algunos de estos operadores son:  $s_{\theta_i}$  (operador de selección),  $c_{\theta_j}$  (operador de cruza) y  $m_{\theta_k}$  (operador de mutación).

### 8.2.2. Estrategias Evolutivas (EE)

Las EE son algoritmos que tratan de imitar los principios de evolución natural como un método para resolver problemas de optimización. Fueron desarrollados en Alemania durante la década de 1960 por Ingo Rechenberg y Hans-Paul Schwefel.

En este tipo de algoritmos se usa una representación en punto flotante y existen versiones individuales y poblacionales. Los hijos (o hijo) generados son evaluados y comparados contra sus padres y el mejor de ellos sobrevive para formar parte (como un nuevo padre) en la siguiente generación.

Las EE pueden clasificarse de la siguiente manera:

- EE-(1 + 1): 1 hijo es generado por 1 padre
- EE-( $\mu + 1$ ): Estrategia poblacional donde  $\mu > 1$  padres son recombinados para formar 1 hijo
- EE-( $\mu + \lambda$ ): Estrategia poblacional donde  $\mu$  padres generan  $\lambda$  hijos formando una población temporal ( $\mu + \lambda$ ) que es reducida mediante selección a una nueva población de  $\mu$  individuos
- EE-( $\mu, \lambda$ ): Estrategia poblacional donde  $\mu$  padres generan  $\lambda$  hijos  $\mu > \lambda$  y mediante un proceso de selección se forma una nueva población de  $\mu$  individuos tomados solamente de la población de  $\lambda$  hijos

El algoritmo usado en este trabajo de tesis es del tipo EE-( $\mu + \lambda$ ), así que antes de explicar el algoritmo en particular, se dará un esquema general de este tipo de estrategia, con el fin de explicar los operadores genéticos que se involucran.

#### EE-( $\mu + \lambda$ )

La estrategia evolutiva ( $\mu + \lambda$ ) es una estrategia poblacional y generacional, en esta se aplican operadores de cruza y mutación y tiene parámetros autoadaptables. Los términos importantes que se involucran son los siguientes:

- individuo:

$$a = (x, \sigma, \theta) = ((x_1, \dots, x_n), (\sigma_1, \dots, \sigma_n), (\theta_1, \dots, \theta_m))$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de variables objetivo

$\sigma$  es el vector de desviaciones estándar (variables de control)

$\theta$  es un vector de ángulos de rotación,  $m = \frac{n(n-1)}{2}$  (opcional)

- función de aptitud:

$$\Phi(a) = f(x) \text{ y } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

**Esquema general del algoritmo EE-( $\mu + \lambda$ )** Para esta EE, el esquema es el siguiente:

$\mu$  = número de padres

$\lambda$  = número de hijos

*begin*

$t \leftarrow 0$  initialize  $P(0) := \{a_1(0), \dots, a_\mu(0)\}$

evaluate  $P(t) := \{\Phi(a_1(0)), \dots, \Phi(a_\mu(0))\}$  where  $\Phi(a_k(0)) = f(x_k(0))$   $k = 1, \dots, \mu$

while (not termination-condition) do

$a'_k(t) \leftarrow c'(P(t))$   $k = 1, \dots, \lambda$  (crossover)

$a''_k(t) \leftarrow m'_{\tau, \tau', \beta}(a'_k(t))$   $k = 1, \dots, \lambda$  (mutation)

$P''(t) \leftarrow \{a''_1(t), \dots, a''_\lambda(t)\}$

evaluate  $P''(t) := \{\Phi(a''_1(t)), \dots, \Phi(a''_\lambda(t))\}$  where  $\Phi(a''_k(t)) = f(x''_k(t))$   $k = 1, \dots, \lambda$

$P(t+1) := s_{(\mu+\lambda)}(P(t) \cup P''(t))$  selection  $t \leftarrow t + 1$

*end*

*end*

**Operadores** Los operadores utilizados son los siguientes:

- Cruza

- discreta

Seleccionamos 2 individuos  $S, T$   $S \neq T$  de la población de  $\mu$  padres

$$\begin{aligned}
 S &= (x_S, \sigma_S, \theta_S) \\
 &= ((x_{S1}, \dots, x_{Sn}), (\sigma_{S1}, \dots, \sigma_{Sn}), (\theta_{S1}, \dots, \theta_{Sm})) \\
 T &= (x_T, \sigma_T, \theta_T) \\
 &= ((x_{T1}, \dots, x_{Tn}), (\sigma_{T1}, \dots, \sigma_{Tn}), (\theta_{T1}, \dots, \theta_{Tm}))
 \end{aligned}$$

un hijo se genera de la siguiente forma:

$$a'_{ij} = (x_{ij}, \sigma_{ij}, \theta_{ij}) = \begin{cases} (x_{Sj}, \sigma_{Sj}, \theta_{Sk}) & \text{si } \alpha_{ij} \sim U(0, 1) \leq \frac{1}{2} \\ (x_{Tj}, \sigma_{Tj}, \theta_{Tk}) & \text{si } \alpha_{ij} \sim U(0, 1) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, \lambda$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$k = 1, \dots, m$$

- intermedia

Seleccionamos 2 individuos  $S, T$   $S \neq T$  de la población de  $\mu$  padres

$$\begin{aligned}
 S &= (x_S, \sigma_S, \theta_S) \\
 &= ((x_{S1}, \dots, x_{Sn}), (\sigma_{S1}, \dots, \sigma_{Sn}), (\theta_{S1}, \dots, \theta_{Sm})) \\
 T &= (x_T, \sigma_T, \theta_T) \\
 &= ((x_{T1}, \dots, x_{Tn}), (\sigma_{T1}, \dots, \sigma_{Tn}), (\theta_{T1}, \dots, \theta_{Tm}))
 \end{aligned}$$

un hijo se genera de la siguiente forma:

$$a'_{ij} = \left( \left( \frac{x_{Sj} + x_{Tj}}{2} \right), \left( \frac{\sigma_{Sj} + \sigma_{Tj}}{2} \right), \left( \frac{\theta_{Sk} + \theta_{Tk}}{2} \right) \right)$$

$$i = 1, \dots, \lambda$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$k = 1, \dots, m$$

- Mutación

- Mutación de sigma

$$\sigma_i = \sigma_i e^{\tau' \cdot N(0,1) + \tau \cdot N_i(0,1)}$$

- Mutación de ángulos

$$\theta_k = \theta_k + \beta \cdot N_k(0,1)$$

- Mutación del individuo

$$\Delta_{x_i} = \sigma_i \cdot N(0,1)$$

$$x_i = x_i + \Delta_{x_i}$$

- Selección

- Ordenar  $P(t) \cup P''(t)$
- Tomar los  $\mu$  mejores individuos

La figura 8.2.2 muestra la evolución de una EE- $(\mu + \lambda)$  hacia el óptimo en un problema de maximización. Los puntos oscuros representan los individuos de la población y el punto mayor es el individuo con mejor aptitud en cada etapa del proceso.

**Diversidad.** La característica más importante de los algoritmos evolutivos en general, es la diversidad, entendiéndose por diversidad la dispersión de individuos en el espacio de búsqueda definido por las variables objetivo del problema a optimizar. Una buena mecanismo de diversidad significa también una buena exploración del espacio de búsqueda, y evitar una convergencia prematura hacia óptimos locales. A diferencia de otros métodos de optimización, en los evolutivos es deseable tener tanto individuos factibles como infactibles, sobre todo en espacios de búsqueda no convexos, ya que, al recombinarse estos individuos, pueden llegar a mejores soluciones, por ejemplo, en regiones factibles disjuntas. Actualmente, gran parte de la investigación en el área de la optimización evolutiva es en mecanismos eficaces de diversidad.

### 8.2.3. Optimización multiobjetivo mediante el criterio de Dominancia de Pareto

Para muchos problemas de toma de decisiones del mundo real hay una necesidad de optimizar simultáneamente múltiples objetivos. La optimización multiobjetivo puede describirse como el proceso de encontrar un vector de variables de decisión que satisfaga restricciones y optimice un vector de funciones cuyos elementos representan las funciones objetivo. Estas funciones conforman una descripción matemática de criterios de desempeño los cuales

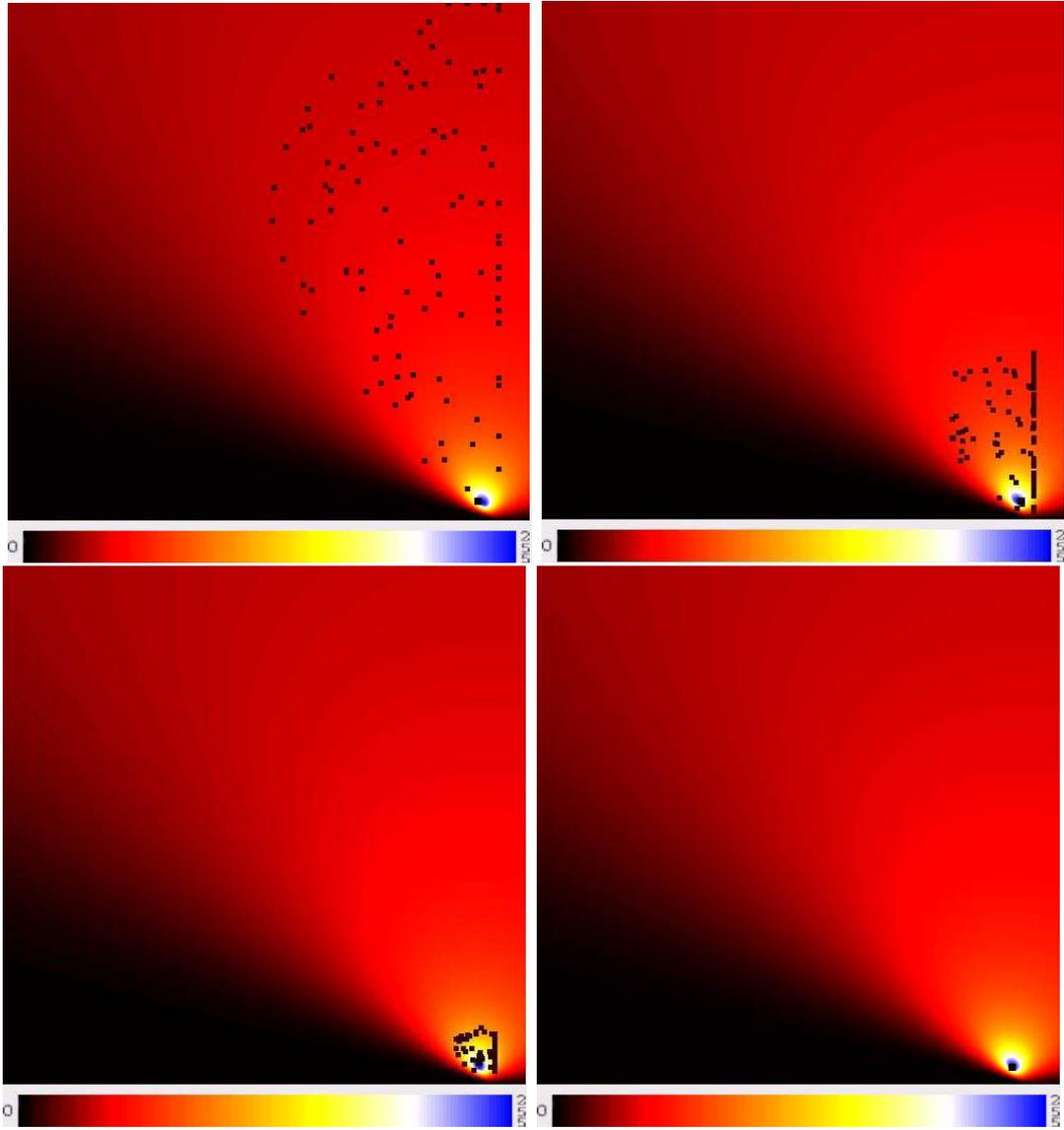


Figura 8.1. El proceso de optimización de una EE

usualmente se encuentran en conflicto, de ahí que el término *optimizar* signifique encontrar una solución que proporcione valores que sean aceptables para el tomador de decisiones.

Lo anterior puede expresarse de manera más formal como:

Encontrar  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  que optimice el vector de funciones

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))$$

que satisfaga las  $m$  restricciones de desigualdad y las  $p$  restricciones de igualdad

$$g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es el vector de variables de decisión.

Denotaremos con  $\mathcal{S}$  el espacio total de búsqueda y con  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$  la región factible.

Las definiciones que se dan a continuación son importantes. Sin pérdida de generalidad, se supone un problema de minimización.

**Definición 8.1 (Óptimo de Pareto)** *Una solución  $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$  es óptimo en el sentido de Pareto si para cada  $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$  e  $I = \{1, 2, \dots, k\}$ :*

$$\text{para todo } i \in I : f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{y})$$

*o hay al menos un  $i \in I$  tal que*

$$f_i(\mathbf{y}) > f_i(\mathbf{x})$$

En palabras,  $\mathbf{x}$  es un óptimo de Pareto si al menos un componente en  $\mathbf{x}$  es mejor que  $\mathbf{y}$ , y los demás componentes no son peores.

**Definición 8.2 (Dominancia de Pareto)** *Una solución  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$  domina a otra  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$ , lo cual denotaremos con  $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ , si y solo si,  $\mathbf{u}$  es parcialmente menor que  $\mathbf{v}$ , por ejemplo, para todo  $i \in I$ ,  $u_i \leq v_i$ , y existe algún  $i \in I$  tal que  $u_i < v_i$*

**Definición 8.3 (Conjunto de Pareto)** *Es el conjunto de soluciones no dominadas en el espacio de las variables de decisión.*

**Definición 8.4 (Frente de Pareto)** *Es la proyección del Conjunto de Pareto en el espacio de funciones.*

### 8.3. El algoritmo de optimización IS-PAES

El algoritmo usado en los problemas de optimización de esta tesis es el IS-PAES (Inverted Shrinkable Pareto Archived Evolution Strategy), propuesto por A. Hernández y otros en [18], que a su vez está basado en el algoritmo PAES (Pareto Archived Evolution Strategy), propuesta por Knowles y Corne en [17].

