CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Generalizaciones sobre la noción de diversidades

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Especialidad en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Gerardo Mauricio Toledo Acosta

Comité de Evaluación:

Dr. Fausto Antonio Ongay Larios

(Presidente)

Dr. Francisco Javier Solís Lozano

(Secretario)

Dr. Lázaro Raúl Felipe Parada

(Director de Tesis)

GUANAJUATO, GTO. AGOSTO 2014

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, por su apoyo incondicional que me han brindado toda mi vida y sobre todo por la ayuda para concluir con esta étapa de mi vida. A mi esposa, por su apoyo y ayuda durante los últimos años, gracias por estar siempre a mi lado en los tiempos difíciles.

Quiero agradecer a mi asesor de tésis, Dr. Lázaro Raúl Felipe Parada por sus enseñanzas y dedicación durante todo el desarrollo de este trabajo. También quiero agradecer a los profesores que me ayudaron durante mi estancia en la maestría: Dra. Silvia Jerez Galiano, Dra. Mónica Moreno Rocha, Dr. Manuel Cruz López, Dr. Marcos Aurelio Capistrán Ocampo, Dr. Ricardo Vila, Dr. Arturo Hernández Aguirre, Dr. Xavier Gómez Mont Ávalos, Dr. Jimmy Petean Humen, Dr. Francisco Javier Solís Lozano, Dr. Fausto Antonio Ongay Larios.

Quiero agradecer al Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT) por el apoyo económico y administrativo. Finalmente, agradecezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo ecónomico brindado durante la maestría.

ÍNDICE

Introducción **7**

1. Retomando la noción clásica de diversidad **9**
1.1. Definiciones, propiedades y ejemplos . . . 9
1.2. Métricas y diversidades . . . 16
1.3. $\mathbb{R}$-árboles . . . 25
1.3.1. Definiciones y propiedades . . . 25
1.3.2. Ejemplos . . . 27
1.4. Diversidad filogenética . . . 29
1.4.1. Diversidad filogenética . . . 29
1.4.2. El problema filogenético . . . 31

2. Diversidades en semiretículas **35**
2.1. Definiciones y ejemplos de semiretículas . . . 35
2.1.1. Diagrama de Hasse de una semiretícula y más ejemplos . . . 39
2.2. Diversidades sobre semiretículas . . . 43
2.3. El tight-span de una diversidad en una semiretícula . . . 48
2.4. Hiperconvexidad . . . 62
2.5. Diversidades completas . . . 66

3. Diversidades infinitas **71**
3.1. La medida de Hausdorff . . . 73

Conclusiones **81**

INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta tesis es estudiar una clase de funciones de conjuntos finitos con valores positivos reales llamadas *diversidades*. Dichas funciones fueron introducidas formalmente por David Bryant y Paul Tupper en un artículo del 2012 para extender la noción de métrica y extender algunos resultados de métricas a estas funciones.

La generalización de métricas a más de dos argumentos tiene una larga historia. Ha habido un gran estudio sobre 2-métricas (métricas que toman 3 puntos como argumentos), un ejemplo es [7], donde se estudia un teorema de punto fijo usando 2-métricas. El estudio de n-métricas, es decir métricas que toman $n+1$ puntos como argumentos se remonta hasta un artículo de 1928 de Menger [25]. También ha habido muchos estudios sobre estas generalizaciones en varias direcciones, lo que ha dado lugar a varias definiciones diferentes sobre el concepto de n-métrica.

También hay una literatura extensa sobre métricas generalizadas, que son funciones que satisfacen condiciones más débiles que las condiciones de una métrica. Al debilitar diferentes axiomas se han definido diferentes tipos de métricas, como semi-métricas, quasi-métricas, métricas parciales, entre otras (ver por ejemplo [20], [19], [6]). Estas versiones debilitadas de métricas han sido motivadas por las aplicaciones, por ejemplo en estadística, computación, entre otras.

En esta tesis generalizaremos el concepto de diversidad en dos direcciones. Primero generalizaremos las diversidades ahora sobre semiretículos finitamente generados, esto ya que el caso clásico de diversidad está definido sobre la semiretícula $(P_{\text{fin}}(X), \cup)$, donde

$P_{\text{fin}}(X)$ es el conjunto de los subconjuntos finitos de X. Además de generalizar la definición y las propiedades básicas adaptamos uno de los resultados fundamentales de [1]: la construcción del Tight-Span de una diversidad. Esto lo haremos en el capítulo 2.

El Tight-Span de un espacio métrico es el "menor" espacio hiperconvexo en el cual se puede encajar dicho espacio. Es de mucha utilidad como herramienta para visualizar métricas finitas. En [1] se extiende la noción de Tight-Span para espacios con una diversidad satisfaciendo las mismas propiedades que en el caso métrico.

La segunda dirección en la cual generalizaremos el concepto de diversidad es lo que llamaremos *diversidades infinitas*. En el capítulo 3 quitaremos la restricción de que la diversidad esté definida sobre subconjuntos finitos, veremos que podemos definirla en una clase de conjuntos más grande, donde se incluyen subconjuntos infinitos de X. Usando este concepto de diversidad infinita generalizaremos la construcción de la medida de Hausdorff. La motivación para esto es que la construcción de la medida de Hausdorff se usa la noción de diámetro de conjuntos, la cual es un ejemplo particular de diversidad.

Además de lo anterior, en el capítulo 1, haremos una recapitulación de la noción y propiedades de diversidades dadas en [1], veremos la relación entre las diversidades y las métricas generalizadas. Además construiremos algunos ejemplos de diversidades diferentes a los dados en [1].

CAPÍTULO 1

RETOMANDO LA NOCIÓN CLÁSICA DE DIVERSIDAD

En este capítulo estudiaremos un tipo de funciones llamadas *diversidades* introducidas por David Bryant y Paul Tupper en [1] en el 2012. En este artículo, ellos introducen esta clase de funciones como generalizaciones de métricas, solo que en lugar de tomar dos argumentos, toman un conjunto finito de argumentos. En [18], un artículo del 2001 anterior a [1], también se habla de funciones de diversidad, pero como funciones que cuantifican que tan diferentes son entre sí los elementos de un conjunto.

1.1. Definiciones, propiedades y ejemplos

Por el resto del capítulo haremos una recapitulación de esta clase de funciones basándonos principalmente en [1] y [23]. También complementaremos con algunos resultados propios.

De ahora en adelante denotemos por $P_{\text{fin}}(X) \subset 2^X$ al conjunto de todos los subconjuntos finitos de X.

Definición 1.1.1. *Sea X un conjunto no vacío y sea $\delta : P_{fin}(X) \to \mathbb{R}^+$ una función tal que*

1. $\delta(A) \geq 0$ *y* $\delta(A) = 0$ *si y solo si* $|A| \leq 1$.
2. *Si* $B \neq \emptyset$ *entonces*
$$\delta(A \cup C) \leq \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)$$
para todo $A, B, C \subset X$ *finitos.*

Al par (X,δ) lo llamamos una diversidad.

En algunas ocasiones, por diversidad nos referiremos solamente a la función δ cuando no haya ambigüedad. A δ también la llamaremos una diversidad definida sobre $P_{\text{fin}}(X)$.

Al segundo axioma de la definición de diversidad lo llamaremos la *desigualdad del triángulo para diversidades*, o solamente *desigualdad del triángulo* cuando no haya ambigüedad.

El primer axioma de la definición de diversidad nos dice que la diversidad de un conjunto es 0 si el conjunto es vacío o tiene solamente un elemento. Esto es intuitivo ya que dicho conjunto no tiene diversidad en sus elementos, debido a que solamente tiene uno o es vacío. Esto concuerda con la idea en [18], donde una función de diversidad cuantifica que tan diverso es un conjunto de elementos.

Observación 1.1.2. *En [8] se debilita la definición de diversidad, cambiando el primer axioma por el siguiente:*

1. $\delta(A) = 0$ *para todo* $A \in P_{fin}(X)$ *tal que* $|A| \leq 1$.

En este caso decimos que δ *es una pseudo-diversidad. Sin embargo nos mantendremos con la definición (1.1.1).*

A continuación demostraremos dos propiedades elementales de las diversidades que usaremos posteriormente.

Proposición 1.1.3. *Si* (X,δ) *es una diversidad y* $A \subset B \in P_{fin}(X)$ *entonces* $\delta(A) \leq \delta(B)$.

Demostración. Primero veamos que si $A \in P_{\text{fin}}(X)$ y $b \in X$, entonces $\delta(A) \leq \delta(A \cup \{b\})$. Esto lo podemos verificar directamente usando la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} \delta(A) = \delta(A \cup \emptyset) &\leq \delta(A \cup \{b\}) + \delta(\{b\} \cup \emptyset) \\ &= \delta(A \cup \{b\}) + 0 \\ &= \delta(A \cup \{b\}) \end{aligned}$$

Ahora, como $B \in P_{\text{fin}}(X)$, podemos escribirlo como, $B = A \cup \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Por lo que acabamos de probar tenemos,

$$\begin{aligned}
\delta(A) &\leq \delta(A \cup \{a_1\}) \\
&\leq \delta((A \cup \{a_1\}) \cup \{a_2\}) \\
&\leq \ldots \\
&\leq \delta((A \cup \{a_1\} \cup \ldots \cup \{a_{n-1}\}) \cup \{a_n\}) \\
&= \delta(B)
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.1.4. *Si (X,δ) es una diversidad y $A, B \in P_{fin}(X)$ son tales que $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.*

Demostración. Como $A \cap B \neq \emptyset$ usamos la desigualdad del triángulo y tenemos,

$$\delta(A \cup B) \leq \delta\,(A \cup (A \cap B)) + (B \cup (A \cap B)) = \delta(A) + \delta(B).$$

□

Ejemplo 1.1.5. *Algunos ejemplos de diversidades que se mencionan en [1]:*

1. La diversidad de Diámetro. *Sea (X,d) un espacio métrico, para cualquier $A \in P_{fin}(X)$ sea*

   $$\delta(A) = \max_{a,b \in A} d(a,b).$$

   Entonces (X,δ) es una diversidad.

