

# DISEÑO DE PLANES DE PRUEBAS DE VIDA ACELERADA



Jorge Luis Morales Martínez  
Asesor: Dr. Enrique Villa Diharce  
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Una tesis presentada para el grado de  
*Maestría en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística*

Guanajuato, Gto., México 2015

A mi familia por todo el tiempo que les he robado especialmente a mi mamá Lidia Martínez Dávila por todo el amor que me mostró durante todo el tiempo que estuvo a mi lado y que siempre estará en mi corazón en todo momento, a mi papá Mateo Morales Pérez por toda su dedicación, cariño y empeño porque saliera adelante en la vida, a mi abuela Juana Dávila.

Ningún resultado que obtenga podrá devolverles a ellos todo el tiempo que les he robado. Con palabras no se puede expresar el significado de familia y seres queridos.

## Agradecimientos

“Saber Agradecer es mirar positivamente los gestos, las actitudes, las manos de los que nos favorecen. No es simple cuestión de cortesía, de buena educación, sino de buen corazón”

Mis primeras palabras de agradecimiento son para el Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT), por abrirme sus puertas al programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística; y para el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología porque sin el programa de becas no hubiese sido posible desarrollar mis estudios.

Con este trabajo culmina una etapa importante de nuestra vida, y el momento insta a la reflexión y en nuestra memoria se dibujan las imágenes de todos aquellos que contribuyeron de una u otra forma a la culminación exitosa del mismo, a alcanzar una meta tan deseada como esta.

Quiero expresar un agradecimiento especial a mi asesor y director de este trabajo el Dr. Enrique Villa Dhiarce, por su excelente conducción y el apoyo brindado desde el principio de la investigación requerida para la realización de mi tesis.

Muchas gracias también a todos los profesores de la maestría de probabilidad y estadística de los cuales tuve el honor de recibir clases. Un abrazo a todos mis compañeros de aula y causa durante este par de años, en especial a Edgar E. Rodríguez Mendoza, Sofía Ramos Pulido, Alejandro Ramírez Contreras, Lilia Guadalupe López Rentería, Lilia Karen Rivera Escobar, Juan Antonio Villeda Resendiz y Rafael Islas Pineda, sin duda una nueva familia.

Además quisiera agradecer a mis hermanos cubanos por toda su ayuda, dentro de los que mencionamos a Yoandra Abad Lamoth, a su esposo Lazaro Emilio Lesmes León, Mario Liosbel Díaz Abreu y Guillermo Sosa Gómez.

Así damos las gracias a esa inmensidad, a los que nos enseñaron poniendo en nosotros su esperanza, a aquel que un día nos dio una hoja o nos prestó un lápiz, a aquel que en un momento amargo nos hizo sonreír, al que nos escuchó, al que se mostró espontáneo, a todos aquellos que confiaron en nosotros.

También es el momento para pedir excusas por aquellas interrupciones, o por alguna tardanza o quizás porque algún día fui inoportuno.

En fin agradecer la dedicación y la paciencia, por darnos un espacio de su tiempo, un pedacito de sus vidas, porque cualquier atención, preocupación, desvelo, aunque pequeño siempre será recordado.

Por último quiero agradecer a las personas más importantes en mi vida, a mi padre Mateo Morales Pérez, a mis hermanos Anayansi y Jose Luis, a mis sobrinos Samuel, Gabriela y Daniela y a mi novia Juana Edith Lozano Hernández.

Gracias a todos Jorge Luis.

## Resumen

Las pruebas de vida acelerada consisten en colocar en operación una muestra de algún producto de interés durante un cierto período de tiempo bajo condiciones ambientales y de operación controladas para obtener información rápida de su distribución de vida. Las unidades en prueba se someten a niveles de esfuerzo alto y las mismas fallan más tempranamente que en condiciones de diseño.

La información que se obtiene en condiciones aceleradas se analiza en términos de un modelo y después se extrapola en condiciones de diseño para estimar la distribución de vida.

Existen varias maneras en las cuales se pueden aplicar los esfuerzos, los métodos mas comunes son esfuerzos constantes y esfuerzos escalonados. En el desarrollo de este trabajo se abordarán sólo pruebas con esfuerzo constante.

En este trabajo se hace una revisión de los diferentes diseños de planes de pruebas de vida acelerada con dos esfuerzos y tres esfuerzos respectivamente. En estos últimos la revisión se hace desde los planes menos eficientes, comenzando por los planes tradicionales, pasando por el plan 4:2:1 y finalizando por el plan propuesto por Meeker y Escobar. Además se obtienen nuevas modificaciones al plan propuesto por Meeker y Escobar así como al plan óptimo y como resultado de estas modificaciones, se obtienen nuevos planes mas eficientes. En todo lo anterior se supone que los tiempos de falla de unidades expuestas a esfuerzos constantes siguen una distribución Lognormal o Weibull respectivamente.

# Tabla de Contenido

Lista de Figuras	vii
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos y estructura de la tesis . . . . .	2
<b>2 Conceptos de confiabilidad</b>	<b>5</b>
2.1 Conceptos básicos de confiabilidad . . . . .	5
2.2 Distribuciones de log-localización-escala . . . . .	11
2.3 Pruebas de Vida Acelerada( <i>PVA</i> ) . . . . .	12
2.3.1 Datos censurados . . . . .	14
<b>3 Pruebas de vida acelerada para distribuciones de vida Lognormal.</b>	<b>16</b>
3.1 Introducción . . . . .	16
3.2 Relación Vida-Esfuerzo . . . . .	17
3.2.1 Relación Potencia inversa . . . . .	17
3.2.2 Relación de Arrhenius . . . . .	17
3.3 Modelo para la vida del producto como función del esfuerzo . . . . .	19
3.4 Planes de vida acelerada . . . . .	26
3.5 Ejemplo de cómo determinar un plan óptimo. . . . .	28
3.6 Comparaciones de los diferentes planes . . . . .	30
<b>4 Planes de prueba óptimos y de Meeker y Escobar modificados</b>	<b>35</b>
4.1 Ejemplos de la literatura. . . . .	37
4.2 Modificación al plan de Meeker y Escobar . . . . .	42
4.3 Modificación del plan óptimo . . . . .	47

<b>5 Pruebas de vida acelerada para distribuciones de vida Weibull.</b>	<b>51</b>
5.1 Modelo para la vida del producto como función del esfuerzo . . . . .	51
5.2 Comparaciones de los diferentes planes . . . . .	57
5.3 Ejemplos de la literatura. . . . .	61
5.4 Resultados de diferentes planes para un ejemplo . . . . .	64
<b>6 Conclusiones</b>	<b>68</b>
<b>A Cálculo de derivadas asumiendo distribución de vida Lognormal</b>	<b>70</b>
<b>B algoritmo Nelder-Mead</b>	<b>73</b>
<b>C Código para el ejemplo de cómo determinar un plan óptimo</b>	<b>77</b>
<b>D Cálculo de derivadas asumiendo distribución de vida Weibull</b>	<b>81</b>
<b>E Cuadratura adaptativa</b>	<b>83</b>
<b>Referencias</b>	<b>86</b>

# Lista de Figuras

2.1	Función de confiabilidad . . . . .	8
2.2	Esfuerzo escalonado . . . . .	13
2.3	Esfuerzo progresivo . . . . .	13
2.4	Esfuerzo constante . . . . .	14
3.1	Plan ajustado reducción del esfuerzo bajo en 0.90 veces el valor del esfuerzo bajo en el plan 4:2:1. . . . .	27
3.2	Razón de varianza de planes con tres esfuerzos con respecto al plan óptimo. . . . .	34
4.1	Representación gráfica de un modelo que acelera. . . . .	42
4.2	Representación de la modificación del plan de Meeker y Escobar. . . .	43
4.3	Resultados del plan de Meeker y Escobar modificado. . . . .	46
4.4	Plan óptimo modificado. . . . .	47
5.1	Razón de varianza de planes con tres esfuerzos con respecto al plan óptimo. . . . .	60
B.1	El triángulo $\Delta BGW$ , el punto medio M y reflexión del punto W en el punto R . . . . .	74
B.2	El triángulo $\Delta BGW$ ,el punto R y la prolongación hasta el punto E .	74
B.3	Los puntos de contracción $C_1$ y $C_2$ . . . . .	75
B.4	Encogimiento del triángulo hacia B . . . . .	75



# Lista de Tablas

2.1	Relación entre las funciones de densidad,distribución,confiabilidad y riesgo. . . . .	10
3.1	Resultados utilizando un plan óptimo. . . . .	31
3.2	Resultados utilizando un plan 4:2:1 . . . . .	31
3.3	Resultados utilizando el mejor plan estandar . . . . .	32
3.4	Resultados utilizando el plan de Meeker y Escobar fijando un 20% en el esfuerzo medio . . . . .	32
4.1	Tiempos de falla de una clase-B aislante para motores eléctricos. . . . .	37
4.2	Relación de valores de $P_H$ y $P_D$ . . . . .	39
4.3	Datos de Vida en voltajes elevados. . . . .	40
4.4	Relación de valores de $P_H$ y $P_D$ . . . . .	41
4.5	Resultados de los diferentes planes con tres esfuerzos para el ejemplo 1. . . . .	44
4.6	Resultados del plan óptimo y modificado para el ejemplo 1. . . . .	48
4.7	Tabla resumen de resultados de varianza por tipo de plan. . . . .	49
5.1	Resultados utilizando un plan óptimo. . . . .	57
5.2	Resultados utilizando un plan 4:2:1 . . . . .	58
5.3	Resultados utilizando el mejor plan estandar . . . . .	58
5.4	Resultados utilizando el plan de Meeker y Escobar fijando un 20% en el esfuerzo medio . . . . .	59
5.5	Tiempos de falla de un nuevo producto. . . . .	62
5.6	Relación de valores de $P_H$ y $P_D$ . . . . .	63
5.7	Resultados de los diferentes planes con tres esfuerzos para el ejemplo 1. . . . .	64
5.8	Resultados del plan óptimo y modificado para el ejemplo 1. . . . .	66
5.9	Tabla resumen de resultados de varianza por tipo de plan. . . . .	67

# Capítulo 1

## Introducción

El cambiante mundo moderno está sustentado por un conjunto de ciencia empleadas por el hombre para, entre otras cosas, controlar y perfeccionar los procesos; tal es el caso de la confiabilidad. La tecnología informática con que se dispone hoy en día, casi inimaginable hace sólo dos décadas, ha posibilitado avances extraordinarios en el análisis de datos ya sea en áreas del conocimiento como la medicina, la meteorología, la bioinformática y la educación o de tipo psicológico, sociológico y de otros referidos al comportamiento humano. Este impacto es más evidente en la relativa facilidad con la que los ordenadores pueden analizar enormes cantidades de datos complejos y en menos tiempo. Hoy en día casi cualquier problema se puede analizar fácilmente por un número ilimitado de programas estadísticos, incluso en ordenadores personales. Además, los efectos del progreso tecnológico han extendido mucho más la capacidad de manipular datos, liberando a los investigadores de las restricciones del pasado y permitiéndoles así abordar investigaciones más sustantivas y ensayar sus modelos teóricos.

El contexto de esta investigación se desarrolla en el área de la confiabilidad. Esta área de estudio es relativamente reciente. Antes de 1940 la mayor parte del trabajo relacionado con el control de calidad o los problemas de mantenimiento, no concebían a la confiabilidad como un área de estudio. Durante la segunda guerra mundial se puso en evidencia el bajo nivel de confiabilidad que presentaban los equipos bélicos, tales como equipos de comunicación, armamento, aviones entre otros, dada la cantidad de fallas que presentaron. En esta época se formaron distintos grupos de trabajo, principalmente por ingenieros y estadísticos, con el fin de resolver problemas e impulsar el conocimiento de la confiabilidad.

Al final de la década de los años cuarenta (1941-1950), después de la segunda guerra mundial, la confiabilidad se fue aplicando paulatinamente en la industria, concentrando las investigaciones en varias de ellas, como son: la energética, la

electrónica, la química y la aereo-espacial. Las investigaciones en estas industrias resultaron ser puntos de acumulación, teniendo en cuenta que son sectores donde las consecuencias de las fallas tienen costos muy altos, tanto en dinero como en vidas humanas, siendo éstos últimos los mas importantes.

En la actualidad existe una gran competencia para desarrollar productos de alta tecnología en un tiempo específico, mejorando la productividad, la confiabilidad del producto y sobre todo la calidad. Manifestándose en la línea de la calidad moderna para producir productos con una confiabilidad elevada mejorando el proceso de fabricación y el diseño. Todo lo anterior ha motivado el desarrollo de varios métodos para mejorar el proceso en el área de la ingeniería. Además, los requerimientos de tener una confiabilidad elevada han aumentado la necesidad de adelantar pruebas de materiales, componentes y sistemas, pero al mismo tiempo estimar la distribución del tiempo a la falla o la duración a largo plazo de productos con una confiabilidad elevada, es particularmente difícil. La mayoría de los productos modernos están diseñados para operar sin fallas durante años, décadas o incluso más tiempo sin fallar. Por lo tanto de esta manera serán observados pocos fracasos en un tiempo adecuado longitud práctica a condiciones normales de operación ó uso [3].

Lo que pudo haber tomado años para llevar a cabo en el pasado ahora se puede hacer en meses o incluso semanas. Si usted puede lanzar un producto confiable antes que sus competidores, entonces usted ha ganado una gran ventaja. Aunque el área de la confiabilidad y sus aplicaciones, como lo son las pruebas de vida acelerada, han despertado el interés científico, aún es un campo en el cual falta mucho por explorar y por tanto existe gran oportunidad para la investigación [4]

## 1.1 Objetivos y estructura de la tesis

Entre los objetivos principales de la tesis se encuentran

- a) Dar un panorama general de la teoría de las las diferentes formas de diseñar planes de pruebas de vida acelerada que optimicen la varianza de un cuantil de interés.
- b) Realizar una modificación al mejor plan de prueba que se encuentre en la literatura para obtener un plan mas eficiente.

Para desarrollar lo anterior, el trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presentan conceptos básicos de confiabilidad entre los que se encuentran funciones para modelar el tiempo a la falla  $T$ , como son la función de

densidad, la función de distribución, la función de confiabilidad y la función de riesgo así como las posibles relaciones que pueden tener. Además se hace mención sobre las distribuciones de log-localización-escala y por último se termina con una breve explicación de que son las pruebas de vida acelerada. Dichas pruebas representan un factor que puede desempeñar un papel importante en la disminución del tiempo de comercialización de un producto.

En el tercer capítulo se presentan pruebas de vida acelerada para distribuciones de vida Lognormal. El mismo inicia con una introducción de los componentes de un modelo para una pruebas de vida acelerada. Luego se describen algunas relaciones que existen entre la vida y el esfuerzo. Luego en la sección 2.3 se presenta la teoría de los diferentes planes de vida acelerada, los cuales buscan estimar una relación lineal simple entre el esfuerzo transformado y el logaritmo del tiempo de vida del producto. En particular se hace mayor énfasis en el plan óptimo el cual se basa en dos niveles de esfuerzo y es la base estadística para los demás planes de prueba, ya que el método para obtener este plan se puede extender fácilmente a los otros planes. Éstos últimos presentan tres niveles de esfuerzo y se utilizan para poder verificar que el modelo de vida acelerada es adecuado. Se hace mención del algoritmo Nelder-Mead, el cual es el algoritmo que utilizamos para la obtención de dichos planes. El capítulo termina mostrando un ejemplo de cómo determinar un plan óptimo así como la comparación de los diferentes planes.

En el capítulo 4 se comienza presentando una serie ejemplos de la literatura, en dos de ellos la variable de aceleración es la temperatura mientras que en los otros dos la variable de aceleración es el voltage. En los mismos se puede observar la relación que existe entre las probabilidades de falla en el esfuerzo mas elevado y las probabilidades de falla en el esfuerzo mas bajo cuando se toma un tiempo de observación  $\eta$ . Por último se muestran las modificaciones que le hacemos tanto al plan óptimo como al plan propuesto por Meeker y Escobar. Dichas modificaciones a estos planes se ilustran a traves de un ejemplo de los que se mencionan en la literatura.

En el quinto capítulo se presentan pruebas de vida acelerada para distribuciones de vida weibull. El mismo inicia con la presentación de la teoría para el plan óptimo de vida acelerada, el cual como ya sabemos busca estimar una relación lineal simple entre el esfuerzo transformado y el logaritmo del tiempo de vida del producto. Se hace mención del método cuadratura adaptativa, el cual nos ayuda a calcular algunas integrales numéricas que nos encontramos en la matriz de información de Fisher. El algoritmo de optimización que se utiliza para la obtención de los diferentes planes sigue siendo el algoritmo de Nelder-Mead. En la sección 5.3 se muestra la comparación de

los diferentes planes. Luego se presentan dos ejemplos de la literatura y por último para uno de ellos se muestran los diferentes resultados que se pueden obtener con dichos planes y además como se hizo en el capítulo anterior se muestran los resultados que se obtienen con las modificaciones al plan óptimo y al plan de Meeker y Escobar.

Por último se proporcionan las conclusiones del trabajo y posibles actividades a realizar en el futuro.

# Capítulo 2

## Conceptos de confiabilidad

### 2.1 Conceptos básicos de confiabilidad

A continuación se muestra que se entiende por tiempo a la falla:

Entenderemos por tiempo a la falla de un producto por aquel tiempo que transcurre desde que la unidad en cuestión se pone en operación hasta que falla por primera vez.

Tanto las personas como las empresas pudieran estar interesados en tratar de conocer los diferentes modos de falla y los tiempos a la falla de todas las unidades de sus productos. Así de esta manera los interesados pudieran ser capaces de sacar ventaja de esta situación con el objetivo de dominar el mercado. Por otro lado se sabe que la búsqueda de esta información es algo imposible, pero de alguna manera se buscan alternativas para poder obtener la mayor información posible sobre los tiempos a la falla de sus productos.

Estas alternativas han sido estudiadas a través de la confiabilidad modelando el comportamiento de los mencionados tiempos a la falla y el uso que se le ha dado al conocimiento obtenido de este tipo de modelación se encuentra en diferentes áreas de aplicación como:

- Análisis de seguridad/riesgo
- Calidad
- Diseño industrial
- Protección ambiental

Durante mucho tiempo no se tenía una definición concreta de confiabilidad. La primera idea en que se midió dicho concepto fue contando el número de fallas por

horas de uso. Una definición probabilística común de confiabilidad,[8] es la siguiente "confiabilidad es la probabilidad de que una unidad realice su función hasta un tiempo especificado bajo las condiciones de uso encontradas." Esta probabilidad debe ser evaluada en las condiciones ambientales o de uso encontradas por el producto y no en las condiciones de trabajo para las que el producto fue diseñado.

Para el propósito de modelación es natural considerar el tiempo a la falla como una variable aleatoria  $T$ , de tal manera que si nosotros fijamos  $t_0 = 0$  como el instante inicial de cierto producto en operación, la distribución de probabilidad de  $T$  se puede caracterizar a través de las siguientes funciones:

Primero hay que notar que el tiempo a la falla no siempre se mide en escala de tiempo, ya que también se puede medir mediante otros conceptos que reflejen la duración de vida del componente o producto, por ejemplo cantidad de producción, ciclos de operación, distancia recorrida, entre otros, todo ello dependiendo de la naturaleza del componente o del producto. Por otro lado las unidades en que se miden algunos de estos conceptos llevan a que la variable aleatoria  $T$  sea discreta, como pudiera ser el caso de los ciclos de operación, pero la mayoría de las veces se puede utilizar una aproximación continua.

Una de estas funciones con la cual se puede caracterizar una variable aleatoria  $T$  es la función de distribución la cual se define a continuación.

**Definición 1 (Función de distribución)** *Sea  $T$  una variable aleatoria definida en el espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ . La función de distribución de  $T$  está dada por:*

$$F_T(t) = P[\{w \in \Omega | T(w) \leq t\}] = P(T \leq t), t \in \mathbb{R}$$

Dado que los tiempos de vida( $T$ ) son no negativos, con base a la definición anterior se tiene que  $F_T(t) = 0$  para  $t \leq 0$ . Si fijamos  $t_0 > 0$ , entonces  $F_T(t_0)$  es la probabilidad de que un componente falle antes de  $t_0$ . Por otro lado si pensamos en una población de componentes, se puede interpretar a  $F_T(t_0)$  como la proporción esperada de componentes que fallan antes del tiempo  $t_0$ .

Otra de las funciones importantes y que mantiene una relación con la función de distribución es la función de densidad.

**Definición 2 (Función de densidad)** *Cuando la función de distribución de una variable aleatoria  $T$  es absolutamente continua su función de densidad, está definida por:*

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t), t > 0 \tag{2.1}$$

equivalentemente, (2.1) se puede expresar como:

$$f_T(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}, t > 0$$

y se utiliza para medir la frecuencia relativa de los tiempos a la falla en una vecindad de  $t$ , de manera que  $\frac{f_T(t_1)}{f_T(t_2)} = b$  significa que en una vecindad de  $t_1$  se esperan  $b$  veces la cantidad de fallas que en una vecindad para  $t_2$  de la misma longitud. Por otro lado, para  $\Delta t$  pequeño,  $\Delta t \cdot f_T(t)$  se puede interpretar como la probabilidad de que un componente falle en una vecindad inmediata a  $t$ , es decir, en  $(t, t + \Delta t)$ , la proporción de componentes que se espera, fallen en una vecindad inmediata a  $t$ .

De (2.1) se tiene que  $F_T(t) = \int_0^t f_T(z) dz$ , por lo que desde el punto de vista gráfico se tiene que  $F_T(t)$  es el área bajo la curva de  $f_T(t)$  en el intervalo  $(0, t]$ .

Otras de las funciones que se utilizan para modelar el tiempo a la falla  $T$  es la función de confiabilidad, también conocida como función de supervivencia. En general, se define por la probabilidad de que el componente sobreviva más allá del instante  $t$ , o equivalentemente que el componente no falle antes del tiempo  $t$ .

**Definición 3 (Función de confiabilidad)** *La función de confiabilidad de una variable aleatoria  $T$  se define por:*

$$R_T(t) = P(T > t), 0 \leq t < \infty$$

Nótese que a  $R_T(t)$  lo podemos expresar en función de  $F_T(t)$ , ya que  $P(T > t) + P(T \leq t) = 1$  y así se tiene que:

$$R_T(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F_T(t) \quad (2.2)$$

Por lo tanto la función de confiabilidad se relaciona con la función de densidad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt} F_T(t) \\ &= \frac{d}{dt} (1 - R_T(t)) \\ &= -\frac{d}{dt} R_T(t) \end{aligned}$$

o de manera equivalente

$$R_T(t) = \int_t^{\infty} f_T(z) dz$$



La definición que hemos mostrado de la confiabilidad es la definición utilizada por autores clásicos como Kalb 1980 Crowder 1991

La función de confiabilidad tiene las siguientes propiedades:

1.  $R_T(t)$  es una función no creciente, es decir si  $a < b$ , entonces  $R_T(a) \geq R_T(b)$ .
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} R_T(t) = 0$
3.  $\lim_{t \rightarrow 0} R_T(t) = 1$
4.  $R_T(t)$  es continua por la derecha. Es decir, para cualesquiera  $b$  y cualesquiera sucesión decreciente  $b_n, n \geq 1$ , que converge a  $b$ , el  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_T(b_n) = R_T(b)$ .

En la figura 2.1 se puede observar la relación que existe entre las funciones  $R_T(t)$  y  $F_T(t)$ .

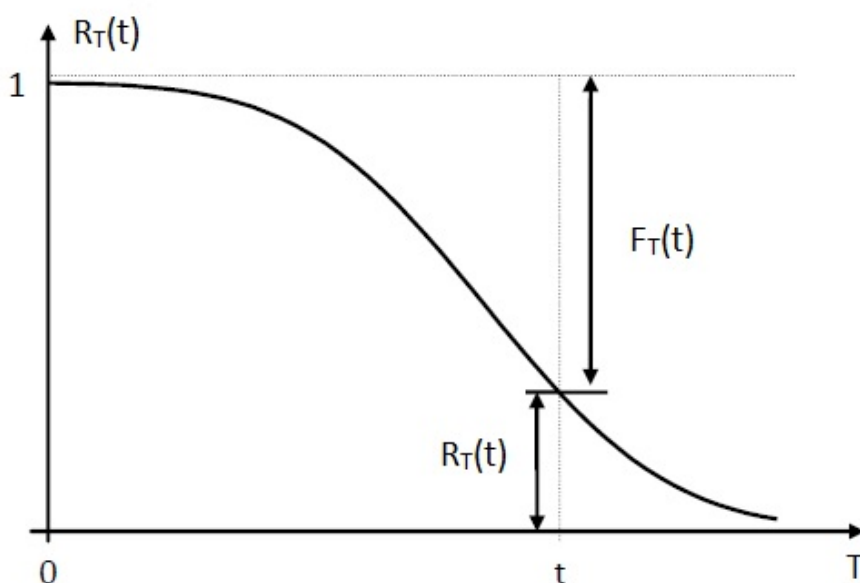


Figura 2.1: Función de confiabilidad

Una última función que se considera para modelar la variable aleatoria  $T$  es la función de riesgo, también conocida como función de tasa de fallas.

**Definición 4 (Función de riesgo)** La función de riesgo se define como:

$$h_T(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t}, t \geq 0. \quad (2.3)$$

Esta función se conoce como la función de la tasa de fallas y expresa la propensión a la falla en un intervalo pequeño inmediatamente después de  $t$ , considerando que el componente ha estado funcionando hasta el tiempo  $t$ . Lo que acabamos de decir se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera:

Para un  $\Delta t$  pequeño y  $t > 0$  se tiene que:

$$h_T(t) \cdot \Delta t \approx P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)$$

es la probabilidad de que un componente que ha estado funcionando correctamente hasta el tiempo  $t$ , falle en el intervalo  $(t, t + \Delta t]$ .