El IS-PAES está basado en una  $EE-(\mu + \lambda)$ , pero incorpora ciertas características que lo hacen un algoritmo de optimización multiobjetivo superior a varios otros que utilizan el criterio de dominancia de Pareto, incluyendo al PAES. Las características más importantes se describen a continuación. Para mayor referencia y detalles al respecto puede recurrirse a [18], [19], [20] o [21].

- **Diversidad.** El mecanismo de diversidad utilizado tanto en el PAES como el IS-PAES es a través de una malla adaptable en un espacio coordinado definido por las variables objetivo, y es mediante esta malla que es posible ubicar individuos en el espacio de búsqueda y detectar regiones mas o menos pobladas. Un problema con el enfoque propuesto en el PAES es que, para problemas pequeños el número de celdas es muy grande y puede ser muy restrictivo debido a las limitaciones de memoria física de la computadora. La propuesta hecha en el IS-PAES, y que viene a resolver este problema, es “invertir” la descripción de la malla, es decir, almacenar solamente los datos de la celda donde está localizada cada solución.
- **Reducción del espacio.** Otra característica importante del algoritmo es la de “encoger” (shrink) el espacio de búsqueda, lo cual se logra a través de la información global de los individuos que han estado en la región factible, lo que permite concentrar la búsqueda en regiones más pequeñas a medida que evoluciona el proceso de optimización. Eventualmente, al realizarse esta operación en forma repetitiva, el tamaño del espacio que se inspecciona contendrá la solución deseada, ya sea para el caso multiobjetivo o cuando se trate de una función objetivo con restricciones.
- **Uso de un archivo externo.** El IS-PAES, al igual que el PAES, cuenta con un archivo externo para almacenar el conjunto de Pareto en cada iteración del algoritmo.

- Utiliza el criterio de dominancia de Pareto.
- Selección. El proceso de selección no elige buenos individuos, sino que remueve los malos, lo que ayuda a mantener la diversidad de la población.

Un esquema del algoritmo IS-PAES se muestra en la figura 8.3, las funciones encerradas en corchetes (*< funcion >*) se encuentran descritas en [18].

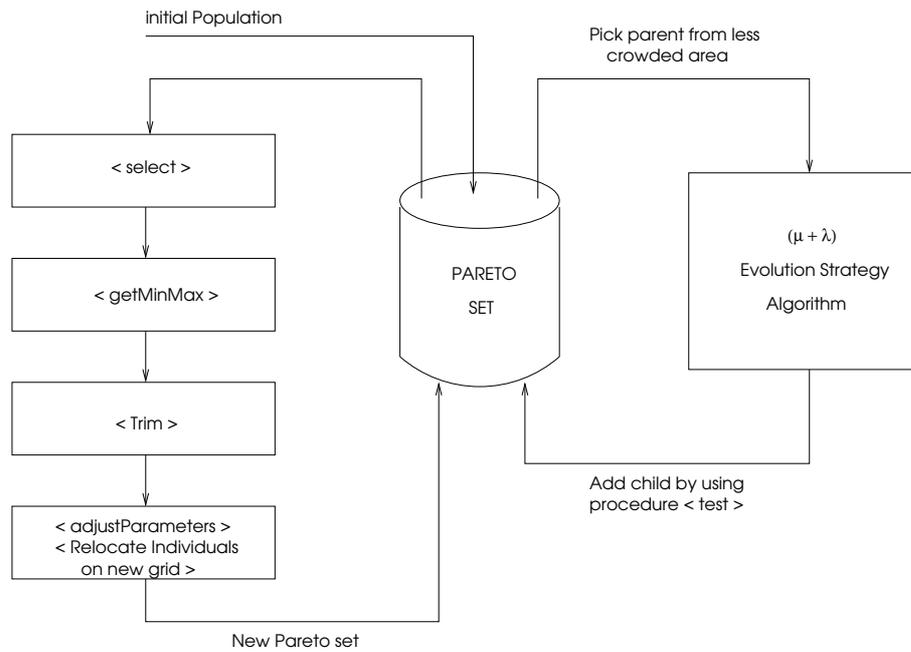


Figura 8.2. Esquema del algoritmo IS-PAES

## Capítulo 9

# Ejemplos y resultados obtenidos

### 9.1. Una comparación entre las políticas de mantenimiento I y II

Existen varias razones para escoger un tipo u otro de política de mantenimiento preventivo, que van desde las meramente administrativas hasta las relacionadas con los costos o las características del sistema en cuestión. En esta sección se expondrán algunas de las diferencias entre ambas políticas y se ilustrarán con un ejemplo, usando los métodos de optimización descritos en los capítulos anteriores.

Como se mencionó anteriormente, la aplicación de cualquier política de mantenimiento preventivo tiene mayor sentido si el sistema (o componentes del sistema) tiene una tasa de falla no decreciente, así que esta es una característica a considerar.

La política tipo I parece ser la política más natural al pensar en mantenimiento preventivo. En esta, el periodo de mantenimiento  $\tau$  se reprograma cuando se presenta una falla del sistema o componente antes del periodo de mantenimiento establecido, esta reprogramación se realiza a partir del momento de falla. Las actividades generadas por la adopción de esta política implican un control riguroso de cada componente y sus tiempos de fallas y reparaciones, lo que hace parecerla complicada de implementar para un sistema complejo, formado por varios componentes. Actualmente este problema puede ser aliviado en parte con la ayuda de diversos programas computacionales que permiten un control muy completo de sistemas con muchos componentes, donde pueden almacenarse y actualizarse de forma automática una gran cantidad de información del sistema y sus componentes, incluyendo los tiempos de operación y de mantenimiento preventivo.

Generalmente, la política tipo II es más fácil de administrar que la política tipo I, ya que solo el tiempo transcurrido (calendarizado) desde el último reemplazo es el que debe ser monitoreado. Por este motivo, esta política de mantenimiento es usada comúnmente donde existe un gran número de componentes similares en servicio.

Si consideramos un mismo intervalo de tiempo  $\tau$ , vemos que la política tipo II puede ser más derrochadora, ya que un número mayor de componentes sin fallar serán reemplazados o reparados que bajo la política tipo I, de forma similar, el número total de mantenimientos o reemplazos, tanto para componentes fallados o en funcionamiento, es mayor. Sin embargo, como puede suponerse, bajo la suposición de una tasa de falla creciente, el número esperado de fallas será menor bajo la política tipo II, ya que exáctamente  $\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor$  mantenimientos planeados serán realizados en  $[0, t]$  bajo la política tipo II, mientras que no más de  $\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor$  pueden llevarse a cabo bajo la política tipo I.

El siguiente teorema nos indica que el número de reemplazos es estocásticamente mayor en una política tipo II.

**Teorema 9.1** *Sea  $N_B(t)$  el número de reemplazos o mantenimientos en  $[0, t]$  bajo la política tipo II, y  $N_A(t)$ , los llevados a cabo bajo una política tipo I en el mismo intervalo de tiempo, entonces*

$$P[N_A(t) \geq n] \leq P[N_B(t) \geq n] \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

La demostración de este teorema puede encontrarse en [1], pag. 67.

Para las consideraciones hechas en este trabajo de tesis, lo anterior tiene una gran importancia en el sentido que, si el costo por fallas del sistema es relativamente grande (y este es tomado en cuenta) en comparación con los costos generados por fallas y principalmente por mantenimientos correctivos en sus componentes, una política tipo II puede ser una mejor opción que la política tipo I, ya que un mayor número de mantenimientos o reemplazos planeados podrán evitar más fallas en el sistema y en consecuencia los costos serán menores. Por otro lado, el que se hagan más reemplazos puede impactar de forma negativa en la disponibilidad del sistema, sobre todo en el caso en que el tiempo requerido para realizar los mantenimientos planeados es mayor a cero, es decir, cuando no se consideran reemplazos “instantáneos”. La razón es obvia, el realizar mayores mantenimientos planeados implicará mayor tiempo sin funcionamiento del sistema, y una disminución en la disponibilidad promedio en algún intervalo de tiempo. El siguiente ejemplo tratará de ilustrar lo anterior.

Consideremos un sistema formado por seis componentes con una estructura como se muestra en la figura 9.1 y con la información que se muestra en la tabla 9.1:

Componente	$F_T(t)$	$F_D(t)$	$MDT_p$	$C_p$	$C_f$
A	gamma( $\alpha = 2, \beta = 60$ )	exp( $\lambda = 0,083$ )	6 hrs	\$ 300	\$ 1200
B	gamma( $\alpha = 2, \beta = 50$ )	exp( $\lambda = 0,083$ )	6 hrs	\$ 300	\$ 1200
C	gamma( $\alpha = 2, \beta = 80$ )	exp( $\lambda = 0,100$ )	6 hrs	\$ 300	\$ 1800
D	gamma( $\alpha = 2, \beta = 85$ )	exp( $\lambda = 0,083$ )	6 hrs	\$ 300	\$ 1500
E	gamma( $\alpha = 3, \beta = 40$ )	exp( $\lambda = 0,100$ )	5 hrs	\$ 250	\$ 1500
F	gamma( $\alpha = 2, \beta = 80$ )	exp( $\lambda = 0,083$ )	8 hrs	\$ 250	\$ 2000

Tabla 9.1. Datos para el ejemplo 1

Asumimos que el costo por fallo del sistema está incluido de alguna forma en los costos de los componentes, de tal forma que  $c_s=0$ .

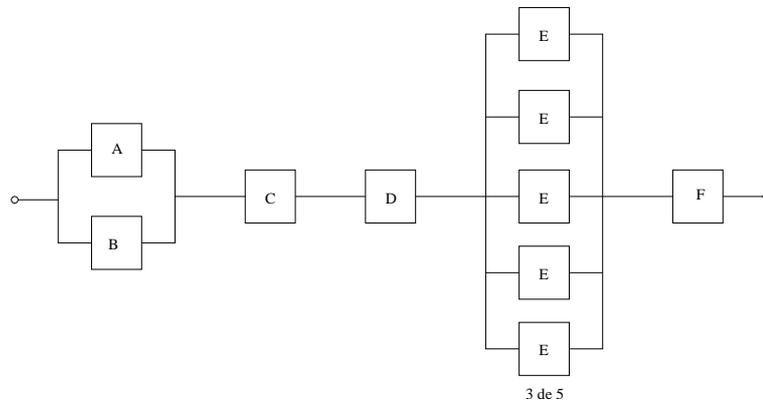


Figura 9.1. Sistema de ejemplo

Este sistema de ejemplo cuenta con la siguiente función de estructura:

$$\phi(\mathbf{X}(t)) = [1 - (1 - X_A(t))(1 - X_B(t))] X_C(t) X_D(t) \left[ \sum_{j=3}^5 \binom{5}{j} X_E^j (1 - X_E)^{5-j} \right] X_F \quad (9.1)$$

Supongamos ahora que nos interesa encontrar el intervalo de mantenimiento  $\tau$  óptimo según los criterios de optimización para el mantenimiento preventivo vistos anteriormente. Supongamos también que nos interesa encontrar un periodo  $\tau$  que nos proporcione una disponibilidad mínima de 0.80. Los resultados de la tabla 9.2 muestran que, para este sistema, solamente con una política de mantenimiento tipo I puede lograrse tal resultado.

Como restricción adicional se impuso que  $0 < \tau < 500$ .

Obviamente, el resultado infactible obtenido para la política tipo II no es debido al algoritmo de optimización, sino a las características del sistema, particularmente en las distribuciones del

Política	$\tau$ (hrs)	Costo $\times$ U.T.	$A_{avg}$	Iteraciones
Tipo I	256.9	\$ 123.9	0.800	200
Tipo II	499.9	\$ 104.8	0.786	200

Tabla 9.2. Periodos de mantenimiento preventivo para el ejemplo 1. Datos originales.

tiempo de falla y de tiempo de reparación, además del tiempo de mantenimiento preventivo ( $MDT_p$ ). Ningún otro algoritmo de optimización puede, en este caso, obtener un resultado factible.

La forma de mejorar las características del sistema, en cuanto a confiabilidad y costo, es el reducir el tiempo en que sus componentes permanecen fuera de operación, ya sea por fallas o por mantenimientos correctivos. En la sección siguiente, se muestra cómo se obtienen los parámetros óptimos de la distribución de reparación de forma tal que se mejore la disponibilidad del sistema.

## 9.2. Parámetros óptimos en la distribución del tiempo de reparación

Consideremos nuevamente el sistema anterior mostrado en la figura 9.1. La disponibilidad a largo plazo para este sistema la obtenemos de la siguiente forma (tabla 9.3):

Componente	$MTTF$ (hrs)	$MTTR$ (hrs)	$A_{lim}$
A	120	12	0.909
B	100	12	0.893
C	160	10	0.941
D	170	12	0.934
E	120	10	0.923
F	160	12	0.930

Tabla 9.3. Disponibilidad límite para el ejemplo 1

Sustituyendo estos valores en (9.1) obtenemos la disponibilidad del sistema:

$$A_{sys} = 0,8065$$

Supongamos ahora que queremos aumentar este valor de disponibilidad hasta 0.90. Para esto, actuamos directamente sobre el tiempo de reparación. En este ejemplo los tiempos de reparación se distribuyen exponencialmente con cierto parámetro  $\lambda$ , que representa la tasa de

reparación, así que la optimización buscará los parámetros  $\lambda^*$  de tal manera que se consiga el valor de disponibilidad deseado y minimicen el costo asociado a este aumento de disponibilidad. Como antes se mencionó, el aumento en la disponibilidad requerirá una disminución del tiempo esperado de reparación  $MTTR$ , usando para esto el modelo de optimización descrito en el capítulo 7. Una pregunta interesante es, ¿qué componentes considerar en esta optimización? En principio podría pensarse en incluir a todos los componentes, pero una forma alternativa de selección puede basarse en alguna medida de importancia de los componentes, como la importancia estructural o de Birnbaum ( $B_\phi(i)$ ). En esta medida obtendremos la importancia para cada componente considerando solo la estructura del sistema, y para nuestro sistema de ejemplo la importancia de cada componente y su valor normalizado en un rango de  $[0, 1]$  se muestra en la tabla 9.4.