2. La longitud del árbol de Steiner. *Sea (X,d) un espacio métrico. Para cada $A \subset X$ finito, sea $\delta(A)$ la longitud mínima de un árbol de Steiner en X que conecta los elementos de A. (X,δ) es una diversidad.*

3. *Sea (X,δ) una diversidad. Para cualquier $A \in P_{fin}(X)$ definamos*

   $$\delta^{(k)}(A) = \max\{\delta(B) \mid |B| \leq k,\ B \subset A\}$$

   Para cualquier $k \geq 2$, $(X,\delta^{(k)})$ es una diversidad. A $\delta^{(k)}$ se le llama diversidad truncada.

Ahora daremos algunos ejemplos desarrollados en este trabajo de tesis.

Ejemplo 1.1.6. *Sea* $\delta_c : P_{fin}(X) \to \mathbb{R}^+$ *dada por*

$$\delta_c(A) := \begin{cases} 0, & |A| \leq 1 \\ |A|, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

La demostración de que es diversidad se hace de la misma manera que en el ejemplo (2.2.9).

Ejemplo 1.1.7. *En [21] se define el diámetro poligonal de un subconjunto* $D \subset \mathbb{R}^2$*, modificando un poco esta definición podemos dar otro ejemplo de diversidad que llamaremos* diversidad poligonal.

Decimos que $D \subset \mathbb{R}^2$ *es poligonalmente conexo si para cualesquiera* $x, y \in D$ *hay una trayectoria poligonal en* D *que los une. Sea* $A \subset D$ *finito y* D *poligonalmente conexo, denotemos por* $\varrho_D(a,b)$ *al mínimo número de aristas de una trayectoria poligonal en* D *que une* a *y* b*. Definamos* $\delta_\varrho : P_{fin}(D) \to \mathbb{R}^+$ *dada por*

$$\delta_\varrho(A) = \max_{a,b \in A} \varrho_D(a,b).$$

Ahora veremos que δ_ϱ *es una diversidad.*

Es claro que δ_ϱ *es no negativa y monótona. Si* $A = \{x\}$ *ó* $A = \emptyset$ *entonces* $\delta_\varrho(A) = 0$*, si* $|A| \geq 2$ *existen* $a, b \in A$ *diferentes, por lo tanto* $\varrho_D(a,b) \geq 1$ *y luego, al tomar el máximo sobre todos los elementos de* A *se tiene que* $\delta_\varrho(A) > 0$*. Sólo falta demostrar la desigualdad del triángulo.*

Sean $A, B, C \subset D$ *finitos, con* $B \neq \emptyset$*, como* A, C *son finitos entonces* $\exists\, x, y \in A \cup C$ *tales que*

$$\delta_\varrho(A \cup C) = \varrho_D(x,y).$$

Tenemos dos opciones: $x \in A$ *y* $y \in C$ *(o análogamente,* $x \in B$ *y* $y \in A$*) ó que* $x, y \in A$ *(o análogamente,* $x, y \in C$*). Veamos cada caso por separado:*

- *Supongamos, sin pérdida de generalidad que* $x \in A$ *y* $y \in C$*. Sea* $b \in B$*, como* ϱ_D *es métrica, aplicando la desigualdad del triángulo y la monotonía de* δ_ϱ*, tenemos,*

$$\begin{aligned} \delta_\varrho(A \cup C) &= \varrho_D(x,y) \\ &\leq \varrho_D(x,b) + \varrho_D(b,y) \\ &= \delta_\varrho(\{x,b\}) + \delta_\varrho(\{b,y\}) \\ &\leq \delta_\varrho(\{x\} \cup B) + \delta_\varrho(\{y\} \cup B) \\ &\leq \delta_\varrho(A \cup B) + \delta_\varrho(B \cup C). \end{aligned}$$

- *Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x, y \in A$. Entonces,*

$$\begin{aligned}\delta_\varrho(A \cup C) &= \varrho_D(x, y)\\ &= \delta_\varrho(\{x, y\})\\ &\leq \delta_\varrho(A)\\ &\leq \delta_\varrho(A \cup B) \leq \delta_\varrho(A \cup B) + \delta_\varrho(B \cup C).\end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que (D, δ_ϱ) es una diversidad.

Denotaremos, $P^{\circ}_{\text{fin}}(X) := P_{\text{fin}}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

Definición 1.1.8. *Decimos que la función $D : P^{\circ}_{fin}(X) \times P^{\circ}_{fin}(X) \to \mathbb{R}^+$ es una* función simétrica de conjuntos *si se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *$D(A, B) = D(B, A)$ para cualesquiera $A, B \in P^{\circ}_{fin}(X)$.*
2. *$D(A, C) \leq D(A, B) + D(B, C)$ para cualesquiera $A, B, C \in P^{\circ}_{fin}(X)$.*
3. *$D(A, A) = 0$ si y solo si $|A| \leq 1$, $A \in P_{fin}(X)$.*
4. *$D(A, B) = \frac{1}{2} D(A \cup B, A \cup B)$ para cualesquiera $A, B \in P^{\circ}_{fin}(X)$, $A \neq B$.*

Por ejemplo, la función $D : P^{\circ}_{\text{fin}}(X) \times P^{\circ}_{\text{fin}}(X) \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$D_\delta(A, B) = \begin{cases} 2\delta(A) & \text{, si } A = B \\ \delta(A \cup B) & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

donde δ es una diversidad definida en $P_{\text{fin}}(X)$, es una función simétrica de conjuntos.

Si tenemos una función simétrica de conjuntos D, podemos definir la función de conjuntos $\delta_D : P_{\text{fin}}(X) \to \mathbb{R}^+$,

$$\delta_D(A) = \begin{cases} \frac{1}{2} D(A, A) & \text{, si } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{, si } A = \emptyset \end{cases}$$

Proposición 1.1.9. *Si D es una función simétrica de conjuntos entonces δ_D es una diversidad.*

Demostración. Claramente δ_D es no negativa.

- $\delta_D(\emptyset) = 0$ por definición y $\delta_D(\{x\}) = \frac{1}{2} D(\{x\}, \{x\}) = 0$ por el tercer axioma de la definición (1.1.8). Si $A \in P_{\text{fin}}(X)$ es tal que $|A| \geq 2$ entonces, usando la contrapositiva del tercer axioma de la definición (1.1.8), $\delta_D(A) = \frac{1}{2} D(A, A) \neq 0$, por lo tanto $\delta_D(A) > 0$.

- Sean $A, B, C \in P^{\circ}_{\text{fin}}(X)$, supongamos que $A \neq C$,

$$\begin{aligned}\delta_D(A\cup B)+\delta_D(B\cup C) &= \frac{1}{2}D(A\cup B, A\cup B)+\frac{1}{2}D(B\cup C, B\cup C)\\ &= D(A,B)+D(B,C)\geq D(A,C)\\ &= \frac{1}{2}D(A\cup C, A\cup C)=\delta_D(A\cup C).\end{aligned}$$

  Si $A = C$ entonces,

$$\begin{aligned}\delta_D(A\cup B)+\delta_D(B\cup C) &= 2\delta_D(A\cup B)\\ &\geq 2\delta_D(A)=2\delta_D(A\cup C).\end{aligned}$$

Por lo tanto δ_D es una diversidad. □

Ahora obtendremos diversidades a partir de otras diversidades, de manera análoga a como se pueden obtener métricas a partir de otras métricas. El primer ejemplo lo dimos al definir la diversidad truncada.

Observación 1.1.10. *Si (X,δ_1) y (X,δ_2) son diversidades entonces si definimos $\delta(A)=\delta_1(A)+\delta_2(A)$ para cualquier $A\in P_{fin}(X)$ entonces claramente (X,δ) es una diversidad. De la misma manera, si $r\in(0,\infty)$ y definimos $\delta=r\delta_1$, entonces (X,δ) es una diversidad. También se puede ver que* $\max\{\delta_1,\delta_2\}$ *es una diversidad.*

Proposición 1.1.11. *Si (X,δ) es una diversidad y si definimos, para $A\in P_{fin}(X)$,*

$$\tilde{\delta}(A)=\frac{\delta(A)}{1+\delta(A)}$$

entonces $(X,\tilde{\delta})$ es una diversidad.

Demostración. Como (X,δ) es diversidad entonces $\delta(A)\geq 0$ para cualquier $A\in P_{\text{fin}}(X)$, luego

$$\tilde{\delta}(A)=\frac{\delta(A)}{1+\delta(A)}\geq 0,$$

entonces $\tilde{\delta}$ es no negativa. Ahora veamos que,

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(A)=0 &\Leftrightarrow \frac{\delta(A)}{1+\delta(A)}=0\\ &\Leftrightarrow \delta(A)=0\\ &\Leftrightarrow |A|\leq 1.\end{aligned}$$

Ahora demostraremos la desigualdad del triángulo. Para cualesquiera $A, B, C \in P_{\text{fin}}(X)$ con $B \neq \emptyset$ se tiene $\delta(A \cup C) \leq \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)$, hacemos $a = \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)$ y luego, como δ es no negativa, tenemos,

$$\begin{aligned}
\delta(A \cup C) + a\delta(A \cup C) &\leq a + a\delta(A \cup C) \\
\delta(A \cup C)(1 + a) &\leq a(1 + \delta(A \cup C)) \\
\frac{\delta(A \cup C)}{1 + \delta(A \cup C)} &\leq \frac{a}{1 + a} \\
\frac{\delta(A \cup C)}{1 + \delta(A \cup C)} &\leq \frac{\delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)}{1 + \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, y usando el resultado anterior, tenemos,

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}(A \cup C) &= \frac{\delta(A \cup C)}{1 + \delta(A \cup C)} \\
&\leq \frac{\delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)}{1 + \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)} \\
&= \frac{\delta(A \cup B)}{1 + \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)} + \frac{\delta(B \cup C)}{1 + \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)} \\
&\leq \frac{\delta(A \cup B)}{1 + \delta(A \cup B)} + \frac{\delta(B \cup C)}{1 + \delta(B \cup C)} \\
&= \tilde{\delta}(A \cup B) + \tilde{\delta}(B \cup C),
\end{aligned}$$

luego, $(X, \tilde{\delta})$ es una diversidad.