De la ecuación (2.3) se obtiene la siguiente entre la función de riesgo, la función de densidad y de confiabilidad.

$$\begin{aligned} h_T(t) &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} \\ &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(T \leq t + \Delta t) - P(T \leq t)}{P(T > t)} \\ &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{R_T(t)} \\ &= \frac{1}{R_T(t)} \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{R_T(t)} \frac{d}{dt} F_T(t) \\ &= \frac{f_T(t)}{R_T(t)}, t > 0. \end{aligned}$$

La función de riesgo refleja el comportamiento de la confiabilidad del componente cuando nos referimos a ésta como "la calidad a través del tiempo". La importancia de la tasa de falla es que indica la tasa de cambio en la conducta de envejecimiento de una población de componentes.

**Definición 5 (Función de tasa acumulada)** La función de tasa de falla acumulada de una variable aleatoria  $T$  se define por:

$$H_T(t) = \int_0^t h_T(u) du$$

Teniendo en cuenta la función de tasa de falla acumulada se tiene el siguiente resultado:

$$R_T(t) = \exp \{-H(t)\}$$

Para probar este resultado hay que tener en cuenta la ecuación (2.2) y de la definición (3) se tiene que:

$$h_T(t) = \frac{\frac{d}{dt}F_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

Integrando en ambos lados de la expresión anterior se obtiene:

$$-\log(1 - F_T(t)) = \int_0^t h_T(u) du + k$$

ó

$$1 - F_T(t) = e^k \exp\{-H(t)\}$$

Si tomamos  $t = 0$  como tiempo inicial se obtiene que  $k = 0$  y de esta forma

$$1 - F_T(t) = \exp\{-H(t)\}$$

Por lo tanto

$$R_T(t) = \exp\{-H_T(t)\}$$

Las funciones antes mencionadas caracterizan la variable aleatoria  $T$ , ya que todas ellas contienen toda la información acerca de la variable. Aunque la diferencia radica solo en la forma en que cada función expresa dicha información, de ahí que la interpretación sea diferente. Dado esto se puede trabajar indistintamente con cualquiera de ellas y así poder obtener una a partir de la otra. A continuación en la tabla 1 se muestra un resumen de las relaciones de las funciones presentadas.

	Densidad	Distribución	Confiabilidad	Riesgo
Densidad	$f_T(t)$	$\frac{d}{dt}F_T(t)$	$-\frac{d}{dt}R_T(t)$	$h_T(t) \exp\left\{-\int_0^t h_T(u) du\right\}$
Distribución	$\int_0^t f_T(u) du$	$F_T(t)$	$1 - R_T(t)$	$1 - \exp\left\{-\int_0^t h_T(u) du\right\}$
Confiabilidad	$\int_t^\infty f_T(u) du$	$1 - F_T(t)$	$R_T(t)$	$\exp\left\{-\int_0^t h_T(u) du\right\}$
Riesgo	$\frac{f_T(t)}{\int_t^\infty f_T(u) du}$	$-\frac{d}{dt} \log[1 - F_T(t)]$	$-\frac{d}{dt} \log[R_T(t)]$	$h_T(t)$

Tabla 2.1: Relación entre las funciones de densidad, distribución, confiabilidad y riesgo.

Se puede decir que existe mucha literatura estadística en la cual se pudiera profundizar sobre las propiedades de cada una de las funciones presentadas anteriormente, aunque cabe destacar que la función de confiabilidad y la función de riesgo son más propias del área de confiabilidad.

Bajo ciertas circunstancias puede ser deseable trabajar los tiempos a la falla a través de variables aleatorias discretas, sin embargo, estos casos no los contemplamos en los intereses de esta tesis.

## 2.2 Distribuciones de log-localización-escala

Dentro de la familia de distribuciones existe una en particular que posee ciertas propiedades que son deseables dentro del contexto de modelación de los tiempos a la falla y de ahí su gran utilidad dentro de la confiabilidad. Esta familia de la cual estamos hablando es la familia de log-localización-escala.

Dentro de la literatura estadística la definición de la familia de log-localización-escala se puede encontrar de la siguiente forma:

**Definición 6 (localización -escala)** *Una variable aleatoria  $T$  pertenece a la familia de distribuciones de log-localización-escala si  $Y = \ln(T)$  es un miembro de la familia de localización-escala.*

Pero, ¿cuando sabemos si una variable aleatoria pertenece a la familia de distribuciones de localización-escala?, para ello veamos la siguiente definición:

**Definición 7** *Una variable aleatoria  $Y$  pertenece a la familia de distribuciones de localización-escala si su función de distribución acumulada se puede expresar como:*

$$P(Y \leq y) = F(y; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

donde  $-\infty < y < \infty$ ;  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma > 0$  y  $\Phi$  no depende de parámetros desconocidos.

Aquí  $\mu$  es un parámetro de localización mientras que  $\sigma$  es un parámetro de escala. Además note que  $\Phi$  es la función de distribución acumulada de  $Y$  cuando  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$ , pero de manera general  $\Phi$  es la función de distribución acumulada de  $Z = \frac{y - \mu}{\sigma}$ , por lo que la distribución de  $Z$  se conoce como la distribución estándar de la familia paramétrica correspondiente a  $Y$ .

Ahora si nosotros introducimos la definición de distribución de localización-escala en la definición de distribución de log-localización-escala se obtiene la siguiente definición:

**Definición 8** *Una variable aleatoria  $T$  pertenece a la familia de log-localización-escala si su función de distribución se puede expresar como:*

$$P(T \leq t) = F(t; \alpha, \beta) = \Phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right)$$

donde  $t > 0$ ;  $\alpha, \beta > 0$  y  $\Phi$  no depende de parámetros desconocidos.

Así de esta manera  $\alpha = \exp(\mu)$  es un parámetro de escala y  $\beta = \frac{1}{\sigma}$  es un parámetro de forma. Por otra parte se puede ver que  $\Phi$  es la función de distribución acumulada de  $Z = \beta \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)$ .

De lo anterior se puede ver que cada distribución de probabilidad que pertenece a la familia de log-localización-escala tiene asociada una distribución de la familia de localización-escala y cada una de ellas se puede caracterizar a través de  $\Phi$ . Por lo tanto las funciones características (densidad, distribución, confiabilidad y riesgo) se pueden obtener a partir de  $\Phi$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_T(t; \alpha, \beta) &= \Phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right) \\ f_T(t; \alpha, \beta) &= \frac{\beta}{t} \Phi'\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right) \\ R_T(t; \alpha, \beta) &= 1 - \Phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right) \\ h_T(t; \alpha, \beta) &= \frac{\beta}{t} \frac{\Phi'\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right)}{1 - \Phi\left(\beta \ln \frac{t}{\alpha}\right)} \end{aligned}$$

Además el cuantil  $p$  viene dado por

$$t_P = \alpha \exp\left\{\frac{\Phi^{-1}(p)}{\beta}\right\}$$

el mismo representa el tiempo en el cual una proporción de  $p$  productos o componentes de la población inicial ya hayan fallado exactamente.

## 2.3 Pruebas de Vida Acelerada (PVA)

Las pruebas de vida acelerada consisten en someter un artículo o producto a condiciones de operación (esfuerzo) más severas que la condición de operación usual. Esto nos permite observar fallas más rápidamente y con esto tener evaluaciones oportunas de la confiabilidad de los materiales, componentes o subsistemas estudiados.

Los objetivos principales de acelerar la vida de un cierto producto es obtener datos rápidamente, los cuales modelados y analizados apropiadamente proporcionan información deseada del producto o de su rendimiento bajo condiciones normales de diseño [14]. Además nos ayudan a identificar fallas en el diseño, a estimar la distribución de vida de dicho producto, medir y demostrar la confiabilidad. Tales pruebas reducen tiempo y costo de los estudios de confiabilidad.

Los esfuerzos más comunes en las pruebas de vida acelerada son: temperatura, voltaje, carga, humedad que se aplican solos o algunas veces en forma combinada, cómo es el caso de temperatura y humedad.

Existen diferentes patrones de aplicación del esfuerzo en las pruebas de vida acelerada, siendo las más comunes:

1. Esfuerzo escalonado.
2. Esfuerzo progresivo.
3. Esfuerzo constante.

En una prueba de vida acelerada con esfuerzo escalonado, un lote de unidades se somete sucesivamente a esfuerzos de niveles crecientes, como se muestra en la figura (2.2) que se puede ver a continuación.

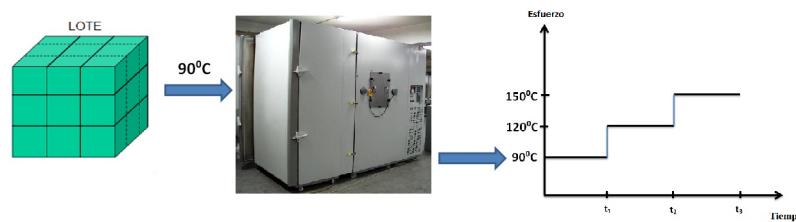


Figura 2.2: Esfuerzo escalonado

Primero el lote se somete a un nivel de esfuerzo constante por un cierto tiempo especificado, si las unidades del lote no fallan, entonces el lote se somete a otro nivel de esfuerzo más alto por otro cierto tiempo particular y así sucesivamente. De esta manera, el esfuerzo sobre todas las unidades se incrementa paso a paso hasta que las mismas fallen. Por lo general todas las unidades se someten simultáneamente al patrón variación escalonado del esfuerzo y tiempos de prueba especificados.

En una prueba de vida acelerada con esfuerzos progresivos, un lote de unidades se somete a un esfuerzo inicial y a partir de ahí el nivel de esfuerzo se incrementa continuamente a lo largo del tiempo como se puede observar en la figura (2.3).

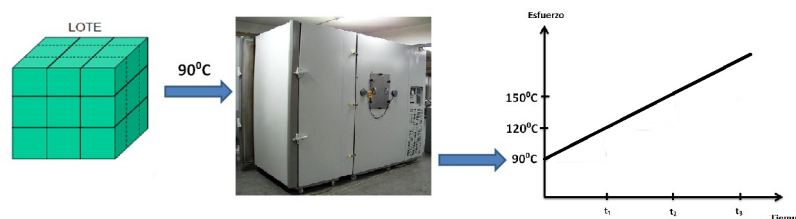


Figura 2.3: Esfuerzo progresivo

Por último en una prueba de vida acelerada bajo un esfuerzo constante, cada lote de unidades se someten a esfuerzo constante durante el estudio como se puede observar en la figura (2.4). En la misma se puede observar que un lote de unidades se somete a una temperatura de  $90^{\circ}\text{C}$  durante un determinado tiempo en una cámara, luego otro lote de unidades se somete a una temperatura de  $120^{\circ}\text{C}$  y así sucesivamente.

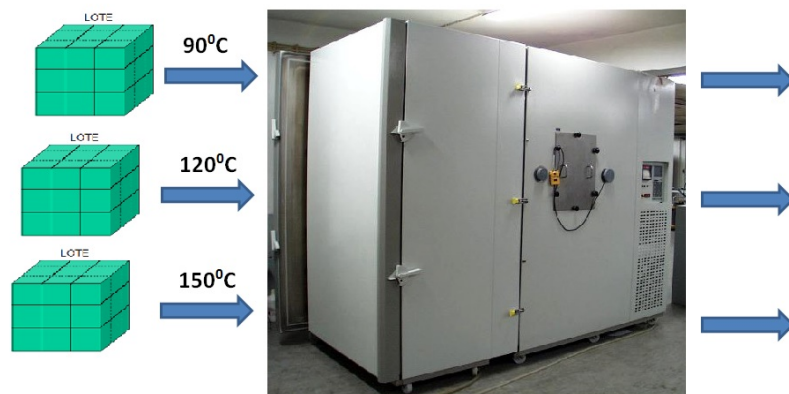


Figura 2.4: Esfuerzo constante

En el desarrollo de esta tesis se abordarán sólo pruebas con esfuerzo constante, ya que son las más comunes.

### 2.3.1 Datos censurados

En el análisis de datos de vida por lo general es muy frecuente encontrar que por alguna razón no se conoce el tiempo a la falla exacto de una unidad en prueba, a esta pérdida de información se le conoce como censura. A continuación se describen tres tipos de censura particulares:

- **Censura por la izquierda:** En este caso solo se puede dar una cota superior del tiempo a la falla, por lo que el intervalo de censura donde se asegura que ocurrió la falla es de la forma  $(0, \eta_c)$ , con  $\eta_c > 0$ :
- **Censura por la derecha:** En este caso solo se puede dar una cota inferior, es decir, únicamente se asegura que el tiempo a la falla está contenido en un intervalo de la forma  $(\eta_c, \infty)$ , con  $\eta_c > 0$ :
- **Censura por intervalos:** En este caso se desconoce el tiempo exacto en que ocurre la falla de una unidad, la única información que se tiene es que la unidad

falla en cierto intervalo de tiempo,  $(\eta_a, \eta_b)$ ,  $\eta_a > 0$  y  $\eta_a < \eta_b$ . De esta forma los datos censurados por intervalo reflejan incertidumbre respecto al tiempo exacto en que las unidades fallaron dentro de un intervalo.

Dentro de la censura por la derecha se tiene un caso que es muy natural, el cual se da cuando concluye la prueba de vida y algunas unidades sobreviven, en este caso no se puede decir en que momento fallarán las mismas, pero sin duda su falla ocurrirá en  $(\eta, \infty)$ , donde  $\eta$  representa el tiempo de duración de la prueba.

**Normalmente existen dos criterios para concluir una prueba de vida:**

- **Censura por tiempo (o censura tipo I):** La prueba culmina cuando haya pasado cierto periodo de tiempo que ha sido fijado en un inicio. Por lo regular se utiliza este criterio cuando los resultados de la prueba sean requeridos antes de una cierta fecha. Este criterio es el más usado por necesidad, sin embargo, si la duración de prueba es muy corta existe el riesgo de que la información obtenida sea insuficiente. Por tal razón, se debe poner un cuidado especial en el número de unidades a probar de tal manera que la cantidad de información sea compensada.
- **Censura por fallas (o censura tipo II):** La prueba culmina cuando se haya observado una cierta cantidad de fallas que hayan sido fijadas en un inicio. Este criterio solo puede emplearse cuando no hay restricción de tiempo y tiene la ventaja de asegurar que la prueba arroje suficiente información.



# Capítulo 3

## Pruebas de vida acelerada para distribuciones de vida Lognormal.

En la sección 3.1 se da una introducción de los componentes de un modelo para una prueba de vida acelerada, siguiendo la sección 3.2 donde se describen algunas relaciones que existen entre la vida y el esfuerzo. En la sección 3.3 formulamos el modelo para la vida de un producto como función del esfuerzo bajo para un diseño óptimo. En la siguiente sección se muestran los diferentes tipos de planes de vida con tres esfuerzos y se terminan con dos secciones la 3.5 se dedica a mostrar un ejemplo de cómo determinar un plan óptimo y se termina con las comparaciones de los diferentes planes.

### 3.1 Introducción

Los modelos de pruebas de vida acelerada tienen las siguientes componentes:

1. Una distribución paramétrica para el tiempo de vida de una población de unidades a determinados niveles experimentales de una o más variables de esfuerzo, dicha distribución representa la dispersión de la vida del producto.
2. La relación vida esfuerzo, la cual es una relación entre uno o más parámetros de la distribución del tiempo de falla y las variables de aceleración u otras variables experimentales. Dicha relación modela el efecto que las variables como presión voltaje o temperatura podrían tener en la distribución del tiempo de falla.

Las distribuciones más usuales para pruebas de vida son:

- Exponencial

- Normal
- Lognormal
- Weibull
- Valores extremos (Gumbel)

## 3.2 Relación Vida-Esfuerzo

Como ya hemos mencionado en las pruebas de vida acelerada existe una relación entre la vida de una población de unidades y el esfuerzo. A continuación se muestran dos de las relaciones más comunes para las pruebas de vida acelerada bajo esfuerzo constante. Para profundizar más se puede ver capítulo 2 de [14] y el capítulo 18 de [8].

### 3.2.1 Relación Potencia inversa

La relación entre la vida  $\tau$  y el esfuerzo  $V$  que en este caso pudiera representar el voltaje y se asume que es positivo, es una relación vida esfuerzo tipo potencia inversa cuando la vida  $\tau$  depende del esfuerzo  $V$  de acuerdo a la siguiente relación:

$$\tau(V) = \left(\frac{V_0}{V}\right)^p = \frac{V_0^p}{V^p} = \frac{A}{V^p} \quad (3.1)$$

donde  $A$  y  $p$  son parámetros característicos del producto. En particular el parámetro  $p$  se llama la potencia o exponente.

Ahora bien, si la vida de cierto producto se modela mediante una distribución Lognormal ó Weibull y se combina con la relación descrita, al modelo se le llama modelo **Potencia-Lognormal** ó **Potencia-Weibull** respectivamente.

### 3.2.2 Relación de Arrhenius

La relación vida-esfuerzo tipo Arrhenius es una de las más antiguas y eficientes para describir un modelo de aceleración de un proceso que predice como el tiempo de falla varía con la temperatura, esta última es una de las variables de aceleración más comúnmente utilizada. Esta relación ha sido usada exitosamente para estudiar mecanismos de fallas que dependen de las reacciones químicas, de los procesos de difusión o de los procesos de emigración, los cuales cubren la mayor parte de los modos

de fallas de tipo no mecánico que causan las fallas en los equipos electrónicos. La relación de Arrhenius está fundada en la ley propuesta por el químico sueco Svandte Arrhenius en 1887.[15]

Para describir su ley, Arrhenius propone una ecuación simple, pero muy exacta. Esta ecuación establece la relación de la tasa de una reacción química y la temperatura. Aunque fue el químico J.H. van't Hoff quien primero propuso esta relación, fue Arrhenius quien proporcionó la justificación física y su interpretación. Arrhenius argumentó que para que los reactivos se pudiesen transformar en productos, era necesario que primeramente adquirieran suficiente energía para formar lo que él llamaba “un complejo activado”. Este mínimo de energía fue lo que denominó como energía de activación para la reacción.[15]

La relación entre la vida  $\tau$  y el esfuerzo  $T$ , es una relación vida-esfuerzo tipo Arrhenius cuando la vida  $\tau$  depende del esfuerzo  $T$  de acuerdo a la siguiente relación:

$$\tau(T) = A \exp\left(\frac{E_a}{k \cdot T}\right) \quad (3.2)$$

donde

$E_a$  es la energía de activación, generalmente viene dada en electrón-volts.

$k$  es la constante de Boltzman, la cual es  $8.6171 \cdot 10^{-5}$  electrón-volts por  $^{\circ}C$ .

$A$  es una constante característica de falla del producto en condiciones de prueba.

La vida  $\tau(T)$ , usualmente es un determinado cuantil del tiempo de vida, cuando la unidad opera bajo un esfuerzo  $T$ . Aquí se supone que  $T$  es la temperatura absoluta en la escala de grados Kelvin ( $^{\circ}K$ ). Tanto  $Ea$  como  $A$  son parámetros del modelo que se necesita estimar.

Además se tiene que si se modela la vida de cierto producto mediante una distribución lognormal ó weibull y se combina con la relación Arrhenius, al modelo se le llama modelo **Arrhenius-Lognormal** ó **Arrhenius-Weibull**, respectivamente. Para profundizar mas se puede ver el capítulo 2 de [14] y el capítulo 18 de [8]

Cada uno de estos modelos, describen la vida de una unidad como función del esfuerzo constante. Un supuesto que se hace en la versión simple, en estos modelos de vida acelerada, es que el parámetro de forma de la distribución (Lognormal ó Weibull ) que modela el tiempo de vida de determinado producto no varía con el esfuerzo.

### 3.3 Modelo para la vida del producto como función del esfuerzo

A continuación se muestra el modelo Arrhenius-Lognormal.

#### Modelo General

Primero se define lo siguiente:

$t$  = tiempo a la falla

$t_T = t(T)$  tiempo a la falla en un esfuerzo  $T$ .

Las restricciones del modelo general son:

1. El tiempo a la falla en un esfuerzo  $T$  tiene distribución lognormal ó el logaritmo de este tiene una distribución normal, es decir:

$$t = t(T) \sim \text{Lognormal}(\mu(T), \sigma^2)$$

ó

$$\log[t] = \log[t(T)] \sim \text{Normal}(\mu(T), \sigma^2)$$

donde

$$\begin{aligned}\mu(T) &= \log(A) + \frac{E_a}{kT} \\ &= \beta_0 + \beta_1 x\end{aligned}$$

con  $\beta_0 = \log(A)$ ,  $\beta_1 = E_a$ ,  $x = \frac{1}{kT}$

2. La log-desviación  $\sigma$ , tiene el mismo valor para cualquier esfuerzo(Temperatura).
3. La log-media  $\mu$  es una función lineal de un esfuerzo  $x$  (posiblemente transformado), la cual es:

$$\mu(x) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x \quad (3.3)$$

Los parámetros del modelo  $\beta_0, \beta_1$  y  $\sigma$  son estimados de los datos. Además, se supone que las variaciones aleatorias en las vidas de las unidades de prueba son estadísticamente independientes. Este es un modelo de regresión lineal simple estándar.

A continuación se provee la teoría asintótica para planes óptimos para la distribución Lognormal, basándonos en [12].

Esto se presenta mediante la teoría de máxima verosimilitud para la estimación del modelo y la expresión para la varianza muestral de la estimación de la media en el esfuerzo de diseño. La varianza se expresa en términos del esfuerzo y la asignación de las unidades de prueba para el esfuerzo. Esta presentación de la teoría de máxima verosimilitud comienza con una descripción de un modelo reparametrizado convenientemente. La presentación entonces nos provee la verosimilitud muestral, la ecuación de verosimilitud, la matriz de información de Fisher y la matriz de covarianza de las estimaciones de máxima verosimilitud para un plan general.

### Modelo Reparametrizado.

El siguiente modelo reparametrizado es conveniente. Definiendo el esfuerzo transformado se tiene que:

$$\xi_1 = \frac{x - x_D}{x_H - x_D} \quad (3.4)$$

donde:

$x_H$  es el nivel de esfuerzo más alto, el cual es especificado.

$x_D$  es el nivel de esfuerzo de diseño donde será estimada la media.

Como se puede observar si  $x = x_D$  entonces  $\xi_1 = 0$ , mientras que si  $x = x_H$  entonces  $\xi_1 = 1$ .

Si de la ecuación (3.4) despejamos a  $x$  se tiene el siguiente resultado:

$x = x_D + (x_H - x_D) \xi_1$  Ahora si este resultado anterior se sustituye en la expresión (3.3) tenemos:

$$\begin{aligned} \mu(\xi_1) &= \beta_0 + \beta_1 \cdot [x_D + (x_H - x_D) \xi_1] \\ &= \beta_0 + \beta_1 \cdot x_D + \beta_1 (x_H - x_D) \xi_1 \end{aligned}$$

Luego

$$\mu(\xi_1) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi_1 \quad (3.5)$$

donde los nuevos coeficientes  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  se relacionan con los parámetros previos  $\beta_0$  y  $\beta_1$  de la siguiente forma:

$$\gamma_0 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_D = \mu_D \quad (3.6)$$

y

$$\gamma_1 = \beta_1 \cdot (x_H - x_D) = \mu_H - \mu_D \quad (3.7)$$

Aquí  $\mu_D$  y  $\mu_H$  son las medias para  $x_D$  y  $x_H$  respectivamente. Además la media  $\mu_D = \gamma_0 + \gamma_1$  y la desviación estándar  $\sigma$  es la misma para ambas formas del modelo.

Hasta aquí hemos visto la relación de  $\beta_0$  y  $\beta_1$  con respecto a  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  pero con relación a  $x_D$  y  $x_H$ . Veamos ahora la relación directa entre  $(P_H, P_D, \sigma)$  y  $(\gamma_0, \gamma_1, \sigma)$  donde  $P_H$  es la probabilidad de que las unidades podrían fallar hasta el tiempo  $\log(\eta)$  en el esfuerzo más alto ( $x_H$ ) y  $P_D$  es la probabilidad de que las unidades podrían fallar hasta el tiempo  $\log(\eta)$  en el esfuerzo de diseño ( $x_D$ ).

En el modelo reparametrizado se tiene que:

$$\begin{aligned} P_D &= P(Y_D \leq \log(\eta)) = P\left(\frac{Y_D - \mu_D}{\sigma} \leq \frac{\log(\eta) - \mu_D}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{\log(\eta) - \gamma_0 - \gamma_1 \xi_D}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{\log(\eta) - \gamma_0}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\log(\eta) - \gamma_0}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

De aquí se tiene que:

$$\gamma_0 = \log(\eta) - \sigma \cdot \Phi^{-1}(P_D) \quad (3.8)$$

De la misma forma se tiene que:

$$\begin{aligned} P_H &= P(Y_H \leq \log(\eta)) = P\left(\frac{Y_H - \mu_H}{\sigma} \leq \frac{\log(\eta) - \mu_H}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{\log(\eta) - \gamma_0 - \gamma_1 \xi_H}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{\log(\eta) - \gamma_0 - \gamma_1}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\log(\eta) - \gamma_0 - \gamma_1}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Luego

$$\gamma_1 = \log(\eta) - \gamma_0 - \sigma \cdot \Phi^{-1}(P_D) \quad (3.9)$$

Así, hemos visto que conociendo los valores de  $P_H$ ,  $P_D$ ,  $\sigma$  y el tiempo de censura  $\eta$ , los cuales se obtienen de una planificación general obtenida a partir de la experiencia previa con un producto similar o de criterios de ingeniería se pueden calcular los parámetros  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ . Por otro lado se puede ver que la ecuación (3.5) puede ser escrita como:

$$\mu(\xi_1) = \gamma_0 \xi_0 + \gamma_1 \xi_1 \quad (3.10)$$

donde  $\xi_0 = 1$ .