Componente	$B_\phi(i)$	$B_\phi^N(i)$
A	0.03125	0.333
B	0.03125	0.333
C	0.09375	1.000
D	0.09375	1.000
E	0.03516	0.375
F	0.09375	1.000

Tabla 9.4. Importancia estructural de componentes para el ejemplo 1

Esta información fue obtenida con el software desarrollado para el análisis y optimización de sistemas. Además de esta medida de importancia, pueden obtenerse las medidas de criticalidad, para algún valor de  $t$  dado.

Como es lógico, los componentes en serie (C, D y F) tienen mayor importancia que los demás, entonces, se optimizarán los parámetros del tiempo de reparación de estos tres componentes. La información relativa a esta optimización se muestra en la tabla 9.5.

Componente	Costo ( $x$ )	Esfuerzo ( $y$ )
C	2000	3
D	1500	2
F	2500	2

Tabla 9.5. Costos para la optimización de parámetros de  $F_D(t)$  en el ejemplo 1

Las variables a optimizar son 3, que corresponden al parámetro  $\lambda$  para cada componente. En esta optimización se utilizó como una restricción adicional ( $0 < \lambda \leq 0,8$ ), para cada componente a optimizar. Los parámetros óptimos obtenidos se muestran en la tabla 9.6.

Componente	$\lambda^*$ (hrs)	$MTTR$ (hrs)	$A_{lim}$
C	0.1298	7.70	0.954
D	0.5822	1.71	0.990
F	0.1784	5.61	0.966

Tabla 9.6. Parámetros óptimos del tiempo de reparación para el ejemplo 1

El costo mínimo obtenido asociado a esta optimización fue de \$285322,47. Se hicieron 1500 iteraciones del algoritmo.

La disponibilidad límite con estos nuevos parámetros es de

$$A_{sys} = 0,90$$

Bajo un enfoque multiobjetivo, se minimiza simultáneamente el costo asociado y la indisponibilidad, lo que nos proporciona el Frente de Pareto que se muestra en la figura 9.2, en el eje horizontal se encuentra el costo y en el vertical la indisponibilidad del sistema.

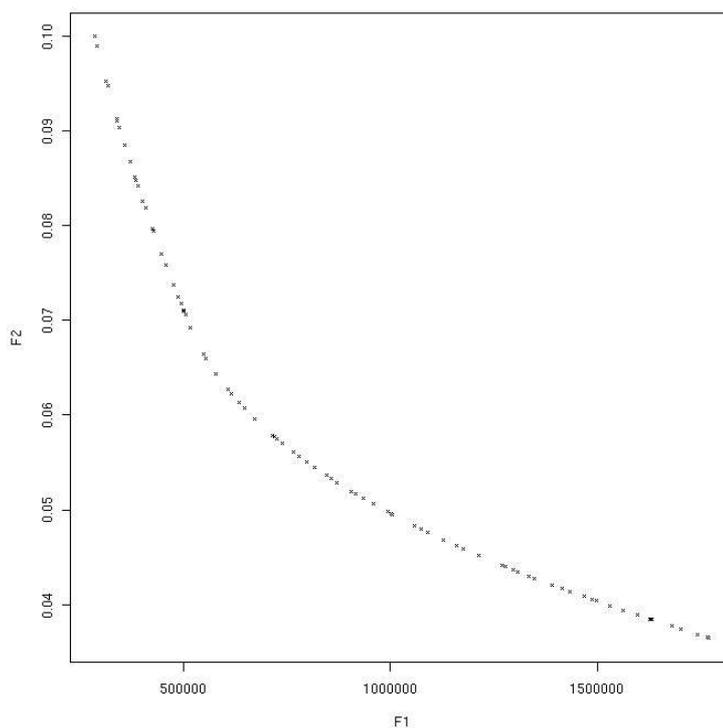


Figura 9.2. Frente de Pareto en la optimización de los parámetros del tiempo de reparación

Esta optimización utiliza la disponibilidad límite, que también puede considerarse como la disponibilidad promedio en un periodo de tiempo muy grande, es decir,  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A_{avg}(\tau)$ , y aunque en una política de mantenimiento preventivo el periodo de mantenimiento es mas bien finito, es de esperarse que los parámetros del tiempo de reparación obtenidos en esta última optimización repercutan (de forma positiva en la disponibilidad) en una política de mantenimiento preventivo, ya sea de tipo I o II. Para mostrar esto, utilizamos nuevamente el algoritmo de optimización, con los nuevos parámetros obtenidos, para encontrar el periodo óptimo de mantenimiento, buscando obtener una disponibilidad mínima de 0.80, como anteriormente se hizo. Los resultados se muestran en la tabla 9.7.

Política	$\tau$ (hrs)	Costo $\times$ U.T.	$A_{avg}$	Iteraciones
Tipo I	99.84	\$ 103.20	0.800	200
Tipo II	144.48	\$ 97.81	0.800	200

Tabla 9.7. Periodos óptimos de mantenimiento preventivo para el ejemplo 1

El sistema desarrollado para evaluar y optimizar sistemas cuenta con un módulo de simulación, que toma en cuenta el modelo y los supuestos especificados, esto permite una comprobación de los resultados obtenidos en cuanto a las disponibilidades. Con los parámetros y periodos de mantenimiento obtenidos, la simulación arroja los resultados que se muestran en la tabla 9.8:

Política	$\tau$ (hrs)	$A_{avg}$ simulada	Costo $\times$ U.T simulado	Tiempo simulado	Num. simulaciones
Tipo I	100	0.8001	\$ 103.4970	10000 hrs	1000
Tipo II	145	0.768	\$ 107.12	10000 hrs	1000

Tabla 9.8. Simulación para el mantenimiento preventivo en el ejemplo 1

En este ejemplo, se mostrarán los resultados que se obtuvieron al tratar de incorporar un costo por falla del sistema y una medida de importancia de componentes para relacionar este costo a cada uno de estos componentes. Se usó la medida de importancia estructural de Birnbaum ( $B_{\phi}(i)$ ) normalizada y se supuso un costo por fallo del sistema  $c_s = \$5000$ . Se tomarán los parámetros para el sistema que se utilizaron en el ejemplo previo, es decir, con los parámetros del tiempo de reparación de los componentes C, D y F optimizados. Los resultados al encontrar los parámetros óptimos de mantenimiento, junto con las simulaciones realizadas, se muestran en las tablas 9.9 y 9.10, respectivamente.

Vemos que el error por esta aproximación es aún notable, por lo que habrá que buscar una

Política	$\tau$ (hrs)	Costo $\times$ U.T.	$A_{avg}$	Iteraciones
Tipo I	99.84	\$ 228.13	0.800	200
Tipo II	144.5	\$ 234.67	0.800	200

Tabla 9.9. Mantenimiento preventivo considerando un costo por fallo del sistema

Política	$\tau$ (hrs)	$A_{avg}$ simulada	Costo $\times$ U.T simulado	Tiempo simulado	Num. simulaciones
Tipo I	100	0.801	\$ 260.07	10000 hrs	1000
Tipo II	145	0.77	\$ 276.28	10000 hrs	1000

Tabla 9.10. Simulación del mantenimiento preventivo considerando un costo por fallo del sistema

medida mejor de importancia de componentes para incluir el costo por fallo del sistema.

### 9.3. Aplicación en un sistema *Lock and Dam*

El siguiente ejemplo está basado en el estudio y análisis de un sistema de navegación *lock and dam* (o de presa y esclusa) realizado por la U.S. Army Corps of Engineers, y que puede encontrarse a detalle en [15]. Los sistemas *lock and dam* son usados para mantener la navegación en canales, y en el estudio realizado en [15], se analiza su confiabilidad para diferentes lapsos de tiempo. Lo interesante de este estudio, aparte de la complejidad del sistema que se analiza, es que incluye las distribuciones y parámetros del tiempo a la falla para cada componente incluido en el sistema, así que, en ese aspecto, es un ejemplo real. Sin embargo, para la aplicación de las técnicas desarrolladas en este trabajo, se tuvieron que suponer varias cosas, como las distribución y parámetros del tiempo de reparación y los costos asociados a reparaciones y mantenimientos. La distribución del tiempo de reparación se supuso lognormal para todos los componentes, por ser esta una distribución que se se usa típicamente para modelar tiempos de reparación. El sistema *lock and dam* está formado por un subsistema eléctrico y otro mecánico, y este último cuenta a su vez con tres subsistemas que controlan las compuertas y válvulas. En las secciones siguientes se describen los subsistemas mecánicos y eléctricos, se presentan también sus diagramas de bloques de confiabilidad y las distribuciones y parámetros asociados a cada componente de los subsistemas. Posteriormente se encontrarán los periodos óptimos de mantenimiento para alcanzar una confiabilidad de 0.90. Antes, se describe la forma en que se obtuvieron los parámetros de la distribución del tiempo de reparación.

### 9.3.1. Obtención de los parámetros del tiempo de reparación

Para este ejemplo, se supuso una distribución Lognormal para los tiempos de reparación, y los parámetros se obtuvieron mediante un valor de mediana requerido y un factor de error. El método se encuentra en [2] y se explica a continuación.

Denotemos con  $D$  el tiempo en que se realiza la reparación de un sistema reparable, y que deseamos encontrar un intervalo  $(d_L, d_U)$  tal que  $P(d_L < D \leq d_U) = 1 - 2\alpha$ . Si el intervalo es simétrico en el sentido de que  $P(D \leq d_L) = \alpha$  y  $P(D > d_U) = \alpha$ , es fácil verificar que  $d_L = e^{-u_\alpha\sigma}$  y  $d_U = e^{u_\alpha\sigma}$ , donde  $u_\alpha$  es el  $\alpha\%$  percentil superior de la distribución normal estándar (i.e.,  $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$ ). Introduciendo la mediana  $d_m = e^\mu$  y  $k = e^{u_\alpha\sigma}$ , los límites superior e inferior,  $d_L$  y  $d_U$ , pueden escribirse

$$d_L = \frac{d_m}{k} \text{ y } d_U = k \cdot d_m \quad (9.2)$$

El factor  $k$  es llamado a menudo el *factor de error*  $(1 - 2\alpha)$ , y  $\alpha$  generalmente es igual a 0.05. Por ejemplo, supongamos que modelamos el tiempo a la falla  $D$  de cierto componente con una distribución lognormal, cuyos parámetros se determinan con la mediana  $d_m$  y un factor de error  $k = 90\%$ , tal que

$$P\left(\frac{d_m}{k} < D < k \cdot d_m\right) = 0,90$$

Si escogemos la mediana con valor de  $d_m = 6,0 \times 10^{-5}$  fallas por hora, y un factor de error  $k = 3$ , entonces el intervalo de 90% es igual a  $(2,0 \times 10^{-5}, 1,8 \times 10^{-4})$ . Los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  de la distribución lognormal pueden determinarse ahora a partir de (9.2):

$$\begin{aligned} \mu &= \ln(d_m) \approx -9,721 \\ \sigma &= \frac{1}{1,645} \ln(k) \approx 0,668 \end{aligned}$$

Con estos parámetros, el tiempo medio de reparación  $MTTR$  es igual a

$$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \approx 7,50 \times 10^{-5} \text{ horas}^{-1}$$

En el ejemplo del sistema lock & dam, se usó un valor  $k = 3$  y  $\alpha = 0,1$ .

### 9.3.2. El subsistema mecánico

El subsistema mecánico está compuesto por los sistemas de compuertas y de válvulas de la esclusa (*lock miter gate machinery* y *lock tainter valve machinery*) y el sistema de compuertas

de la presa (*dam gate machinery*). Estos subsistemas se muestran en las figuras 9.3, 9.4 y 9.5.

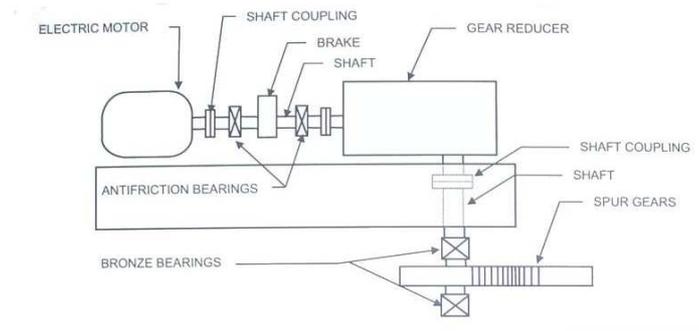


Figura 9.3. Miter gate machinery

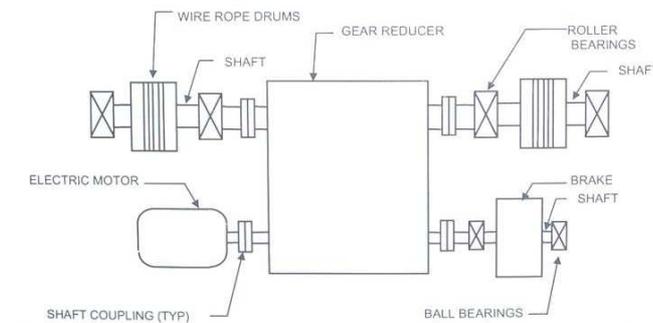


Figura 9.4. Tainter valve machinery

La función del sistema mecánico es el de operar las compuertas, y la falla de alguno de sus componentes constituye una falla del sistema, por esta razón se consideran como una estructura en serie. Se usó una distribución Weibull para modelar el tiempo a la falla de los componentes, para más detalles en cuanto a la modos de falla considerados y la obtención de los parámetros de esta distribución para cada componente, puede recurrirse a [15], sección D.