□

Proposición 1.1.12. *Si (X, δ_1), (X, δ_2) son dos diversidades y si definimos, para $A \in P_{fin}(X)$,*

$$\delta(A) = \left(\delta_1(A)^p + \delta_2(A)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

con $1 \leq p < \infty$, entonces (X, δ) es una diversidad.

Demostración. Claramente δ es una función no negativa.

(I)

$$\begin{aligned}
\delta(A) = 0 &\Leftrightarrow \delta_1(A)^p + \delta_2(A)^p = 0 \\
&\Leftrightarrow \delta_1(A), \delta_2(A) = 0 \\
&\Leftrightarrow |A| \leq 1.
\end{aligned}$$

(II) Sean A, B, $C \in P_{\text{fin}}(X)$, $C \neq \emptyset$, usando la desigualdad de Minkowski tenemos,

$$\begin{aligned}\delta(A\cup B) &= \left(\delta_1(A\cup B)^p + \delta_2(A\cup B)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left((\delta_1(A\cup C)+\delta_1(C\cup B))^p + (\delta_2(A\cup C)+\delta_2(C\cup B))^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\delta_1(A\cup C)^p + \delta_2(A\cup C)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\delta_1(C\cup B)^p + \delta_2(C\cup B)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \delta(A\cup C)+\delta(C\cup B).\end{aligned}$$

Entonces δ es una diversidad. □

Definición 1.1.13. *Sean (X_1,δ_1) y (X_2,δ_2) dos diversidades. Decimos que (X_1,δ_1) se encaja en (X_2,δ_2) si existe una función $\pi : X_1 \to X_2$, llamada* encaje*, inyectiva y tal que para todo $A \in P_{fin}(X_1)$ se tiene*

$$\delta_1(A) = \delta_2(\pi(A))$$

1.2. Métricas y diversidades

En esta sección estudiaremos la relación que hay entre las diversidades y funciones métricas. Por funciones métricas nos referimos a las métricas usuales, métricas generalizadas, n-métricas, etc. Es decir, veremos porque se considera que las diversidades generalizan el concepto de métricas.

Proposición 1.2.1. *Sea (X,δ) una diversidad, si $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ está definida como $d_\delta(x,y) = \delta(\{x,y\})$ entonces (X,d) es un espacio métrico. Llamamos a d_δ la métrica inducida por δ.*

Demostración. Es claro que si $x, y \in X$ entonces $d_\delta(x,y) \geq 0$ y además se tiene la simetria ya que, $d_\delta(x,y) = \delta(\{x,y\}) = \delta(\{y,x\}) = d_\delta(y,x)$.
Por otro lado tenemos que $d_\delta(x,x) = \delta(\{x\}) = 0$ ya que $|\{x\}| = 1$. Si se tiene $d_\delta(x,y) = 0$ entonces tenemos $\delta(\{x,y\}) = 0$ y por la definición de diversidad esto quiere decir que $|\{x,y\}| = 1$ lo cual implica que $x = y$.
Usando la segunda propiedad de la definición de diversidad obtenemos la desigualdad del triángulo:

$$d_\delta(x,y) = \delta(\{x,y\}) \leq \delta(\{x,z\}) + \delta(\{z,y\}) = d_\delta(x,z) + d_\delta(z,y)$$

Por lo tanto (X,d_δ) es un espacio métrico. □

Observación 1.2.2. *En la proposición anterior hemos visto como, a partir de una diversidad podemos definir una métrica. En el ejemplo (1.1.5) vimos como, a partir de una métrica, podemos definir una diversidad, la diversidad de diametro. Veamos la relación entre ambas construcciones:*

- *Si (X,d) es un espacio métrico, δ_d es la diversidad de diámetro que se obtiene usando d, y d_{δ_d} es la métrica inducida de la diversidad δ_d, entonces $d(x,y) = d_{\delta_d}(x,y)$ para cualesquiera $x,y \in X$. Esto debido a que,*

$$d_{\delta_d}(x,y) = \delta_d\left(\{x,y\}\right) = \sup_{a,b\in\{x,y\}} d(a,b) = d(x,y). \tag{1.2.1}$$

- *Si (X,δ) es una diversidad, d_δ es la métrica inducida y δ_{d_δ} la diversidad de diámetro que se obtiene de la métrica d_δ, entonces $\delta_{d_\delta}(A) \leq \delta(A)$ para cualquier $A \in P_{fin}(X)$.*

$$\begin{aligned}\delta_{d_\delta}(A) &= \sup_{x,y\in A} d_\delta(x,y)\\ &= \sup_{x,y\in A} \delta\left(\{x,y\}\right) \leq \sup_{x,y\in A} \delta(A) = \delta(A).\end{aligned}$$

Ahora definiremos el concepto de 2-métrica de acuerdo a como se hace en [7] y [9].

Definición 1.2.3. *Una 2-métrica sobre un espacio X es una función $d : X\times X\times X \to \mathbb{R}^+$ que satisface los siguiente axiomas*

1. *$d(x,y,z)$ es invariante bajo permutaciones en las variables x, y, z.*
2. *Para cualesquiera $a,b \in X$ se tiene $d(a,a,b) = 0$.*
3. *Se satisface la desigualdad del tetraedro, es decir, para cualesquiera $x,y,z,a \in X$ se satisface*
$$d(x,y,z) \leq d(x,y,a) + d(x,a,z) + d(a,y,z)$$
4. *Para todo $a,b \in X$ $\exists c \in X$ tal que $d(a,b,c) \neq 0$.*

Un ejemplo de 2-métrica en $\mathbb{R}^2$ es la función d tal que $d(p_1,p_2,p_3)$ es el area del triángulo determinado por los vértices p_1,p_2,p_3. Claramente podemos ver que esta función satisface los 4 axiomas de la definición. Menger en [25] definió por primera vez este concepto de 2-métrica y tomó como prototipo el volumen de un 2-simplex en un espacio Euclidiano.

Generalizando, podemos definir el concepto de n-métrica, como se hace en [20] y [16] (donde además se presentan varias formas de generalizar la desigualdad del triángulo al caso general de n argumentos).

Definición 1.2.4. *Sea $n > 0$, una función $d : X^{n+1} \to \mathbb{R}^+$ totalmente simétrica (es decir, es invariante bajo las permutaciones de las variables del argumento) es una n-métrica si satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para cualesquiera* $x_1, ..., x_n$ *se tiene* $d(x_1, x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.

2. *Dados* $x_1, ..., x_n \in X$ *distintos, existe un* $x_{n+1} \in X$ *tal que* $d(x1_, ..., x_{n+1}) > 0$.

3. d *satisface la desigualdad del simplex, es decir para cualesquiera* $x_1, ..., x_{n+2} \in X$ *se tiene,*

$$d(x_1, ...x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} d(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+2}).$$

Los axiomas de la definición de n-métrica tienen sentido geométricamente, ya que, como se mencionó anteriormente, el prototipo para definirlas fue el volumen de un n-simplex. Sin embargo, se han estudiado versiones más débiles de n-métricas motivadas por diversas aplicaciones en estadística, computación, entre otras. Una variante de esta definición, es el concepto de 2-semimétrica (o en general n-semimétrica), definido en [20]. En esta variante se desechan los axiomas 1 y 2 de la definición (1.2.4). Este concepto tiene como ejemplo prototipo el perímetro del polígono formado por los 3 puntos del argumento (en el caso de 2-semimétrica).

Definición 1.2.5. *Sea* $n > 0$*, una* n*-semimétrica es un par* (E, d) *donde* $d : E^{n+1} \to \mathbb{R}^+$ *es totalmente simétrica y satisface la desigualdad del simplex (ver definición (1.2.4).*

En la sección 3 de [20] se dan varios ejemplos de n-semimétricas útiles en ciertas aplicaciones. Para facilitar la lectura de las siguientes demostraciones usaremos la siguiente notación por el resto de la sección. Sean $x_1, x_2, ... \in X$ y sea $n \in \mathbb{N}$, para $i = 0, 1, ..., n$ denotemos,

$$A_i^n := \begin{cases} \{x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n\} & \text{, si } i \neq 0 \\ \{x_1, ..., x_n\} & \text{, si } i = 0 \end{cases}.$$

Por ejemplo $A_1^4 = \{x_2, x_3, x_4\}$ y $A_3^5 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$. Abusando de la notación escribiremos, por ejemplo si f es una función de n variables, $f(A_0^n) = f(x_1, ..., x_n)$.

Proposición 1.2.6. *Sea* (X, δ) *una diversidad, definimos* $d_{2,\delta} : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ *dada por*

$$d_{2,\delta}(x, y, z) = \delta(\{x, y, z\})$$

entonces $d_{2,\delta}$ *es una 2-semimétrica sobre* X.