## Función de log-verosimilitud

Primero se define la función indicadora  $I = I(y)$  en términos del tiempo de cesura  $\eta$  como:

$$I(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq \eta \text{ el dato no está censurado} \\ 0 & \text{si } y > \eta \text{ el dato está censurado} \end{cases} \quad (3.11)$$

Es decir, la función vale 1 si la falla ocurre antes del tiempo  $\eta$ , mientras que vale 0 si la observación no ha fallado hasta el tiempo  $\eta$ .

Sea  $z = \frac{y - \mu(\xi_1)}{\sigma} = \frac{y - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma}$  el tiempo de falla estandarizado y sea  $\zeta = \frac{\eta - \mu(\xi_1)}{\sigma} = \frac{\eta - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma}$  el tiempo de cesura estandarizado. Además sea  $\varphi = \varphi(\zeta) = \varphi\left(\frac{\eta - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma}\right)$  y  $\Phi = \Phi(\zeta) = \Phi\left(\frac{\eta - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma}\right)$ , donde  $\varphi()$  es la densidad y  $\Phi()$  es la función de distribución acumulada de la distribución normal estándar.

La log-verosimilitud  $L$  de una observación con cesura tipo I en el esfuerzo  $\xi_1$  es:

$$L = I \left[ -\ln(\sigma) - \frac{1}{2} \cdot \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \cdot z^2 \right] + (1 - I) \ln(1 - \Phi) \quad (3.12)$$

Suponga que la  $i$ -ésima observación  $y_i$  corresponde a  $\xi_{1i}$  y la correspondiente log-verosimilitud  $L_i$ . Entonces la log-verosimilitud muestral  $L_0$  para  $n$  observaciones independientes es:

$$L_0 = L_1 + L_2 + \dots + L_n. \quad (3.13)$$

Esta es una función de  $y_i, \eta, \xi_{1i}$  y de los parámetros  $\gamma_0, \gamma_1$  y  $\sigma$ . Las estimaciones por máxima verosimilitud  $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1$  y  $\hat{\sigma}$  son los valores paramétricos que maximizan la log-verosimilitud (3.13).

## Matriz de información de Fisher

Para obtener la matriz de información de Fisher se necesitan las segundas derivadas parciales de la log-verosimilitud muestral respecto a los parámetros del modelo. Para una sencilla observación las primeras derivadas parciales son presentadas a continuación, en el apéndice A se encuentra el desarrollo de las mismas:

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_j} = \frac{\xi_j}{\sigma} \left[ I \cdot z + (1 - I) \cdot \frac{\varphi}{1 - \Phi} \right], j = 0, 1 \quad (3.14)$$

Ahora calculando la derivada respecto a  $\sigma$  se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \left[ I \cdot (z^2 - 1) + (1 - I) \cdot \frac{\varphi \cdot \zeta}{1 - \Phi} \right] \quad (3.15)$$

A continuación se muestra cada una de las segundas derivadas parciales.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial L}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \left[ -2Iz^2 + (1 - I) \left[ -\frac{\varphi \cdot \zeta}{1 - \Phi} + \frac{\varphi \cdot \zeta^2}{1 - \Phi} - \frac{\varphi^2 \cdot \zeta^2}{(1 - \Phi)^2} \right] \right] \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} = \frac{\xi_j \xi_k}{\sigma} \left[ -I + (1 - I) \left[ \frac{\varphi \cdot \zeta}{(1 - \Phi)} - \frac{\varphi^2}{(1 - \Phi)^2} \right] \right], j, k = 0, 1 \quad (3.17)$$

Por último se tiene que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \gamma_j} + \frac{\xi_j}{\sigma^2} \left[ -Iz + (1 - I) \left[ \frac{\varphi \cdot \zeta^2}{(1 - \Phi)} - \frac{\zeta \varphi^2}{(1 - \Phi)^2} \right] \right], j = 0, 1 \quad (3.18)$$

Cada una de estas derivadas vienen dadas en términos de las cantidades aleatorias  $I$  y  $z$  y los parámetros del modelo.

Los elementos de la matriz de información de Fisher para una observación en  $(\xi_0, \xi_1)$  son las esperanzas que se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} E \left\{ -\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} \right\} &= \left( \frac{\xi_j \xi_k}{\sigma^2} \right) \left\{ \Phi - \varphi \left[ \zeta - \frac{\varphi}{1 - \Phi} \right] \right\}, j, k = 0, 1 \\ E \left\{ -\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \sigma} \right\} &= \left( \frac{\xi_j}{\sigma^2} \right) \left[ \int_{-\infty}^{\zeta} z \varphi(z) dz - \zeta \varphi \left( \zeta - \frac{\varphi}{1 - \Phi} \right) \right], j = 0, 1 \\ E \left\{ -\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} \right\} &= \left( \frac{1}{\sigma^2} \right) \left\{ 2\Phi - \zeta \varphi \left[ 1 + \zeta^2 - \frac{\varphi \zeta}{1 - \Phi} \right] \right\} \end{aligned}$$

Lo anterior se realizó con la ayuda de las esperanzas:

$$E(I) = \Phi, \quad E \left( \frac{\partial L}{\partial \gamma_j} \right) = 0, \quad j=0,1, \quad E \left( \frac{\partial L}{\partial \sigma} \right) = 0$$

La primera de estas esperanzas es consecuencia de la definición de  $I$  y las otras son propiedades generales de las primeras derivadas parciales (3.14, 3.15) evaluada en los verdaderos valores de los parámetros.

Luego  $\varphi$  y  $\Phi$  son funciones de solo  $\zeta$ , las últimas tres expresiones en llaves ({} ) son funciones de  $\xi$ . Entonces denotamos por  $A(\zeta)$ ,  $B(\zeta)$  y  $C(\zeta)$  respectivamente.



Para  $\xi_0 = 1$  la matriz de información de Fisher  $F_{\xi_1}$  para una observación en  $\xi_1$  tiene la forma:

$$F_{\xi_1} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} A(\zeta) & \xi_1 A(\zeta) & B(\zeta) \\ \xi_1 A(\zeta) & \xi_1^2 A(\zeta) & \xi_1 B(\zeta) \\ B(\zeta) & \xi_1 B(\zeta) & C(\zeta) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

La matriz de información de Fisher para cualquier plan con una muestra de  $n$  observaciones independientes es:

$$F = \sum_{i=1}^n F_{\xi_{1i}} \quad (3.20)$$

donde la  $i$ -ésima unidad se prueba en el esfuerzo  $\xi_1$  de  $\xi_{1i}$ .

Por ejemplo supongamos que se tienen dos niveles de esfuerzo donde una proporción  $(1-\pi_L)$  de las  $n$  unidades de prueba se asignan al nivel de esfuerzo mas alto  $\xi_1 = 1$  ( $x_H$  es el valor transformado), y la proporción  $\pi_L$  restante se asignan al nivel de esfuerzo bajo  $\xi_L$  ( $x_L$  es el valor transformado). Entonces la correspondiente matriz de información de Fisher para la muestra es:

$$F = n \cdot (1 - \pi_L) \cdot F_1 + n \cdot \pi_L \cdot F_{\xi_L} \quad (3.21)$$

Esta última expresión es una función de  $\xi_L$  y  $\pi_L$ . respectivamente.

Para cualquier plan la matriz de covarianza asintótica  $\Sigma$  del estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1$  y  $\hat{\sigma}$  es la inversa de la correspondiente matriz de información de Fisher:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} var(\hat{\gamma}_0) & cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) & cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\sigma}) \\ cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) & var(\hat{\gamma}_1) & cov(\hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}) \\ cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\sigma}) & cov(\hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}) & var(\hat{\sigma}) \end{bmatrix} = F^{-1} \quad (3.22)$$

La estimación de máxima verosimilitud del percentil 100 de la distribución en el esfuerzo de diseño con recíproco  $x_D(\xi_1 = 0)$  es:

$$\begin{aligned} \hat{y}_p(\xi_D) &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \cdot \xi_D + z_p \cdot \hat{\sigma} \\ \hat{y}_p(0) &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \cdot 0 + z_p \cdot \hat{\sigma} \end{aligned}$$

donde  $z_p$  es el percentil de la distribución normal estándar.

La varianza asintótica de la estimación es:

$$var(\hat{y}_p(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_p \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_p \end{bmatrix}^t \quad (3.23)$$

Luego para obtener el plan óptimo se resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\arg \min_{\xi_L, \pi_L} [ \text{var} (\hat{y}_p (0)) ]$$

Este problema de optimización se resuelve utilizando el algoritmo “Nelder-Mead” que se encuentra implementado en R. [16]

En la literatura existe una bibliografía muy extensa que tratan sobre los diferentes algoritmos de optimización tradicionales existentes para resolver la optimización de funciones. Los métodos usuales de optimización entre los cuales destacan aquellos basados en gradiente (gradiente conjugado, Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt, entre otros) se dirigen hacia la solución más próxima siguiendo la dirección en la que el gradiente disminuye o aumenta, según la forma de abordar el problema ya sea de minimización o de maximización respectivamente. Los algoritmos de optimización local realizan una búsqueda alrededor de un punto inicial, y la solución que proveen con frecuencia se encuentra alejada de la mejor solución global. Por otra parte, muchos de los algoritmos de optimización global clásicos dependen de la información del gradiente, lo que en algunos problemas no está disponible [7].

Como alternativa a los métodos de optimización local que requieren el cálculo de derivadas, se encuentran los métodos de búsqueda directa los cuales aparecen por primera vez en la década de 1950 y comienzos de 1960 con el creciente uso de las computadoras para ajustar los datos experimentales. El nombre de “búsqueda directa” fue introducido en 1961 por Hooke y Jeeves y requieren únicamente realizar evaluaciones de la función de fitness. Dentro de los métodos de búsqueda directa, destaca el método propuesto por Nelder y Mead en [10], de concepción puramente geométrica. Dependiendo de la naturaleza del problema, este método puede ser capaz de llegar a encontrar una solución óptima en un espacio con múltiples soluciones locales.

Frente a los métodos basados en gradiente, mucho más complicados y dependientes del punto de arranque, el método basado en simplex ofrece una visión mucho más intuitiva del problema y de la optimización en sí [7]. A pesar de su edad y los últimos avances en métodos de búsqueda directa, el método de Nelder-Mead sigue siendo uno de los métodos de búsqueda directa más populares en la práctica. En el apéndice B se hace una breve descripción del algoritmo utilizado

### 3.4 Planes de vida acelerada

En muchos casos, el tiempo de la prueba y el número total de unidades a ensayar en una prueba de vida acelerada son seleccionados en base a los equipos disponibles de prueba, el presupuesto, el tiempo de comercialización, ciclo de desarrollo, etc. Limitados por los recursos disponibles, los planificadores de la prueba tienen que definir los niveles de esfuerzo y el número de unidades en cada nivel de esfuerzo, o la proporción de las unidades totales en la prueba. En nuestra búsqueda se encontró cinco planes de uso común para una solo esfuerzo acelerado. Los cuales se muestran a continuación.

- Plan óptimo.
- Plan estándar o tradicional.
- Plan 4:2:1.
- Plan 4:2:1 ajustado.
- Plan de Meeker y Escobar.

En las secciones anteriores se vio el procedimiento del plan óptimo el cual se basa en dos niveles de esfuerzo y es la base estadística para los demás planes de prueba, ya que el método para obtener este plan se puede extender fácilmente a los otros cuatro planes.

Los demás planes considerados como el tradicional, 4:2:1, el 4:2:1 y el de Meeker y Escobar tienen tres esfuerzos, esto es, al plan óptimo con dos esfuerzos se le agrega sólo un esfuerzo más. No se agregan más esfuerzos debido a que esto aumenta la varianza del cuantil estimado en la condición de diseño. En estos planes, la distinción radica en la forma de asignar las unidades de prueba en los diferentes esfuerzos.

En el plan tradicional, las unidades se distribuyen con igual asignación( $\frac{1}{3}$ ) en cada uno de los tres esfuerzos y el nivel bajo de esfuerzo se ubica de manera que la varianza del cuantil estimado en el esfuerzo de diseño sea mínima.

En [9] se propone un plan 4:2:1 con tres esfuerzos donde estos son constantes. En este caso la asignación de las unidades a ensayar en los esfuerzos de prueba se distribuyen de la siguiente forma: una proporción de  $\frac{4}{7}$  en el nivel bajo de esfuerzo, una proporción  $\frac{2}{7}$  en el nivel medio de esfuerzo y por último una proporción de  $\frac{1}{7}$  en el nivel alto de esfuerzo. En este plan como en el anterior el nivel bajo de esfuerzo

se ubica de manera que la varianza del cuantil estimado en el esfuerzo de diseño sea mínima.

El plan 4:2:1 ajustado se obtiene directamente del plan 4:2:1.

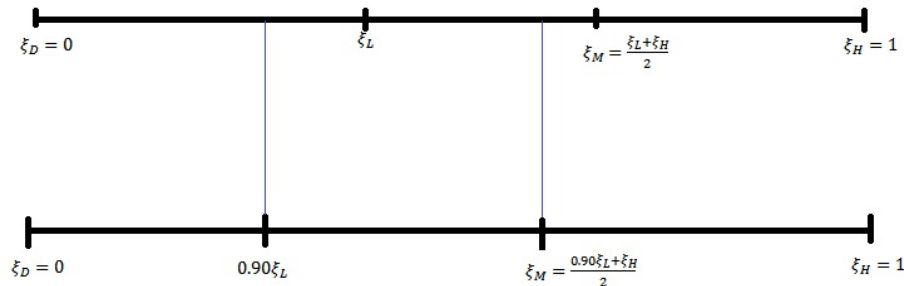


Figura 3.1: Plan ajustado reducción del esfuerzo bajo en 0.90 veces el valor del esfuerzo bajo en el plan 4:2:1.

Como se puede ver en la figura (3.1) la primera línea corresponde a lo que se obtuvo para una combinación de  $P$ ,  $P_D$  y  $P_H$  respectivamente en el plan 4:2:1. Por otro lado el nivel medio de esfuerzo ( $\xi_M$ ) es el promedio entre el nivel bajo de esfuerzo y el nivel alto de esfuerzo.

Para el plan 4:2:1 ajustado sólo nos fijamos en el valor obtenido del nivel bajo de esfuerzo ( $\xi_L$ ) y lo reducimos por ejemplo en 0.90 veces y a partir de ahí se calcula el nuevo nivel medio de esfuerzo ( $\xi_M$ ).

De esta forma se obtiene el plan 4:2:1 ajustado para una reducción del esfuerzo bajo en 0.90, 0.80, 0.70 y 0.60 veces el valor del esfuerzo bajo en el plan 4:2:1.

Por último en los planes con tres esfuerzos donde este último es constante se tiene el propuesto por Meeker y Escobar en [8]. Este plan consiste en limitar en un 20% las unidades a ensayar en el punto medio entre el nivel más alto de esfuerzo y el menor nivel de esfuerzo. En este caso los objetivos son optimizar la ubicación del nivel más bajo de esfuerzo y la proporción de unidades que se asignan en este nivel con respecto a la gran variación aproximada de la muestra. Estos objetivos lo hace superior a los planes anteriores de tres niveles de esfuerzo. Sin la limitación del 20% de las unidades a ensayar en el nivel medio de esfuerzo, en cualquier situación práctica al optimizar el plan de tres niveles degenerará en un plan de dos niveles de esfuerzo (plan óptimo).

### 3.5 Ejemplo de cómo determinar un plan óptimo.

En esta sección se describe un ejemplo de como proceder a través del programa que se presenta en el apéndice C para poder encontrar el plan óptimo.

En este caso se supone que se tienen 300 unidades disponibles para la prueba por un período de 6 meses con el fin de estimar el percentil 10 de la distribución de los tiempos de falla a la temperatura de diseño de  $50^{\circ}C$  ( $T_D = 50^{\circ}C$  y  $P = 0.10$ ). Supongamos que una suposición razonable para la probabilidad de fallo en una prueba de 6 meses en la temperatura de diseño es 0,1%, es decir  $P_D = 0.001$ . Por lo tanto, incluso si todas las unidades se ponen en la temperatura de diseño, es probable que no hayan fallos durante la duración de los seis meses de prueba y no se tendría información suficiente para estimar el percentil 10 de la distribución de los tiempos de falla.

Aquí se considera el modelo de vida acelerada Arrhenius-Lognormal y se sabe que el mayor esfuerzo de prueba que se puede utilizar es de  $120^{\circ}C$ , ya que a un esfuerzo mayor se activan modos de falla diferentes al que se tienen en condición de prueba usual. Por lo tanto se selecciona una temperatura de  $120^{\circ}C$  como el mayor esfuerzo de la prueba. Además se supone que el 90% de las unidades de prueba fallarían en un plazo de 6 meses en  $120^{\circ}C$ , es decir  $P_H = 0.90$ .

A continuación se explica como se debería de proceder con la información que se nos esta brindando en los párrafos anteriores para poder determinar un plan óptimo.

En el modelo Arrhenius-Lognormal se tiene que la relación entre el esfuerzo transformado y la temperatura absoluta viene dada por la siguiente ecuación:

$$X_j = \frac{11605}{T_j + 273.16}$$

para  $j = L, D, H$ .

Teniendo en cuenta que la temperatura de diseño es  $T_D = 50^{\circ}C$  y la temperatura más alta es  $T_H = 120^{\circ}C$ .

Se pueden calcular cada uno de los esfuerzos transformados en cada uno de estos niveles. Luego, el esfuerzo de diseño transformado es:

$$X_D = \frac{11605}{50 + 273.16} = 35.911$$

De la misma forma se tiene que el esfuerzo mas alto transformado viene dado por:

$$X_H = \frac{11605}{120 + 273.16} = 29.517$$

Además se quiere estimar el percentil 10 de la distribución de los tiempos de falla a la temperatura de diseño, por lo que  $P = 0.10$ . También se sabe que las proporciones de fallas en las temperaturas de diseño y en la más elevada son  $P_D = 0.0010$  y  $P_H = 0.900$  respectivamente, así como que se dispone de  $n = 300$  unidades de prueba y el tiempo de duración de la prueba es  $\eta = 6$  meses ó equivalentemente 183 días.

El objetivo aquí está en encontrar cual es la temperatura más baja ( $T_L$ ) en la cual se deberían de poner las unidades de prueba así como la proporción de éstas en dicha temperatura.

La relación del esfuerzo transformado en el nivel bajo de esfuerzo y la temperatura absoluta viene dada por la siguiente expresión:

$$X_L = \frac{11605}{T_L + 273.16}$$

De esta expresión se puede despejar  $T_L$  y se obtiene el siguiente resultado:

$$T_L = \frac{11605}{X_L} - 273.16 \quad (3.24)$$

Ahora bien teniendo en cuenta la ecuación (3.4) se tiene que el esfuerzo estandarizado en el nivel bajo de esfuerzo es:

$$\xi_L = \frac{X_L - X_D}{X_H - X_D}$$

Luego si despejamos el esfuerzo transformado en el nivel bajo de esfuerzo se llega a la siguiente expresión:

$$X_L = X_D + (X_H - X_D) \xi_L$$

Sustituyendo este resultado en (3.24) se obtiene el siguiente resultado:

$$T_L = \frac{11605}{X_D + (X_H - X_D) \xi_L} - 273.16$$

Por último sólo nos queda encontrar quien es el esfuerzo estandarizado en el nivel bajo de esfuerzo ( $\xi_L$ ). Este resultado se obtiene del proceso de optimización cuyo código se muestra en el apéndice C y una vez que se ejecuta se obtiene que  $\xi_L = 0.44$  por lo que:

$$T_L = \frac{11605}{35.911 + (29.517 - 35.911) \cdot 0.44} - 273.16 \approx 77.5^\circ C$$

Esta temperatura se considera una temperatura razonable para la condición de esfuerzo bajo para la extrapolación al esfuerzo de diseño de  $50^{\circ}C$ .

La probabilidad que una unidad podría fallar en cualquier esfuerzo estandarizado  $\xi_i$  es:

$$P_i = \Phi \left[ (1 - \xi_i) \Phi^{-1}(P_D) + \xi_i \Phi^{-1}(P_H) \right]$$

donde  $\Phi(z)$  es la distribución acumulada estandarizada asumiendo la distribución de los log-tiempos de fallas y  $\Phi^{-1}(p)$  es el cuantil de esta distribución.

En este caso se obtuvo que la proporción de unidades a ensayar en el esfuerzo menor ( $\xi_L$ ) es  $\pi_L = 0.74$  (en realidad 0.741), por lo que 222 de las 300 unidades de prueba serán asignadas a  $77.5^{\circ}C$ , y las 78 unidades restantes se ensayan en  $120^{\circ}C$ . Por otro lado se obtuvo un  $p_L = 0.122$ , el 12.2% o 27 de las 222 unidades que se han probado en  $77.5^{\circ}C$  se esperan que falle durante los de 6 meses de prueba. Por otro lado el número esperado de fallas en el esfuerzo bajo es  $E(r_L) = n \cdot \pi_L \cdot p_L = 300 \cdot 0.74 \cdot 0.122 \approx 27$  mientras que  $E(r_L^*) = 1000 \cdot \pi_L \cdot p_L$  es el número esperado de fallas en el esfuerzo bajo por cada 1000 unidades en prueba, en este caso se obtiene que  $E(r_L^*) = 90$  y por último la varianza asintótica es de  $V(p) = 14.9$ .

### 3.6 Comparaciones de los diferentes planes

En esta sección se presentara las comparaciones de los diferentes planes mencionados para ciertas combinaciones de  $P$ ,  $P_D$  y  $P_H$ . En particular muchas veces interesa estimar el cuantil 5 % y el cuantil 10%, además de que en la práctica la probabilidad de fallo en el esfuerzo de diseño es bien pequeña mientras que la probabilidad de falla en el esfuerzo mas alto es por lo regular una probabilidad alta. Por lo tanto, teniendo en cuenta esto, aqui se muestran las combinaciones para  $P = 0.10, P_D = \{0.0001, 0.0010, 0.0100\}$ ,  $P_H = \{0.250, 0.400, 0.600, 0.800, 0.900, 0.990, 1.000\}$

A continuación se muestran los resultados para el plan óptimo considerando una distribución lognormal.

<b>P</b>	<b>P<sub>D</sub></b>	<b>P<sub>H</sub></b>	$\xi_L$	$\pi_L$	<b>p<sub>L</sub></b>	<b>E</b> ( $r_L^*$ )	<b>V</b> ( <i>P</i> )
0.1000	0.0001	0.250	0.577	0.636	0.025	15	103.8
0.1000	0.0001	0.400	0.568	0.657	0.040	26	66.18
0.1000	0.0001	0.600	0.552	0.678	0.063	42	42.2
0.1000	0.0001	0.800	0.53	0.698	0.096	67	27.64
0.1000	0.0001	0.900	0.512	0.710	0.123	87	21.26
0.1000	0.0001	0.990	0.465	0.734	0.183	134	13.08
0.1000	0.0001	1.000	0.405	0.760	0.239	181	8.4
0.1000	0.0010	0.250	0.475	0.656	0.026	17	61.64
0.1000	0.0010	0.400	0.477	0.683	0.041	28	41.23
0.1000	0.0010	0.600	0.470	0.707	0.064	45	27.55
0.1000	0.0010	0.800	0.455	0.728	0.097	70	18.85
0.1000	0.0010	0.900	0.44	0.741	0.122	90	14.90
0.1000	0.0010	0.990	0.40	0.766	0.178	136	9.65
0.1000	0.0010	1.000	0.345	0.791	0.229	181	6.53
0.1000	0.0100	0.250	0.267	0.706	0.03	21	25.4
0.1000	0.0100	0.400	0.303	0.741	0.045	33	18.9
0.1000	0.0100	0.600	0.321	0.768	0.067	51	13.95
0.1000	0.0100	0.800	0.324	0.789	0.097	76	10.43
0.1000	0.0100	0.900	0.319	0.801	0.12	96	8.69
0.1000	0.0100	0.990	0.294	0.822	0.169	138	6.2
0.1000	0.0100	1.000	0.253	0.841	0.213	179	4.6

Tabla 3.1: Resultados utilizando un plan óptimo.

A continuación se muestra los resultados para cada uno de los planes con tres esfuerzos, comenzando con el plan 4:2:1.

<b>P</b>	<b>P<sub>D</sub></b>	<b>P<sub>H</sub></b>	$\xi_L$	<b>p<sub>L</sub></b>	$\xi_M$	<b>p<sub>M</sub></b>	<b>E</b> ( $r_L^*$ )	<b>V</b> ( <i>P</i> )	<i>R</i> ( <i>P</i> )
0.1000	0.0001	0.250	0.536	0.018	0.7682	0.084	10	134.055	1.29
0.1000	0.0001	0.400	0.518	0.027	0.7592	0.138	15	85.017	1.28
0.1000	0.0001	0.600	0.498	0.041	0.749	0.229	23	54.21	1.28
0.1000	0.0001	0.800	0.476	0.061	0.7378	0.362	34	35.78	1.29
0.1000	0.0001	0.900	0.460	0.078	0.7299	0.472	44	27.803	1.31
0.1000	0.0001	0.990	0.425	0.125	0.7123	0.721	71	17.6	1.35
0.1000	0.0001	1.000	0.382	0.190	0.6911	0.922	108	11.627	1.38
0.1000	0.0010	0.250	0.422	0.019	0.7111	0.085	10	76.54	1.24
0.1000	0.0010	0.400	0.414	0.028	0.7069	0.139	16	50.969	1.24
0.1000	0.0010	0.600	0.404	0.041	0.7018	0.229	23	34.196	1.24
0.1000	0.0010	0.800	0.391	0.06	0.6956	0.361	34	23.726	1.26
0.1000	0.0010	0.900	0.381	0.077	0.6907	0.472	44	19.035	1.28
0.1000	0.0010	0.990	0.357	0.124	0.6785	0.721	70	12.811	1.33
0.1000	0.0010	1.000	0.324	0.189	0.6621	0.922	108	8.975	1.37
0.1000	0.0100	0.250	0.184	0.022	0.5918	0.089	12	29.095	1.15
0.1000	0.0100	0.400	0.209	0.029	0.6046	0.142	16	21.834	1.16
0.1000	0.0100	0.600	0.231	0.042	0.6157	0.23	24	16.461	1.18
0.1000	0.0100	0.800	0.246	0.061	0.623	0.362	34	12.698	1.22
0.1000	0.0100	0.900	0.251	0.078	0.6256	0.472	44	10.854	1.25
0.1000	0.0100	0.990	0.251	0.124	0.6257	0.721	70	8.179	1.32
0.1000	0.0100	1.000	0.238	0.188	0.619	0.922	107	6.325	1.38

Tabla 3.2: Resultados utilizando un plan 4:2:1

Ahora se muestra los resultados del mejor plan estandar en donde en cada uno de los esfuerzos se ponen la misma cantidad de unidades a ensayar, por lo que este plan es un uno del tipo  $\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}$ .