Para el subsistema de compuertas de la esclusa (lock miter gate), el diagrama de bloques de confiabilidad se muestra en la figura 9.6, y la información para cada componente se muestra en la tabla 9.11.

Para el subsistema de válvulas (lock tainter valve), el diagrama de bloques de confiabilidad se muestra en la figura 9.7, y la información para cada componente se muestra en la tabla 9.12.

La figura 9.8 muestra el diagrama de bloques de confiabilidad para el subsistema de

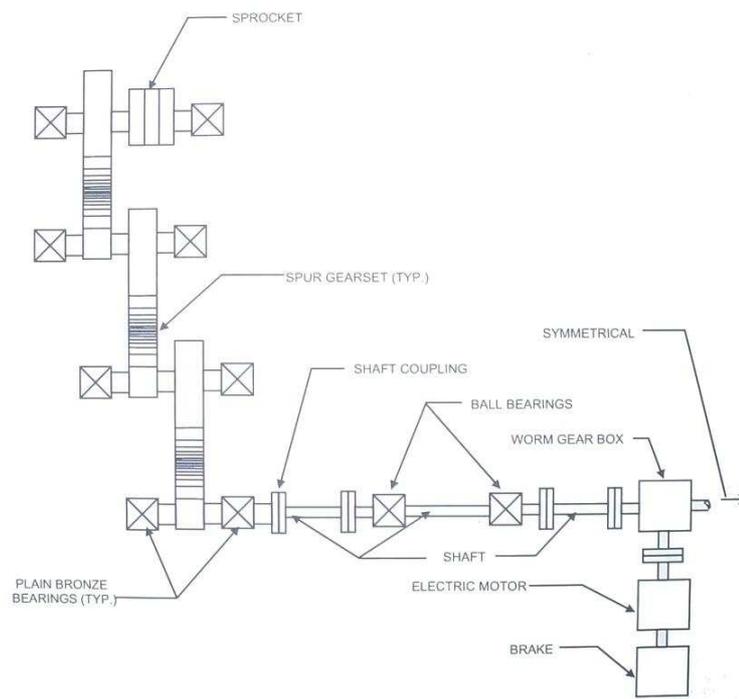


Figura 9.5. Dam gate machinery

Component (block)	Quan.	Failure rate	Failure Mode	Weibull Shape Factor, $\beta$	Charac. Life $\alpha$ , Yrs.
Couplings	3	1.4054	misalignment	1.0	40.6131
Antifriction bearing	2	1.6445	wear	3.0	38.1790
Brake	1	2.1000	jamming/misalig.	1.0	27.1798
Gear reducer	1	5.0000	wear	3.0	12.5571
Plain bronze bearings	2	2.3811	wear	3.0	26.3682
Spur gears	2	3.2232	wear	3.0	19.4792
Shafts	2	0.9298	fracture	1.0	61.3870

Tabla 9.11. Lock Miter Gate Machinery (Failure rate per  $10^6$  operating hours)

Component (block)	Quan.	Failure rate	Failure Mode	Weibull Shape Factor, $\beta$	Charac. Life $\alpha$ , Yrs.
Couplings	4	1.4054	misalignment	1.0	40.6131
Ball bearing	2	1.6445	wear	3.0	38.1790
Brake	1	2.1000	jamming/misalig.	1.0	27.1798
Gear reducer	1	5.0000	wear	3.0	12.5571
Roller bearings	4	2.8201	wear	3.0	22.2635
Shafts	3	0.9298	fracture	1.0	61.3870

Tabla 9.12. Lock Tainter Valve Machinery (Failure rate per  $10^6$  operating hours)

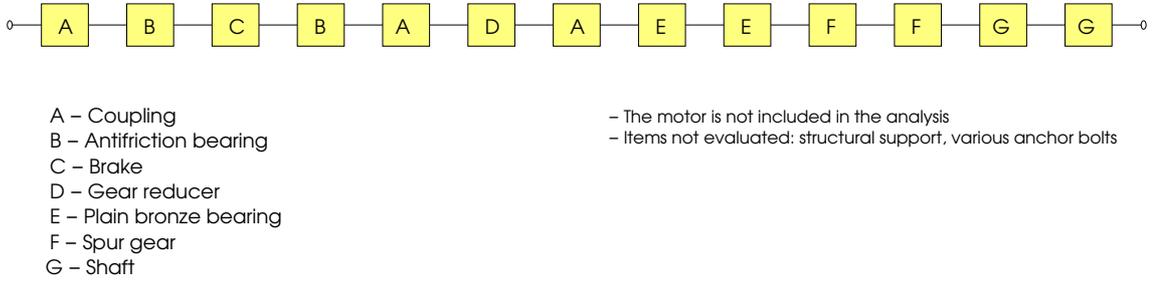


Figura 9.6. Lock machinery basic and mission reliability diagram

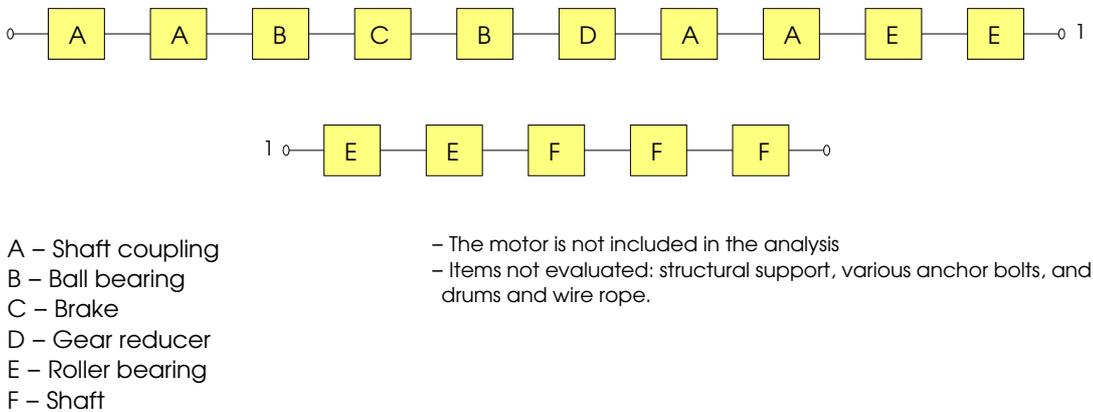


Figura 9.7. Valve machinery basic and mission reliability diagram

compuertas (dam gate machinery), y la información para cada componente se muestra en la figura 9.13.

Component (block)	Quan.	Failure rate	Failure Mode	Weibull Shape Factor, $\beta$	Charac. Life $\alpha$ , Yrs.
Couplings	10	1.4054	misalignment	1.0	40.6131
Ball bearing	4	1.6445	wear	1.0	34.7082
Brake	1	2.1000	jamming/misalig.	1.0	27.1798
Worm gear box	1	5.0000	wear	3.0	12.5571
Plain bronze bearings	16	2.8201	wear	3.0	22.2635
Spur gearset	6	3.2232	wear	3.0	19.4792
Shafts	4	0.9298	fracture	1.0	61.3870

Tabla 9.13. Dam Gate Machinery (Failure rate per  $10^6$  operating hours)



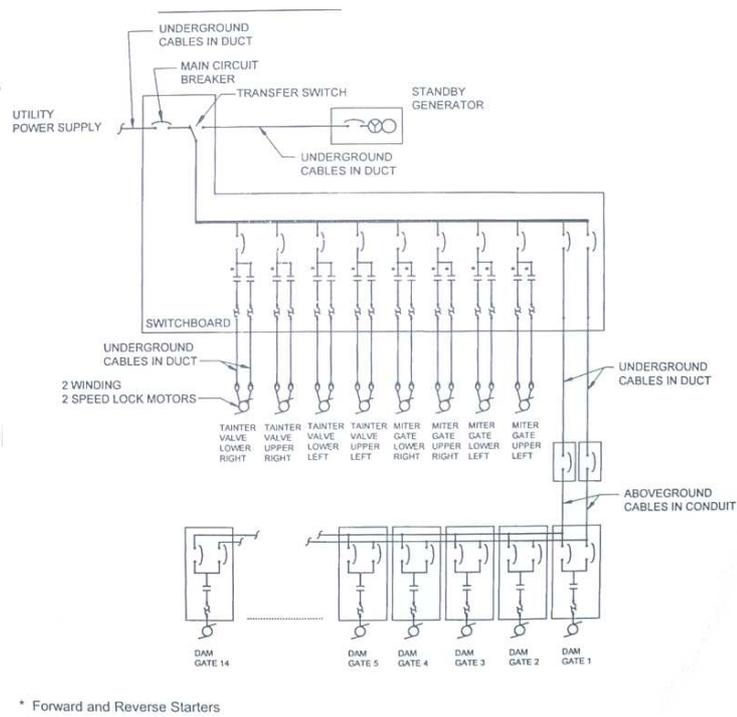
- A – Brake
  - B – Shaft coupling
  - C – Worm gear box
  - D – Ball bearings
  - E – Plain bronze bearings
  - F – Spur gear set
  - G – Shafts
- The motor is not included in the analysis
  - Items not evaluated: structural support, various anchor bolts, and chain sprocket.

Figura 9.8. Dam machinery basic and mission reliability diagram

### 9.3.3. El subsistema eléctrico

El subsistema eléctrico se muestra en la figura 9.9. Los modos de falla para el equipo eléctrico son muy complejos (i.e. comprenden una amplia variedad de características como temperatura, vibración, esfuerzo mecánico, etc.), lo que ocasiona una incapacidad para seleccionar los valores  $\beta$  para una distribución Weibull (ver [15] sección E). Debido a lo anterior, el valor escogido para  $\beta$  fue de 1.0, lo que reduce la distribución Weibull a una distribución Exponencial.

El diagrama de bloques de confiabilidad para el subsistema eléctrico se muestra en la figuras 9.10 y 9.11 , y la información para cada componente de este diagrama se muestra en las tablas 9.14, 9.15, 9.16 y 9.17. La tasa de falla que se muestra es la tasa de falla ajustada (para más detalles ver [15], sección E).



\* Forward and Reverse Starters

Figure 9.9. Lock and dam electrical one-line diagram

Code	Component (block)	Quan.	Failure rate	Weibull Shape Factor, $\beta$
A	Utility power supply	1	1.074	1.0
B	Conductors in duct	2	0.0105	1.0
C	Circuit braker	1	0.0063	1.0
D	Generator	1	0.1340	1.0
LB	Transfer switch	1	0.1121	1.0
LC	Switchgear, bus, bare	1	0.0088	1.0

Tabla 9.14. Lock Electrical Distribution (Failure rate per  $10^6$  operating hours)

Code	Component (block)	Quan.	Failure rate	Weibull Shape Factor, $\beta$
LD#	Lock gates	4	0.0215	1.0
LE#	Lock valves	4	0.0215	1.0

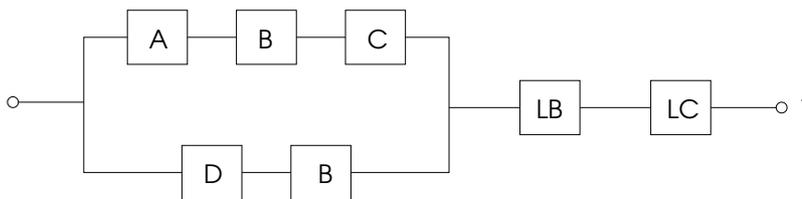
Tabla 9.15. Lock Miter Gate & Lock Tainter Valve Electrical Equipment (Failure rate per  $10^6$  operating hours)

Code	Component (block)	Quan.	Failure rate	Weibull Shape Factor, $\beta$
B	Conductors in duct	2	0.0105	1.0
E	Circuit braker	4	0.0063	1.0
F	Conductors in conduit	2	0.0005	1.0

Tabla 9.16. Dam Electrical Distribution (Failure rate per  $10^6$  operating hours)

Code	Component (block)	Quan.	Failure rate	Weibull Shape Factor, $\beta$
M	Circuit braker	2	0.0063	1.0
R	Forward starter	1	0.0004	1.0
S	Reverse starter	1	0.0004	1.0
T	Conductors in conduit	1	0.0005	1.0
S	Electric Motor, AC	1	0.1206	1.0

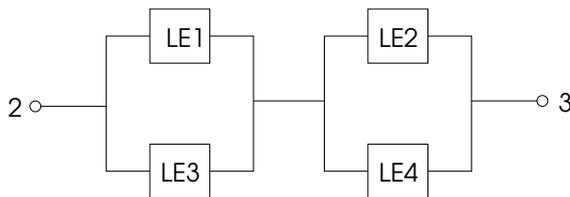
Tabla 9.17. Dam Gate Electrical Equipment (Failure rate per  $10^6$  operating hours)



Lock electrical distribution

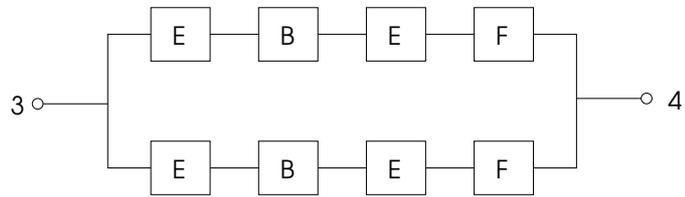


Lock miter gate, electrical equipment.