Demostración. Claramente $d_{2,\delta}$ es simétrica bajo permutaciones, es decir,

$$d_{2,\delta}(x, y, z) = d_{2,\delta}(x, z, y) = d_{2,\delta}(z, x, y) = ...$$

Sólo falta verificar la desigualdad del tetraedro. Sean $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$, queremos verificar que se satisface,

$$d_{2,\delta}(x_1, x_2, x_3) \leq d_{2,\delta}(x_2, x_3, x_4) + d_{2,\delta}(x_1, x_3, x_4) + d_{2,\delta}(x_1, x_2, x_4).$$

Usando la desigualdad del triángulo para diversidades y la monotonía de δ tenemos,

$$\begin{aligned}
d_{2,\delta}(x_1, x_2, x_3) &= \delta(\{x_1, x_2, x_3\}) \\
&\leq \delta(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) \\
&\leq \delta(\{x_2, x_3\} \cup \{x_4\}) + \delta(\{x_4\} \cup \{x_1, x_4\}) \\
&= d_{2,\delta}(A_1^4) + \delta(\{x_1, x_4\}) \\
&\leq d_{2,\delta}(A_1^4) + \delta(A_0^4) \\
&\leq d_{2,\delta}(A_1^4) + \delta(\{x_1, x_3\} \cup \{x_4\}) + \delta(\{x_4\} \cup \{x_2, x_4\}) \\
&\leq d_{2,\delta}(A_1^4) + d_{2,\delta}(A_2^4) + \delta(\{x_2, x_4\}) \\
&\leq d_{2,\delta}(A_1^4) + d_{2,\delta}(A_2^4) + \delta(\{x_1, x_2, x_4\}) \\
&\leq d_{2,\delta}(A_1^4) + d_{2,\delta}(A_2^4) + \delta(A_3^4).
\end{aligned}$$

Esto verifica la desigualdad del tetraedro y por lo tanto $d_{2,\delta}$ es una 2-semimétrica sobre X. □

Proposición 1.2.7. *Si (X, δ) es una diversidad entonces $(X, d_{n,\delta})$ es una n-semimétrica, donde*

$$d_{n,\delta}(x_1, ..., x_{n+1}) = \delta(\{x_1, ..., x_{n+1}\})$$

Demostración. Claramente $d_{n,\delta}$ es una función totalmente simétrica en sus argumentos. Sólo falta demostrar la desigualdad del simplex. Sean $x_1, ..., x_{n+2} \in X$, usando la monotonía y la desigualdad del triángulo para diversidades tenemos,

$$\begin{aligned}
d_{n,\delta}(x_1,\dots,x_{n+1}) &= \delta\left(\{x_1,\dots,x_{n+1}\}\right)\\
&\le \delta\left(\{x_1,\dots,x_{n+1},x_{n+2}\}\right)\\
&\le \delta(A_1^{n+1}\cup\{x_{n+2}\})+\delta(\{x_{n+2}\}\cup\{x_1,x_{n+2}\})\\
&= d_{n,\delta}(A_1^{n+2})+\delta(\{x_1,x_{n+2}\})\\
&\le d_{n,\delta}(A_1^{n+2})+\delta(A_0^{n+2})\\
&\le d_{n,\delta}(A_1^{n+2})+\delta(A_2^{n+1}\cup\{x_{n+2}\})+\delta(\{x_{n+2}\}\cup\{x_2,x_{n+2}\})\\
&= d_{n,\delta}(A_1^{n+2})+d_{n,\delta}(A_2^{n+2})+\delta(\{x_2,x_{n+2}\})\\
&\le d_{n,\delta}(A_1^{n+2})+d_{n,\delta}(A_2^{n+2})+\delta(A_0^{n+2})\\
&\le d_{n,\delta}(A_1^{n+2})+d_{n,\delta}(A_2^{n+2})+\delta(A_3^{n+1}\cup\{x_{n+2}\})+\delta(\{x_{n+2}\}\cup\{x_3,x_{n+2}\})\\
&= d_{n,\delta}(A_1^{n+2})+d_{n,\delta}(A_2^{n+2})+d_{n,\delta}(A_3^{n+2})+\delta(\{x_3,x_{n+2}\})\\
&\le d_{n,\delta}(A_1^{n+2})+d_{n,\delta}(A_2^{n+2})+d_{n,\delta}(A_3^{n+2})+\delta(A_0^{n+2})\\
&\le \cdots\\
&\le \sum_{k=1}^{n} d_{n,\delta}(A_k^{n+2})+\delta(\{x_n,x_{n+2}\})\\
&\le \sum_{k=1}^{n} d_{n,\delta}(A_k^{n+2})+\delta(\{x_1,\dots,x_n,x_{n+2}\})\\
&= \sum_{k=1}^{n} d_{n,\delta}(A_k^{n+2})+d_{n,\delta}(A_{n+1}^{n+2})\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} d_{n,\delta}(A_k^{n+2}).
\end{aligned}$$

Esto demuestra la desigualdad del simplex y, por lo tanto, $d_{n,\delta}$ es una n-semimétrica en X.

□

Observación 1.2.8. *Ya vimos que $d_{2,\delta}$ es una 2-semimétrica en X, sin embargo, $d_{2,\delta}$ no es una 2-métrica ya que $d_{2,\delta}(x,x,y)=\delta(\{x,y\})$ y esto no necesariamente es 0. De la misma manera, $d_{n,\delta}$ no es n-métrica para ningún $n\in\mathbb{N}$.*

En [19] se define el concepto de 3-distancia[1]. La idea detrás de estas funciones es asignar a cada triada de elementos un valor positivo que represente que tan "diferentes"son los tres elementos entre sí.

Definición 1.2.9. *Sea X un conjunto no vacío y $T: X^3\to\mathbb{R}^+$ una función. Decimos que T es una 3-distancia si se satisface para cualesquiera $x,y,z,w\in X$,*

[1] En inglés, *3-way distance.*

1. *T es totalmente simétrica.*

2. *$T(x,x,x)=0$.*

3. *$T(x,x,y)=T(x,y,y)$.*

4. *$T(x,x,y)\leq T(x,y,z)$.*

5. *$T(x,y,z)+T(x,y,w)\geq \text{máx}\left\{T(x,z,w),T(y,z,w)\right\}$.*

Proposición 1.2.10. *La función $d_{2,\delta}$ definida en (1.2.6) es una 3-distancia.*

Demostración. Claramente $d_{2,\delta}$ es totalmente simétrica. Además, si $x,y,z,w\in X$ tenemos,

1. $d_{2,\delta}(x,x,x)=\delta(\{x\})=0$.

2. $d_{2,\delta}(x,x,y)=d_{2,\delta}(x,y,y)=\delta(\{x,y\})$.

3. $d_{2,\delta}(x,x,y)=\delta(\{x,y\})\leq\delta(\{x,y,z\})=d_{2,\delta}(x,y,z)$.

4.

$$\begin{aligned}
d_{2,\delta}(x,y,z)+d_{2,\delta}(x,y,w) &= \delta(\{x,y,z\})+\delta(\{x,y,w\})\\
&= \delta(\{x,z\}\cup\{y\})+\delta(\{x,w\}\cup\{y\})\\
&\geq \delta(\{x,z,w\}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{2,\delta}(x,y,z)+d_{2,\delta}(x,y,w) &= \delta(\{x,y,z\})+\delta(\{x,y,w\})\\
&= \delta(\{y,z\}\cup\{x\})+\delta(\{y,w\}\cup\{x\})\\
&\geq \delta(\{y,z,w\}).
\end{aligned}$$

Y por lo tanto, $d_{2,\delta}(x,y,z)+d_{2,\delta}(x,y,w)\geq \text{máx}\left\{\delta(\{x,z,w\}),\delta(\{y,z,w\})\right\}$.

Esto demuestra que $d_{2,\delta}$ es una 3-distancia. □

Al igual que con las n-métricas, ha habido generalizaciónes de las distancias para n argumentos. La siguiente es una de estas generalizaciones presentada en [20].

Definición 1.2.11. *Sea $n>0$. Una función totalmente simétrica $d: X^n\to\mathbb{R}^+$ se dice que es una n-distancia débil si para cualesquiera $x_1,\ldots,x_{n+1}\in X$ se tiene,*

1. *$d(x_1,\ldots,x_1)=0$.*

2.

$$d(x_1,...,x_n) \leq \sum_{i=2}^{n} d(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_{n+1}).$$

Si además

3. $d(x_1,x_1,x_3,...,x_n) = d(x_1,x_3,x_3,...,x_n) \leq d(x_1,...,x_n)$,

decimos que d es una n-distancia.

Proposición 1.2.12. *La función $d_{n,\delta}$ de la definición (1.2.7) es una n-distancia.*

Demostración. Ya sabíamos que $d_{n,\delta}$ es totalmente simétrica. Verificaremos el resto de los axiomas, sean $x_1,...,x_{n+1} \in X$,

1. $d_{n,\delta}(x_1,...,x_1) = \delta(\{x_1\}) = 0$.

2.

$$\begin{aligned}
d_{n,\delta}(x_1,...,x_n) &= \delta(A_0^n) \leq \delta(A_0^{n+1}) \\
&\leq \delta(A_2^n \cup \{x_{n+1}\}) + \delta(\{x_{n+1} \cup \{x_2,x_{n+1}\}\}) \\
&= d_{n,\delta}(A_2^{n+1}) + \delta(\{x_2,x_{n+1}\}) \\
&\leq d_{n,\delta}(A_2^{n+1}) + \delta(A_0^{n+1}) \\
&\leq d_{n,\delta}(A_2^{n+1}) + \delta(A_3^n \cup \{x_{n+1}\}) + \delta(\{x_{n+1} \cup \{x_3,x_{n+1}\}\}) \\
&= d_{n,\delta}(A_2^{n+1}) + d_{n,\delta}(A_3^{n+1}) + \delta(\{x_3,x_{n+1}\}) \\
&\leq d_{n,\delta}(A_2^{n+1}) + d_{n,\delta}(A_3^{n+1}) + \delta(A_0^{n+1}) \\
&\leq d_{n,\delta}(A_2^{n+1}) + d_{n,\delta}(A_3^{n+1}) + \delta(A_4^n \cup \{x_{n+1}\}) + \delta(\{x_{n+1} \cup \{x_4,x_{n+1}\}\}) \\
&= d_{n,\delta}(A_2^{n+1}) + d_{n,\delta}(A_3^{n+1}) + d_{n,\delta}(A_4^{n+1}) + \delta(\{x_4,x_{n+1}\}) \\
&\leq \sum_{k=2}^{4} d_{n,\delta}(A_k^{n+1}) + \delta(A_0^{n+1}) \\
&\leq \cdots \\
&\leq \sum_{k=2}^{n-1} d_{n,\delta}(A_k^{n+1}) + \delta(\{x_{n-1},x_{n+1}\}) \\
&\leq \sum_{k=2}^{n-1} d_{n,\delta}(A_k^{n+1}) + \delta(\{x_1,...,x_{n-1},x_{n+1}\}) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} d_{n,\delta}(A_k^{n+1}) + d_{n,\delta}(A_n^{n+1}) \\
&= \sum_{k=2}^{n} d_{n,\delta}(A_k^{n+1}).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} d_{n,\delta}(x_1, x_1, x_3, ..., x_n) &= d_{n,\delta}(x_1, x_3, x_3, ..., x_n) \\ &= \delta(\{x_1, x_3, x_4, ..., x_n\}) \\ &\leq \delta(\{x_1, ..., x_n\}) = d_{n,\delta}(x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que $d_{n,\delta}$ es una n-distancia. □

Intuitivamente parece natural que una diversidad determine una colección de n-distancias, con $n > 0$, ya que para n fijo, éstas miden diferencias entre conjuntos con n-elementos, en tanto que las diversidades lo hacen para conjuntos finitos arbitrarios. Ambos conceptos parecen cuantificar información del mismo tipo, pero las diversidades imponen menos restricciones.