$\mathbf{P}$	$\mathbf{P}_D$	$\mathbf{P}_H$	$\xi_L$	$\mathbf{p}_L$	$\xi_M$	$\mathbf{p}_M$	$\mathbf{E}(r_L^*)$	$\mathbf{V}(P)$	$R(P)$
0.1000	0.0001	0.250	0.473	0.011	0.7365	0.07	3	118.624	1.14
0.1000	0.0001	0.400	0.467	0.018	0.7337	0.12	5	77.904	1.18
0.1000	0.0001	0.600	0.458	0.029	0.7291	0.205	9	51.714	1.23
0.1000	0.0001	0.800	0.446	0.046	0.7229	0.336	15	35.656	1.29
0.1000	0.0001	0.900	0.436	0.062	0.7182	0.449	20	28.564	1.34
0.1000	0.0001	0.990	0.414	0.112	0.7068	0.71	37	19.285	1.47
0.1000	0.0001	1.000	0.381	0.189	0.6907	0.922	63	13.6	1.62
0.1000	0.0010	0.250	0.342	0.012	0.6712	0.071	4	70.43	1.14
0.1000	0.0010	0.400	0.353	0.018	0.6766	0.121	5	48.883	1.19
0.1000	0.0010	0.600	0.358	0.029	0.6792	0.206	9	34.29	1.24
0.1000	0.0010	0.800	0.359	0.046	0.6793	0.337	15	24.892	1.32
0.1000	0.0010	0.900	0.356	0.063	0.6781	0.45	21	20.583	1.38
0.1000	0.0010	0.990	0.346	0.112	0.6729	0.71	37	14.731	1.53
0.1000	0.0010	1.000	0.324	0.188	0.662	0.922	62	10.954	1.68
0.1000	0.0100	0.250	0.063	0.013	0.5317	0.074	4	29.245	1.15
0.1000	0.0100	0.400	0.128	0.02	0.564	0.124	6	23.074	1.22
0.1000	0.0100	0.600	0.176	0.031	0.5879	0.209	10	18.206	1.31
0.1000	0.0100	0.800	0.208	0.048	0.6041	0.34	16	14.619	1.40
0.1000	0.0100	0.900	0.223	0.064	0.6114	0.452	21	12.812	1.47
0.1000	0.0100	0.990	0.24	0.113	0.6199	0.712	37	10.134	1.63
0.1000	0.0100	1.000	0.239	0.188	0.6193	0.922	62	8.197	1.78

Tabla 3.3: Resultados utilizando el mejor plan estandar

Por último se muestra los resultados utilizando el plan de meeker y escobar fijando en el esfuerzo del medio una proporción del 20%.

$\mathbf{P}$	$\mathbf{P}_D$	$\mathbf{P}_H$	$\xi_L$	$\pi_L$	$\mathbf{p}_L$	$\xi_M$	$\mathbf{p}_M$	$\mathbf{E}(r_L^*)$	$\mathbf{V}(P)$	$R(P)$
0.1000	0.0001	0.250	0.535	0.479	0.018	0.767	0.083	8	112.429	1.08
0.1000	0.0001	0.400	0.528	0.5	0.029	0.764	0.142	14	72.582	1.10
0.1000	0.0001	0.600	0.515	0.52	0.047	0.757	0.238	24	46.985	1.11
0.1000	0.0001	0.800	0.496	0.539	0.072	0.748	0.379	38	31.339	1.13
0.1000	0.0001	0.900	0.48	0.551	0.093	0.74	0.493	51	24.456	1.15
0.1000	0.0001	0.990	0.441	0.573	0.146	0.72	0.737	83	15.543	1.19
0.1000	0.0001	1.000	0.392	0.595	0.21	0.696	0.928	124	10.301	1.23
0.1000	0.0010	0.250	0.423	0.5	0.019	0.711	0.085	9	66.496	1.08
0.1000	0.0010	0.400	0.429	0.524	0.031	0.714	0.144	16	45.079	1.09
0.1000	0.0010	0.600	0.426	0.547	0.048	0.713	0.24	26	30.629	1.11
0.1000	0.0010	0.800	0.416	0.566	0.073	0.708	0.38	41	21.38	1.13
0.1000	0.0010	0.900	0.404	0.577	0.093	0.702	0.492	53	17.164	1.15
0.1000	0.0010	0.990	0.374	0.598	0.143	0.687	0.736	85	11.512	1.19
0.1000	0.0010	1.000	0.332	0.619	0.204	0.666	0.926	126	8.036	1.23
0.1000	0.0100	0.250	0.194	0.549	0.022	0.597	0.09	12	27.064	1.07
0.1000	0.0100	0.400	0.238	0.579	0.033	0.619	0.148	19	20.495	1.08
0.1000	0.0100	0.600	0.264	0.602	0.05	0.632	0.243	30	15.454	1.11
0.1000	0.0100	0.800	0.275	0.619	0.073	0.638	0.38	45	11.836	1.13
0.1000	0.0100	0.900	0.276	0.628	0.092	0.638	0.49	57	10.044	1.16
0.1000	0.0100	0.990	0.266	0.643	0.138	0.633	0.732	88	7.444	1.20
0.1000	0.0100	1.000	0.242	0.659	0.195	0.621	0.923	128	5.682	1.24

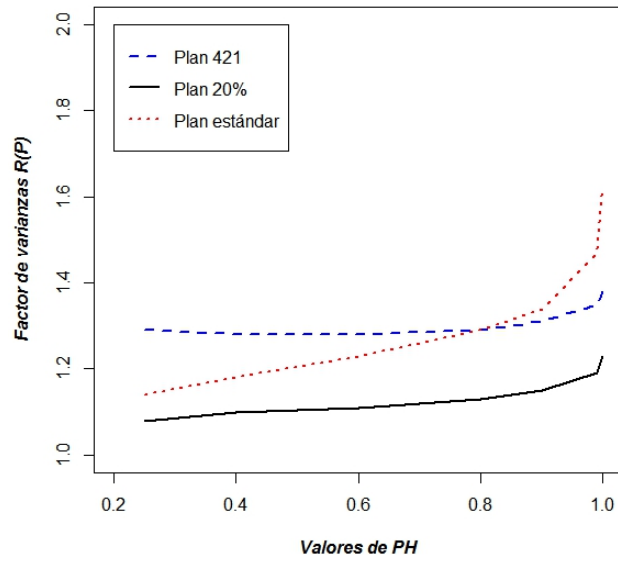
Tabla 3.4: Resultados utilizando el plan de Meeker y Escobar fijando un 20% en el esfuerzo medio

En la figura 3.6 se puede ver los resultados de las razones de la varianza de cada uno de los planes con tres niveles de esfuerzo respecto al plan óptimo, para los diferentes

valores de  $P, P_D$  y  $P_H$  respectivamente. En la primera gráfica el valor de  $P_D = 0.0001$ , en la segunda gráfica el valor de  $P_D = 0.001$  y en la última de las gráficas el valor de  $P_D = 0.01$ .

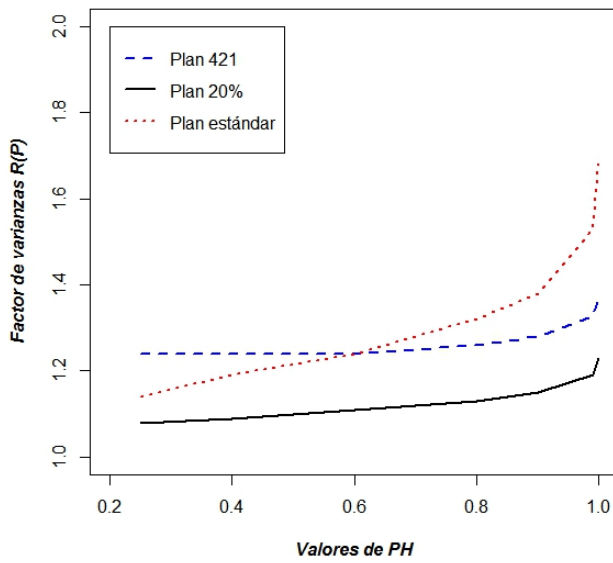
En cada una de estas gráficas que se encuentran dentro de la figura mencionada el plan de Meeker y Escobar, en el cual se fija una proporción del 20% de unidades a ensayar en el esfuerzo intermedio dejando libre la proporción a ensayar en los esfuerzos bajo y alto respectivamente es el que mejores resultados brinda. Se dice que brinda los mejores resultados en el sentido de que con este plan se obtienen menores valores de las razones de varianza por lo que pudiera pensarse que con este criterio es el que mejor resultado nos ofrece dentro de los planes con tres niveles de esfuerzos. Además se puede observar que para valores pequeños de la proporción de fallas en el nivel de diseño ( $P_D$ ), es difícil elegir el mejor entre el plan estándar y el plan 4:2:1 pero en la medida que aumenta ( $P_D$ ) se puede observar este trabajo de elegir entre estos dos planes se nos va haciendo mas fácil. Por ejemplo se puede observar que en la primera y en la segunda gráfica , no esta muy claro cuando un plan es superior al otro mientras que en la última ya se puede observar que el plan 4:2:1 presenta menor razón de varianza con respecto al plan estándar.

Gráfica factor de varianzas para planes con tres esfuerzos



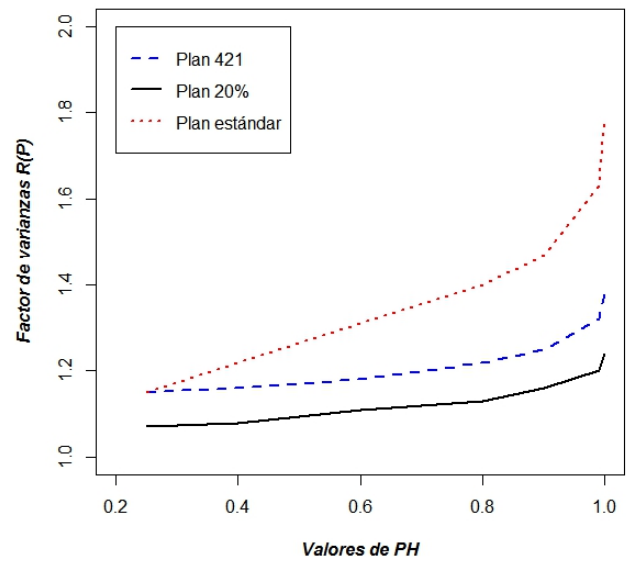
(a)

Gráfica factor de varianzas para planes con tres esfuerzos



(b)

Gráfica factor de varianzas para planes con tres esfuerzos



(c)

Figura 3.2: Razón de varianzas de planes con tres esfuerzos con respecto al plan óptimo.

## Capítulo 4

# Planes de prueba óptimos y de Meeker y Escobar modificados

En el diseño de un plan de pruebas de esfuerzo constante, se necesitan determinar las asignaciones de unidades de prueba en los diferentes niveles de esfuerzos y la ubicación de estos últimos de manera general. En los planes tradicionales y el 4:2:1 sólo se determina la ubicación del nivel bajo de esfuerzo de tal manera que ésta ubicación reduzca al mínimo la varianza del estimador de máxima verosimilitud de algunos cuantiles de una distribución de log localización-escala en las condiciones de diseño u operación respectivamente. En el plan tradicional las asignaciones de unidades en cada uno de los niveles de esfuerzos es de  $\frac{1}{3}$  mientras que estas asignaciones en el plan 4:2:1 es de  $\frac{4}{7}$  en el nivel bajo de esfuerzo,  $\frac{2}{7}$  en el nivel intermedio y  $\frac{1}{7}$  en el nivel de esfuerzo mas elevado. Cómo se puede observar la única diferencia entre estos planes radica en las asignaciones de unidades en cada uno de los niveles de esfuerzo, pero el echo de que en el plan 4:2:1 tenga mayor asignación de recursos en el nivel bajo de esfuerzo, y al estar este último más cerca de la condición de diseño, lo hace ser mas eficiente. Ahora en el plan propuesto por Meeker y Escobar sólo se fijan las asignaciones en el nivel de esfuerzo intermedio siendo este de un 20%, dejando libre las asignaciones de unidades en los otros dos niveles de esfuerzos ó mas bien en el nivel bajo de esfuerzo ya que las asignaciones de unidades en el nivel de esfuerzo mas elevado viene determinado por las asignaciones de unidades que se colocaron en los otros niveles de esfuerzos. Además de encontrar esta asignación en el nivel bajo de esfuerzo se busca la ubicación de este. Estos objetivos lo hace ser superior a los otros dos planes ya mencionados.

En la práctica común suele encontrarse que las probabilidades de fallas en el Esfuerzo mas elevado es muy alta mientras que la probabilidad de falla en el esfuerzo

de diseño es muy baja, debido a que los productos de hoy en día son más modernos y pocas unidades fallarán o se degradarán en una prueba en un tiempo adecuado de observación a condiciones normales de uso.

Los planes que tengan una probabilidad de falla en el esfuerzo más elevado muy alta y una probabilidad de falla en el esfuerzo de diseño muy baja, son planes que presentan una gran aceleración, luego son buenos planes. Esto nos dice que nuestro modelo es uno de tal manera que presenta una gran inclinación y por lo tanto nos brinda mucha información. Si se tuviera un modelo que fuera aproximadamente plano, entonces tendríamos un modelo que no acelera lo suficiente, al tener esta característica nos dice que no hay muchas diferencias en los resultados que se pueden obtener en cada uno de los esfuerzos acelerados. Además estos resultados no difieren de los que se obtienen en el esfuerzo de diseño, por lo que estamos hablando de una mala prueba.

Lo más común es que las industrias cuenten con una sola cámara de prueba. Al considerar esfuerzos constantes, entonces se tiene que un lote de unidades se colocan en un esfuerzo y se observa un tiempo  $\eta$ , luego se coloca otro lote de unidades y se observa por otro tiempo  $\eta$  en otro esfuerzo y se repite el mismo proceso para el último esfuerzo. De esta manera se tiene que el tiempo total de observación de la prueba es  $3\eta$ .

En este contexto se dice que un plan de prueba es más eficiente que otro si se dieran las dos situaciones siguientes:

1. Al mantener el tiempo total de la prueba, un plan de prueba presenta una varianza menor respecto al otro.
2. Si los planes de prueba presentan la misma varianza, entonces ésta se obtiene en un menor tiempo en un plan que en el otro.

Nosotros nos centramos, en el plan propuesto por Meeker y Escobar que hasta el momento es el plan de prueba más eficiente de los mencionados a lo largo de este trabajo. La nueva modificación que se le hace a este plan, está en la misma línea de asignar más recursos al nivel bajo de esfuerzo considerando la primera situación mencionada anteriormente. La manera de hacerlo disminuir el tiempo de observación en el esfuerzo más elevado teniendo en cuenta que la probabilidad de falla en el esfuerzo más elevado es muy alta y sumarle el tiempo que se disminuyó al nivel bajo de esfuerzo. Al tener mayor tiempo de observación en este nivel, es muy probable que el nivel bajo de esfuerzo se desplace hacia la dirección del esfuerzo de diseño. Al mismo tiempo este desplazamiento debe ser controlado, ya que pudiera pasar que estuviera

tan cerca del esfuerzo de diseño que no se produjeran fallas. Luego se propone que este desplazamiento se controle a través del número esperado de fallas en el nivel bajo de esfuerzo.

Este capítulo comienza mostrando una serie de ejemplos que se encuentran en la literatura donde podemos observar que las probabilidades de falla en el esfuerzo mas elevado es muy alta mientras que las probabilidades de falla en el esfuerzo de diseño es muy baja. Luego en el epígrafe 4.2 se explica la modificación propuesta al plan de Meeker y Escobar. Además se muestran los resultados de los distintos planes mencionados para un ejemplo de los que se hace mención en la sección anterior. Por último en la sección 4.3 se explica la modificación propuesta al plan óptimo y se muestran los resultados para el mismo ejemplo que se ilustraron los resultados obtenidos en la sección 4.2.

## 4.1 Ejemplos de la literatura.

A continuación se presentan cuatro ejemplos tomados de la literatura, en dos de ellos la variable de aceleración es la temperatura y se usa la relación de arrhenius mientras que en los otros dos la variable de aceleración es el voltaje y se usa la relación potencia inversa.

### Ejemplo 1

Este ejemplo se puede ver en [14]. Para evaluar una nueva clase-B aislante para motores eléctricos se realiza una prueba de vida acelerada cuya variable de aceleración es la temperatura.

150°C	170°C	190°C	220°C
8064+	1764	408	408
8064+	2772	408	408
8064+	3444	1344	504
8064+	3542	1344	504
8064+	3780	1440	504
8064+	4860	1680+	528+
8064+	5196	1680+	528+
8064+	5448+	1680+	528+
8064+	5448+	1680+	528+
8064+	5448+	1680+	528+

Tabla 4.1: Tiempos de falla de una clase-B aislante para motores eléctricos.

En la tabla 4.1 se muestran los datos de cuatro lotes donde cada uno contiene diez motores. Cada uno de los lotes se someten a esfuerzos constantes, el primero de ellos se somete a  $150^{\circ}C$ , el segundo a  $170^{\circ}C$  el tercero a  $190^{\circ}C$  y el último a  $220^{\circ}C$ .

El objetivo de la prueba es estimar la distribución de vida de los motores en una temperatura de diseño de  $130^{\circ}C$ . Como se puede observar siete motores a  $170^{\circ}C$  tuvieron falla, cinco a  $190^{\circ}C$  y  $220^{\circ}C$  tuvieron fallas, mientras que ninguno de los motores fallaron a  $150^{\circ}C$ . Debido a esto los tiempos de falla registrados a  $150^{\circ}C$  no proporcionan información relevante por lo que se omiten de dicho análisis. El signo + indica que al tiempo registrado, el motor no había fallado, por lo cual se tiene una censura por la derecha.

Las estimaciones de los parámetros del modelo Arrhenius-Lognormal son:

$$\hat{\beta}_0 = -13.846$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.8548$$

$$\hat{\sigma} = 0.5963$$

En este ejemplo, las probabilidades de falla acumulada al tiempo  $\eta = 8064$ , para los esfuerzos de diseño y mas alto son  $P_D = 0.0016$  y  $P_H = 0.9999$  respectivamente.

## Ejemplo 2

Este segundo ejemplo se puede ver en [8] y es el ejemplo 19.5 que se encuentra en la pagina 498 y cuyos datos se pueden ver en la tabla C.10 en la página 637. Aquí Hooper y Amster [6] analizan los datos de prueba de vida acelerada cuya variable de aceleración es la temperatura en un determinado tipo de dispositivo, debido a que no identifican el dispositivo se refieren al mismo como dispositivo-A. El propósito del experimento fue determinar si el dispositivo-A podría cumplir su objetivo a través de la tasa de riesgo entre 10000 horas y 30000 horas a temperatura ambiente de funcionamiento de  $10^{\circ}C$ . En este caso las estimaciones del modelo Arrhenius-Lognormal son:

$$\hat{\beta}_0 = -13.5$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.63$$

$$\hat{\sigma} = 0.98$$

Si se calcula las probabilidades de falla al tiempo  $\eta = 5000$  en el esfuerzo de diseño y en el esfuerzo mas elevado se obtiene que  $P_D = 5.225 \cdot 10^{-5}$  y  $P_H = 0.91$ .

### Ejemplo 3

Este ejemplo se puede ver en el capítulo 19 de [8] donde en el apéndice C.13 se muestra la tabla de los datos de una prueba de vida acelerada en un tipo especial de aislamiento mylar-poliuretano utilizado en electroimanes de alto rendimiento. Los datos son de kalkanis and Rosso [5], los datos representan el tiempo a la ruptura dieléctrica de unidades probadas en los esfuerzos 100.3, 122.4, 157.1, 219.0 y 361.4 kv/mm respectivamente. El propósito del experimento fue evaluar la confiabilidad de la estructura aislante para estimar la distribución de vida del sistema en el voltaje de diseño que en este caso es de 50 kv/mm. En la figura 18.7 de [8] se puede ver que excepto por el nivel mas alto de esfuerzo, la relación entre la vida y el esfuerzo parece ser aproximadamente lineal, por lo que pudiera existir un mecanismo de falla diferente en 361,4 kV / mm. Por esta razón se toma al valor 219.0 kv/mm como el esfuerzo mas elevado es 219.0 kv/mm.

En la tabla 19.3 de [8] se puede ver que las estimaciones del modelo potencia inversa-Lognormal son:

$$\hat{\beta}_0 = 27.5$$

$$\hat{\beta}_1 = -4.29$$

$$\hat{\sigma} = 1.05$$

En este ejemplo veamos que probabilidad de falla se obtiene en el esfuerzo de diseño ( $P_D$ ) si nosotros decidimos tomar un tiempo de observación  $\eta$  para un cuantil determinado de la distribución  $N(\gamma_0 + \gamma_1 \xi_H, \sigma)$ .

Teniendo en cuenta que la probabilidad de fallos en el nivel de esfuerzo  $H$  es por lo general un valor grande, se toman los valores de  $P_H = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95$  y  $0.99$  respectivamente

$\eta$	$P_H$	$P_D$
193	0.80	$1.03 \cdot 10^{-7}$
237	0.85	$2.89 \cdot 10^{-7}$
307	0.90	$1.00 \cdot 10^{-6}$
449	0.95	$5.67 \cdot 10^{-6}$
919	0.99	0.0001

Tabla 4.2: Relación de valores de  $P_H$  y  $P_D$ .



Como se puede observar para los diferentes valores de las probabilidades de falla en el nivel mas elevado ( $P_H$ ) los valores de las probabilidades de falla en el nivel de diseño ( $P_D$ ) son muy pequeños. El mayor valor que alcanza  $P_D$  es 0.0001 para un  $P_H = 0.99$  y aún asi es demasiado pequeño.

#### Ejemplo 4

El último ejemplo que se presenta es el ejemplo 7.3 que aparece en la página 260 del libro electrónico Life Cycle Reliability Engineering [17]. El mismo consiste en evaluar la confiabilidad de un tipo de condensador electrolítico de montaje en superficie. Se llevaron a cabo tres ensayos, cada uno con ocho unidades, las cuales se evaluaron a niveles de voltaje de 80, 100 y 120 V respectivamente. Todas las unidades se ponen al mismo tiempo hasta que la capacitancia se desplaza más del 25%. Los tiempos de falla se muestran en la tabla 2.6 y vienen dados en horas.

80V	100V	120V
1770	1090	630
2448	1907	848
3230	2147	1121
3445	2645	1307
3538	2903	1321
5809	3357	1357
6590	4135	1984
6744	4381	2331

Tabla 4.3: Datos de Vida en voltajes elevados.

En este caso se considera que se tiene un voltaje de diseño de 50V y las estimaciones del modelo relación potencia inversa-Lognormal son:

$$\hat{\beta}_0 = 20.0675$$

$$\hat{\beta}_1 = -2.68272$$

$$\hat{\sigma} = 0.437762$$

En este ejemplo tampoco se considera un tiempo de observación, ya que los resultados que aparecen en la tabla 4.3 son los tiempos de falla, es decir que se estuvieron observando los condensadores hasta que ellos fallaron. Como se puede ver en la misma el tiempo mas elevado en que se registró la falla de un condensador

fue de 6744 horas, este resultado representa unos 281 días que a su vez equivale a un poco mas de 9 meses. En la industria no hay mucho tiempo ya que la demanda de velocidad en el mercado está creciendo, obligando a muchos directivos a tomar decisiones con mayor rapidez para conseguir adaptarse a los frecuentes cambios que se producen en el actual entorno competitivo[2]. Además si usted puede lanzar un producto confiable antes que sus competidores pueden liberar de ellos, entonces usted ha ganado una gran ventaja, además el tiempo que las unidades esten trabajando representa un costo.

Al igual que en el ejemplo anterior, veamos para un tiempo de observación  $\eta$ , el cual, como se habia dicho, es un cuantil determinado de la distribución  $N(\gamma_0 + \gamma_1\xi_H, \sigma)$ , como se comportan las probabilidades de fallos en el esfuerzo de diseño ( $P_D$ ). Los valores de  $P_H$  que utilizamos en este caso son los mismos que se tomaron para el ejemplo anterior. En la tabla 3.4 se muestran los resultados obtenidos.

$\eta$	$P_H$	$P_D$
1983	0.80	$3.04 \cdot 10^{-6}$
2160	0.85	$7.5 \cdot 10^{-6}$
2404	0.90	$2.22 \cdot 10^{-5}$
2819	0.95	$9.95 \cdot 10^{-5}$
3799	0.99	0.001187

Tabla 4.4: Relación de valores de  $P_H$  y  $P_D$ .

Como se puede ver los valores de  $P_D$  son muy pequeños, el más alto de todos se alcanza para un cuantil del 99% en el nivel de esfuerzo  $H$  y es de 0.001 aproximadamente.

En cada uno de estos ejemplos que hemos presentado se puede observar que para valores de  $P_H$  superiores ó iguales a 0.80 los valores de  $P_D$  son muy pequeños alcanzando su máximo valor sobre 0.001 y aún así sigue siendo pequeño.

Esto significa que nuestros modelos en cada uno de nuestros ejemplos son modelos de tal manera que aceleran lo suficiente, veamos la figura 3.1.