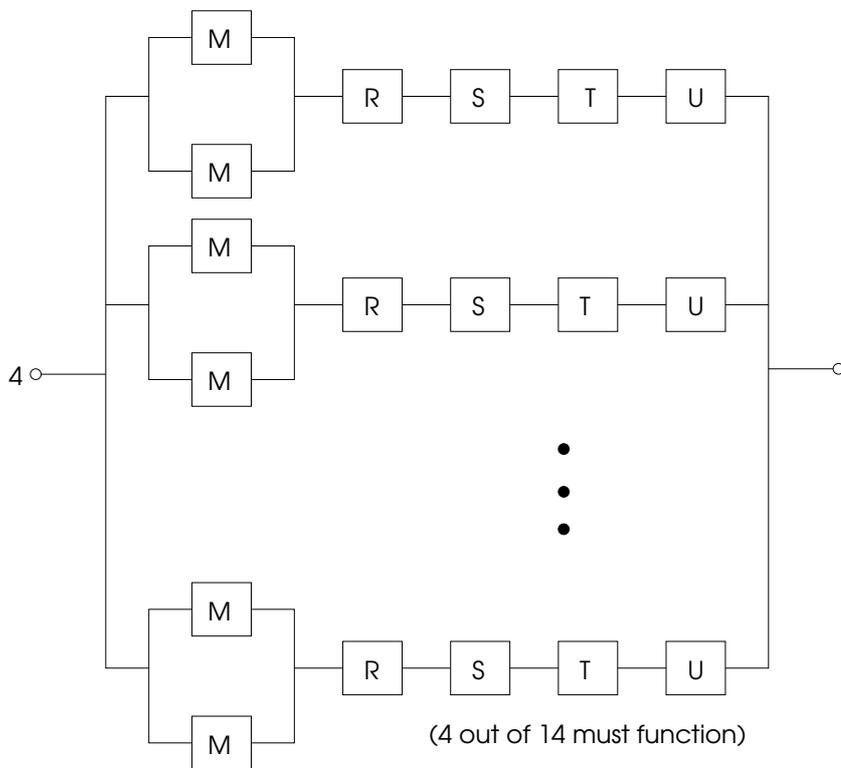


Lock tainter valve, electrical equipment.

Figura 9.10. Lock and dam electrical mission reliability diagram



Dam electrical distribution.



(4 out of 14 must function)

Dam gate, electrical equipment.

Figura 9.11. Lock and dam electrical mission reliability diagram

Si se revisa el documento original del análisis de confiabilidad para este ejemplo ([15]), podrán notarse algunas diferencias importantes con lo aquí expuesto. La primera modificación que tuvo que realizarse fue en el sistema eléctrico de la esclusa (lock electrical distribution), que comprende los componentes A, B, C, D, LB y LC. El análisis original considera el subsistema en serie formado por los componentes D y B, como un subsistema en *standby* con el subsistema formado por los componentes en serie A, B y C. En este trabajo se modeló como un sistema en paralelo. Otra diferencia es que, en este trabajo, el factor de “utilización” (duty factor), se considera igual a 1, es decir, una utilización completa de los componentes.

#### 9.3.4. El sistema *lock and dam*

Para el sistema completo, formado por los subsistemas mecánico y eléctrico descritos anteriormente, se realizaron algunas simplificaciones en los componentes que se explican a continuación.

Como se mostró anteriormente, el subsistema mecánico (y sus diferentes subsistemas) están formados por componentes en serie, cuya distribución de tiempos de falla está modelada con una distribución Weibull. Tomando en cuenta las características de un sistema en serie y que los componentes pueden clasificarse por el valor su parámetro de forma  $\beta$  (que como puede verse, tiene dos valores, 1 o 3), se pensó entonces en formar dos grupos de componentes para cada subsistema de acuerdo a lo anterior, y asumiendo para cada grupo, que los tiempos de reparación (tanto en la distribución como en los parámetros) son los mismos, al igual que los costos generados. Los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  para cada grupo de componentes se obtiene de la siguiente forma.

La función de riesgo o tasa de fallas de un sistema en serie, es la suma de las funciones de riesgo de sus componentes (ver [2], por ejemplo), entonces, para una distribución Weibull tenemos lo siguiente.

Para un sistema en serie formado por  $k$  componentes, denotemos la función de riesgo del  $i$ -ésimo componente ( $i = 1, \dots, k$ ) con  $h_i(t)$  y la función de riesgo del sistema con  $h_S(t)$ , entonces:

$$h_i(t) = \frac{\beta_i}{\alpha_i^{\beta_i}} t^{\beta_i - 1}$$

Si el parámetro  $\beta$  es el mismo para todos los componentes:

$$h_S(t) = \frac{\beta}{\alpha^\beta} t^{\beta-1} = \sum_{i=1}^k h_i(t) = \beta t^{\beta-1} \left[ \frac{1}{\alpha_1^\beta} + \frac{1}{\alpha_2^\beta} + \dots + \frac{1}{\alpha_k^\beta} \right]$$

Entonces, el parámetro  $\alpha$  para la función de riesgo del sistema es:

$$\alpha = \left( \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1^\beta} + \frac{1}{\alpha_2^\beta} + \dots + \frac{1}{\alpha_k^\beta}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (9.3)$$

Cada subsistema mecánico fue reducido a dos componentes aplicando (9.3) y considerando la misma distribución y parámetros del tiempo de reparación. Para el subsistema eléctrico se consideraron todos los componentes con las mismas características como un mismo componente, aunque esté en diferentes posiciones dentro de la estructura. Finalmente, el sistema *lock & dam* completo, formado por los subsistemas eléctrico y mecánico se muestra en la figura 9.12, la información completa de cada componente se muestra en la tabla 9.18.

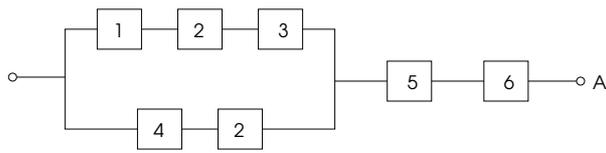
Code	Component	$F_T(t)$	$F_D(t)$	$MDT_p$ , Yrs	$c_p$ \$	$c_f$ \$
1	Power supply	$\exp(\lambda = 1,0740)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,6810, \sigma = 0,8573)$	0.019	3000	60500
2	Cond. in duct	$\exp(\lambda = 0,0105)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,6810, \sigma = 0,8573)$	0.038	4500	80000
3	Circuit braker	$\exp(\lambda = 0,0063)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,8554, \sigma = 0,8573)$	0.038	3000	60500
4	Generator	$\exp(\lambda = 0,1340)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,6810, \sigma = 0,8573)$	0.038	3000	60500
5	Transfer switch	$\exp(\lambda = 0,1121)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,6810, \sigma = 0,8573)$	0.019	3000	60500
6	Switchgear	$\exp(\lambda = 0,0088)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,6810, \sigma = 0,8573)$	0.019	3000	60500
7	Lock gate	$\exp(\lambda = 0,0215)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,3445, \sigma = 0,8573)$	0.038	4500	80000
8	Lock valve	$\exp(\lambda = 0,0215)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,3445, \sigma = 0,8573)$	0.038	3000	80000
9	Circuit braker	$\exp(\lambda = 0,0063)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,8554, \sigma = 0,8573)$	0.019	3000	60500
10	Cond. in conduit	$\exp(\lambda = 0,0005)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,8554, \sigma = 0,8573)$	0.019	3500	55000
11	Forward starter	$\exp(\lambda = 0,0004)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,6810, \sigma = 0,8573)$	0.019	3000	60500
12	Reverse starter	$\exp(\lambda = 0,0004)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,6810, \sigma = 0,8573)$	0.019	3000	60500
13	Cond. in conduit	$\exp(\lambda = 0,0005)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,6810, \sigma = 0,8573)$	0.019	4500	55000
14	Elec. Motor	$\exp(\lambda = 0,1206)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,6810, \sigma = 0,8573)$	0.038	3000	60500
15	Lock Machin. 1	$\text{weib}(\beta = 1,0, \alpha = 6,9813)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,4987, \sigma = 0,8573)$	0.041	4000	150000
16	Lock Machin. 2	$\text{weib}(\beta = 3,0, \alpha = 10,2793)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,4987, \sigma = 0,8573)$	0.041	4000	150000
17	Valve Machin. 1	$\text{weib}(\beta = 1,0, \alpha = 5,4303)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,3446, \sigma = 0,8573)$	0.027	3000	150000
18	Valve Machin. 2	$\text{weib}(\beta = 3,0, \alpha = 10,3442)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,3446, \sigma = 0,8573)$	0.027	3000	150000
19	Dam Machin. 1	$\text{weib}(\beta = 1,0, \alpha = 2,1578)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,6810, \sigma = 0,8573)$	0.041	3500	130000
20	Dam Machin. 2	$\text{weib}(\beta = 3,0, \alpha = 7,1232)$	$\text{Lognor}(\mu = -2,6810, \sigma = 0,8573)$	0.041	3500	130000

Tabla 9.18. Lock and Dam System

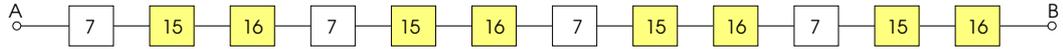
El costo por fallo del sistema se supuso de cero, es decir, se consideran incluidos en los costos de los componentes.

### 9.3.5. Aplicación de una política tipo I de mantenimiento preventivo

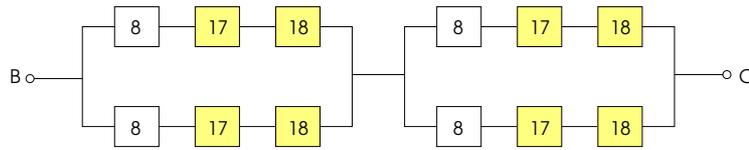
En esta sección se buscará el intervalo óptimo de mantenimiento preventivo  $\tau$ , para el sistema lock & dam definido anteriormente. Se usará una política de mantenimiento tipo I y se buscará obtener una disponibilidad promedio de 0.90, minimizando los costos asociados a



Lock electrical distribution

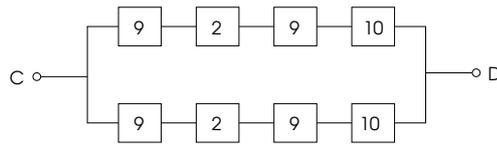


Lock miter gate, electrical and mechanical distribution.

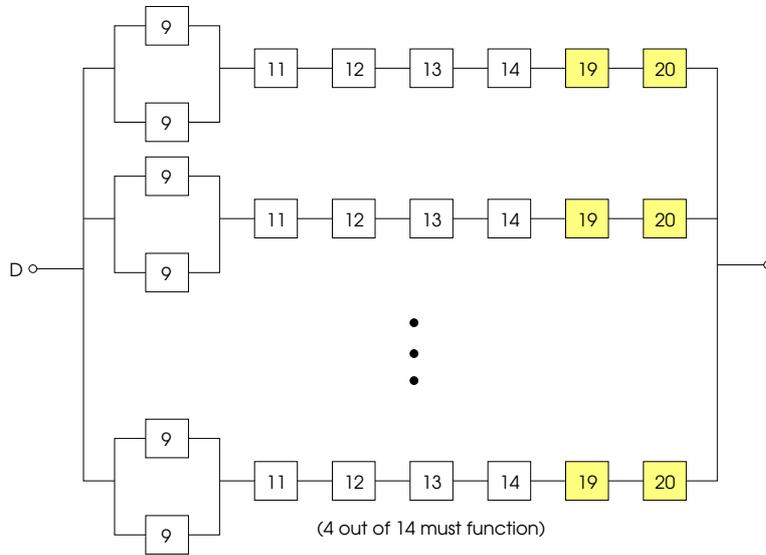


Lock tainter valve, electrical and mechanical distribution.

□ electrical    ■ mechanical



Dam electrical distribution.



Dam gate, electrical and mechanical distribution

□ electrical    ■ mechanical

Figura 9.12. Lock and dam mechanical and electrical mission reliability diagram

mantenimientos y fallas. El sistema completo consta de 151 componentes, tanto eléctricos como mecánicos, formando estructuras en serie, paralelo y  $k$  de  $n$ . Como puede notarse, es un sistema bastante complejo y una prueba muy interesante para aplicar los algoritmos descritos a lo largo de este trabajo, y para probar el software desarrollado para este propósito.

El primer intento para encontrar los periodos óptimos de mantenimiento se realizó con los parámetros originales dados en las secciones anteriores. Los resultados se muestran en la tabla 9.19.

Política	$\tau$ (años)	Costo $\times$ U.T.	$A_{avg}$	Iteraciones
Tipo I	83.44	\$1705121,8	0.86	200

Tabla 9.19. Optimización de periodos de mantenimiento preventivo para el sistema Lock & Dam

Con los parámetros originales, puede verse que no se alcanza la disponibilidad promedio requerida.

Al igual que en el sistema de ejemplo visto en la primera sección de este capítulo, haremos uso de la optimización de los parámetros de la distribución del tiempo de reparación. Recordemos que en este tipo de optimización se hace uso de la disponibilidad a largo plazo como medida de mejora, es decir, no está en función de algún periodo de mantenimiento preventivo, pero al igual que en el ejemplo anterior, es lógico esperar que la mejora de la disponibilidad a largo plazo tenga un impacto positivo (en cuanto a la disponibilidad promedio) en un intervalo de tiempo mucho más corto, como es el caso de un mantenimiento preventivo. Es interesante hacer un análisis de los subsistemas eléctrico y mecánico para ver qué componentes son los que requerirían mejorar en cuanto a su tiempo de reparación. El considerar optimizar los parámetros de todos los componentes puede ser muy costoso e innecesario, generalmente pueden lograrse mejoras significativas enfocándose solamente a algunos componentes. También puede darse el caso que sea prácticamente imposible mejorar los tiempos de reparación de un componente, en este caso tampoco debe tomarse en cuenta para su optimización. El software desarrollado en esta tesis para optimizar sistemas toma en cuenta todo lo anterior, y puede indicarse qué componentes incluir en tal optimización.