Todas estas funciones métricas que hemos definido han sido sobre X. Ahora surge la pregunta si podremos definir, usando la diversidad, alguna función métrica en $P_{\text{fin}}(X)$.

Definición 1.2.13. *Una pseudo-métrica en X es una función $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ que satisface:*

1. $p(x,x) = 0$ *para todo* $x \in X$.
2. $p(x,y) = p(y,x)$ *para cualesquiera* $x, y \in X$.
3. $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$ *para cualesquiera* $x, y, z \in X$.

Proposición 1.2.14. *Sea (X,δ) una diversidad. Entonces la función $H_1 : P_{fin}(X) \times P_{fin}(X) \to \mathbb{R}^+$ dada por*

$$H_1(A,B) = |\delta(A) - \delta(B)|,$$

es una pseudo-métrica en $P_{fin}(X)$.

Demostración. Claramente H_1 es no negativa y simétrica. Además, si $A, B, C \in P_{\text{fin}}(X)$ tenemos,

1. $H_1(A,A) = |\delta(A) - \delta(A)| = 0$.
2. $H_1(A,B) = |\delta(A) - \delta(B)| \leq |\delta(A) - \delta(C)| + |\delta(C) - \delta(B)| = H_1(A,C) + H_1(C,B)$.

Por lo tanto, H_1 es una pseudo-métrica en $P_{\text{fin}}(X)$. □

Otro tipo de métrica generalizada son las métricas parciales, este tipo de funciones métricas se estudian en [26]. Estas funciones métricas se estudian ya que los espacios métricos son inevitablemente Hausdorff y no pueden ser usados para estudiar topologías no Hausdorff, las cuales surgen por ejemplo en el estudio de la semántica de lenguajes de programación. Las métricas parciales suelen ser útiles en este tipo de contextos. La idea detrás de una métrica parcial es medir que tanta información hay en un objeto, por lo cual la "distancia"de un objeto a si mismo no tiene que ser forzosamente cero.

Definición 1.2.15. *Sea X un conjunto no vacío. Una métrica parcial es una función $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ tal que, para cualesquiera $x, y, z \in X$,*

1. $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$.
2. $p(x,x) \leq p(x,y)$.
3. $p(x,y) = p(y,x)$.
4. $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$

De la definición anterior es claro que si $p(x,y) = 0$ entonces $x = y$, pero si $x = y$ entonces $p(x,y)$ no tiene que ser 0 forzosamente. Un ejemplo de métrica parcial es $(\mathbb{R}^+, p)$ donde $p(x,y) = \text{máx}\{x,y\}$.

Proposición 1.2.16. *Si p es una métrica parcial en X entonces la función $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dada por*

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

es una métrica en X.

Demostración. Claramente d_p es simétrica,

1. Supongamos que para algunos $x, y \in X$ se tiene que $d_p(x,y) < 0$ entonces, de la definición de d_p tenemos, $2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) < 0$, es decir, $2p(x,y) < p(x,x) + p(y,y)$, pero del segundo axioma de la definición (1.2.15) se tiene la siguiente contradicción,

$$2p(x,y) < p(x,x) + p(y,y) \leq p(x,y) + p(x,y) = 2p(x,y)$$

lo cual quiere decir que d_p es no negativa.

2. $d_p(x,x) = 2p(x,x) - p(x,x) - p(x,x) = 0$.

3. Si $d_p(x,y)=0$ entonces $2p(x,y)=p(x,x)+p(y,y)$ y luego,

$$\begin{aligned}
&2p(x,x)\le 2p(x,y)=p(x,x)+p(y,y) \;\Rightarrow\\
&2p(x,x)\le p(x,x)+p(y,y) \;\Rightarrow\\
&\;p(x,x)\le p(y,y).
\end{aligned}$$

   Análogamente, $p(y,y)\le p(x,x)$ y entonces $p(x,x)=p(y,y)$. Usando esta igualdad en la definición de d_p tenemos que $p(x,y)=p(x,x)$, entonces $p(x,x)=p(x,y)=p(y,y)$, como p es métrica parcial se tiene $x=y$.

4. Sean $x,y,z\in X$, como p es métrica parcial se tiene $2p(x,y)\le 2p(x,z)+2p(z,y)-2p(z,z)$, y entonces,

$$\begin{aligned}
2p(x,y)&\le 2p(x,z)+2p(z,y)-2p(z,z) \;\Rightarrow\\
2p(x,y)-p(x,x)-p(y,y)&\le 2p(x,z)-p(x,x)-p(z,z)+2p(z,y)\\
&\quad -p(z,z)-p(y,y)\\
&\Rightarrow\\
d_p(x,y)&\le d_p(x,z)+d_p(z,y).
\end{aligned}$$

Entonces (X,d_p) es un espacio métrico. □

1.3. $\mathbb{R}$-árboles

En esta sección definiremos una clase de espacios métricos que necesitamos para definir uno de los ejemplos más importantes de diversidades.

1.3.1. Definiciones y propiedades

Definición 1.3.1. *Sea (X,d) un espacio métrico, decimos que (X,d) es* aditivo *si hay un árbol con vértices parcialmente etiquetados por X tal que para cualesquiera $x,y\in X$ la longitud del camino que conecta a x y y (incluyendo las longitudes de las aristas) es igual a $d(x,y)$.*

Definición 1.3.2. *Sea (X,d) un espacio métrico y $x,y\in X$ la distancia $r=d(x,y)$. Una* geodésica *uniendo x y y es una función $c:[0,r]\to X$ tal que $c(0)=x$, $c(r)=y$ y $d(c(s),c(t))=|t-s|$ para cualesquiera $s,t\in[0,r]$. La imagen de c se llama* segmento geodésico *y lo denotamos por $[x,y]$.*

Definición 1.3.3. *Un espacio métrico (X,d) es un $\mathbb{R}$-árbol o árbol métrico si*

1. *Hay una única geodésica uniendo cada par de puntos* $x, y \in X$.

2. *Si* $[y, x] \cap [x, z] = \{x\}$ *entonces,*

$$[y, x] \cup [x, z] = [y, z] \tag{1.3.1}$$

Antes de continuar, daremos algunas propiedades de $\mathbb{R}$-árboles y geodésicas.

Proposición 1.3.4. *Sea* (X, d) *un* $\mathbb{R}$*-árbol, sean* $a, b \in X$ *y* $r = d(a, b)$. *Sea* $c : [0, r] \to X$ *la geodésica entre* a *y* b. *Sean* $s_0, t_0 \in [0, r]$ *y sea* $\hat{r} = d(c(s_0), c(t_0))$. *Entonces la geodésica uniendo* $c(s_0)$ *y* $c(t_0)$ *es la función* $\hat{c} : [0, \hat{r}] \to X$ *dada por*

$$\hat{c}(t) = c(s_0 + t)$$

Demostración. Tenemos que $\hat{c}(0) = c(s_0)$ y $\hat{c}(r) = c(s_0 + \hat{r}) = c(s_0 + d(c(s_0), c(t_0))) = c(t_0)$. Por otro lado, si $s_1, s_2 \in [s_0, t_0]$,

$$d(\hat{c}(s_1), \hat{c}(s_2)) = d(c(s_0 + s_1), c(s_0 + s_2)) = |s_0 + s_1 - s_0 - s_2| = |s_1 - s_2|$$

luego, $\hat{c}$ es la geodésica que une $c(s_0)$ y $c(t_0)$.

$\square$

Este resultado anterior nos dice que la geodésica que une puntos interiores de una geodésica es el segmento sobre la misma geodésica que los une.

Proposición 1.3.5. *Sea* (X, d) *un* $\mathbb{R}$*-árbol y sean* $x, y, z \in X$, *entonces,*

$$[x, y] \subset [x, z] \cup [y, z] \tag{1.3.2}$$

Demostración. Tenemos dos casos: $z \in [x, y]$ ó $z \notin [x, y]$.

(I) Supongamos que $z \in [x, y]$, entonces por la proposición (1.3.4) sabemos que el segmento geodésico $[x, z]$ corresponde al subsegmento de $[x, y]$ que pasa por x y z y $[z, y]$ al subsegmento de $[z, y]$ que pasa por z y y. Entonces tenemos que $[x, z] \cap [y, z] = \{z\}$ y luego, por la definición de $\mathbb{R}$-árbol tenemos que $[x, y] = [x, z] \cup [z, y]$ y en particular se tiene la contención

$$[x, y] \subset [x, z] \cup [y, z]$$

(II) Supongamos que $z \notin [x, y]$, entonces tenemos dos casos: $y \in [x, z]$ ó $x \in [y, z]$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $y \in [x, z]$, entonces por la proposición (1.3.4) el segmento geodésico $[x, y]$ es el subsegmento de $[x, z]$ que pasa por x y z y luego $[x, z] \subset [x, z] \cup [z, y]$.