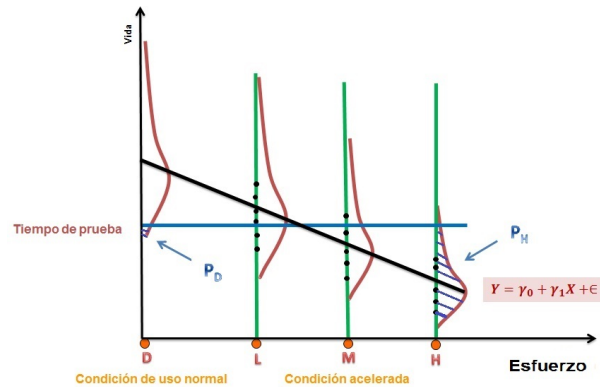


Figura 4.1: Representación gráfica de un modelo que acelera.

En la misma se puede observar que si nosotros tenemos valores de  $P_D$  pequeños y valores de  $P_H$  grandes nuestro modelo de regresión tiene mucha inclinación lo que infiere que hay muchas diferencias entre los esfuerzos de aceleración y por lo tanto nos brinda mucha información.

## 4.2 Modificación al plan de Meeker y Escobar

En los planes con tres esfuerzos se vio que el mejor plan es el propuesto por Meeker y Escobar en [8] en donde se asigna un 20% de las unidades al esfuerzo intermedio y se deja libre la optimización de la posición del nivel bajo de esfuerzo ( $\xi_L$ ) así como la asignación de unidades a este nivel ( $\pi_L$ ). En este tipo de planes el tiempo de observación es el mismo para todos los niveles de esfuerzo de la prueba como se puede observar en la figura anterior, si a este tiempo de observación de la prueba le llamamos  $\eta$ , entonces el tiempo total de la prueba es  $3\eta$ .

La idea de la modificación al plan de Meeker y Escobar es disminuir el tiempo de prueba en el nivel de esfuerzo  $H$  teniendo en cuenta que en este nivel la probabilidad de falla es alta y por lo tanto no tenemos que esperar mucho tiempo para tener un número de fallas adecuado. Además el tiempo que se haya disminuido en este nivel se le suma al nivel de esfuerzo bajo y de esta manera se mantiene el tiempo total de la prueba de  $3\eta$ .

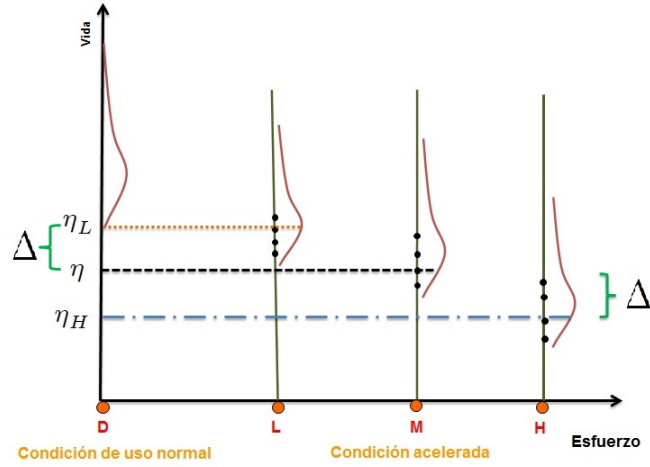


Figura 4.2: Representación de la modificación del plan de Meeker y Escobar.

Lo que se mencionó en el párrafo anterior se puede observar en la figura 4.2. En la misma se puede ver que el tiempo de prueba para el nivel de esfuerzo intermedio sigue siendo  $\eta$  mientras que el tiempo de la prueba para el nivel de esfuerzo mas elevado es  $\eta_H$  el cual es un cuantil  $q$  de una distribución normal con media  $\gamma_0 + \gamma_1\xi_H$  y varianza  $\sigma^2$ . Teniendo en cuenta que  $\Delta$  es la diferencia entre el tiempo  $\eta$  y  $\eta_H$ , el tiempo de prueba en el nivel de esfuerzo bajo es  $\eta_L$ , y el mismo se calcula como:

$$\begin{aligned}
 \eta_L &= \eta + \Delta \\
 &= \eta + \eta - \eta_H \\
 &= 2\eta - \eta_H
 \end{aligned}$$

Además de esta modificación se incluyen dos restricciones las cuales son que el número esperado de fallas en los niveles de esfuerzos bajo ( $E[r_L^*]$ ) y alto ( $E[r_H^*]$ ) estandarizados sean mayores ó iguales a un cierto número de unidades.

Considerando esta nueva modificación ahora se tiene que para valores de  $q$  sucesivos de forma descendente de la siguiente forma  $q = q_0 - h$ , donde  $h$  es un paso tan pequeño como se quiera y  $q_0$  un valor inicial generalmente alto, encontrar cual es la posición del nivel de esfuerzo bajo estandarizado ( $\xi_L$ ) y la asignación de unidades en este nivel ( $\pi_L$ ) de tal manera que optimicen la varianza y que a la misma vez se cumpla con las restricciones mencionadas.

Para obtener el plan de Meeker y Escobar modificado se tiene que resolver el siguiente problema de optimización.

Dado un valor de  $q$  en cada iteración encontrar:

$$\arg \min_{\xi_L, \pi_L} [ \text{var} (\hat{y}_p(0)) ]$$

sujeto a las restricciones  $E[r_L^*] \geq u_1$  y  $E[r_H^*] \geq u_2$  donde  $u_1$  y  $u_2$  son valores enteros.

A continuación se muestran los resultados de los distintos planes mencionados en este capítulo para el ejemplo 1. En el mismo se tenía que la proporción de fallas en el nivel de esfuerzo de diseño es  $P_D = 0.0016$  mientras que la proporción de fallas en el nivel de esfuerzo más elevado es  $P_H = 0.9999$ , además se tiene que  $P = 0.1$ .

Plan estándar												
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$\xi_M$	$P_m$	$E(r_L^*)$	$E(r_M^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_M$	$T_H$
0.31	0.333	0.188	0.6548	0.922	62	307	329	10.403	—	154	185	220
Plan 4:2:1												
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$\xi_M$	$P_m$	$E(r_L^*)$	$E(r_M^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_M$	$T_H$
0.31	0.57	0.188	0.6548	0.922	107	263	142	8.434	—	154	185	220
Plan de Meeker y Escobar												
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$\xi_M$	$P_m$	$E(r_L^*)$	$E(r_M^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_M$	$T_H$
0.317	0.626	0.203	0.659	0.926	126	185	173	7.564	—	155	185	220
Plan de Meeker y Escobar modificado												
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$\xi_M$	$P_m$	$E(r_L^*)$	$E(r_M^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_M$	$T_H$
0.185	0.687	0.044	0.593	0.843	30	168	104	4.369	0.927	144	179	220

Tabla 4.5: Resultados de los diferentes planes con tres esfuerzos para el ejemplo 1.

En la tabla 4.5 tenemos los resultados para los diferentes planes con tres esfuerzos que hemos mencionado. A continuación comentamos los resultados obtenidos.

#### Plan estándar

Este plan nos brinda una varianza de 10.403 unidades, así como las temperaturas de aceleración, siendo las mismas de  $154^0C$  en su nivel bajo de esfuerzo y  $185^0C$  en su nivel medio de esfuerzo. En este plan se colocan  $\frac{1}{3}$  de todos los motores eléctricos en cada una de estas temperaturas. Además se puede observar el número esperado de fallas en cada uno de estos niveles, si se tiene unos 1000 motores eléctricos se espera que en el nivel de esfuerzo bajo ( $154^0C$ ) fallen unos 62 motores, en el nivel de esfuerzo medio ( $185^0C$ ) y en el esfuerzo mayor ( $220^0C$ ) fallaran unos 307 y 329 motores respectivamente. Es importante mencionar que este plan es el que peores resultados arroja si nos fijamos en el valor de la varianza que es el objetivo a minimizar.

#### Plan 4:2:1

Por otra parte si se observan los resultados utilizando este plan, son muy parecidos al que se obtiene con el plan anterior. En este plan se obtienen los mismos niveles de

esfuerzos pero se obtiene una varianza de 8.434 unidades algo menor que el obtenido en el plan estándar. Otras de las ligeras diferencias que se presenta en este plan es que la proporción de unidades que se colocan en el nivel de esfuerzo bajo es de 57% por 33.3% en el plan estándar y al tener la misma proporción de fallas(18.8%) en este esfuerzo, de ahí que en el plan 4:2:1 tenga mayor número esperado de fallas, 107 por 62, representando estas un aumento de 45 fallas. Al mismo tiempo presenta unas 44 fallas menor en el esfuerzo intermedio, unas 263 por 307 en el plan estándar. Por lo tanto el hecho de que la varianza en este plan sea menor al plan estándar se debe al incremento del número de fallas que se obtienen en el nivel bajo de esfuerzo es decir en  $154^{\circ}C$  con lo que se tiene mucho mas información en una temperatura que esta mucho mas cerca de la temperatura de diseño( $130^{\circ}C$ ).

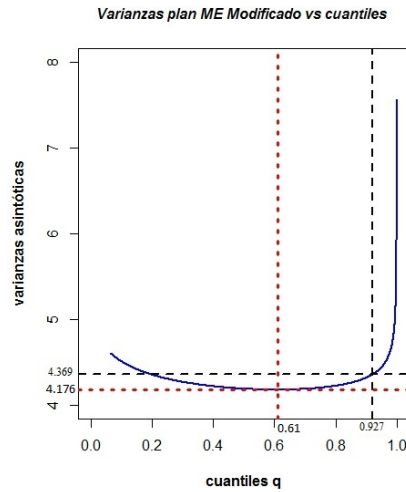
### **Plan de Meeker y Escobar**

Ahora si vemos los resultados del plan de Meeker y Escobar se tiene que las temperaturas de aceleración son practicamente las mismas que la de los dos planes anteriores siendo estas de  $155^{\circ}C$  , $185^{\circ}C$  y de  $220^{\circ}C$  respectivamente. En este plan se fija un 20% de los motores a ensayar en una temperatura intermedia, la misma resultó ser de  $185^{\circ}C$  mientras que se obtuvo que en el nivel bajo de temperatura se ensaya el 62.6% del número total de motores que se dispongan para realizar dicha prueba. Al mismo tiempo veamos como el número de fallas esperadas en el nivel bajo de esfuerzo muestra un aumento a 126 motores unas 19 fallas más que las alcanzadas con el plan 4:2:1. En este plan propuesto por Meeker y Escobar en [8] se obtiene una varianza de 7.564 unidades siendo a su vez menor que las que se habían obtenido tanto para el plan estándar como para el plan 4:2:1. La justificación de este resultado se debe de igual manera a la obtención de mayor información en el nivel de esfuerzo que tiene la menor temperatura al tener un número mayor de fallas.

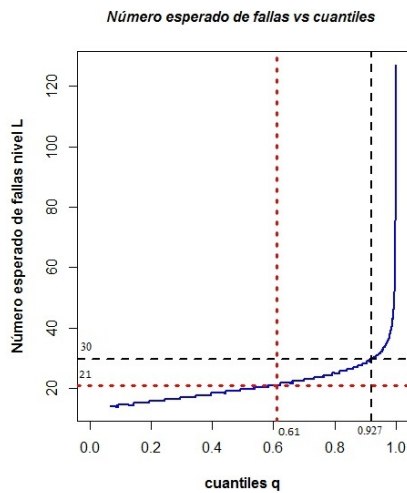
### **Plan de Meeker y Escobar modificado**

Por último se observa como el plan de Meeker y Escobar modificado tiene los mejores resultados en cuanto a la varianza siendo esta de 4.353, lo cual representa una disminución aproximada del 42.5% con respecto al mejor plan hasta este momento. Debido a que en el nivel de esfuerzo mayor( $220^{\circ}C$ ) ocurren muchas fallas se decide sólo esperar un cuantil del 92.7% de la distribución normal con media aproximada de  $\mu =6.78$  y una desviación  $\sigma =0.5963$  . Este cuantil representa unas 2088 horas aproximadamente y es el tiempo que se observan los motores en una temperatura de  $220^{\circ}C$ . Por otro lado el tiempo de censura para el nivel de temperatura de  $144^{\circ}C$  es de  $8064 + (8064 - 2088) = 14040$  horas, manteniendo 8064 horas para la temperatura

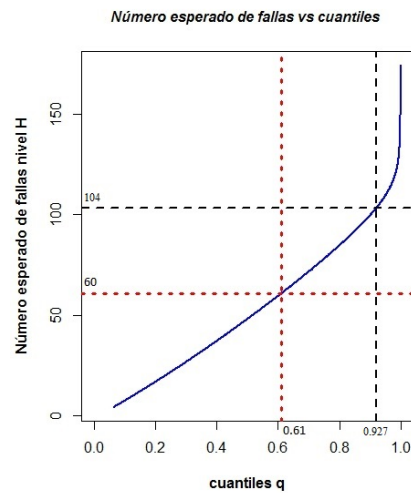
de  $179^{\circ}\text{C}$ . De esta forma se conserva el tiempo total de la prueba siendo esta de  $3\eta = 24192$  horas.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.3: Resultados del plan de Meeker y Escobar modificado.

En este nuevo procedimiento se consideraron las siguientes restricciones:

1. El número esperado de fallas en el nivel bajo  $E(r_L^*)$  sea al menos 30 fallas.
2. El número esperado de fallas en el nivel alto  $E(r_H^*)$  sea al menos 70 fallas.

En la figura 4.3 se puede observar como se comporta, la varianza asintótica(ver subfigura a), la  $E(r_L^*)$ (ver subfigura b) y la  $E(r_H^*)$ ( ver subfigura c). En la misma se

puede ver que nuestro algoritmo se detiene en un cuantil de 0.927, que como se ha mencionado, en este valor se alcanza una varianza de 4.369 con un  $E(r_L^*) = 30$  y un  $E(r_H^*) = 104$ . Por otro lado se puede observar que el mínimo de la varianza se alcanza en un cuantil del 61% y cuyo valor es de 4.176 unidades y se tiene en promedio 21 motores con fallas en el nivel mas bajo de temperatura mientras que en el nivel mas elevado de temperatura se espera que hayan unos 60 motores con fallas en promedio. Aquí el principal problema que hay que cuidar es que el valor de  $E(r_L^*)$  no sea muy bajo, ya que pudiera pasar que no fallara ningún motor y además como se observa al realizar esta nueva modificación al plan de Meeker y Escobar el nivel de esfuerzo bajo tiende a desplazarse hacia el nivel de diseño, con lo que la probabilidad de fallas en este nivel baja considerablemente y es por eso que aumenta la proporción de unidades o en este caso de motores a ensayar en dicho nivel.

También se puede ver que a partir del cuantil 61% la varianza obtenida es siempre menor que la obtenida en el plan de Meeker y Escobar, salvo que pudieramos elegir aquel cuantil que cumpla con las especificaciones del número esperado de fallas en el nivel bajo o elevado de esfuerzo respectivamente. De esta manera se puede ver que la solución propuesta no es única sino que depende de las restricciones de preferencia de cada usuario en cada uno de estos niveles de esfuerzos mencionados.

### 4.3 Modificación del plan óptimo

En el caso de un plan óptimo se conoce que presenta dos niveles de esfuerzo, un nivel de esfuerzo bajo ( $L$ ) y un nivel de esfuerzo más elevado ( $H$ ) como se puede ver en la figura 3.4.

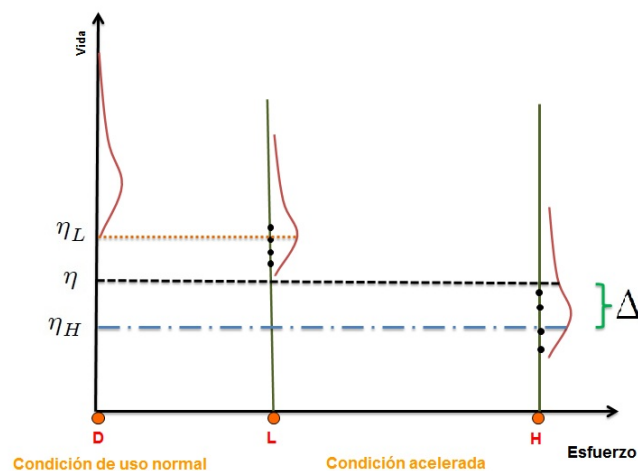


Figura 4.4: Plan óptimo modificado.



Además una proporción de unidades  $\pi_L$  se someten al esfuerzo ( $L$ ) y una proporción de unidades  $1 - \pi_L$  se someten al esfuerzo ( $H$ ). En este caso el tiempo de censura para ambos niveles de esfuerzo es  $\eta$  por lo que el tiempo total de la prueba es  $2\eta$ .

En la figura 4.4 se puede ver que si nos basamos en los mismos principios que en el plan modificado de Meeker y Escobar se puede reducir el tiempo de estudio en el nivel mas elevado ( $H$ ) teniendo en cuenta un cuantil de la distribución normal con media  $\gamma_0 + \gamma_1\xi_H$  y varianza  $\sigma^2$ . Además si  $\Delta$  es la diferencia entre los tiempos  $\eta$  y  $\eta_H$ , el tiempo de prueba en el nivel de esfuerzo bajo es  $\eta_L = \eta + \Delta$ , es el mismo que se obtuvo en el plan de Meeker y Escobar modificado.

En este plan modificado también se incluyen las mismas restricciones las cuales son que el número esperado de fallas en los niveles de esfuerzos bajo ( $E[r_L^*]$ ) y alto( $E[r_H^*]$ ) estandarizados sean mayores e iguales a un cierto número de unidades.

En esta nueva forma de realizar el plan óptimo se sigue el mismo procedimiento que se mencionó para obtener el plan de Meeker y Escobar modificado y por lo tanto se resuelve el mismo problema de optimización, es decir:

Dado un valor de  $q$  en cada iteración encontrar:

$$\arg \min_{\xi_L, \pi_L} [ \text{var} (\hat{y}_p(0)) ]$$

sujeto a las restricciones  $E[r_L^*] \geq u_1$  y  $E[r_H^*] \geq u_2$  donde  $u_1$  y  $u_2$  son valores enteros.

La unica distinción que hay que tener en cuenta es que este plan sólo cuenta con dos niveles de esfuerzos y por lo tanto la matriz de información de Fisher es diferente a la matriz de información de Fisher que se obtiene en el plan de Meeker y Escobar modificado.

A continuación se muestran los resultados que se obtienen tanto para plan óptimo como para nuestra modificación, para el ejemplo que hemos utilizado para ilustrar los procedimientos.

Plan óptimo								
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$E(r_L^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_H$
0.33	0.799	0.227	181	200	6.14	—	156	220
Plan óptimo modificado								
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$E(r_L^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_H$
0.168	0.886	0.034	30	87	3.387	0.77	143	220

Tabla 4.6: Resultados del plan óptimo y modificado para el ejemplo 1.

En la tabla 4.6 se puede observar que los mejores resultados los presenta el plan óptimo modificado con una varianza de 3.387 unidades por 6.14 unidades del plan óptimo. Esto representa una disminución de aproximadamente del 45%. Como se ha mencionado anteriormente en este capítulo el plan óptimo sólo cuenta con dos esfuerzos, a pesar de tener los mejores resultados este hecho lo hace vulnerable y poco utilizado debido a que existe la posibilidad de que en el nivel bajo de esfuerzo no se produzcan fallas cuando este nivel se sitúa algo cerca del nivel de diseño como pasa en este caso. Además se recomienda tener tres esfuerzos para poder verificar que el modelo de vida acelerada es adecuado.

Como podemos ver en el plan óptimo el nivel bajo de temperatura es de  $156^{\circ}C$ , la cual no esta muy alejada de los niveles bajos de temperaturas obtenidos con cada uno de los planes con tres esfuerzos mostrados anteriormente. Ahora si vemos el nivel bajo de temperatura que se obtiene con el plan óptimo modificado es  $143^{\circ}C$ , el cual es menor que el obtenido con el plan óptimo y por tanto está más cerca de la temperatura de diseño ( $130^{\circ}C$ ). Además se puede ver que este nivel bajo de temperatura es muy parecido al nivel bajo de temperatura que se obtuvo con el plan de Meeker y Escobar modificado.

A continuación se muestra una tabla resumen con los resultados de la varianza que se obtuvo para el ejemplo 1 por cada tipo de plan mencionado.

Tipo de plan	Estándar	4:2:1	ME	óptimo	MEM	óptimo modificado
Varianza	10.403	8.434	7.564	6.14	4.369	3.387

Tabla 4.7: Tabla resumen de resultados de varianza por tipo de plan.

En la tabla 4.7 se puede observar como la varianza va disminuyendo del plan estándar al plan óptimo modificado. En los cuatro primeros planes, como son el plan estándar el plan 4:2:1, el plan propuesto por Meeker y Escobar y el plan óptimo se utiliza el mismo tiempo de observación para todos los niveles de esfuerzo. De estos planes mencionados se puede ver que los mejores resultados se alcanzan con el plan óptimo como era de esperarse, siendo el plan propuesto por Meeker y Escobar el mejor plan de los planes con tres esfuerzos.

Ahora los últimos dos planes son los planes modificados, que como ya se mencionó presentan ciertas diferencias respecto a los anteriores. En dichos planes, no se tiene el mismo tiempo de observación en cada uno de los esfuerzos y además se controla el número de fallas esperadas en el nivel bajo de esfuerzo, por lo que la dinámica de

éstos planes cambia un poco respecto a los anteriores. El hecho de que se disponga de mayor tiempo de observación en el nivel bajo de esfuerzo y a su vez un menor tiempo de observación en el nivel mas elevado de esfuerzo hace que se asignen mas recursos al nivel bajo de esfuerzo y al estar este mas cerca del esfuerzo de diseño hace que la varianza de estos planes sea mucho menor que la que se obtiene con los planes ya mencionados que utilizan el mismo tiempo de observación para cada uno de los esfuerzos considerados, por eso no es de extrañarse que estos planes con las modificaciones mencionadas anteriormente presenten menor varianza que el plan óptimo, sin embargo se puede ver que el plan óptimo modificado sigue teniendo una menor varianza que el plan de Meeker y Escobar modificado.

Por otro lado si se mira la razón de las varianzas de los planes de Meeker y Escobar con los planes óptimos, presentan mas o menos el mismo comportamiento, aunque existen mayores diferencias entre los planes modificados.

La primera razón que se muestra es entre la varianza del plan de Meeker y Escobar y la varianza del plan óptimo, mientras que la segunda razón que se muestra es entre el plan de Meeker y Escobar modificado y el plan óptimo modificado.

$$R(p) = \frac{7.564}{6.14} = 1.23$$

$$R(p) = \frac{4.369}{3.387} = 1.29$$

De manera general podemos ver que no hay muchas diferencias entre los resultados que se obtienen entre los planes con tres esfuerzos y los planes óptimos. Además vimos que los nuevos planes con sus modificaciones siguen teniendo el mismo comportamiento entre la razón de las varianzas que los que se obtienen con los planes de Meeker y Escobar y el plan óptimo.

Si no hubiera incertidumbre en los valores de  $P_H$  y  $P_D$ , se podría utilizar un plan de prueba óptima que, entre todos los posibles planes de prueba, tiene la menor varianza del estimador.

Cómo sabemos en la práctica, siempre hay incertidumbre en la planificación de la información y, por tanto, como una alternativa, se sugiere usar los planes con tres esfuerzos, específicamente el plan de Meeker y Escobar modificado que tiene buenas (pero no óptimas) propiedades estadísticas pero nos ayudan a verificar que el modelo de vida acelerada es adecuado.

# Capítulo 5

## Pruebas de vida acelerada para distribuciones de vida Weibull.

### 5.1 Modelo para la vida del producto como función del esfuerzo

En esta sección se describe el criterio de optimización, el método de prueba asumido, limitaciones, y otro material de apoyo necesario.

A continuación se muestra el modelo Arrhenius-Weibull

#### Modelo General

Primero se define lo siguiente:

$t$  = tiempo a la falla

$t_T = t(T)$  tiempo a la falla en un esfuerzo  $T$ .

Las restricciones del modelo general son:

1. El tiempo a la falla en un esfuerzo  $T$  tiene distribución Weibull. La función de distribución Weibull es:

$$F(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (5.1)$$

aquí  $\eta > 0$  y  $\beta > 0$  son los parámetros de escala (ó vida característica) y de forma de la distribución Weibull respectivamente.

2. El parámetro de forma  $\beta$  de la distribución Weibull es constante, es decir es independiente del esfuerzo.
3. El parámetro de escala  $\eta$  puede obtenerse como  $\eta = L(T)$  donde:

$$\eta = L(T) = C \exp \left[ \frac{B}{T} \right] \quad (5.2)$$

4. Los tiempos de vida de cada una de las unidades en prueba son independientes.

Al considerar que la variable de aceleración es la temperatura, el parámetro  $B(x)$  puede ser sustituido por:

$$B = \frac{E_a}{K}$$

Si los tiempos a la falla en un esfuerzo  $T$  tiene distribución Weibull, entonces  $Y = \ln[t(T)]$  tiene una distribución de valores extremos de mínimos cuya función de distribución es:

$$F(y) = 1 - \left( \exp \left[ - \exp \left[ \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \right] \right), -\infty < y < \infty \quad (5.3)$$

Aquí  $\sigma > 0$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma = \frac{1}{\beta}$  y  $\mu = \ln(\eta)$

Luego, (5.2) puede ser escrita como:

$$\mu(V) = \log(C) + \frac{E_a}{kT} = \beta_0 + \beta_1 x \quad (5.4)$$

con  $\beta_0 = \log(C)$ ,  $\beta_1 = E_a$ ,  $x = \frac{1}{kT}$

Los parámetros del modelo  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\sigma$  son estimados de los datos.

A continuación se provee la teoría asintótica para planes óptimos para la distribución Weibull, basándonos en [13].