Algo que se menciona en el análisis original en [15] es la gran diferencia que existe en cuanto a las disponibilidades, entre el subsistema eléctrico y el mecánico. No es difícil notar lo anterior al observar las distribuciones y parámetros del subsistema eléctrico. Se realizó una prueba de optimización teniendo en cuenta solamente el subsistema eléctrico con una restricción en la disponibilidad de 0.90 y se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 9.20.

Política	$\tau$ (años)	Costo $\times$ U.T.	$A_{avg}$	Iteraciones
Tipo I	44.93	\$ 222916.78	0.97	200

Tabla 9.20. Optimización de periodos de mantenimiento preventivo para el subsistema eléctrico Lock & Dam

Tomando en cuenta estos resultados y la importancia estructural de los componentes se optó por optimizar los parámetros del tiempo de reparación de los componentes que se muestran en la tabla siguiente. Recuérdese que, aunque los componentes del subsistema mecánico se agruparon en dos tipos (en base a su parámetro de forma  $\beta$ ), se consideró cada uno con la misma distribución y parámetros en el tiempo de reparación; el que estos componentes estén conformados en estructuras en serie permite hacer lo anterior. En la optimización de los parámetros del tiempo de reparación del subsistema mecánico se tomaron en cuenta los dos parámetros ( $\mu$  y  $\sigma$ ) de la distribución lognormal. Los valores para el factor de escala  $x$  y de esfuerzo  $y$  que se supusieron para cada componente se muestran también en la tabla 9.21.

Componente	Descripción	Escala ( $x$ )	Esfuerzo ( $y$ )
5	Transfer switch	\$ 4500	1
6	Switch board	\$ 4500	1
7	Lock gate	\$ 3500	2
15	Lock Machin. 1	\$ 5500	2
15	Lock Machin. 2	\$ 5500	2
17	Valve Machin. 1	\$ 5500	2
18	Valve Machin. 2	\$ 5500	2
19	Dam Machin. 1	\$ 5700	2
20	Dam Machin. 2	\$ 5700	2

Tabla 9.21. Costos para la optimización de parámetros en  $F_D(t)$  del sistema Lock & Dam

La restricción de indisponibilidad se fijó en 0.05 máximo. Los parámetros óptimos  $\theta^* = (\mu, \sigma)$  obtenidos y demás resultados se muestran en la tabla 9.22.

Al plantear este problema como una optimización multiobjetivo, se obtiene el frente de Pareto que se muestra en la figura 9.13. En el eje horizontal se encuentra el costo y en el vertical la indisponibilidad del sistema.

La indisponibilidad a largo plazo del sistema obtenida con estos parámetros fue de  $\bar{A}_{sys} = 0,05$ , entonces la disponibilidad del sistema es de  $A_{sys} = 0,95$ . Se realizaron 1500 iteraciones y el costo mínimo obtenido fue de \$402.99. En varios componentes considerados para optimizar

Componente	Descripción	$\theta^*$	$MTTR$	
			anterior (yrs)	obtenido (yrs)
5	Transfer switch	(-2,6810, 0,8573)	0.1187	9.89e-02
6	Switch board	(-2,6810, 0,8573)	0.1187	9.89e-02
7	Lock gate	(-2,3445, 0,5053)	0.1187	1.08e-01
15	Lock Machin. 1	(-8,7100, 0,8129)	0.1187	2.29e-04
16	Lock Machin. 2	(-2,8517, 0,1000)	0.1187	5.80e-02
17	Valve Machin. 1	(-2,3446, 0,8030)	0.1385	1.32e-01
18	Valve Machin. 2	(-2,3522, 0,8353)	0.1385	1.35e-01
19	Dam Machin. 1	(-2,6810, 0,8573)	0.0989	9.89e-02
20	Dam Machin. 2	(-2,6810, 0,8573)	0.0989	9.89e-02

Tabla 9.22. Parámetros óptimos de  $F_D(t)$  para el sistema Lock & Dam

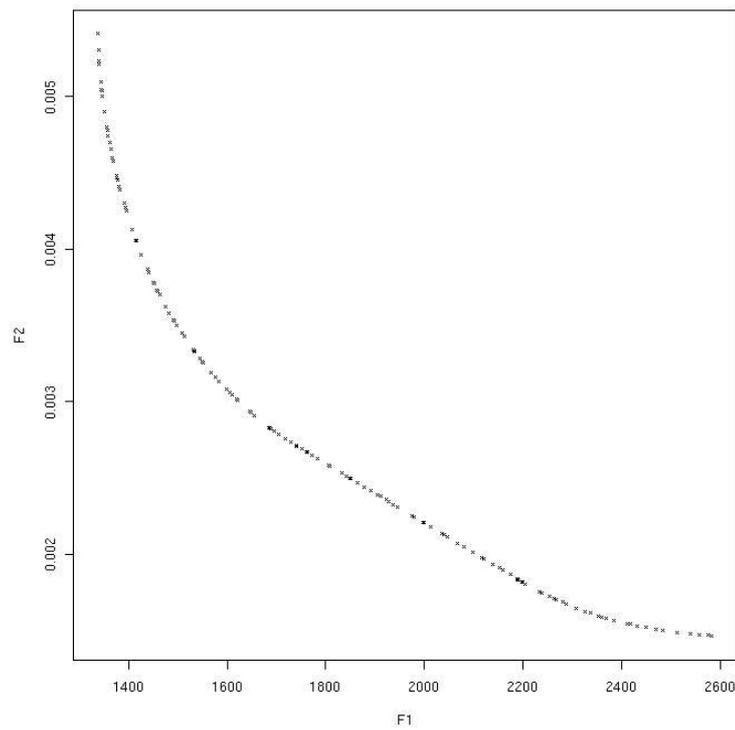


Figura 9.13. Frente de Pareto para el sistema lock and dam

sus parámetros de  $F_D(t)$ , la modificación realizada es mínima o nula, así podemos ver que el algoritmo de optimización localiza en forma efectiva los componentes que requieren mayor mejora. Según estos resultados, para el subsistema de compuertas lock machinery, el tiempo de reparación prácticamente debe ser cero, lo que nos indica que este subsistema es el que mayor impacto tiene en la disponibilidad del sistema, en el sentido que, una mejora en el mismo significará una mejora substancial en el sistema, lo que coincide con el análisis original (ver [15]). Si este caso se presentara en algún sistema con estas características, bien podría pensarse en la sustitución de este subsistema por alguno de mejores características, ya que en caso contrario, tendría que ser prácticamente reemplazado al momento de fallar, y esto es algo que muchas veces no es posible.

Suponiendo que es posible lograr las mejoras en los parámetros de la distribución del tiempo de reparación que se mostraron anteriormente, se obtienen los resultados mostrados en la tabla 9.23 al buscar el intervalo óptimos de mantenimiento según una política tipo I.

Política	$\tau$ (años)	Costo $\times$ U.T.	$A_{avg}$	Iteraciones
Tipo I	5.98	\$1504266,9	0.90	200

Tabla 9.23. Periodos óptimos de mantenimiento preventivo para el sistema Lock & Dam con los parámetros de  $F_D(t)$  optimizados

Estos resultados ya son satisfactorios según el requisito que se planteó anteriormente, y la política óptima, según los parámetros y costos que se asumieron, es realizar mantenimiento preventivo cada 6 años a cada componente del sistema, y reparar los componentes en cada falla. Esta política supone un costo anual de \$1504266,9. El tiempo que tomó realizar esta optimización (200 iteraciones) fue de 15429.75 segundos, que es aproximadamente 4.3 hrs.

Los resultados que se presentan, con todas las reservas que pueden surgir por las suposiciones hechas en cuanto a distribuciones, costos, etcétera, puede tomarse como un indicativo del panorama que se presentaría si este sistema pudiera considerarse (como seguramente se hace en la realidad) como un sistema reparable y se buscara aplicar un mantenimiento preventivo en el mismo, sobre todo si se toma en cuenta que en el análisis real (donde solo se considera la confiabilidad del sistema a través de las confiabilidades de sus componentes), se estima una confiabilidad de aproximadamente 0.31 en un periodo de diez años.

## 9.4. Un sistema altamente confiable

El siguiente es un ejemplo típico de un sistema altamente confiable donde no tiene ningún caso el adoptar alguna política de mantenimiento preventivo. El ejemplo pertenece al área de la informática, y está tomado de [22]. En este, se realiza un análisis de la confiabilidad y disponibilidad en diferentes intervalos de tiempo, de un conjunto de configuraciones diferentes para almacenamiento, tales como almacenamiento directo adjunto (DAS), red de área de almacenamiento (SAN) o mediante un clúster de servidores.

La configuración que se escogió para este ejemplo es la que se muestra en la figura 9.14, el diagrama de bloques correspondiente, tal como se presenta en el documento original, se muestra en la figura 9.15. Para este ejemplo, se usaron los conjuntos trayectoria minimal para formar una estructura en paralelo de los componentes HBA, Switch y Controller conectados en serie. La información correspondiente a los tiempos de falla y reparación se muestran en la figura 9.16. Nuevamente, tuvieron que suponerse la información referente a la distribución del tiempo de reparación y los costos. Para el tiempo de reparación se supuso una distribución lognormal, con parámetros tales que la mediana correspondiera a los valores  $MTTR$  mostrados en la figura 9.16, se usó el mismo procedimiento explicado anteriormente en el sistema Lock & Dam. Esta información se muestra en la tabla 9.24.

Component	$F_D(t)$	$MDT_p$ , hrs	$c_p$ \$	$c_f$ \$
Controller	Lognor( $\mu = 1,3863, \sigma = 0,8573$ )	3.0	100	250
Switch	Lognor( $\mu = 2,0360, \sigma = 0,8573$ )	3.0	100	250
HBA	Lognor( $\mu = 2,0794, \sigma = 0,8573$ )	3.0	150	250
Server	Lognor( $\mu = 1,5581, \sigma = 0,8573$ )	3.0	150	250

Tabla 9.24. Simple SAN example

Nuevamente, el costo de fallo del sistema se incluye en los costos de los componentes.

En este ejemplo vemos que los tiempos a la falla siguen una distribución exponencial y el tiempo esperado de falla es grande en todos los componentes. Si pretendiéramos usar una política de mantenimiento preventivo tipo I, los resultados, para una disponibilidad promedio mínima de 0.99, se encuentran en la tabla 9.25:

$\tau$ (hrs)	Costo $\times$ U.T.	$A_{avg}$	Iteraciones
10000	\$ 0.2124	0.99	250

Tabla 9.25. Periodos óptimos de mantenimiento preventivo para el sistema SAN

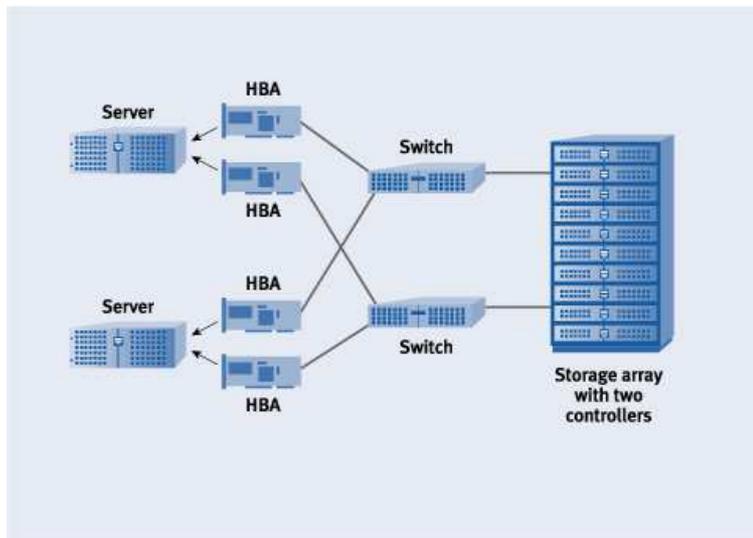


Figura 9.14. Simple SAN configuration

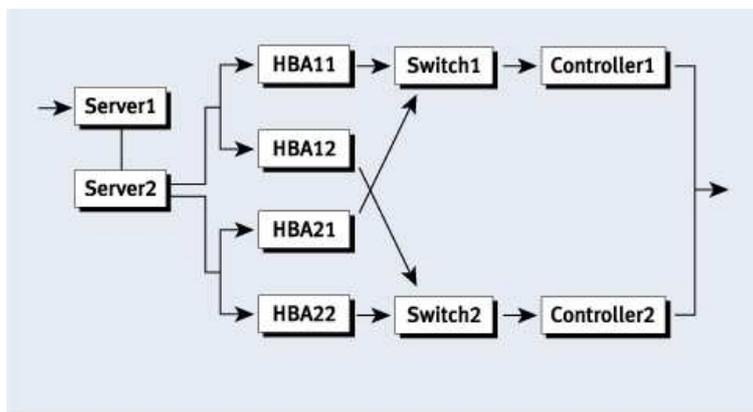


Figura 9.15. Reliability block diagram for simple SAN

	MTTR <sub>i</sub> (hours)	Failure rate $\lambda_i$ (failures/hour)	MTTR <sub>i</sub> × failure rate (failures)
FC4700 storage array	3.99997	1.4501E-5	5.8003E-5
PowerVault 56F switch	7.66	3.91E-6	3.00009E-5
QLA 2200 HBA	8.00	3.95E-6	3.16E-5
PowerEdge 6450	4.75	2.18E-5	0.000104011
<b>Sum</b>		4.4233E-5	0.00022369

Figura 9.16. Component data for simple SAN configuration

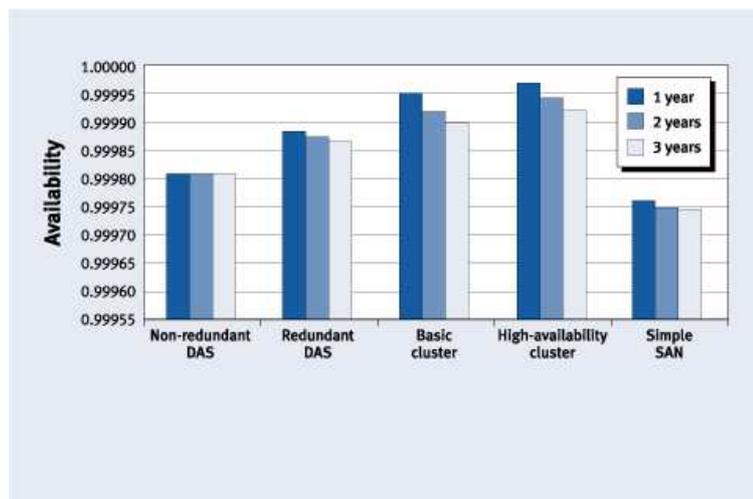


Figura 9.17. Comparison of availability over three years

La restricción adicional impuesta en este caso para el espacio de búsqueda fue  $0 < \tau \leq 10000$ .