$\square$

Proposición 1.3.6. *Si (X,d) es un $\mathbb{R}-$árbol entonces X tiene, al menos, la cardinalidad de los números reales.*

Demostración. Sean $a,b \in X$, $r = d(a,b)$ y $c : [0,r] \to X$ la geodésica que une a y b. Demostraremos que c es una biyección entre $[0,r]$ y $[a,b] \subset X$ y por lo tanto X tiene al menos la cardinalidad de $[0,r]$. Como $[a,b]$ es la imagen, bajo c, de $[0,r]$, c es suprayectiva. Supongamos que $\exists t_0, t_1 \in [0,r]$ diferentes tales que $c(t_0) = c(t_1)$, entonces $d\left(c(t_0), c(t_1)\right) = 0$, pero por otro lado $d\left(c(t_0), c(t_1)\right) = |t_0 - t_1|$, por lo tanto $|t_0 - t_1| = 0$ contradiciendo que t_1 y t_0 sean diferentes, por lo tanto c es una biyección entre $[0,r]$ y $[a,b]$. $\square$

1.3.2. Ejemplos

Sea $T = (V,E)$ un árbol con aristas con peso. Tomemos X como el conjunto de todos los vértices en T y todos los puntos sobre las aristas. Es decir no pensamos al árbol solamente como un conjunto finito de vértices con una colección de distancias entre ellos (los pesos de las aristas), sino también consideramos las aristas como parte del espacio X. La distancia entre elementos en las aristas la consideramos como la distancia sobre las aristas. Entonces (X,d) es un $\mathbb{R}$-árbol.

Esta es la manera intuitiva como pensamos los $\mathbb{R}$-árboles: son varios segmentos de recta unidos entre ellos de manera que no se forme ningun ciclo. Pueden ser una cantidad finita o infinita de dichos segmentos. La distancia entre los puntos se mide sobre los mismos segmentos.

Ejemplo 1.3.7. *Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la métrica dada por*

$$d_e\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & x_1 = x_2 \\ |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2| & x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

entonces $(\mathbb{R}^2, d_e)$ es un $\mathbb{R}$-árbol, esta métrica se llama la métrica de esqueleto *y se ilustra en la figura (1.3.1).*

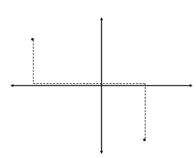


Figura 1.3.1: La métrica de esqueleto en $\mathbb{R}^2$.

Proposición 1.3.8. *$(\mathbb{R}^2, d_e)$ es un espacio métrico.*

Demostración. Es claro de la definición que d_e es no negativa, simétrica y además $d_e\big((x,y),(x,y)\big) = 0$. Ahora probaremos los dos axiomas que faltan de la definición de métrica:

- Si $d_e\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = 0$ entonces necesariamente $x_1 = x_2$, pues si $x_1 \neq x_2$ entonces $d_e\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) > 0$, entonces $|y_1 - y_2| = 0$ y luego $y_1 = y_2$.

- Sean $p_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ con $i = 1,2,3$.

  - Supongamos que $x_1 = x_2$, Si $x_3 = x_1$ entonces $x_2 = x_3$ y luego,

$$\begin{aligned} d_e\left(p_1,p_2\right) &= |y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &= d_e\left(p_1,p_3\right) + d_e\left(p_2,p_3\right). \end{aligned}$$

    Si $x_3 \neq x_1$ entonces $x_3 \neq x_2$ y luego,

$$\begin{aligned} d_e\left(p_1,p_2\right) &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &\leq |y_1| + |y_3| + |y_3| + |y_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |y_1| + |y_3| + |x_3 - x_2| + |y_3| + |y_2| \\ &= d_e\left(p_1,p_3\right) + d_e\left(p_2,p_3\right). \end{aligned}$$

  - Supongamos que $x_1 \neq x_2$, Si $x_1 = x_3$ entonces $x_2 \neq x_3$ y tenemos,

$$\begin{aligned} d_e\left(p_1,p_3\right) + d_e\left(p_2,p_3\right) &= |y_1 - y_3| + |x_2 - x_3| + |y_2| + |y_3| \\ &= |y_1 - y_3| + |x_2 - x_1| + |y_2| + |y_3| \\ &\geq |y_1 - y_3 + y_3| + |x_2 - x_1| + |y_2| \\ &= |x_2 - x_1| + |y_1| + |y_2| = d_e\left(p_1,p_2\right). \end{aligned}$$

    Si $x_2 = x_3$ entonces $x_1 \neq x_3$ y tenemos el mismo caso anterior. Si $x_1 \neq x_3$ y $x_2 \neq x_3$,

$$\begin{aligned} d_e\left(p_1,p_3\right) + d_e\left(p_2,p_3\right) &= |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3| + |y_1| + |y_3| + |y_2| + |y_3| \\ &\geq |x_1 - x_2| + |y_1| + 2|y_3| + |y_2| \\ &\geq |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2| = d_e\left(p_1,p_2\right). \end{aligned}$$

  Lo anterior nos dice que d_e es una métrica en $\mathbb{R}^2$.

$\square$

En [3] se demuetra que (R^2, d_e) es un $\mathbb{R}$-árbol. A continuación se presenta un ejemplo más abstracto, a diferencia de los anteriores ejemplos, que eran más intuitivos.

Ejemplo 1.3.9. *Sea T el conjunto de todos los suconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ los cuales contienen a su ínfimo y sea $D : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por*

$$D(A, B) = 2\,\text{máx}\left\{\text{ínf}\, A, \text{ínf}\, B, \sup A \triangle B\right\} - (\text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B),$$

donde $A \triangle B$ es la diferencia simétrica de A y B. En [27] se estudia a profundidad este ejemplo y se demuestra que (T, D) es un $\mathbb{R}$-árbol.

1.4. Diversidad filogenética

A continuación estudiaremos un ejemplo de diversidad que tiene un papel muy importante en las aplicaciones de las diversidades, la diversidad filogenética.

1.4.1. Diversidad filogenética

La diversidad filogenética mide que tan diversos son entre sí un conjunto de taxones[2] en un árbol filogenético. De acuerdo a [24] y [1], la diversidad filogenética de un conjunto de vértices en un árbol es la longitud del subárbol más pequeño que los conecta.

Ya vimos que un $\mathbb{R}$-árbol lo podemos ver como un árbol en el cual consideramos no sólo los vértices sino todos los puntos sobre las aristas. Ahora estudiaremos como definir el mismo concepto de diversidad filogenética sobre $\mathbb{R}$-árboles, tratando de extender la definición que ya tenemos sobre árboles. Este estudio se hace sin tantos detalles en [1].

Para un $\mathbb{R}$-árbol (X, d) sea μ la medida unidimensional de Hausdorff en X (se puede ver la construcción detallada en [14] ó [22]). Las propiedades que necesitamos de μ son:

1. μ está definida en los conjuntos de Borel de X.

2. μ es monótona, es decir, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

3. μ es aditiva en conjuntos disjuntos, es decir, si $A, B \subset X$ tales que $A \cap B = \emptyset$ entonces,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

[2] Ver la definición **??** en el apéndice.

4. Si $a, b \in X$ entonces $\mu([a,b]) = d(a,b)$.

5. Si $a \in X$ entonces $\mu(\{a\}) = 0$.

Definición 1.4.1. *Sea* (X,d) *un* $\mathbb{R}$*-árbol. La* envolvente convexa *de* $A \subset X$ *es*

$$conv(A) = \bigcup_{a,b \in A} [a,b]$$

decimos que A *es* convexo *si* $A = conv(A)$.

Definición 1.4.2. *Sea* (X,d) *un* $\mathbb{R}$*-árbol. La diversidad de árbol real* (X,δ_t) *para* (X,d) *está dada, para* $A \in P_{fin}(X)$*, por*

$$\delta_t(A) = \mu(conv(A))$$

Observemos que δ_t está bien definida ya que, como A es finito entonces $conv(A)$ es cerrado por ser una unión finita de cerrados y luego $\mu(conv(A))$ está bien definida.

Proposición 1.4.3. *Sea* (X,d) *un* $\mathbb{R}$*-árbol, entonces* (X,δ_t) *es una diversidad.*

Demostración.

1. Como μ es una medida entonces $\mu(A) \geq 0$ $\forall A \subset X$ y luego $\delta_t(A) \geq 0$ $\forall A \in P_{\text{fin}}(X)$.

2. Si $|A| \leq 1$ entonces $A = \emptyset$ o $A = \{a\}$ para algún $a \in A$. En ambos casos es claro que $\text{conv}(A) = A$ y que $\mu(A) = 0$, luego

$$\delta_t(A) = \mu(A) = 0$$

Para demostrar que si $\delta_t(A) = 0$ entonces $|A| \leq 1$ probaremos la contrapositiva. Supongamos que $A \in P_{\text{fin}}(X)$ es tal que $|A| > 1$, entonces hay dos elementos distintos $a, b \in A$; es claro que $\text{conv}([a,b]) = [a,b]$ y además, como ya sabíamos, $\mu([a,b]) = d(a,b)$. Por la monotonía de la medida tenemos que como $\{a,b\} \subset A$ entonces $\mu(\{a,b\}) \leq \mu(A)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\delta_t(A) &= \mu(\text{conv}(A)) \geq \mu(A) \geq \mu(\{a,b\}) \\ &= \mu(\text{conv}(\{a,b\}) = \mu([a,b]) = d(a,b) > 0\end{aligned}$$

Entonces $\delta_t(A) = 0 \Leftrightarrow |A| \leq 1$.

3. Sean $A, B, C \in P_{\text{fin}}(X)$ y supongamos que $B \neq \emptyset$. De la proposición 1.3.5 tenemos,

$$[a,c] \subset [a,b] \cup [b,c] \quad \forall \; a \in A, b \in B, c \in C$$

y luego,

$$\text{conv}(A \cup C) \subset \text{conv}(A \cup B) \cup \text{conv}(B \cup C) \tag{1.4.1}$$

luego,

$$\begin{aligned}\delta_t(A \cup C) &= \mu(\text{conv}(A \cup C) \\ &\leq \mu(\text{conv}(A \cup B) + \mu(\text{conv}(B \cup C)) \\ &= \delta_t(A \cup B) + \delta_t(B \cup C)\end{aligned}$$

Por lo tanto (X, δ_t) es una diversidad. □

Definición 1.4.4. *Una diversidad (X, δ) es filogenética si puede ser encajada en una diversidad de árbol real (X, δ_t) para algún $\mathbb{R}$-árbol (T, d).*

1.4.2. El problema filogenético

El concepto de diversidad fue introducido por David Bryant y Paul Tupper como una herramienta alternativa para estudiar un problema filogenético. La filogenética es la parte de la biología que estudia la historia evolutiva de especies usando la información genética de ellas. Un problema filogenético importante es entonces construir un *árbol filogenético* que describa esta relación evolutiva de un conjunto de especies a partir de los códigos genéticos del conjunto de especies.