El criterio de optimización utilizado aquí es reducir al mínimo la varianza muestral en un esfuerzo especificado (usualmente el esfuerzo de diseño), que viene dada por la ecuación (5.5) y representa la estimación de máxima verosimilitud del percentil 100 de la distribución de valores extremos de mínimos en el esfuerzo transformado  $x$ .

$$\hat{y}_p(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + u_p \hat{\sigma} \quad (5.5)$$

Aquí  $u_p = \ln[-\ln(1 - P)]$  es el percentil de la distribución de valores extremos de mínimos estándar. La estimación de máxima verosimilitud correspondiente del percentil de la distribución Weibull es:

$$\hat{t}_p(x) = \exp(\hat{y}_p(x)) \quad (5.6)$$

La minimización de la expresión (5.5) es equivalente a minimizar la varianza muestral de  $\frac{\hat{t}_p(x)}{t_p(x)}$ , es decir, minimizando el (porcentaje) error relativo.

### Modelo Reparametrizado.

En este caso al igual que se mencionó en el capítulo 3 es conveniente realizar una reparametrización de manera conveniente. Definiendo el esfuerzo transformado se tiene que:

$$\xi_1 = \frac{x - x_D}{x_H - x_D} \quad (5.7)$$

donde:

$x_H$  es el nivel de esfuerzo más alto, el cual es especificado.

$x_D$  es el nivel de esfuerzo de diseño donde será estimada la media.

Como se puede observar si  $x = x_D$  entonces  $\xi_1 = 0$ , mientras que si  $x = x_H$  entonces  $\xi_1 = 1$ .

Si de la ecuación (5.7) despejamos a  $x$  se tiene el siguiente resultado:

$x = x_D + (x_H - x_D) \xi_1$  Ahora si este resultado anterior se sustituye en la expresión (5.4) tenemos:

$$\begin{aligned} \mu(\xi_1) &= \beta_0 + \beta_1 \cdot [x_D + (x_H - x_D) \xi_1] \\ &= \beta_0 + \beta_1 \cdot x_D + \beta_1 (x_H - x_D) \xi_1 \end{aligned}$$

Luego

$$\mu(\xi_1) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi_1 \quad (5.8)$$

donde los nuevos coeficientes  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  se relacionan con los parámetros previos  $\beta_0$  y  $\beta_1$  de la siguiente forma:

$$\gamma_0 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_D = \mu_D \quad (5.9)$$

y

$$\gamma_1 = \beta_1 \cdot (x_H - x_D) = \mu_H - \mu_D \quad (5.10)$$

Aquí  $\mu_D$  y  $\mu_H$  son las medias para  $x_D$  y  $x_H$  respectivamente. Además la media  $\mu_D = \gamma_0 + \gamma_1$  y la desviación estándar  $\sigma$  es la misma para ambas formas del modelo.

La ecuación (5.8) se puede reescribir como:

$$\mu(\xi_1) = \gamma_0 \xi_0 + \gamma_1 \xi_1 \quad (5.11)$$

donde  $\xi_0 = 1$ .

## Función de log-verosimilitud

Primero se define la función indicadora  $I = I(y)$  en términos del tiempo de cesura  $\eta$  como:

$$I(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq \eta \text{ el dato no está censurado} \\ 0 & \text{si } y > \eta \text{ el dato está censurado} \end{cases} \quad (5.12)$$

Es decir, la función vale 1 si la falla ocurre antes del tiempo  $\eta$ , mientras que vale 0 si la observación no ha fallado hasta el tiempo  $\eta$ .

Sea  $z = \frac{y - \mu(\xi_1)}{\sigma} = \frac{y - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma}$  el tiempo de falla estandarizado y sea  $\zeta = \frac{\eta - \mu(\xi_1)}{\sigma} = \frac{\eta - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma}$  el tiempo de cesura estandarizado. Por otro lado sea  $\Phi = \Phi(\zeta) = \Phi\left(\frac{\eta - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma}\right)$ , donde  $\Phi(\zeta)$  es la función de distribución acumulada de la distribución de valores extremos de mínimos estándar, es decir  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$

La log-verosimilitud  $L$  de una observación con cesura tipo I en el esfuerzo  $\xi_1$  es:

$$L = I[-\ln(\sigma) - e^z + z] + (1 - I) \ln(1 - \Phi) \quad (5.13)$$

Suponga que la  $i$ -ésima observación  $y_i$  corresponde a  $\xi_{1i}$  y la correspondiente log-verosimilitud es  $L_i$ . Entonces la log-verosimilitud muestral  $L_0$  para  $n$  observaciones independientes es:

$$L_0 = L_1 + L_2 + \dots + L_n. \quad (5.14)$$

Esta es una función de  $y_i, \eta, \xi_{1i}$  y de los parámetros  $\gamma_0, \gamma_1$  y  $\sigma$ . Las estimaciones por máxima verosimilitud  $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1$  y  $\hat{\sigma}$  son los valores paramétricos que maximizan la log-verosimilitud (5.14).

## Matriz de información de Fisher

Para obtener la matriz de información de Fisher se necesitan las segundas derivadas parciales de la log-verosimilitud muestral respecto a los parámetros del modelo. Para una sencilla observación las primeras derivadas parciales son presentadas a continuación, en el apéndice D se encuentra el desarrollo de las mismas:

Primero se muestra el resultado de la derivada de la función log-verosimilitud (5.13) con respecto a los  $\gamma_j$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_j} = \frac{\xi_j}{\sigma} [I(e^z - 1) + (1 - I)e^\zeta], j = 0, 1 \quad (5.15)$$

Ahora si se calcula la derivada respecto a  $\sigma$  se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} [I(z e^z - z - 1) + (1 - I)\zeta e^\zeta] \quad (5.16)$$

A continuación se muestra cada una de las segundas derivadas parciales, comenzando con la segunda derivada respecto a  $\sigma$ , luego la derivada respecto a  $\gamma_j$  y por último la derivada mixta respecto a  $\sigma$  y  $\gamma_j$  respectivamente.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^2} \left[ -2\sigma \frac{\partial L}{\partial \sigma} + I(1 + z^2 e^z) + (1 - I)\zeta^2 e^\zeta \right] \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} = -\frac{\xi_j \xi_k}{\sigma^2} [I e^z + (1 - I) e^\zeta], j, k = 0, 1 \quad (5.18)$$

Por último se tiene que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \sigma} = -\left(\frac{\xi_j}{\sigma^2}\right) \left[ -\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_j}\right) + I z e^z + (1 - I) \zeta e^\zeta \right], j = 0, 1 \quad (5.19)$$

Cada una de estas derivadas vienen dadas en términos de las cantidades aleatorias  $I$  y  $z$  y los parámetros del modelo.

Los elementos de la matriz de información de Fisher para una observación en  $(\xi_0, \xi_1)$  son las esperanzas que se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} E \left\{ -\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} \right\} &= \left( \frac{\xi_j \xi_k}{\sigma^2} \right) \{ \Phi \} j, k = 0, 1 \\ E \left\{ -\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \sigma} \right\} &= \left( \frac{\xi_j}{\sigma^2} \right) \left\{ \int_0^{e^\zeta} [\ln(w)] w e^{-w} dw + (1 - \Phi) \zeta e^\zeta \right\} j = 0, 1 \\ E \left\{ -\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} \right\} &= \left( \frac{1}{\sigma^2} \right) \left\{ \Phi + \int_0^{e^\zeta} [\ln(w)]^2 w e^{-w} dw + (1 - \Phi) \zeta^2 e^\zeta \right\} \end{aligned}$$

Lo anterior se realizó con la ayuda de las esperanzas:

$$E(I) = \Phi, E\left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_j}\right) = 0 \quad j=0,1, E\left(\frac{\partial L}{\partial \sigma}\right) = 0$$

La primera de estas esperanzas es consecuencia de la definición de  $I$  y las otras son propiedades generales de las primeras derivadas parciales (5.15, 5.16) evaluada en los verdaderos valores de los parámetros.



Luego  $\Phi$  es función de solo  $\zeta$ , las últimas tres expresiones en llaves ( $\{\}$ ) son funciones de  $\zeta$ , luego estas expresiones las denotamos por  $A(\zeta)$ ,  $B(\zeta)$  y  $C(\zeta)$  respectivamente.

Luego al igual que en el capítulo 3 para  $\xi_0 = 1$  la matriz de información de Fisher  $F_{\xi_1}$  para una observación en  $\xi_1$  tiene la forma:

$$F_{\xi_1} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} A(\zeta) & \xi_1 A(\zeta) & B(\zeta) \\ \xi_1 A(\zeta) & \xi_1^2 A(\zeta) & \xi_1 B(\zeta) \\ B(\zeta) & \xi_1 B(\zeta) & C(\zeta) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

La matriz de información de Fisher para cualquier plan con una muestra de  $n$  observaciones independientes es:

$$F = \sum_{i=1}^n F_{\xi_{1i}} \quad (5.21)$$

donde la  $i$ -ésima unidad se prueba en un esfuerzo  $\xi_1$  de  $\xi_{1i}$ .

Para cualquier plan la matriz de covarianza asintótica  $\Sigma$  del estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\gamma}_1$  y  $\hat{\sigma}$  es la inversa de la correspondiente matriz de información de Fisher:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} var(\hat{\gamma}_0) & cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) & cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\sigma}) \\ cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1) & var(\hat{\gamma}_1) & cov(\hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}) \\ cov(\hat{\gamma}_0, \hat{\sigma}) & cov(\hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}) & var(\hat{\sigma}) \end{bmatrix} = F^{-1} \quad (5.22)$$

La estimación de máxima verosimilitud del percentil 100 de la distribución en el esfuerzo de diseño con recíproco  $x_D(\xi_1 = 0)$  es:

$$\begin{aligned} \hat{y}_p(\xi_D) &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \cdot \xi_D + u_p \cdot \hat{\sigma} \\ \hat{y}_p(0) &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \cdot 0 + u_p \cdot \hat{\sigma} \end{aligned}$$

La varianza asintótica correspondiente de la estimación, es el valor de la forma cuadrática:

$$var(\hat{y}_p(0)) = [1 \ 0 \ u_p] \Sigma [1 \ 0 \ u_p]^t \quad (5.23)$$

Luego para obtener el plan óptimo se resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\arg \min_{\xi_L, \pi_L} [var(\hat{y}_p(0))]$$

Como hemos venido comentando  $\xi_L$  es el nivel bajo de esfuerzo estandarizado mientras que  $\pi_L$  sigue siendo la proporción de unidades que se colocan en el nivel mencionado.

En este caso el problema de optimización se resuelve utilizando el algoritmo “Nelder-Mead” que se encuentra implementado en R. [16]

Como se puede observar las expresiones de  $B(\zeta)$  y  $C(\zeta)$  no son cerradas. Dichas expresiones contienen integrales que deben ser resueltas utilizando integración numérica, la cual se basa en el método de cuadratura adaptativa. En el apéndice E se hace una breve descripción de dicho método.

## 5.2 Comparaciones de los diferentes planes

En esta sección se presentaran las comparaciones de los diferentes planes mencionados para ciertas combinaciones de  $P$ ,  $P_D$  y  $P_H$ . En particular aqui se muestran las combinaciones para  $P = 0.10, P_D = \{0.0001, 0.0010, 0.0100\}, P_H = \{0.250, 0.400, 0.600, 0.800, 0.900, 0.990, 1.000\}$

A continuación se muestran los resultados para el plan óptimo considerando una distribución Weibull.

$\mathbf{P}$	$\mathbf{P}_D$	$\mathbf{P}_H$	$\xi_L$	$\pi_L$	$\mathbf{p}_L$	$\mathbf{E}(r_L^*)$	$\mathbf{V}(P)$
0.1000	0.0001	0.250	0.733	0.641	0.034	21	1124.07
0.1000	0.0001	0.400	0.745	0.653	0.056	36	707.93
0.1000	0.0001	0.600	0.753	0.663	0.092	61	445.66
0.1000	0.0001	0.800	0.758	0.671	0.143	95	289.12
0.1000	0.0001	0.900	0.758	0.675	0.183	123	221.84
0.1000	0.0001	0.990	0.750	0.678	0.270	183	137.11
0.1000	0.0001	1.000	0.732	0.681	0.351	239	89.53
0.1000	0.0010	0.250	0.629	0.663	0.035	22	534.0
0.1000	0.0010	0.400	0.652	0.679	0.057	38	350.2
0.1000	0.0010	0.600	0.669	0.692	0.092	63	228.83
0.1000	0.0010	0.800	0.680	0.701	0.140	98	153.4
0.1000	0.0010	0.900	0.682	0.706	0.178	125	120.0
0.1000	0.0010	0.990	0.676	0.712	0.259	184	76.78
0.1000	0.0010	1.000	0.657	0.714	0.332	236	51.90
0.1000	0.0100	0.250	0.394	0.721	0.037	26	161.1
0.1000	0.0100	0.400	0.454	0.742	0.058	43	116.8
0.1000	0.0100	0.600	0.497	0.757	0.09	68	83.42
0.1000	0.0100	0.800	0.524	0.767	0.134	102	60.26
0.1000	0.0100	0.900	0.534	0.771	0.168	129	49.21
0.1000	0.0100	0.990	0.537	0.775	0.236	183	34.04
0.1000	0.0100	1.000	0.521	0.775	0.295	228	24.80

Tabla 5.1: Resultados utilizando un plan óptimo.

A continuación se muestra los resultados para cada uno de los planes con tres esfuerzos, comenzando con el plan 4:2:1.

<b>P</b>	<b>P<sub>D</sub></b>	<b>P<sub>H</sub></b>	<b>ξ<sub>L</sub></b>	<b>P<sub>L</sub></b>	<b>ξ<sub>M</sub></b>	<b>P<sub>M</sub></b>	<b>E(r<sub>L</sub><sup>*</sup>)</b>	<b>V(P)</b>	<b>R(P)</b>
0.1000	0.0001	0.250	0.699	0.026	0.849	0.083	14	1397.86	1.24
0.1000	0.0001	0.400	0.706	0.041	0.853	0.135	23	877.15	1.24
0.1000	0.0001	0.600	0.709	0.062	0.855	0.217	35	552.3	1.24
0.1000	0.0001	0.800	0.708	0.091	0.854	0.324	52	360.52	1.25
0.1000	0.0001	0.900	0.705	0.112	0.852	0.406	64	278.96	1.26
0.1000	0.0001	0.990	0.691	0.154	0.845	0.582	88	177.68	1.30
0.1000	0.0001	1.000	0.672	0.195	0.836	0.757	111	121.53	1.36
0.1000	0.0010	0.250	0.577	0.026	0.789	0.083	14	641.9	1.20
0.1000	0.0010	0.400	0.594	0.04	0.797	0.134	22	419.38	1.20
0.1000	0.0010	0.600	0.605	0.06	0.803	0.213	34	274.23	1.20
0.1000	0.0010	0.800	0.61	0.086	0.805	0.317	49	185.1	1.21
0.1000	0.0010	0.900	0.609	0.106	0.804	0.396	60	146.13	1.22
0.1000	0.0010	0.990	0.598	0.144	0.799	0.571	82	96.59	1.26
0.1000	0.0010	1.000	0.581	0.182	0.791	0.745	104	68.53	1.32
0.1000	0.0100	0.250	0.297	0.027	0.649	0.085	15	180.06	1.12
0.1000	0.0100	0.400	0.349	0.039	0.674	0.132	22	131.05	1.12
0.1000	0.0100	0.600	0.39	0.057	0.695	0.207	32	94.39	1.13
0.1000	0.0100	0.800	0.417	0.08	0.709	0.307	45	69.16	1.15
0.1000	0.0100	0.900	0.427	0.097	0.714	0.385	55	57.25	1.16
0.1000	0.0100	0.990	0.43	0.131	0.715	0.552	74	41.21	1.21
0.1000	0.0100	1.000	0.426	0.168	0.713	0.728	96	31.65	1.28

Tabla 5.2: Resultados utilizando un plan 4:2:1

Ahora se muestra los resultados del mejor plan estandar en donde en cada uno de los esfuerzos se ponen la misma cantidad de unidades a ensayar, por lo que este plan es un uno del tipo  $\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}$ .

<b>P</b>	<b>P<sub>D</sub></b>	<b>P<sub>H</sub></b>	<b>ξ<sub>L</sub></b>	<b>P<sub>L</sub></b>	<b>ξ<sub>M</sub></b>	<b>P<sub>M</sub></b>	<b>E(r<sub>L</sub><sup>*</sup>)</b>	<b>V(P)</b>	<b>R(P)</b>
0.1000	0.0001	0.250	0.645	0.017	0.822	0.067	5	1216.34	1.08
0.1000	0.0001	0.400	0.659	0.027	0.829	0.112	9	771.52	1.09
0.1000	0.0001	0.600	0.669	0.044	0.834	0.183	14	490.55	1.10
0.1000	0.0001	0.800	0.673	0.065	0.836	0.281	22	322.63	1.12
0.1000	0.0001	0.900	0.672	0.082	0.836	0.358	27	250.52	1.13
0.1000	0.0001	0.990	0.659	0.111	0.829	0.521	37	160.21	1.17
0.1000	0.0001	1.000	0.631	0.127	0.816	0.673	42	110.24	1.23
0.1000	0.0010	0.250	0.503	0.017	0.752	0.068	5	578.69	1.08
0.1000	0.0010	0.400	0.533	0.027	0.767	0.112	9	383.86	1.10
0.1000	0.0010	0.600	0.556	0.043	0.778	0.183	14	254.42	1.11
0.1000	0.0010	0.800	0.569	0.064	0.784	0.279	21	173.55	1.13
0.1000	0.0010	0.900	0.571	0.08	0.786	0.355	26	137.7	1.15
0.1000	0.0010	0.990	0.561	0.108	0.781	0.515	35	91.62	1.19
0.1000	0.0010	1.000	0.534	0.122	0.767	0.666	41	65.54	1.26
0.1000	0.0100	0.250	0.178	0.018	0.589	0.07	5	177.57	1.10
0.1000	0.0100	0.400	0.264	0.028	0.632	0.113	9	132.07	1.13
0.1000	0.0100	0.600	0.329	0.043	0.664	0.183	14	96.72	1.16
0.1000	0.0100	0.800	0.37	0.064	0.685	0.278	21	71.65	1.19
0.1000	0.0100	0.900	0.385	0.078	0.693	0.352	26	59.59	1.21
0.1000	0.0100	0.990	0.39	0.104	0.695	0.509	34	43.08	1.27
0.1000	0.0100	1.000	0.37	0.118	0.685	0.659	39	33.28	1.34

Tabla 5.3: Resultados utilizando el mejor plan estandar

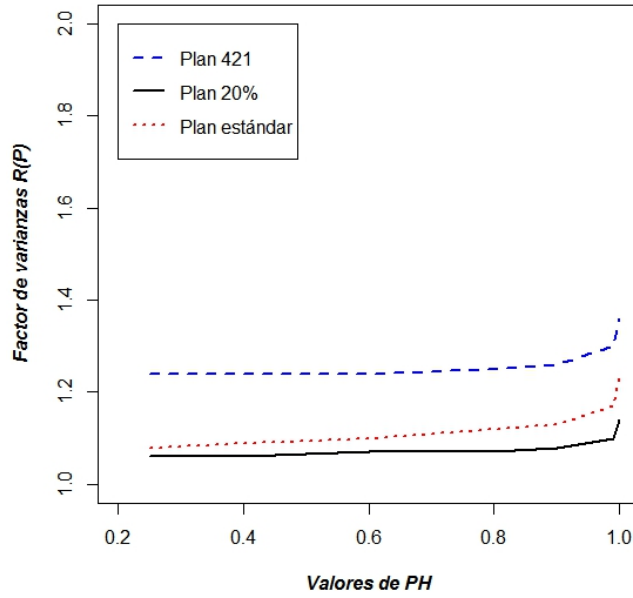
Por último se muestra los resultados utilizando el plan de meeker y escobar fijando en el esfuerzo del medio una proporción del 20%.

<b>P</b>	<b>P<sub>D</sub></b>	<b>P<sub>H</sub></b>	$\xi_L$	$\pi_L$	<b>p<sub>L</sub></b>	$\xi_M$	<b>p<sub>M</sub></b>	<b>E(r<sub>L</sub><sup>*</sup>)</b>	<b>V(P)</b>	<b>R(P)</b>
0.1000	0.0001	0.250	0.694	0.471	0.025	0.847	0.082	11	1186.2	1.06
0.1000	0.0001	0.400	0.708	0.482	0.041	0.854	0.138	19	750.209	1.06
0.1000	0.0001	0.600	0.718	0.492	0.067	0.859	0.223	32	474.994	1.07
0.1000	0.0001	0.800	0.723	0.499	0.104	0.861	0.343	51	310.668	1.07
0.1000	0.0001	0.900	0.723	0.503	0.132	0.861	0.435	66	240.127	1.08
0.1000	0.0001	0.990	0.715	0.509	0.195	0.858	0.632	99	151.652	1.10
0.1000	0.0001	1.000	0.7	0.513	0.258	0.85	0.81	132	102.25	1.14
0.1000	0.0010	0.250	0.576	0.492	0.026	0.788	0.083	12	562.71	1.05
0.1000	0.0010	0.400	0.603	0.507	0.042	0.801	0.137	21	371.021	1.06
0.1000	0.0010	0.600	0.623	0.518	0.068	0.811	0.224	35	244.137	1.07
0.1000	0.0010	0.800	0.635	0.527	0.103	0.817	0.341	54	165.171	1.08
0.1000	0.0010	0.900	0.638	0.531	0.13	0.819	0.432	69	130.261	1.09
0.1000	0.0010	0.990	0.633	0.537	0.188	0.817	0.625	100	85.378	1.11
0.1000	0.0010	1.000	0.618	0.541	0.246	0.809	0.8	132	59.69	1.15
0.1000	0.0100	0.250	0.313	0.549	0.028	0.656	0.087	15	168.969	1.05
0.1000	0.0100	0.400	0.38	0.567	0.044	0.69	0.14	24	123.643	1.06
0.1000	0.0100	0.600	0.43	0.579	0.068	0.715	0.224	39	89.229	1.07
0.1000	0.0100	0.800	0.462	0.586	0.099	0.731	0.337	58	65.267	1.08
0.1000	0.0100	0.900	0.474	0.589	0.124	0.737	0.424	72	53.854	1.09
0.1000	0.0100	0.990	0.481	0.591	0.174	0.741	0.61	102	38.293	1.12
0.1000	0.0100	1.000	0.474	0.591	0.225	0.737	0.784	132	28.89	1.16

Tabla 5.4: Resultados utilizando el plan de Meeker y Escobar fijando un 20% en el esfuerzo medio

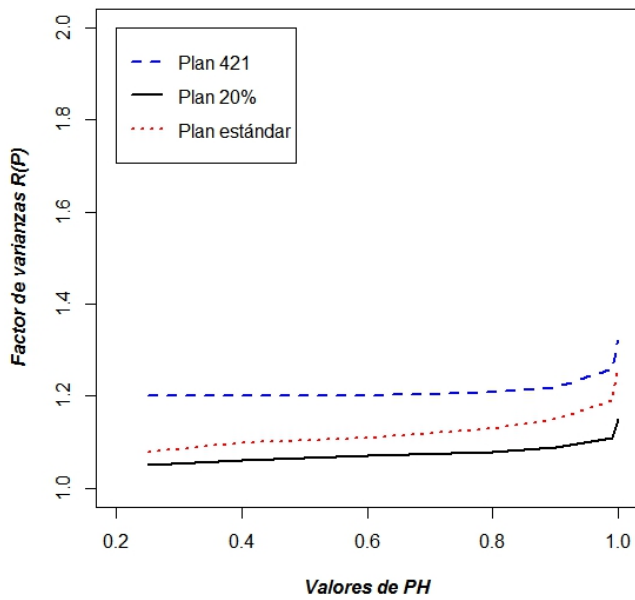
En la figura 5.1 se puede ver los resultados de las razones de la varianza de cada uno de los planes con tres niveles de esfuerzo respecto al plan óptimo, para los diferentes valores de  $P, P_D$  y  $P_H$  respectivamente. En la primera gráfica el valor de  $P_D = 0.0001$ , en la segunda gráfica el valor de  $P_D = 0.001$  y en la última de las gráficas el valor de  $P_D = 0.01$ .

Gráfica factor de varianzas para planes con tres esfuerzos



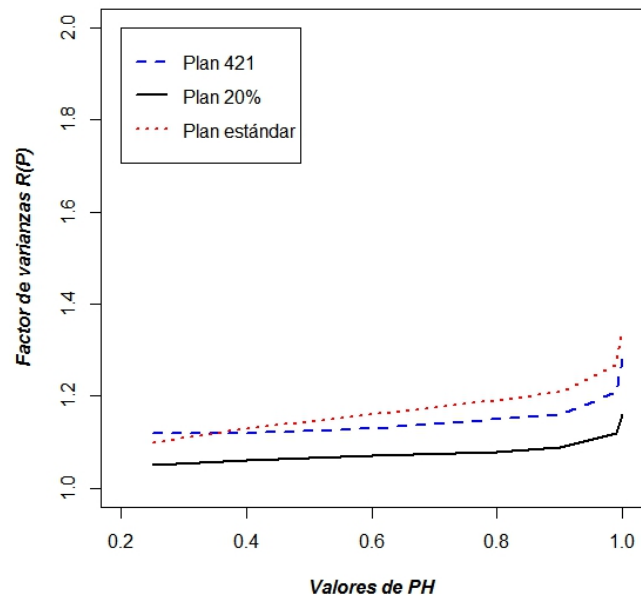
(a)

Gráfica factor de varianzas para planes con tres esfuerzos



(b)

Gráfica factor de varianzas para planes con tres esfuerzos



(c)

Figura 5.1: Razón de varianzas de planes con tres esfuerzos con respecto al plan óptimo.