Otra corrida del algoritmo es la que se muestra en la tabla 9.26:

$\tau$ (hrs)	Costo $\times$ U.T.	$A_{avg}$	Iteraciones
100000	\$ 0.062	0.99	250

Tabla 9.26. Periodos óptimos de mantenimiento preventivo para el sistema SAN

La restricción adicional impuesta para el espacio de búsqueda fue  $0 < \tau \leq 100000$ .

Observamos que el algoritmo escoge siempre el mayor periodo de tiempo permitido para  $\tau$ , lo que significa que no es necesario aplicar mantenimiento preventivo en este sistema. En este caso, el que  $\tau \rightarrow \infty$  implica que la mejor estrategia es realizar mantenimientos correctivos solamente. Este resultado se debe en parte a la distribución exponencial elegida para modelar los tiempos a la falla de los componentes (que además son pocos), pero más a las tasas de falla de cada uno de estos y al relativamente bajo costo por fallos. En la figura 9.17, podemos ver el análisis de disponibilidad promedio en 1, 2 y 3 años realizado en [22], donde se muestra también la alta confiabilidad que presenta esta configuración. Una cosa totalmente diferente sería si eligiéramos un componente de mucha menor calidad para el sistema. Entonces habría una diferencia notable en las tasas de falla y tal vez sería necesario realizar mantenimientos preventivos en intervalos de tiempo razonablemente cortos.

## Capítulo 10

# Conclusiones y trabajo futuro

En el trabajo de tesis desarrollado, se ha abordado el problema de optimización en el mantenimiento de sistemas formados por uno o varios componentes reparables. En los problemas de optimización planteados y resueltos se ha tomado en cuenta los conceptos de mantenimiento correctivo y preventivo, buscando, además de la minimización de costos relacionados, mantener el sistema en un nivel de disponibilidad requerido. Se ha permitido considerar un tiempo de reparación aleatorio en cada componente del sistema, utilizando algunas de las distribuciones de uso común en la modelación tanto de tiempos a la falla como de reparación.

Otra de las aportaciones de este trabajo ha sido la implementación de técnicas evolutivas de optimización multiobjetivo, que ha permitido, por ejemplo, la minimización simultánea de indisponibilidad y costos relacionados con la mejora del tiempo de reparación para los componentes en una política de mantenimiento correctivo. Esta forma de optimización permite obtener mayor información sobre las posibles soluciones que podrían adoptarse en un sistema con determinadas características.

Por los resultados obtenidos, se tiene plena confianza en que el problema de optimización ha quedado resuelto, en el sentido de que el algoritmo utilizado ha resultado eficiente para los problemas planteados en la tesis, y muy seguramente podrá resolver las modificaciones que pudieran surgir en los modelos de optimización utilizados.

Entonces, el trabajo que quedaría por realizar es sobre todo en la modelación de los componentes, y uno de los puntos principales es en la medida que relaciona las fallas de los componentes con la falla del sistema. Sería recomendable poder encontrar probabilidades del tipo:  $P(\text{falla del sistema}|\text{prob. falla del componente}_i)$ . Las medidas de importancia de los componentes ofrecen una opción para este problema, pero habría que adaptar estas medidas a componentes reparables.

Otro punto de mejora es el poder incorporar completamente las distribuciones más comunes usadas en la modelación de tiempos a la falla y de reparación, lo que significaría poder determinar  $A(t)$  y  $W(t)$  para las distribuciones Weibull, Normal y Lognormal, por ejemplo. Actualmente, en este trabajo no es posible utilizar las distribuciones mencionadas anteriormente para aplicar una política de mantenimiento tipo II. Por esta razón, en esta tesis tiene mayor aplicación la política tipo I de mantenimiento que la política tipo II.

El software desarrollado para analizar y optimizar sistemas reparables se ha mostrado muy eficiente para sistemas muy complejos, además de incorporar una interfaz sencilla y amigable para introducir el sistema y la información necesaria a utilizar, pero sería recomendable buscar alguna forma más rápida de evaluar el sistema. El tema de la rapidez y el costo computacional se vuelve importante en este trabajo, dada la cantidad de operaciones que deben realizarse, por ejemplo, en el proceso de optimización. Cualquier forma de mejorar la rapidez en la obtención de los resultados será un punto interesante a considerar como trabajo futuro, ya sea en los métodos numéricos empleados o en el software desarrollado. Respecto a los métodos numéricos utilizados en esta tesis, uno de especial importancia es el que obtiene la inversa de la transformada de Laplace. Tratando de conseguir un balance entre la rapidez computacional y la exactitud de este cálculo, se realizaron solamente  $N = 1000$  términos de la serie para para invertir la transformada de Laplace (ver A.1). Sería de mucho beneficio explorar métodos más rápidos y más exactos para realizar este cálculo.

## Apéndice A

# La transformada de Laplace y un método numérico para invertirla

Sea  $f(t)$  una función definida en el intervalo  $(0, \infty)$ . La transformada de Laplace  $f^*(s)$  de la función  $f(t)$  se define mediante

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

donde  $s$  es real o complejo. No todas las funciones tienen una transformada de Laplace, por ejemplo, si  $f(t) = e^{t^2}$ , la integral diverge para todos los valores de  $s$ .

Otra forma de denotar la transformada de Laplace es mediante  $\mathcal{L}[f(t)] = f^*(s)$ .

Cuando  $f(t)$  es la función de densidad de una variable aleatoria no negativa  $T$ , la transformada de Laplace de  $f(t)$  es igual al valor esperado de la variable aleatoria  $e^{-sT}$ .

$$E(e^{-sT}) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = f^*(s)$$

La función  $f(t)$  es llamada la inversa de la transformada de Laplace de  $f^*(s)$ , y está dada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[f^*(s)]$$

Algunas propiedades importantes de la transformada de Laplace se muestran a continuación.

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{L}[\alpha f(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)] = e^{-\alpha s} \mathcal{L}[f(t)] \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = f^*(s - \alpha) \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(u) du \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f_1(t-u) f_2(u) du \right] = \mathcal{L}[f_1(t)] \cdot \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (\text{A.7})$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s f^*(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad (\text{A.8})$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s f^*(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (\text{A.9})$$

Extensas tablas para las transformadas de Laplace pueden encontrarse, por ejemplo, en [9].

## A.1. Un método numérico para invertir la transformada de Laplace

El método numérico empleado para invertir la transformada de Laplace puede encontrarse a detalle en [11], aquí se presenta solamente los resultados finales obtenidos para aplicar el método. Para coincidir con el documento original, se usará  $F(s)$  para denotar la transformada de Laplace de  $f(t)$ .

La transformada de Laplace de una función  $f(t)$  y su inversa, respectivamente, se definen mediante:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (\text{A.10})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (\text{A.11})$$

El método de inversión se basa en el hecho de que al evaluar la integral de la transformada de Laplace inversa existe cierta libertad para escoger el contorno de integración. La integral inversa se aproxima en forma arbitrariamente cercana mediante una serie de Fourier. El error puede hacerse tan pequeño como se desee escogiendo apropiadamente el parámetro  $a$ .

Según este método, la transformada de Laplace inversa para el intervalo  $(0, T/2)$  puede obtenerse mediante

$$f(t) \simeq \frac{2e^{at}}{T} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{F(a)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ F \left( a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right\} \cos \frac{k\pi}{T} t \right] \quad (\text{A.12})$$

La serie de Fourier es truncada hasta  $N$  términos. El error (aparte del truncamiento de la suma) al obtener  $f(t)$  en el intervalo  $(0, T/2)$ , está dado por

$$\text{ERROR} \sim C(1,5T)^m e^{-aT} \quad (\text{A.13})$$

donde  $C$  es una constante y  $m$  puede ser cualquier entero no negativo.

Mediante las expresiones anteriores, el método para invertir la transformada de Laplace es el siguiente:

1. Determinar  $T$  a partir del intervalo en que se desea evaluar  $f(t)$ . Por ejemplo, si  $t_{max}$  es el valor mayor de  $t$  para el que se requiere la función,  $T = 2t_{max}$ .
2. Obtener el valor de  $a$  mediante (A.13), de tal manera que el error esté dentro de la precisión numérica deseada. Por ejemplo, si requerimos una precisión en el quinto decimal, es necesario escoger  $a$  de tal forma que  $e^{-aT}$  sea del orden de  $10^{-5}$ .
3. Elegir el número de términos  $N$  de la serie de Fourier (ver [11]).
4. Obtener  $f(t)$  mediante (A.12).

El procedimiento es sencillo y requiere pocas líneas de código.

## Apéndice B

# El software desarrollado para analizar y optimizar sistemas reparables

El software usado para evaluar y optimizar sistemas reparables fue desarrollado en C++ bajo un sistema operativo Linux, usando las librerías Qt<sup>1</sup> para la interfaz gráfica. Se utiliza además, la librería `<Rmath.h>` de R [23] para las funciones estadísticas utilizadas.

El software cuenta con diferentes módulos que a continuación se mencionan.

### B.1. Módulo de diseño

Es el módulo principal y se muestra en la figura B.1, aquí se construirán los sistemas a analizar. Antes de crear un sistema deben crearse los componentes como se menciona posteriormente.

1. Área de diseño.
2. Sirve para construir la estructura del sistema de forma que pueda ser evaluado en todas las operaciones que se realicen. Se acciona después de crear el sistema.

---

<sup>1</sup>Qt es un conjunto de herramientas multiplataforma de desarrollo de GUI's y aplicaciones en C++. Es portable con sistemas operativos Linux, Unix, Mac OS X y Windows

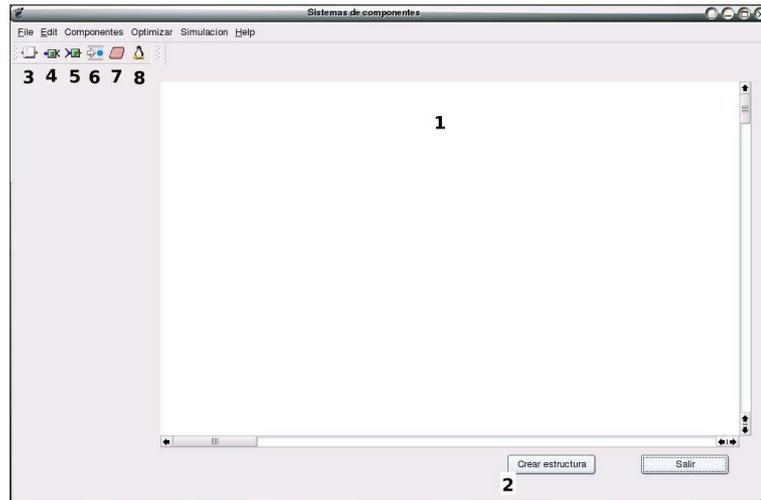


Figura B.1. El módulo de diseño

3. Introducir componentes creados con anterioridad (ver B.2). Al activar este botón se muestra la información que indica la figura B.2 (A), para seleccionar el componente que se desea introducir.
4. Crear un nodo de inicio para estructuras en paralelo o  $k$  de  $n$ .
5. Crear un nodo final. Al activarlo, se muestra la información que indica la figura B.3 (B), donde se introduce el parámetro  $k$ . Por omisión, tendrá valor de 1, es decir, se considera una conexión en paralelo.
6. Conectar componentes y nodos. Para conectarlos, solo se hace click en el componente o nodo de origen y luego click en el componente o nodo destino.
7. Eliminar conexiones, nodos o componentes.
8. Desactiva cualquier otra acción elegida anteriormente.

Todo sistema debe empezar con un nodo de inicio y uno final.

## B.2. El módulo de componentes

En este formulario (figura B.4) se crean los componentes diferentes a usar.

1. Se indica si la distribución del tiempo de reparación es despreciable.

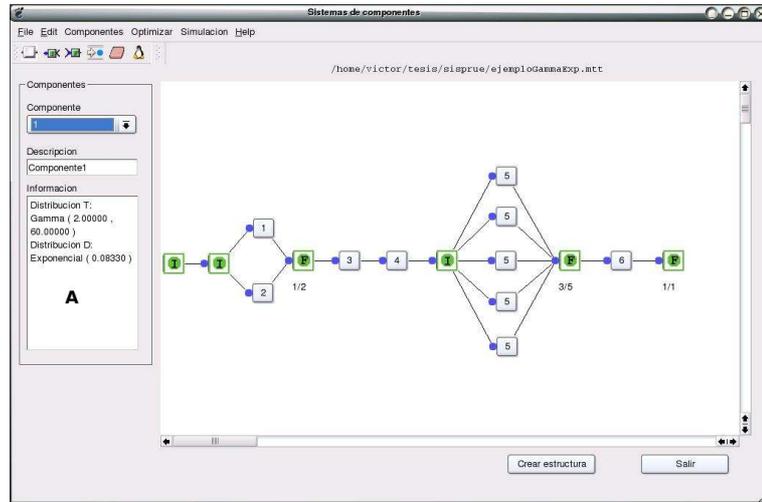


Figura B.2. El módulo de diseño. Agregar componentes.