Estamos suponiendo que la historia evolutiva de las especies se puede representar usando un árbol filogenético, es decir, que cada grupo de especies siempre tiene un antepasado común. Con esto descartamos los fenómenos de Transferencia de genes horizontal (HGT).

Los fenómenos de Transferencia de genes horizontal (HGT) se refiere a la transferencia de genes entre organismos que se da de manera diferente a la reproducción. Por ejemplo, cuando un virus tranfiere material genético entre bacterias, esta es la principal razón de la resistencia a los antibióticos de las bacterias.

Para abordar el problema de construir el árbol filogenético de un conjunto de especies se usan dos enfoques:

- *Enfoque Estadístico.* Estos métodos dependen de un modelo matemático y usan herramientas estadísticas.

- *Enfoque Métrico.* Se define una métrica entre códigos genéticos, por ejemplo contar en cuantos lugares son diferentes ambos códigos. Luego se miden las distancias entre parejas de códidgos y se construye el árbol del cual se originaron las distancias.

La idea en el enfoque métrico consiste en definir una métrica en el conjunto de códigos genéticos de determinada longitud. El ejemplo mas sencillo de una de estas métricas es contar en cuántos lugares son diferentes los dos códigos.

Una vez definida la métrica, se tienen dos problemas:
tenemos dos problemas:

- Dada una métrica finita que viene de un árbol, ¿cómo obtenemos el árbol del cual viene?

- ¿Qué pasa si la métrica no es consistente con un árbol? Esto puede ocurrir por dos razones:

    - Por ruido al obtener los datos, lo que ocasionaría que una métrica que provenía de un árbol, ya no sea consistente con uno.
    - Por fenomenos HGT.

En 1984 Andreas Dress resolvió el problema de encontrar el árbol del cual proviene una métrica finita, por medio de la construcción del tight-span ([1], [28], [29]). El tight-span de un espacio métrico es un espacio métrico hiperconvexo donde se encaja el espacio original. En [28] demostró que si la métrica original viene de un árbol, el tight-span es un árbol. En 1964, John Isbell [29] hizo una construcción similar al tight-span.

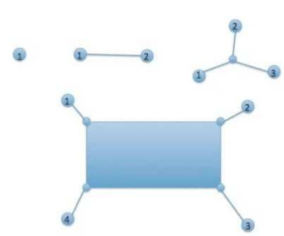
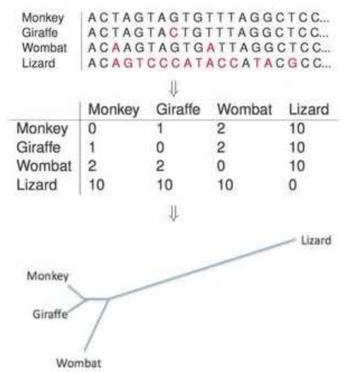


Figura 1.4.1: Tight-span para 1,2,3 y 4 puntos.

De esta manera podemos construir el árbol filogenético que representa la relación evolutiva entre un conjunto de especies usando las distancias entre todas las parejas de elementos y usando la construcción de [28].



En [1], Bryant y Tupper proponen usar funciones que midan que tan diferentes son entre sí un conjunto de códigos genéticos, en lugar de usar métricas que sólo comparan parejas de códigos. Hay métricas generalizadas que toman un número determinado de argumentos que podrían ser útiles para este fin, como las 2-métricas definidas en la sección 1.2, sin embargo no hay una teoria de tight-span para ellas por lo que resultan de poca utilidad en este problema.

De esta manera Bryant y Tupper introdujeron el concepto de diversidad ya estudiado en la sección 1.1 y desarrollaron una teoría de tight-span que extiende la teoría del tight-span métrico, conservando de esta manera las herramientas para estudiar el problema filogenético.

Una ventaja de usar la teoría de tight-span para diversidades para estudiar el problema filogenético es que, al considerar mas información, hace una construcción mas detallada del árbol filogenético. Por ejemplo, si consideramos un conjunto de 3 especies y definimos una métrica entre sus códigos, el tight-span resultante siempre será un árbol, mientras si usamos una diversidad el tight-span puede ser un árbol o el complejo celular de la figura (1.4.2) [1].

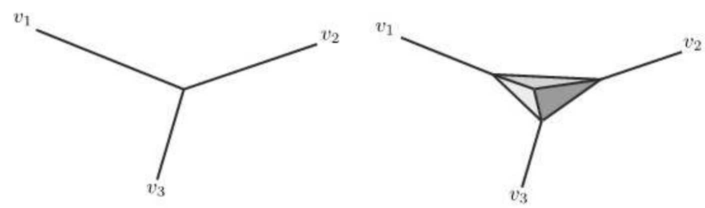


Figura 1.4.2: Los dos casos del tight-span de un conjunto de tres especies $\{v_1, v_2, v_3\}$.

El procedimiento para estudiar este problema filogenético es entonces el mismo que el usado en el enfoque métrico, sólo basta definir una diversidad para medir que tan genéticamente diverso es un conjunto finito de códigos genéticos entre sí y luego aplicar las herramientas del tight-span para diversidades para construir el árbol filogenético. A continuación se presenta un ejemplo de diversidad entre códigos genéticos que podría ser usada para estudiar el problema filogenético.

Definimos un código genético de longitud n como una n-ada ordenada, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, donde $v_j \in \{A, C, G, T\}$. Denotemos por $\mathscr{C}(n)$ al conjunto de todos los códigos genéticos de longitud n. Sea $\Upsilon \subset P_{\text{fin}}(\mathscr{C}(n))$ denotado por $\Upsilon = \{v_1, \ldots, v_k\}$ donde $v_j = \left(v_{j,1}, \ldots, v_{j,n}\right)$ con $j = 1, \ldots, k$. Definamos la función $\delta_C : P_{\text{fin}}(\mathscr{C}(n))$ como

$$\delta_C(\Upsilon) = \sum_{j=1}^{n} \delta_c \left(\bigcup_{i=1,\ldots,k} \{v_{j,i}\} \right).$$

Donde δ_c es la diversidad de cardinalidad definida en el ejemplo 1.1.6.

Por ejemplo, si $n = 4$, $k = 3$ y $\Upsilon = \{v_1, v_2, v_3\}$, donde $v_1 = (C, G, A, T)$, $v_2 = (C, G, T, C)$ y $v_2 = (A, G, C, C)$. Entonces,

$$\delta_C(\Upsilon) = \delta_c(\{G, C, A\}) + \delta_c(\{G\}) + \delta_c(\{A, T, C\}) + \delta_c(\{T, C, C\}) = 9.$$

Es claro que δ_C es una diversidad ya que es una suma de diversidades.

CAPÍTULO 2

DIVERSIDADES EN SEMIRETÍCULAS

En este capítulo generalizaremos la definición de diversidad para semiretículas. En la definición de diversidad en [1] la función δ está definida sobre el conjunto $P_{\text{fin}}(X)$, el cual junto con la operación binaria $\cup$ forman una semiretícula. Esta es la motivación para definir el concepto de diversidad en una semiretícula arbitraria.

En la primera sección daremos las definiciones y propiedades necesarias de semiretículas. En la segunda sección definiremos la diversidad sobre semiretículas y daremos algunos resultados similares al caso clásico. En la tercera sección trateremos de adaptar el ejemplo de la diversidad filogenética a este caso. Y en la última sección repetiremos la construcción del Tight-Span de [1] en este contexto.

2.1. Definiciones y ejemplos de semiretículas

Definición 2.1.1. *Un semigrupo $(S,*)$ es un conjunto no vacío S junto con una operación binaria $*$ tal que, para todo $x,y,z \in S$ se satisface,*

1. $x * y \in S$.

2. $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Definición 2.1.2. *Una semiretícula es un semigrupo $(S,*)$ idempotente y conmutativo. Es decir, S es cerrado bajo la operación $*$ y además, para todo $x,y,z \in S$ se satisface,*

1. $x * x = x$.

2. $x * y = y * x$.

3. $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Ejemplo 2.1.3. *El siguiente es un ejemplo de una semiretícula finita de orden 2 dada por su tabla de multiplicación.*

$*$	a	b
a	a	a
b	a	b

Además ésta es la única semiretícula de orden 2, salvo isomorfismo.

Ejemplo 2.1.4. *Hay dos semiretículas de orden 3, salvo isomorfismos. Dadas por su tabla de multiplicación, son las siguientes:*

S_3^1

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

S_3^2

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

En la primer semiretícula no hay unidad, en la segunda, la unidad es c.

Definición 2.1.5. *Un orden parcial es una relación $\leq$ en S tal que, $\forall\ x, y, z \in S$ se satisface,*

1. $x \leq x$.

2. $x \leq y$, *y* $y \leq x \Rightarrow x = y$.

3. $x \leq y$, *y* $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Si además se satisface que $\forall\ x, y \in S$ se tiene que $x \leq y$ ó $y \leq x$ entonces tenemos un orden total. Un conjunto parcialmente ordenado (o poset) $(S, \leq)$ es un conjunto S junto con un orden parcial $\leq$. Un conjunto totalmente ordenado (o toset) $(S, \leq)$ es un conjunto S junto con un orden total $\leq$.