En cada una de estas gráficas que se encuentran dentro de la figura mencionada

el plan de Meeker y Escobar, es el plan con el cual se obtienen los mejores resultados, dado que con este plan se obtienen menores valores de las razones de varianza. Bajo el criterio de la minimización de la varianza del cuantil 10% en el esfuerzo de diseño es el plan que mejor resultado nos ofrece dentro de los planes con tres niveles de esfuerzos.

Además se puede observar que para valores pequeños de la proporción de fallas en el nivel de diseño( $P_D$ ), el plan tradicional presenta mejores resultados que el plan 4:2:1, mientras que para valores de  $P_D = 0.1$  el plan 4:2:1 presenta mejores resultados que el plan tradicional a partir de valores de  $P_H = 0.4$ .

### 5.3 Ejemplos de la literatura.

A continuación se presentan dos ejemplos tomados de la literatura, en uno de ellos la variable de aceleración es la temperatura y se usa la relación de arrhenius mientras que en el otro la variable de aceleración es el voltaje y se usa la relación potencia inversa.

#### Ejemplo 1

Este ejemplo se puede ver en el capítulo 4 de[1] y cuyos datos aparecen en el ejemplo 4.1 del siguiente fichero que representa una guía del software reliasoft:

[http://www.reliasoft.com/pubs/alta6\\_training.pdf](http://www.reliasoft.com/pubs/alta6_training.pdf)

En este ejemplo se espera que la vida de un nuevo producto en condiciones normales de operación pueda ser superior a las 15000 horas, realizar una prueba en estas condiciones no es factible. Por tal razón se decidió realizar una prueba de vida acelerada de este producto. La temperatura de operación para este producto es de  $323K$ , que es equivalente a ( $50^{\circ}C$ ), siendo la temperatura la única variable de aceleración.

En la tabla 5.6 se muestran los datos( tiempos(horas) a la falla.) de tres lotes donde cada uno contiene diez productos. Cada uno de los lotes se someten a esfuerzos constantes, el primero de ellos se somete a  $393^{\circ}K$ , el segundo a  $408^{\circ}K$  y el último a  $423^{\circ}K$ .

393°K	408°K	423°K
3850	3300	2750
4340	3720	3100
4760	4080	3400
5320	4560	3800
5740	4920	4100
6160	5280	4400
6580	5640	4700
7140	6120	5100
7980	6840	5700
8960	7680	6400

Tabla 5.5: Tiempos de falla de un nuevo producto.

En este caso las estimaciones de los parámetros son

$$\hat{\beta} = 4.2916$$

$$\hat{B} = 1861.6187$$

$$\hat{C} = 58.9848$$

De donde se tiene que:

$$\hat{\beta}_0 = \log(\hat{C}) = 4.07728$$

$$\hat{\beta}_1 = -E_a = \hat{B} \cdot k = -0.1604$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\hat{\beta}} = 0.233$$

En este ejemplo no se considera un tiempo de observación, ya que los resultados que aparecen en la tabla 5.5 son los tiempos de falla, es decir que se estuvo observando el nuevo producto hasta que fallo. Como se puede ver en la tabla el tiempo mas elevado en que se registró una falla fue de 8960 horas, este resultado representa unos 374 dias aproximadamente lo que equivale a un poco mas de un año. Como ya se habia mencionado son tiempos muy grandes de observación en cualquier ámbito pero en el industrial este tiempo de observación te puede traer muchas desventajas, la mayor sin dudas el costo de tener el producto en el ensayo.

Ahora veamos para un tiempo de observación  $\eta$ , el cual, es un cuantil determinado de la distribución  $Gumbel(\gamma_0 + \gamma_1 \xi_H, \beta)$ , como se comportan las probabilidades de fallos en el esfuerzo de diseño ( $P_D$ ). Los valores de  $P_H$  que vamos a utilizar son los que hemos venido utilizando a lo largo de este trabajo, es decir  $P_H = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95$  y  $0.99$  respectivamente. En la tabla 5.7 se muestran los resultados obtenidos.

$\eta$	$P_H$	$P_D$
5373	0.80	0.0047
5583	0.85	0.0055
5841	0.90	0.0067
6210	0.95	0.0087
6865	0.99	0.0134

Tabla 5.6: Relación de valores de  $P_H$  y  $P_D$ .

Como se puede ver los valores de  $P_D$  son muy pequeños, el más alto de todos se alcanza para un cuantil del 99% en el nivel de esfuerzo  $H$  y es de 0.0134 aproximadamente.

### Ejemplo 2

Este ejemplo se presenta en [11] donde Nelson proporciona datos de un fluido aislante en una prueba de vida acelerada cuyo objetivo era estimar la relación entre el tiempo de ruptura y el voltaje. En dicho experimento se colocaron unas 76 unidades y las mismas fueron ensayadas en siete niveles de esfuerzos igualmente espaciados entre 26KV y 38KV. En este caso se considera que se tiene un voltaje de diseño de 20KV, en [13] se muestran las estimaciones máximo verosímiles de los parámetros del modelo relación potencia inversa-Weibull, asumiendo que el tiempo de observación fue de 200 minutos, dichas estimaciones se presentan a continuación.

$$\hat{\beta}_0 = 64.848$$

$$\hat{\beta}_1 = 17.730$$

$$\hat{\sigma} = 1.288 \left( \hat{\beta} = 0.7764 \right)$$

Si se calcula las probabilidades de falla al tiempo de observación considerado ( $\eta = 200$ ) en el esfuerzo de diseño y en el esfuerzo mas elevado se obtiene que  $P_D = 0.0067$  y  $P_H = 1.0$ .

En estos ejemplos que hemos presentado en esta sección hemos podido observar que para valores de  $P_H$  grandes se obtienen valores de  $P_D$  pequeños.



## 5.4 Resultados de diferentes planes para un ejemplo

A continuación se muestran los resultados de los distintos planes mencionados en este capítulo para el ejemplo 1.

En el mismo se tomaremos un tiempo de observación  $\eta = 6865$  horas, para el cual se tiene que la proporción de fallas en el nivel de esfuerzo de diseño es  $P_D = 0.0134$  mientras que la proporción de fallas en el nivel de esfuerzo más elevado es  $P_H = 0.99$ , además se tiene que  $P = 0.1$ .

Como se ha visto en este capítulo el plan de Meeker y Escobar resultó ser el mejor plan dentro de los planes con tres esfuerzos. Teniendo en cuenta este resultado decidimos hacerle una modificación, la cual sigue los mismos principios de la modificación que se realizara en el capítulo anterior.

Plan estándar												
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$\xi_M$	$P_m$	$E(r_L^*)$	$E(r_M^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_M$	$T_H$
0.010	0.333	0.014	0.505	0.226	4	75	330	18.924	—	51	94	150
Plan 4:2:1												
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$\xi_M$	$P_m$	$E(r_L^*)$	$E(r_M^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_M$	$T_H$
0.353	0.57	0.1	0.676	0.502	57	143	141	12.14	—	79	111	150
Plan de Meeker y Escobar												
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$\xi_M$	$P_m$	$E(r_L^*)$	$E(r_M^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_M$	$T_H$
0.351	0.627	0.099	0.676	0.501	62	100	171	11.04	—	79	111	150
Plan de Meeker y Escobar modificado												
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$\xi_M$	$P_m$	$E(r_L^*)$	$E(r_M^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_M$	$T_H$
0.317	0.608	0.082	0.658	0.466	49	93	190	7.691	0.989	76	110	150

Tabla 5.7: Resultados de los diferentes planes con tres esfuerzos para el ejemplo 1.

En la tabla 5.7 tenemos los resultados para los diferentes planes con tres esfuerzos que hemos mencionado. A continuación comentamos los resultados obtenidos.

### Plan estándar

Este plan nos brinda una varianza de 18.924 unidades, así como las temperaturas de aceleración, siendo las mismas de  $51^{\circ}C$  en su nivel bajo de esfuerzo y  $94^{\circ}C$  en su nivel medio de esfuerzo. Además se puede observar el número esperado de fallas en cada uno de estos niveles, si se tiene unos 1000 equipos del nuevo producto, se espera que en el nivel de esfuerzo bajo ( $51^{\circ}C$ ) fallen unos 4, en el nivel de esfuerzo medio ( $94^{\circ}C$ ) y en el esfuerzo mayor ( $150^{\circ}C$ ) fallaran unos 75 y 330 equipos respectivamente. Es importante mencionar que este plan es el que arroja los resultados mas pobres, si nos fijamos en el valor de la varianza que es el objetivo a

minimizar. Además veamos que el nivel de esfuerzo bajo es prácticamente el esfuerzo de diseño, de ahí que el número esperado de fallas en este nivel de esfuerzo sea tan bajo, y al tener muy poca información en el esfuerzo mas cercano al esfuerzo de diseño hace que su varianza sea grande en comparación con los demás planes.

#### **Plan 4:2:1**

Por otra parte si se observan los resultados utilizando este plan, se puede observar que se obtiene una varianza de 12.14 unidades, dicha varianza es mucho menor que la obtenida en el plan estándar.

Además se puede observar que las temperaturas de aceleración resultaron ser de  $79^{\circ}C$  en su nivel bajo de esfuerzo y  $111^{\circ}C$  en su nivel medio de esfuerzo.

El hecho de que estas temperaturas de aceleración sean superiores a las que se obtuvieron con el plan estándar, hace que la proporción de fallas sea también superior y de ahí que se esperen mayor número de fallas en cada uno de los niveles de esfuerzo. Como se puede observar en el nivel bajo de esfuerzo se esperan que ocurran unas 57 fallas unas 53 más que las que se esperan que ocurran con el plan estándar, así en el nivel medio de esfuerzo se esperan que ocurran unas 143 fallas, las cuales superan en 68 al número de fallas que se esperan para este mismo nivel de esfuerzo en el plan estándar. Por lo tanto el hecho de que la varianza en este plan sea menor al plan estándar se debe al incremento del número de fallas que se obtienen en el nivel bajo y medio de esfuerzo es decir en  $79^{\circ}C$  y  $111^{\circ}C$  respectivamente con lo que se tiene mucho mas información en las temperaturas que estan mucho mas cerca de la temperatura de diseño( $50^{\circ}C$ ).

#### **Plan de Meeker y Escobar**

Ahora si vemos los resultados del plan de Meeker y Escobar se tiene que las temperaturas de aceleración son las mismas que las que se obtuvieron con el plan 4:2:1 siendo estas de  $79^{\circ}C$  , $111^{\circ}C$  y de  $150^{\circ}C$  respectivamente.

Como se puede observar en este plan se obtuvo que en el nivel bajo de esfuerzo se colocan un 62.7% del total de unidades a ensayar superior al 57% que se colocan con el plan 4:2:1. Además se puede ver que las probabilidades de falla de este plan con respecto al plan 4:2:1( $P_L, P_m$ ) en los niveles bajo e intermedio son muy similares.

En este plan la varianza que se obtiene es de 11.04 unidades siendo a su vez mucho menor que la que se obtuvo en el plan estándar(18.924) y ligeramente menor a la que se obtuvo con el plan 4:2:1(12.14).

La justificación de este resultado pensamos que se deba al hecho de tener mayor proporción de fallas en el nivel bajo de esfuerzo (62) con respecto al plan 4:2:1(57).

### Plan de Meeker y Escobar modificado

Por último se observa como el plan de Meeker y Escobar modificado tiene los mejores resultados en cuanto a la varianza siendo esta de 7.691, lo cual representa una disminución aproximada del 30% con respecto al mejor plan hasta este momento.

Lo interesante de este resultado es que debido a que en el nivel de esfuerzo mayor(150°C) ocurren muchas fallas se decide sólo esperar un cuantil del 98.9% de la distribución Gumbel con media aproximada de  $\mu = 8.476125$  y una desviación  $\sigma = 0.233$  ó parámetro de forma  $\beta = 4.2916$ . Este cuantil representa unas 6817 horas aproximadamente, es decir unas 48 horas menos y es el tiempo que se observa el nuevo producto en una temperatura de 150°C. Por otro lado el tiempo de censura para el nivel de temperatura de 76°C es de  $6865 + (6865 - 6817) = 6913$  horas, manteniendo 6865 horas para la temperatura de 110°C. De esta forma se conserva el tiempo total de la prueba siendo esta de  $3\eta = 20595$  horas.

A continuación se muestran los resultados que se obtienen tanto para plan óptimo como para nuestra modificación, para el ejemplo que hemos venido presentando.

Plan óptimo								
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$E(r_L^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_H$
0.341	0.8	0.094	75	197	9.32	—	78	150
Plan óptimo modificado								
$\xi_L$	$\pi_L$	$P_L$	$E(r_L^*)$	$E(r_H^*)$	$V(P)$	$q$	$T_L$	$T_H$
0.323	0.735	0.085	62	246	6.601	0.93	77	150

Tabla 5.8: Resultados del plan óptimo y modificado para el ejemplo 1.

En la tabla 5.8 se puede observar que los mejores resultados los presenta el plan óptimo modificado con una varianza de 6.601 unidades por 9.32 unidades del plan óptimo. Esto representa una disminución de aproximadamente del 29%. Como podemos ver en el plan óptimo y en el óptimo modificado el nivel bajo de temperatura es de 78°C y 77°C, la cual no está muy alejada de los niveles bajos de temperaturas obtenidos con los planes 4:2:1, Meeker y Escobar así como con el plan de Meeker y Escobar modificado, los cuales son planes con tres esfuerzos como se ha mostrado anteriormente.

A continuación se muestra una tabla resumen con los resultados de la varianza que se obtuvo para el ejemplo 1 por cada tipo de plan mencionado.

Tipo de plan	Estándar	4:2:1	ME	óptimo	MEM	óptimo modificado
Varianza	18.924	12.14	11.04	9.32	7.691	6.601

Tabla 5.9: Tabla resumen de resultados de varianza por tipo de plan.

En la tabla 5.9 al igual como se mencionó en el capítulo anterior la varianza va disminuyendo del plan estándar al plan óptimo modificado. En este caso los mejores resultados de los planes con tres esfuerzos se alcanzan con la modificación que se le realizó al plan propuesto por Meeker y Escobar, siendo este el plan que mas cerca se encuentra del plan óptimo modificado que entre todos los planes que se muestran en la tabla 5.9 es el plan que presenta la menor varianza.

Por otro lado si se mira la razón de las varianzas de los planes de Meeker y Escobar con los planes óptimos, presentan mas o menos el mismo comportamiento, aunque existen mayores diferencias entre los planes modificados.

La primera razón que se muestra es entre la varianza del plan de Meeker y Escobar y la varianza del plan óptimo, mientras que la segunda razón que se muestra es entre el plan de Meeker y Escobar modificado y el plan óptimo modificado.

$$R(p) = \frac{11.04}{9.32} = 1.18$$

$$R(p) = \frac{7.691}{6.601} = 1.17$$

En este caso al igual que mencionamos en el capítulo anterior se puede ver que no hay muchas diferencias entre los resultados que se obtienen entre los planes con tres esfuerzos y los planes óptimos. Además vimos que los nuevos planes con sus modificaciones siguen teniendo el mismo comportamiento entre la razón de las varianzas que los que se obtienen con los planes de Meeker y Escobar y el plan óptimo.

Teniendo en cuenta todo lo anterior y además conociendo que en la práctica siempre hay incertidumbre en la planificación de la información se recomienda tener tres esfuerzos, particularmente el plan de Meeker y Escobar modificado que como ya sabemos tiene buenas (pero no óptimas) propiedades estadísticas que nos ayudan a verificar que el modelo de vida acelerada es adecuado.

# Capítulo 6

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha podido ver la importancia que juega hoy en día el diseño de pruebas de vida aceleradas en el área de la industria, donde se requiere de una gran cantidad de productos para operar durante un largo periodo de tiempo.

Realizamos una revisión de los modelos de vida acelerada, los cuales son necesarios para modelar el tiempo de vida de las unidades que se someten a una prueba de vida acelerada con esfuerzo constante.

Además se mostró un panorama general de la teoría de las diferentes formas de diseñar planes de pruebas de vida acelerada que optimicen la varianza de un cuantil de interés, específicamente hemos estudiado el diseño de planes óptimos y el diseño de planes con tres esfuerzos para el modelo Arrhenius-Lognormal como para el modelo Arrhenius-Weibull.

En los planes con tres esfuerzos que se presentaron, tales como el plan 4:2:1, el plan estándar y el plan de Meeker y Escobar se utiliza el mismo tiempo de observación ( $\eta$ ) para todos los niveles de esfuerzo. Dicho tiempo de observación es el tiempo suficiente para producir fallas en el esfuerzo de prueba menor ( $L$ ) mientras que es demasiado elevado en el esfuerzo de mayor aceleración ( $H$ ). Por lo tanto se decide hacer una nueva modificación centrándonos, en el plan propuesto por Meeker y Escobar, el cual fue el plan que mejores resultados nos brindó.

La idea de la modificación consistió en disminuir el tiempo de observación en el esfuerzo mas elevado ( $\eta_H$ ), el cual, para darle una interpretación estadística es un cuantil  $q$  de una distribución Normal o Gumbel según sea el caso, con media  $\gamma_0 + \gamma_1 \xi_H$  y varianza  $\sigma^2$ . El tiempo de observación disminuido en este nivel  $H$  es adicionado al nivel bajo de esfuerzo ( $L$ ), de tal manera que el tiempo total de la prueba se mantiene igual a  $3\eta$ . La modificación incluye que el número esperado de fallas en los niveles de esfuerzos bajo ( $E[r_L^*]$ ) y alto ( $E[r_H^*]$ ) estandarizados sean mayores ó iguales a un cierto número de unidades.

En el modelo Arrhenius-Lognormal el plan que arrojó la menor varianza fue el plan propuesto por Meeker y Escobar y la misma fue de 7.564 unidades mientras que la varianza que se obtuvo con nuestra propuesta de modificación fue de 4.369, por lo que la modificación propuesta logró reducir la varianza que se tenía con el plan de Meeker y Escobar en aproximadamente un 42.5%. Mientras que en el modelo Arrhenius-Weibull de igual manera el plan que arrojó la menor varianza fue el plan propuesto por Meeker y Escobar y la misma fue de 11.04 unidades mientras que la varianza que se obtuvo con nuestra propuesta de modificación fue de 7.691, la reducción de la varianza en este caso resultó ser de aproximadamente del 30%. En ambos modelos analizados se puede observar que con nuestra propuesta se logra obtener una disminución considerable de la varianza de un cuantil de interés (10%) que la que se puede obtener con el mejor plan propuesto en la literatura con esfuerzo constante.

Como consecuencia de este trabajo de tesis se puede plantear algunas extesiones y estudios futuros como por ejemplo:

1. Estudiar el diseño de planes óptimos y el diseño de planes con tres esfuerzos considerando que los tiempos a la falla en un esfuerzo  $T$  ( $t_T$ ) tengan distribución Exponencial, Logística las cuales en conjunto con la Lognormal y la Weibull son las distribuciones mas usuales para pruebas de vida aceleradas.
2. Desarrollar nuevas modificaciones en el mejor plan que se obtenga del estudio anterior, basadas en las ideas planteadas en nuestro trabajo.

# Apéndice A

## Cálculo de derivadas asumiendo distribución de vida Lognormal

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \gamma_0} &= -I \cdot z \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma_0} + (1-I) \cdot \frac{1}{1-\Phi} \cdot \frac{\partial(1-\Phi)}{\partial \gamma_0} \\ &= -I \cdot z \cdot \left(\frac{-\xi_0}{\sigma}\right) + (1-I) \cdot \frac{1}{1-\Phi} \cdot (-\varphi) \cdot \left(\frac{-\xi_0}{\sigma}\right) \\ &= \frac{\xi_0}{\sigma} \left[ I \cdot z + (1-I) \cdot \frac{\varphi}{1-\Phi} \right]\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \gamma_1} &= -I \cdot z \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma_1} + (1-I) \cdot \frac{1}{1-\Phi} \cdot \frac{\partial(1-\Phi)}{\partial \gamma_1} \\ &= -I \cdot z \cdot \left(\frac{-\xi_1}{\sigma}\right) + (1-I) \cdot \frac{1}{1-\Phi} \cdot (-\varphi) \cdot \left(\frac{-\xi_1}{\sigma}\right) \\ &= \frac{\xi_1}{\sigma} \left[ I \cdot z + (1-I) \cdot \frac{\varphi}{1-\Phi} \right]\end{aligned}$$

Las derivadas anteriores se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_j} = \frac{\xi_j}{\sigma} \left[ I \cdot z + (1-I) \cdot \frac{\varphi}{1-\Phi} \right], j = 0, 1 \quad (\text{A.1})$$

Ahora calculando la derivada respecto a  $\sigma$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \sigma} &= I \left[ \left(\frac{-1}{\sigma}\right) - z \cdot \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right] + (1-I) \cdot \frac{1}{1-\Phi} \cdot \frac{\partial(1-\Phi)}{\partial \sigma} \\ &= I \left[ -\frac{1}{\sigma} - z \cdot \left[ -\left(\frac{y - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma^2}\right) \right] \right] + (1-I) \cdot \frac{\varphi}{1-\Phi} \left[ -\left(\frac{\eta - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma^2}\right) \right] \\ &= I \left[ -\frac{1}{\sigma} + \frac{z^2}{\sigma} \right] + (1-I) \cdot \left[ \frac{\varphi}{1-\Phi} \cdot \frac{\zeta}{\sigma} \right]\end{aligned}$$

Luego tenemos que:

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \left[ I \cdot (z^2 - 1) + (1 - I) \cdot \frac{\varphi \cdot \zeta}{1 - \Phi} \right] \quad (\text{A.2})$$

A continuación se muestra cada una de las seis segundas derivadas parciales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^2} \left[ I(z^2 - 1) + (1 - I) \frac{\varphi \zeta}{1 - \Phi} \right] + \frac{1}{\sigma} \left[ I 2z \frac{\partial z}{\partial \sigma} + (1 - I) \frac{\left[ \frac{\partial(\varphi \zeta)}{\partial \sigma} (1 - \Phi) - \varphi \zeta \cdot \frac{\partial(1 - \Phi)}{\partial \sigma} \right]}{(1 - \Phi)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial L}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sigma} \left[ -\frac{2Iz^2}{\sigma} + (1 - I) \frac{\left[ \frac{\varphi \cdot \zeta^2}{\sigma} + \varphi \cdot \left(-\frac{1}{\sigma}\right) \zeta \right] (1 - \Phi) - \varphi \cdot \zeta \left(-\varphi \cdot \left(\frac{-\zeta}{\sigma}\right)\right)}{(1 - \Phi)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial L}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sigma} \left[ -\frac{2Iz^2}{\sigma} + (1 - I) \left[ \frac{\varphi \cdot \zeta^2}{\sigma} - \frac{\varphi \cdot \zeta}{\sigma} - \frac{\varphi^2 \cdot \zeta^2}{(1 - \Phi)^2} \right] \right] \end{aligned}$$

Luego se tiene que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial L}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \left[ -2Iz^2 + (1 - I) \left[ -\frac{\varphi \cdot \zeta}{1 - \Phi} + \frac{\varphi \cdot \zeta^2}{1 - \Phi} - \frac{\varphi^2 \cdot \zeta^2}{(1 - \Phi)^2} \right] \right] (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_0^2} &= \frac{\xi_0}{\sigma} \left[ I \cdot \left( \frac{-\xi_0}{\sigma} \right) + (1 - I) \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_0} (1 - \Phi) - \varphi \frac{\partial(1 - \Phi)}{\partial \gamma_0}}{(1 - \Phi)^2} \right] \\ &= \frac{\xi_0}{\sigma} \left[ I \cdot \left( \frac{-\xi_0}{\sigma} \right) + (1 - I) \cdot \frac{\varphi \cdot \zeta \left( \frac{\xi_0}{\sigma} \right) (1 - \Phi) - \varphi (-\varphi) \left( \frac{-\xi_0}{\sigma} \right)}{(1 - \Phi)^2} \right] \\ &= \frac{\xi_0^2}{\sigma^2} \left[ -I + (1 - I) \left[ \frac{\varphi \cdot \zeta}{(1 - \Phi)} - \frac{\varphi^2}{(1 - \Phi)^2} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_1^2} &= \frac{\xi_1}{\sigma} \left[ I \cdot \left( \frac{-\xi_1}{\sigma} \right) + (1 - I) \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_1} (1 - \Phi) - \varphi \frac{\partial(1 - \Phi)}{\partial \gamma_1}}{(1 - \Phi)^2} \right] \\ &= \frac{\xi_1}{\sigma} \left[ I \cdot \left( \frac{-\xi_1}{\sigma} \right) + (1 - I) \cdot \frac{\varphi \cdot \zeta \left( \frac{\xi_1}{\sigma} \right) (1 - \Phi) - \varphi (-\varphi) \left( \frac{-\xi_1}{\sigma} \right)}{(1 - \Phi)^2} \right] \\ &= \frac{\xi_1^2}{\sigma^2} \left[ -I + (1 - I) \left[ \frac{\varphi \cdot \zeta}{(1 - \Phi)} - \frac{\varphi^2}{(1 - \Phi)^2} \right] \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_0 \partial \gamma_1} &= \frac{\xi_0}{\sigma} \left[ I \left( \frac{-\xi_1}{\sigma} \right) + (1-I) \left[ \frac{\varphi \cdot \zeta \left( \frac{\xi_1}{\sigma} \right) (1-\Phi) - \varphi(-\varphi) \left( \frac{-\xi_1}{\sigma} \right)}{(1-\Phi)^2} \right] \right] \\
&= \frac{\xi_0 \xi_1}{\sigma} \left[ -I + (1-I) \left[ \frac{\varphi \cdot \zeta}{(1-\Phi)} - \frac{\varphi^2}{(1-\Phi)^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

Resumiendo se tiene que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} = \frac{\xi_j \xi_k}{\sigma} \left[ -I + (1-I) \left[ \frac{\varphi \cdot \zeta}{(1-\Phi)} - \frac{\varphi^2}{(1-\Phi)^2} \right] \right], j, k = 0, 1 \quad (\text{A.4})$$

Por último se tiene que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \gamma_j} + \frac{\xi_j}{\sigma^2} \left[ -Iz + (1-I) \left[ \frac{\varphi \cdot \zeta^2}{(1-\Phi)} - \frac{\zeta \varphi^2}{(1-\Phi)^2} \right] \right], j = 0, 1 \quad (\text{A.5})$$

# Apéndice B

## algoritmo Nelder-Mead

El algoritmo Nelder-Mead parte de un simplex no degenerado en cuyos vértices tenemos aproximaciones al óptimo global. Para dos variables, un simplex es un triángulo, y el método es un patrón de búsqueda que compara valores de la función en los tres vértices de un triángulo. El peor vértice, donde  $f(x, y)$  es más grande, se rechaza y se sustituye con un nuevo vértice. Un nuevo triángulo se forma y la búsqueda continúa. El proceso genera una secuencia de triángulos (que podría tener diferentes formas), para los que la función de valores en los vértices se hacen más pequeños y más pequeños. El tamaño de los triángulos se reduce y se encuentran las coordenadas del punto mínimo.