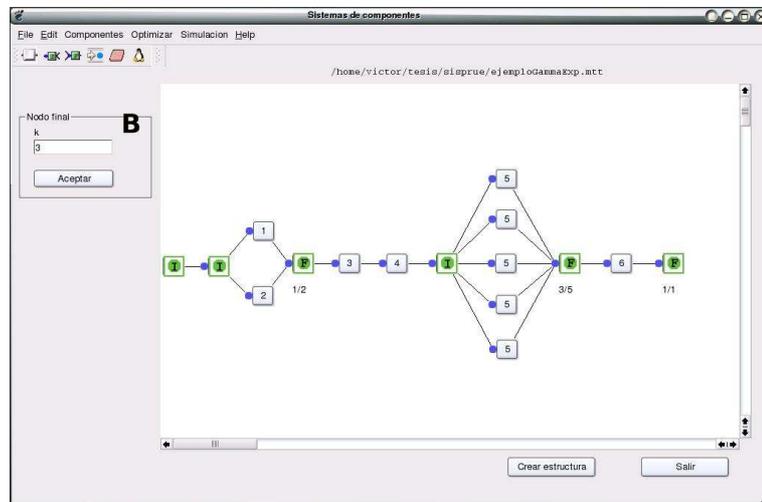


Figura B.3. El módulo de diseño. Agregar nodo final.

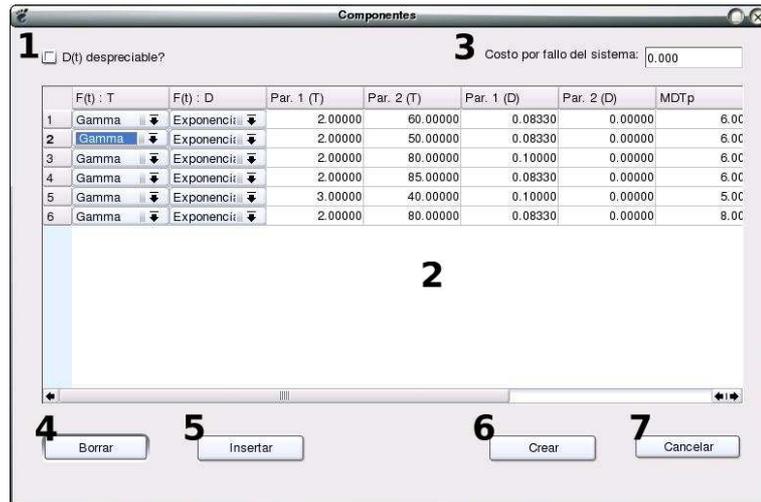


Figura B.4. El módulo de componentes.

2. Se introduce la información de los componentes: distribuciones (falla y reparación), parámetros de estas distribuciones y costos.
3. Se introduce el costo por fallo del sistema (si aplica).
4. Borrar algún componente introducido.
5. Insertar una fila para un nuevo componente.
6. Crea la lista de componentes introducidos.
7. Salir sin crear componentes.

### B.3. El módulo de importancia de componentes

En este módulo, que se muestra en la figura B.5 pueden obtenerse diferentes medidas de importancia de componentes.

1. Muestra la información de los componentes y la importancia.
2. Calcula la medida de importancia estructural de Birnbaum ( $B_{\phi}(i)$ ) y el valor normalizado para cada componente.
3. Indica si el componente, al fallar, puede causar la falla del sistema.

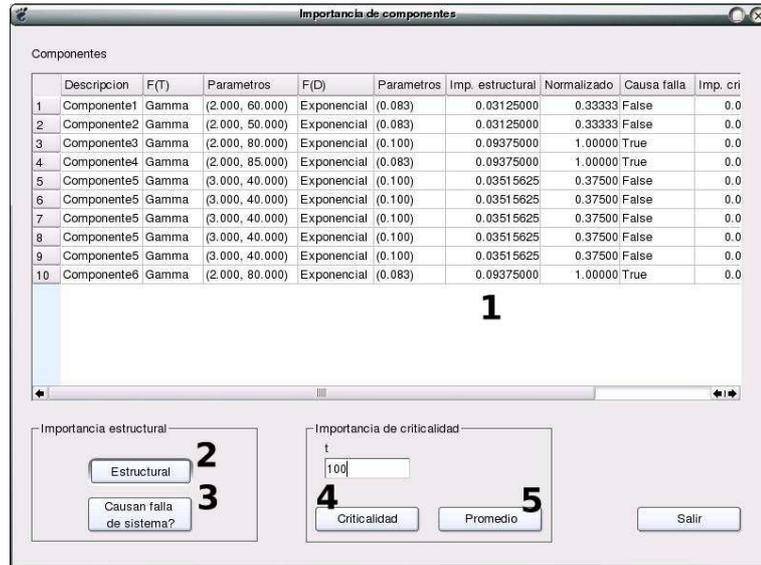


Figura B.5. El módulo de importancia de componentes.

4. Calcula la medida de importancia de criticidad ( $I^{CR}(i|t)$ ) para el tiempo  $t$  introducido.
5. Calcula la medida de importancia de criticidad promedio en  $(0, t)$ , es decir:  $\frac{1}{t} \int_0^t I^{CR}(i|x) dx$ .

## B.4. El módulo de optimización

En este módulo se realiza la optimización del sistema.

Para encontrar periodos óptimos de mantenimiento preventivo (ver figura B.6), debe introducirse la disponibilidad mínima requerida para el sistema, el número de iteraciones del algoritmo y el rango de variables para el periodo  $\tau$ , también debe elegirse bajo qué política de mantenimiento preventivo (tipo I o tipo II) se realizará la optimización.

Para encontrar parámetros óptimos de la distribución del tiempo de reparación, la información necesaria es la siguiente (ver figura B.7):

1. Aquí se indica en qué componentes del sistema se realizará la optimización, lo mínimo es 1.
2. Aquí se indica si se fija algún parámetro (excepto si  $F_D(t)$  es exponencial) de la distribución del tiempo de reparación. Si se fija alguno, solo se buscará el parámetro óptimo restante.

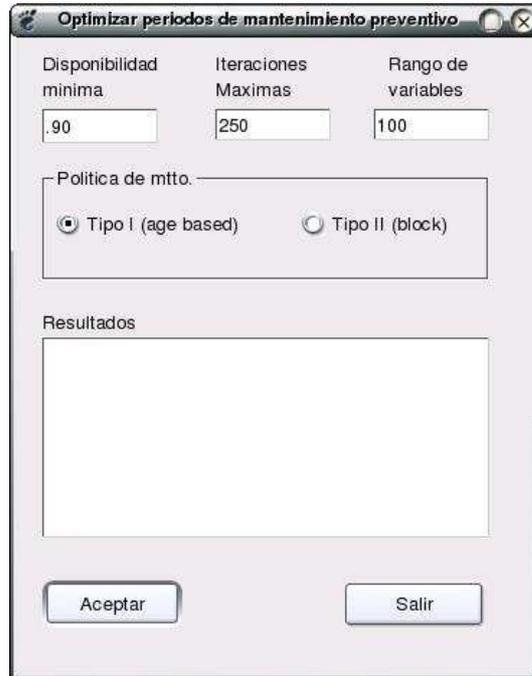


Figura B.6. Optimización en mantenimiento preventivo.

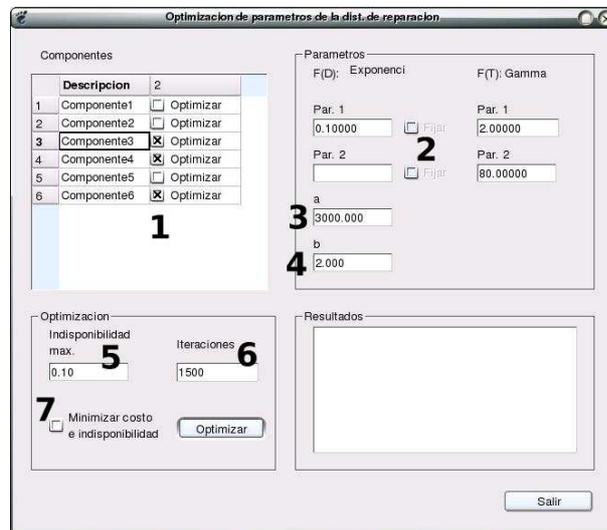


Figura B.7. Optimización de parámetros en mantenimiento correctivo.

3. Se introduce el valor de la escala monetaria para reducir el tiempo medio de reparación.
4. Se introduce el valor del esfuerzo para reducir el tiempo medio de reparación.
5. Se introduce la indisponibilidad máxima permitida.
6. Aquí se introduce el número de iteraciones del algoritmo de optimización.
7. Si está seleccionado, se utilizará optimización multiobjetivo.

## B.5. El módulo de simulación

	(T)	Par. 2 F(T)	F(D)	Par. 1 F(D)	Par. 2 F(D)	MDTp	Periodo mto.
1	2.00000	60.00000	Exponencial	0.08330			6
2	2.00000	50.00000	Exponencial	0.08330			6
3	2.00000	80.00000	Exponencial	0.10000			6
4	2.00000	85.00000	Exponencial	0.08330			6
5	3.00000	40.00000	Exponencial	0.10000			5
6	2.00000	80.00000	Exponencial	0.08330			8

Figura B.8. El módulo de simulación.

Este módulo permite simular el comportamiento de un sistema a través del tiempo aplicándole una política de mantenimiento preventivo tipo I o tipo II (ver figura B.8) .

1. En este conjunto de celdas se introducen los valores de los parámetros de las distribuciones del tiempo a la falla y de reparación deseadas, también el tiempo requerido para realizar un mantenimiento preventivo y el periodo de mantenimiento preventivo.

2. Aquí se selecciona la política de mantenimiento a utilizar.
3. Esta opción se selecciona si se desean utilizar los parámetros originales.
4. Si se desea calcular la disponibilidad promedio en algún intervalo de tiempo, se selecciona esta opción y se introduce el intervalo.
5. Esta opción se selecciona si se desea obtener el número de fallas en  $(0, t)$

# Bibliografía

- [1] Richard E. Barlow, Frank Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [2] Marvin Rausand, Arnljot Hoyland *System Reliability Theory. Models, Statistical Methods and Applications. Second Edition*, John Wiley & Sons, New York, 2004.
- [3] Arnljot Hoyland, Marvin Rausand *System Reliability Theory. Models, Statistical Methods and Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [4] William Q. Mekker, Luis A. Escobar, *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [5] Harold Ascher, Harry Feingold, *Repairable Systems Reliability. Modelling, Inference, Misconceptions and Their Causes*, Marcel Dekker, New York, 1984.
- [6] Alexander M. Mood, Franklin A. Graybill, Duane C. Boes, *Introduction to the Theory of Statistics*, McGraw-Hill, New York, 1974.
- [7] Salih O. Duffuaa, A. Raouf and John Dixon Campbell, *Planning and Control of Maintenance Systems: Modeling and Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [8] Charles E. Ebeling, *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1997.
- [9] Lennart Rade, *Beta Mathematics Handbook. Concepts, Theorems, Methods, Algorithms, Formulas, Graphs, Tables*, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida.
- [10] Joel L. Schiff, *The Laplace Transform, Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

- [11] H. Dubner, J. Abate, *Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transform*, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 15, No. 1, January 1968, pp. 115-123.
- [12] Thomas Bäck. *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice*. Oxford University Press, New York, 1996.
- [13] Zbigniew Michalewicz, *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Springer-Value, New York, 1996.
- [14] Khairy A. H. Kobbacy, Jaehyo Jeon, *Generalized Stationary Models for Scheduling Single and Multiple Preventive Maintenance Routines*, IMA Journal of Management Mathematics, 2002, pp. 81-94.
- [15] U. S. Army Corps of Engineers. *Reliability analysis of navigation Lock and Dam mechanical and electrical equipment*, Technical Letter No. 1110-2-560, at [www.usace.army.mil](http://www.usace.army.mil), 2001.
- [16] C. M. Fonseca, P. J. Fleming, *Multiobjective Optimization*, Handbook of Evolutionary Computation, release 97/1, pp. C4.5:1-C4.5:9.
- [17] J.D. Knowles, D.W. Corne, *Approximating the Nondominated Front using the Pareto Archived Evolution Strategy*, Evolutionary Computation, Vol 8, No. 2, 149-172.
- [18] Arturo Hernández A., Salvador Botello Rionda, Giovanni Lizárraga Lizárraga, Carlos A. Coello Coello, *IS-PAES: A constraint-handling technique based on Multiobjective Optimization Concepts*, Proc. Second International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2003), Springer-Verlag, Portugal, 2003, pp. 73-87.
- [19] Arturo Hernández Aguirre, Salvador Botello Rionda, Carlos A. Coello Coello, *PASSSS: An Implementation of a Novel Diversity Strategy for Handling Constraints*, Proc. 2004 Congress on Evolutionary Computation (CEC2004) Vol. 1, Portland, Oregon, 2004, pp. 403-410.
- [20] Arturo Hernández Aguirre, Salvador Botello Rionda, Carlos A. Coello Coello, Giovanni Lizárraga Lizárraga and Efrén Mezura Montes, *Handling Constraints using Multiobjective Optimization Concepts*, International Journal For Numerical Methods in Engineering, Volume 59, Issue 15, April 2004.
- [21] Arturo Hernández Aguirre, Salvador Botello Rionda, Giovanni Lizárraga Lizárraga, Carlos Coello Coello, *IS-PAES: Multiobjective Optimization With Efficient Constraint Handling*,

Proc. IUTAM Symposium on Evolutionary Methods in Mechanics, Kluwer Academic Publishers, Poland, 2002, pp. 111-120.

- [22] Santosh Shetty, *Determining the availability and reliability of storage configurations*, Dell Magazines, available at [www.dell.com](http://www.dell.com), August, 2002.
- [23] R: A language and environment for statistical computing, R Development Core Team. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2004, ISBN 3-900051-07-0, <http://www.R-project.org>