Sea  $f(x, y)$  la función que se quiere minimizar. Para comenzar se dan tres vértices de un triángulo:  $V_k = (x_k, y_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . La función  $f(x, y)$  es evaluada en cada uno de los tres puntos:  $z_k = f(x_k, y_k)$  para  $k = 1, 2, 3$ . Los subíndices son luego reordenados de manera que  $z_1 \leq z_2 \leq z_3$ .

### Triángulo Inicial $\Delta BGW$

Sean  $B = (x_1, y_1)$  el mejor vértice,  $G = (x_2, y_2)$  un vértice bueno, es decir un vértice que esta cerca del mejor y por último sea  $W = (x_3, y_3)$  el peor vértice.

### Punto medio del lado bueno

El proceso de construcción utiliza el punto medio del segmento que une B y G, el cual se encuentra calculando el promedio de las coordenadas:

$$M = \frac{B + G}{2} = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

### Reflexión utilizando el punto R

La función disminuye a medida que nos movemos a lo largo del lado del triángulo de  $W$  a  $B$ , y disminuye a medida que nos movemos a lo largo del lado de  $W$  a  $G$ . Por lo tanto, es posible que  $f(x, y)$  tome valores más pequeños en los puntos que se encuentran lejos de  $W$ , es decir en el lado opuesto de la línea entre  $B$  y  $G$ . Elegimos un punto  $R$  de prueba que se obtiene por “reflexión” del triángulo por el lado  $\overline{BG}$ .

Para determinar  $R$ , se busca primero el punto medio  $M$  del lado  $\overline{BG}$ . Luego se traza el segmento de línea de  $W$  a  $M$ , a su longitud se le denota como  $d$ . Este último segmento se extiende una distancia  $d$  desde el punto  $M$ , para localizar el punto  $R$ , veamos la figura 3.1.

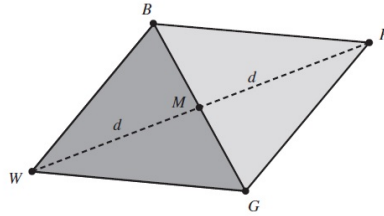


Figura B.1: El triángulo  $\triangle BWG$ , el punto medio  $M$  y reflexión del punto  $W$  en el punto  $R$

Las coordenadas para el punto  $R$  se calculan mediante la siguiente ecuación:

$$R = M + (M - W) = 2M - W$$

### Extensión utilizando el punto E

Si el valor de la función en  $R$  es más pequeño que el valor de la función en  $W$ , entonces nos hemos movido en la dirección correcta hacia el mínimo. Tal vez el mínimo esté sólo un poco más lejos que el punto  $R$ . Así, alargamos el segmento de línea a través de  $M$  y  $R$  hasta el punto  $E$ .

Esto forma un triángulo ampliado  $\triangle BGE$ . El punto  $E$  se encuentra desplazado una distancia adicional  $d$  a lo largo de la línea que une  $M$  y  $R$  (veamos la figura 3.2).

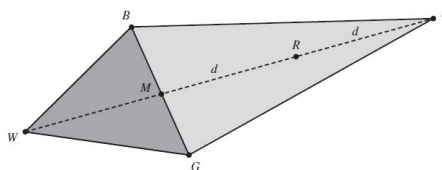


Figura B.2: El triángulo  $\triangle BWG$ , el punto  $R$  y la prolongación hasta el punto  $E$

Si el valor de la función en  $E$  es menor que el valor de la función en  $R$ , entonces hemos encontrado un mejor vértice que  $R$ . Las coordenadas para el vértice  $E$  es:

$$R = R + (R - M) = 2R - M$$

### Contracción usando el punto $C$

Si los valores de la función en  $R$  y  $W$  son los mismos, entonces se debe probar en otro punto. Tal vez el valor de la función es menor en  $M$ , pero no podemos sustituir a  $W$  con  $M$  porque hay que tener un triángulo. Tengamos en cuenta los dos puntos medios  $C_1$  y  $C_2$  de los segmentos de línea  $\overline{WM}$  segmentos de línea y  $\overline{MR}$  respectivamente, como se puede ver en la figura 3.3.

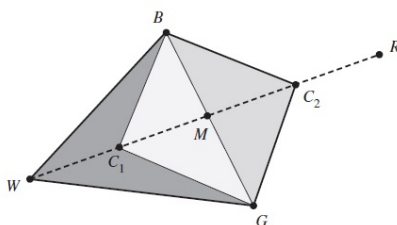


Figura B.3: Los puntos de contracción  $C_1$  y  $C_2$

El punto con el valor de la función más pequeño se llama  $C$ , y el nuevo triángulo es  $BGC$ . Nota. La elección entre  $C_1$  y  $C_2$  puede parecer inapropiado para el caso de dos dimensiones, pero es importante en dimensiones más altas.

### Encogimiento hacia $B$ sobre los segmentos originales.

Si el valor de la función en  $C$  no es menor que el valor en  $W$ , los puntos  $G$  y  $W$  deben ser encogidos hacia  $B$ , veamos la figura 3.4.

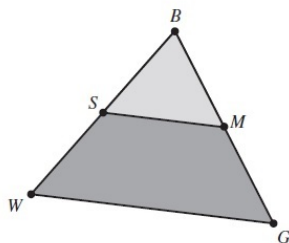


Figura B.4: Encogimiento del triángulo hacia  $B$

El punto  $G$  se sustituye con  $M$ , y  $W$  se sustituye con  $S$ , el cual es el punto medio del segmento de recta que une  $B$  con  $W$ .

### Decisiones lógicas para cada paso

Un algoritmo computacionalmente eficiente debe realizar evaluaciones de la función sólo si es necesario. En cada paso, se encuentra un nuevo vértice que sustituye a  $W$ . Tan pronto como se encuentra, no se necesita más investigación, y se completa el paso de iteración. A continuación se muestran los detalles lógicos para casos bidimensionales.

Si  $f(R) < f(G)$ , entonces se tiene el caso (i) {ya sea reflejar o encoger}, sino se tiene el caso(ii){ya sea contracción o desplazar}

Ahora daremos una breve descripción de estos casos.

#### Caso(i)

si  $f(B) < f(R)$  entonces se reemplaza  $W$  por  $R$ , en caso de no ser así, obtenga  $E$  y  $f(E)$ . Por último verifique si  $f(E) < f(B)$ , en caso de ser cierto, reemplace  $W$  por  $E$  sino reemplace  $W$  por  $R$ .

#### Caso(ii)

si  $f(R) < f(W)$  entonces se reemplaza  $W$  por  $R$ , luego se obtiene  $C$  de esta forma  $(\frac{W+M}{2})$  ó de esta otra manera  $(\frac{M+R}{2})$ , luego una vez obtenido el valor de  $C$  obtenga  $f(C)$ . El último paso es verificar si  $f(C) < f(W)$ , en caso de ser cierto entonces se reemplaza  $W$  por  $C$ , de no cumplirse la desigualdad anterior se calcula  $S$  y  $f(S)$  y reemplazamos  $W$  por  $S$  y  $G$  por  $M$ .

# Apéndice C

## Código para el ejemplo de cómo determinar un plan óptimo

```
# código diseño optimo con distribucion Lognormal
rm(list=ls())
p<-0.1000
pd<-0.0010 #probabilidad de falla en el esfuerzo de diseño.
ph<-0.900 #probabilidad de falla en el esfuerzo mas elevado.
sigma<-0.6 # valor estimado del modelo
eta<-183 # tiempo de observación(dias).
etalog<-log(eta)
zp<-qnorm(p)
#esfuerzos estandarizados
epsd<-0
epsh<-1
#Calculamos gamma0 y gamma1 que son los coeficientes en el modelo estandarizado.
gamma0<-etalog-sigma*qnorm(pd)
gamma1<-etalog-gamma0-sigma*qnorm(ph)
#Calculamos los elementos de la matriz de información para el esfuerzo epsl
A1 <- function(epsl){
z<-(etalog-gamma0-gamma1*epsl)/(sigma)
h<-pnorm(z)-dnorm(z)*(z-(dnorm(z)/(1-pnorm(z))))
return(h)
}
B1 <- function(epsl){
z<-(etalog-gamma0-gamma1*epsl)/sigma
h1<-(-dnorm(z))*(1+z*(z-(dnorm(z)/(1-pnorm(z))))))
```

```

return(h1)
}
Cl <- function(eps1){
z<-(etalog-gamma0-gamma1*eps1)/sigma
h2<-(2*pnorm(z))-z*dnorm(z)*(1+(z)^2-(z*dnorm(z))/(1-pnorm(z)))
return(h2)
}
#Aquí se calcula la matriz de información como función de eps1 y pi
Fsuma <- function(pp){
pi<-pp[1]
eps1<-pp[2]
a11<-pi*Al(eps1)+(1-pi)*Al(epsh)
a12<-pi*eps1*Al(eps1)+(1-pi)*Al(epsh)
a13<-pi*Bl(eps1)+(1-pi)*Bl(epsh)
a21<-a12
a22<-pi*(eps1^2)*Al(eps1)+(1-pi)*Al(epsh)
a23<-pi*eps1*Bl(eps1)+(1-pi)*Bl(epsh)
a31<-a13
a32<-a23
a33<-pi*Cl(eps1)+(1-pi)*Cl(epsh)
matsum<-matrix(c(a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33),nrow=3,,ncol=3,byrow=T)
return(matsum)
}
#Ahora calculamos la Avar, que es la función objetivo
Avar<-function(pp){
F<-Fsuma(pp)
cov<-solve(F)
vec<-c(1,0,zp)
Av<-vec%*%cov%*%vec
return(Av)
}
#Sigue la optimización (min) de la Avar
inicio<-c(runif(2))
inferior<-c(.01,.01)
superior<-c(.99,.99)
out<-optim(inicio,Avar,method= "Nelder-Mead")

```

```

# ya obtuvimos el valor óptimo ahora Volviendo a las condiciones reales.
# Conocimiento de más datos de interés.
TD=50          # Temperatura de diseño.
TH=120         # Temperatura de mayor esfuerzo.
B<-8.6171*10^-5 #Constante de Boltzman
XD<-(1/B)*(1/(273.16+TD)) # Esfuerzo de diseño transformado
XH<-(1/B)*(1/(273.16+TH)) # Esfuerzo mas elevado transformado
XL<-XD+out$par[2]*(XH-XD) # Esfuerzo mas bajo transformado
TL<-(1/B)*(1/XL)-273.16  # Temperatura óptima para la prueba
# Aquí imprimimos en una tabla los valores de interés para mostrar al cliente
P<-p
PD<-pd
PH<-ph
VP<-round(out$value,2) # varianza asintótica
Epsl <- round(out$par[2], 3)
PiL <- round(out$par[1],3) # Probabilidad de asignación en el esfuerzo epsl
TempL<-round(TL,2)      # Temperatura óptima para la prueba
pl<-round(pnorm((1-out$par[2])*qnorm(pd)+out$par[2]*qnorm(ph)),3)
#pl es la probabilidad de falla en epsl
n=1000 # total de unidades a ensayar
ERL<-trunc(n*out$par[1]*pl) #Número esperado de fallas nivel L

##-----Resultados-----

library(rpanel)
library(tcltk)

##-----Etiquetas del panel-----

etiquetas=c("Cuantil de interés: P","Probabilidad de falla nivel de diseño: PD",
"Probabilidad de falla nivel mas elevado: PH","Esfuerzo estandarizado: Epsl",
"Proporción de piezas que se ponen en el nivel bajo: PiL",
"Proporción de fallas en el nivel bajo: PL",
"Número esperado de fallas en el nivel bajo: ERL",
"Valor de la varianza asintótica VP","Temperatura de Diseño: TD",
"Temperatura nivel bajo: TL",

```



```

"Temperatura nivel alto: TH")
result<-c(P,PD,PH,Epsl,PiL,p1,ERL,VP,TD,TempL,TH)
##-----Interfaz-----
panel<-rp.control(title="Tabla de Resultados",
size=c(500, 500),background="Blue",
pars=c(result[1],result[2],result[3],result[4],
result[5],result[6],result[7],result[8],result[9],
result[10],result[11]))
rp.textentry(panel,
pars,
labels=etiquetas,
title="Resultados",
initval=c(result[1],result[2],result[3],result[4],
result[5],result[6],result[7],result[8],result[9],
result[10],result[11]),width=8)

```

## Apéndice D

### Cálculo de derivadas asumiendo distribución de vida Weibull

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \gamma_0} &= I \left[ -e^z \cdot \left( \frac{-\xi_0}{\sigma} \right) + \left( \frac{-\xi_0}{\sigma} \right) \right] + (1 - I) \left[ -e^\zeta \cdot \left( \frac{-\xi_0}{\sigma} \right) \right] \\ &= \frac{\xi_0}{\sigma} [I(e^z - 1) + (1 - I)e^\zeta]\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \gamma_1} &= I \left[ -e^z \cdot \left( \frac{-\xi_1}{\sigma} \right) + \left( \frac{-\xi_1}{\sigma} \right) \right] + (1 - I) \left[ -e^\zeta \cdot \left( \frac{-\xi_1}{\sigma} \right) \right] \\ &= \frac{\xi_1}{\sigma} [I(e^z - 1) + (1 - I)e^\zeta]\end{aligned}$$

luego, de manera general las derivadas anteriores se pueden expresar como:

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_j} = \frac{\xi_j}{\sigma} [I(e^z - 1) + (1 - I)e^\zeta], j = 0, 1 \quad (\text{D.1})$$

Ahora si se calcula la derivada respecto a  $\sigma$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \sigma} &= I \left[ -\frac{1}{\sigma} - e^z \cdot \left[ -\left( \frac{y - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma^2} \right) \right] \right] + \left[ -\left( \frac{y - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma^2} \right) \right] + \\ &+ (1 - I) \left( -e^\zeta \cdot \left[ -\left( \frac{\eta - \gamma_0 \xi_0 - \gamma_1 \xi_1}{\sigma^2} \right) \right] \right) \\ &= I \left[ -\frac{1}{\sigma} - e^z \cdot \left( \frac{-z}{\sigma} \right) - \frac{z}{\sigma} \right] + (1 - I) \left( -e^\zeta \left( \frac{-\zeta}{\sigma} \right) \right)\end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} [I(ze^z - z - 1) + (1 - I)\zeta e^\zeta] \quad (\text{D.2})$$

A continuación se muestra cada una de las seis derivadas parciales.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^2} [I(ze^z - z - 1) + (1 - I)\zeta e^\zeta] + \\
&+ \frac{1}{\sigma} \left[ I \left( -\frac{z}{\sigma} e^z + ze^z \left( -\frac{z}{\sigma} \right) - \left( \frac{-z}{\sigma} \right) \right) \right] + (1 - I) \left[ -\frac{\zeta e^\zeta}{\sigma} + \zeta e^\zeta \left( -\frac{\zeta}{\sigma} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} [I(ze^z - z - 1) + (1 - I)\zeta e^\zeta + I((ze^z - z + z^2 e^z) + (1 - I)(\zeta e^\zeta + \zeta^2 e^\zeta))] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} [I(ze^z - z - 1) + (1 - I)\zeta e^\zeta + I(ze^z - z - 1) + (1 - I)\zeta e^\zeta + (1 + z^2 e^z) I] + \\
&+ \left( -\frac{1}{\sigma^2} \right) (1 - I) \zeta^2 e^\zeta \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} [2 [I(ze^z - z - 1) + (1 - I)\zeta e^\zeta] + I(1 + z^2 e^z) + (1 - I)\zeta^2 e^\zeta]
\end{aligned}$$

Luego se tiene que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^2} \left[ -2\sigma \frac{\partial L}{\partial \sigma} + I(1 + z^2 e^z) + (1 - I)\zeta^2 e^\zeta \right] \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_0^2} &= \frac{\xi_0}{\sigma} \left[ Ie^z \left( \frac{-\xi_0}{\sigma} \right) + (1 - I)e^\zeta \left( \frac{-\xi_0}{\sigma} \right) \right] \\
&= -\frac{\xi_0^2}{\sigma^2} [Ie^z + (1 - I)e^\zeta]
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_1^2} &= \frac{\xi_1}{\sigma} \left[ Ie^z \left( \frac{-\xi_1}{\sigma} \right) + (1 - I)e^\zeta \left( \frac{-\xi_1}{\sigma} \right) \right] \\
&= -\frac{\xi_1^2}{\sigma^2} [Ie^z + (1 - I)e^\zeta]
\end{aligned}$$

Ahora si se calculan las derivadas mixtas tenemos que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_0 \partial \gamma_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_0} = -\frac{\xi_0 \xi_1}{\sigma^2} [Ie^z + (1 - I)e^\zeta]$$

Resumiendo tenemos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} = -\frac{\xi_j \xi_k}{\sigma^2} [Ie^z + (1 - I)e^\zeta], \quad j, k = 0, 1 \quad (\text{D.4})$$

Por último se tiene que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma_j \partial \sigma} = -\left( \frac{\xi_j}{\sigma^2} \right) \left[ -\sigma \left( \frac{\partial L}{\partial \gamma_j} \right) + Ize^z + (1 - I)\zeta e^\zeta \right], \quad j = 0, 1 \quad (\text{D.5})$$

# Apéndice E

## Cuadratura adaptativa

Las reglas de cuadratura compuestas requieren el uso de puntos igualmente espaciados. Generalmente, se utiliza un paso pequeño de tamaño  $h$  de manera uniforme a través de todo el intervalo de integración para asegurar la precisión global. Esto no toma en cuenta que algunas partes de la curva puede tener grandes variaciones funcionales que requieren más atención que otras porciones de la curva.

Es útil introducir un método que ajuste el tamaño del paso, de modo que este sea más pequeño sobre porciones de la curva donde se produce una variación funcional más grande.

Esta técnica se llama cuadratura adaptativa. El método se basa en la regla de Simpson.

La regla de Simpson utiliza dos subintervalos sobre  $[a_k, b_k]$ :

$$S(a_k, b_k) = \frac{h}{3} (f(a_k) + 4f(c_k) + f(b_k)) \quad (\text{E.1})$$

donde  $c_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$  es el centro de  $[a_k, b_k]$  y  $h = \frac{(b_k - a_k)}{2}$ . Además, si  $f \in C^4[a_k, b_k]$ , entonces existe un valor  $d_1 \in [a_k, b_k]$  tal que:

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = S(a_k, b_k) - h^5 \frac{f^{(4)}(d_1)}{90} \quad (\text{E.2})$$

### Refinamiento

Una regla de Simpson compuesta utilizando cuatro subintervalos de  $[a_k, b_k]$  puede ser realizada dividiendo cada uno de los intervalos anteriores en dos subintervalos iguales  $[a_{k1}, b_{k1}]$  y  $[a_{k2}, b_{k2}]$  y aplicando la fórmula (E.1) de forma recursiva sobre cada

subintervalo. Sólo son necesarias dos evaluaciones adicionales de  $f(x)$  y el resultado es:

$$S(a_{k1}, b_{k1}) + S(a_{k2}, b_{k2}) = \frac{h}{6} (f(a_{k1}) + 4f(c_{k1}) + f(b_{k1})) + \frac{h}{6} (f(a_{k2}) + 4f(c_{k2}) + f(b_{k2})) \quad (E.3)$$

donde  $a_{k1} = a_k$ ,  $b_{k1} = a_{k2} = c_k$ ,  $b_{k2} = b_k$ ,  $c_{k1}$  es el punto medio de  $[a_{k1}, b_{k1}]$  y  $c_{k2}$  es el punto medio de  $[a_{k2}, b_{k2}]$ . En la fórmula (E.3) el tamaño del paso es  $\frac{h}{2}$  de ahí el término  $\frac{h}{6}$  en el lado derecho de la ecuación. Además, si  $f \in C^4[a_{k2}, b_{k2}]$ , entonces existe un valor  $d_2 \in [a_k, b_k]$  tal que:

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x) dx = S(a_{k1}, b_{k1}) + S(a_{k2}, b_{k2}) - \frac{h^5 f^{(4)}(d_2)}{16 \cdot 90} \quad (E.4)$$

Se asume que  $f^{(4)}(d_1) \approx f^{(4)}(d_2)$ , luego los términos del lado derecho de las ecuaciones (E.2) y (E.4) se usan para obtener la relación

$$S(a_k, b_k) - h^5 \frac{f^{(4)}(d_2)}{90} \approx S(a_{k1}, b_{k1}) + S(a_{k2}, b_{k2}) - \frac{h^5 f^{(4)}(d_2)}{16 \cdot 90} \quad (E.5)$$

La cual puede ser escrita cómo

$$-h^5 \frac{f^{(4)}(d_2)}{90} \approx \frac{16}{15} [S(a_{k1}, b_{k1}) + S(a_{k2}, b_{k2}) - S(a_k, b_k)] \quad (E.6)$$

entonces (E.6) se sustituye en (E.4) para obtener la estimación del error.

$$\left| \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx - S(a_{k1}, b_{k1}) - S(a_{k2}, b_{k2}) \right| \approx \frac{1}{15} [S(a_{k1}, b_{k1}) + S(a_{k2}, b_{k2}) - S(a_k, b_k)] \quad (E.7)$$

Debido a la suposición  $f^{(4)}(d_1) \approx f^{(4)}(d_2)$ , la fracción  $\frac{1}{15}$  se reemplaza con  $\frac{1}{10}$  en el lado derecho de (E.7) en la aplicación del método.

### Precisión de prueba

Se asume que la tolerancia  $\epsilon_k > 0$  se especifica para el intervalo  $[a_k, b_k]$  si

$$\frac{1}{10} |S(a_{k1}, b_{k1}) + S(a_{k2}, b_{k2}) - S(a_k, b_k)| < \epsilon_k \quad (E.8)$$

de aquí se infiere que:

$$\left| \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx - S(a_{k1}, b_{k1}) - S(a_{k2}, b_{k2}) \right| < \epsilon_k \quad (\text{E.9})$$

Así la regla compuesta de Simpson dada por la fórmula (E.3) se usa para aproximar la integral

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx \approx S(a_{k1}, b_{k1}) + S(a_{k2}, b_{k2}) \quad (\text{E.10})$$

y el error de esta aproximación sobre  $[a_k, b_k]$  es  $\epsilon_k$ .

# Referencias

- [1] *Accelerated Life Testing Reference: ReliaSoft's ALTA Version 6*. ReliaSoft Publishing, 2001.
- [2] T. M. Bañegil Palacios and F. J. Miranda González. El tiempo de mercado como factor determinante del éxito de nuevos productos: mito o realidad. *Investigaciones Europeas de dirección y economía de la empresa*, 7:109–122, 2001.
- [3] Luis A. Escobar and William Q. Meeker. A review of accelerated test models, 2006.
- [4] Villa E. Escobar, L. Confiabilidad: historia, estado del arte y desafíos futuros. *DYNA*, 70(140),:5–21, 2003.
- [5] Kalkanis. G and Rosso. E. The inverse power law model for the lifetime of a mylar-polyurethane laminated dc hv insulating structure. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 281:489–496, 1989.
- [6] J. H. Hooper and S.J. Amster. *Analysis and presentation of reliability data*. in Handbook of Statistical Methods for Engineers and Scientists,, Harrison M. Wadsworth, Editor. New York: Mcgraw Hill, 1990.
- [7] Jesús Ramón Pérez López. Contribución a los métodos de optimización basados en procesos naturales y su aplicación a la medida de antenas en campo próximo, 10 2005.
- [8] William Q. Meeker and Luis A. Escobar. *Statistical methods for reliability data*. Wiley series in probability and statistics. J. Wiley & Sons, New York, Chichester, 1998.
- [9] W.Q. Meeker and G.J. Hahn. *How to Plan an Accelerated Life Test: Some Practical Guidelines*. ASQC basic references in quality control. American Society for Quality Control, Statistics Division, 1985.

- [10] John A. Nelder and Roger Mead. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7(4):308–313, 1965.
- [11] W. Nelson. Graphical analysis of accelerated life test data with the inverse power law model. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, R-21:2– 11, 1972.
- [12] W. Nelson and T. J. Kielspinski. Theory for optimum censored accelerated life tests for normal and lognormal life distributions. *Technometrics*, 18 (1):105–114, 1976.
- [13] W. Nelson and W. Q. Meeker. Theory for optimum accelerated life tests for weibull and extreme value distributions. *Technometrics*, 20 (2):171–177, 1978.
- [14] Wayne Nelson. *Accelerated testing : statistical models, test plans, and data analyses*. Wiley series in probability and mathematical statistics. Applied probability and statistics. J. Wiley, New York, Chichester, 1990. A Wiley-Interscience publication.
- [15] Eduardo Peña de la Mora. Desarrollo de un modelo predictivo de la degradación de lacas colaminadas sobre aceros inoxidables. Master thesis, Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (Guanajuato, Gto.), 2007.
- [16] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2013.
- [17] Guangbing Yang. Life cycle reliability engineering. <https://books.google.com.mx/books?id=EDUDeA2sV0wC>, 2007.