Lema 2.1.6. *Sea $(S, *)$ una semiretícula, entonces la relación dada por $x \leq y \Leftrightarrow x * y = x$ es un orden parcial (en este caso se dice que S es una semiretícula* meet *o inferior). De la misma manera, la relación dada por $x \leq y \Leftrightarrow x * y = y$ es también un orden parcial (en este caso se dice que S es una semiretícula* join *o superior).*

Demostración. Sólo demostraremos que la relación es un orden parcial en el caso de la semiretícula meet, el otro caso es análogo. Sean $x, y, z \in S$, entonces

1. Ya que S es semiretícula, $x * x = x$ lo cual quiere decir que $x \leq x$.
2. Supongamos que $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces, por definición se tiene respectivamente, $x * y = x$ y $x * y = y$ lo cual quiere decir que $x = y$.
3. Supongamos que $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces, por definición se tiene respectivamente, $x * y = x$ y $y * z = y$. Entonces,

$$\begin{aligned} x * y &= x \\ x * (y * z) &= x \\ (x * y) * z &= x \\ x * z &= x \\ x &\leq z \end{aligned}$$

Por lo tanto la relación es un orden parcial. □

En [5] y en otras referencias se usa una definición de semiretícula diferente. Si $(S, \leq)$ es un poset y si $x, y \in S$, decimos que $z \in S$ es una *mínima cota superior* de x y y si

- $x \leq z$ y $y \leq z$, es decir z es cota superior de x y y.
- si $w \in S$ es otra cota superior de x y y entonces $z \leq w$.

Análogamente definimos el concepto de *máxima cota inferior*.

Proposición 2.1.7. $(S, *)$ *es una semiretícula join (denotamos a este orden parcial por* $\leq$*) si y sólo si cada* $x, y \in S$ *tiene una mínima cota superior. Análogamente,* $(S, *)$ *es una semiretícula meet si y sólo si cada* $x, y \in S$ *tiene una máxima cota inferior.*

Demostración. Probaremos sólo el caso de la semiretícula join, el otro caso es análogo.

- $(\Rightarrow)$ Supongamos que $(S, *)$ es una semiretícula join, entonces sabemos que $x \leq y \Leftrightarrow x * y = y$. Sean $x, y \in S$, veremos que $x * y \in S$ es la mínima cota superior.

$$(x * y) * x = (y * x) * x = y * (x * x) = y * x = x * y$$

es decir, $x \preceq x * y$, análogamente vemos que $y \preceq x * y$ y luego $x * y$ es cota superior de x, y.
Ahora supongamos que $w \in S$ es otra cota superior de x, y, entonces $x, y \preceq w$, es decir, $x * w = w$ y $y * w = w$, entonces,

$$(x * y) * w = (x * y) * (x * w) = x * (w * y) = x * w = w$$

lo que quiere decir que $x * y \preceq w$. Entonces $x * y$ es la mínima cota superior de x, y, en otras palabras, cada $x, y \in S$ tiene una mínima cota superior.

- ($\Leftarrow$) Supongamos que tenemos un poset $(S, \preceq)$ que satisface la propiedad de que para todo $x, y \in S$ existe la mínima cota superior, que denotaremos $x \vee y$. Definamos la operación $*$ en S como $x * y := x \vee y$. Ahora verificaremos que $(S, *)$ es una semiretícula.
  - $x * x = x \vee x = x$, esto es trivialmente cierto, ya que por definición x es la mínima cota superior de x y x.
  - $x * y = y * x$, también es trivialmente cierto, ya que la mínima cota superior de x y y es la mínima cota superior de y y x.
  - Nos resta demostrar la asociatividad, es decir que $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ para cualesquiera $x, y, z \in S$. Por definición $(x \vee y) \vee z$ es la mínima cota superior de $\{x \vee y, z\}$, entonces $x \vee y \preceq (x \vee y) \vee z$ y además $z \preceq (x \vee y) \vee z$, además es la mínima de las cotas superiores. Tenemos que demostrar que $(x \vee y) \vee z$ es también la mínima cota superior de $\{x, y \vee z\}$.
    Por otro lado, como $x \vee y$ es la mínima cota superior de $\{x, y\}$ tenemos $x, y \preceq x \vee y$ y luego por la transitividad del orden parcial, $x, y \preceq x \vee y \preceq (x \vee y) \vee z$ y luego $(x \vee y) \vee z$ es cota superior de $\{x, y\}$.
    Ya sabíamos que $(x \vee y) \vee z$ es cota superior de z. Como $y \vee z$ es la mínima cota superior de $\{y, z\}$ y $(x \vee y) \vee z$ es otra cota superior de $\{y, z\}$ entonces $y \vee z \preceq (x \vee y) \vee z$ y luego $(x \vee y) \vee z$ es cota superior de $\{x, y \vee z\}$. Supongamos que w es otra cota superior de $\{x, y \vee z\}$, entonces $x \preceq w$ y por otro lado $y, z \preceq y \vee z \preceq w$. Entonces $x, y \preceq w$ y luego $x \vee y \preceq w$, como además $z \preceq w$, tenemos que $(x \vee y) \vee z \preceq w$.
    Entonces $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

  Luego $(S, *)$ es una semiretícula.

$\square$

Observación 2.1.8. *La razón por la cual dimos primero la definición de semiretícula usando semigrupos y luego probamos que era equivalente a la definición que usa el orden parcial es* *porque el caso clásico de diversidad usa la operación binaria* $\cup$ *sobre* $P_{fin}(X)$ *en la definición de diversidad y en varios conceptos, como la construcción del Tight-Span [1]. Mientras que el orden parcial (la inclusión de conjuntos) no se usa tan frecuentemente.*

Observación 2.1.9. *De la demostración anterior podemos ver que si* $(S,*)$ *es una semiretícula* join *entonces* $x*y$ *es la mínima cota superior de* x *y* y. *Análogamente, si* $(S,*)$ *es una semiretícula* meet *entonces* $x*y$ *es la máxima cota inferior de* x *y* y.

Observación 2.1.10. *Si* $(S,*)$ *es una semiretícula* join *con unidad* e *entonces* e *es el elemento mínimo, es decir* $e \leq x \ \forall x \in S$. *Es decir, siempre existe una cota inferior para cualquier par de elementos* $s_1, s_2 \in S$.
Análogamente, en el caso de una semiretícula meet*, la unidad es el elemento máximo y cualesquiera dos elementos siempre tienen una cota superior.*

Definición 2.1.11. *Sea* $(S,*)$ *una semiretícula, decimos que es* finitamente generada *si* $\exists\ V \subset S$, $V \neq S$ *tal que* $\forall\ s \in S\ \exists\ s_1,\ldots,s_n \in V$ *tal que* $s = s_1 * \ldots * s_n$.
En este caso decimos que V *genera a* S, *si no existe* $V' \subset S$ *propiamente contenido en* V *con la propiedad anterior, decimos que* V *es base de* S.

Ejemplo 2.1.12. $(P_{fin}(X),\cup)$ *es finitamente generada y una base es* $\{\{x\} \mid x \in X\}$. *Si* X *es infinito,* $(2^X,\cup)$ *no es finitamente generada ya que la única base de* 2^X *es* $\{\{x\} \mid x \in X\}$, *y la única manera de generar a* X *es con la unión* $\bigcup_{x\in X}\{x\}$, *la cual no es finita porque* X *es infinito.*

Observación 2.1.13. *Si* $(S,*)$ *es una semiretícula join finitamente generada con unidad* e *y si* V *es una base de* $(S,*)$, *entonces* $e \in V$. *Ya que si* $e \notin V$ *entonces* $e = s_1 * \ldots * s_n$, *para* $s_1,\ldots,s_n \in V$, *lo cual implica que* $s_i \leq e$ *para* $i = 1,\ldots,n$, *pero como ya sabemos* $e \leq s_i$, *lo cual querría decir que* $e = s_i \in V\ i = 1,\ldots,n$, *contradiciendo que* $e \notin V$.

Definición 2.1.14. *Un homomorfismo entre dos semiretículas* $(S,*_S)$ *y* $(T,*_T)$ *es una función* $h: S \to T$ *tal que* $h(x *_S y) = h(x) *_T h(y)$ *para cualesquiera* $x, y \in S$. *Un isomorfismo de semiretículas es un homomorfismo que es biyectivo. Decimos que* $(S,*_S)$ *y* $(T,*_T)$ *son isomorfos si hay un isomorfismo entre ellas y lo denotamos* $(S,*_S) \cong (T,*_T)$.

Observación 2.1.15. *Como la operación binaria de semigrupo queda determinada por el orden parcial y viceversa, dos semiretículas son isomorfas si y sólo si son isomorfas como posets.*

2.1.1. Diagrama de Hasse de una semiretícula y más ejemplos

Definición 2.1.16. *Sea* $(S,\leq)$ *un poset, sean* $x, y \in S$ *decimos que* y *cubre a* x, *y lo denotamos como* $y \gtrdot x$ *si* $x \leq y$ *y además no hay ningún* $z \in S$ *tal que* $x \leq z \leq y$.

Observemos que si S es finito entonces $x \leq y$ si y sólo si existe una sucesión finita de relaciones de cobertura $x = x_0 \lessdot x_1 \lessdot \dots \lessdot x_n = y$.

Podemos representar visualmente los posets finitos mediante diagramas, llamados *Diagramas de Hasse*. Sea $(S, \leq)$ un poset, podemos representar S por una configuración de puntos (que representarán los elementos de S) y segmentos de recta uniendo los puntos (indicando las relaciones de cobertura). La construcción es la siguiente:

1. A cada punto $x \in S$ le asociamos un punto $p(x) \in \mathbb{R}^2$.

2. Para cada par cubriente $x \lessdot y$ en S tomamos un segmento $\ell(x, y)$ uniendo $p(x)$ y $p(y)$.

3. Si $x \lessdot y$ entonces la segunda coordenada de $p(x)$ es menor que la segunda coordenada de $p(y)$.

En [15] se puede consultar la construcción de estos diagramas con mayor detalle. A continuación daremos algunos ejemplos de diagramas de Hasse de semiretículas finitas, y de algunos de los conceptos que se han definido.

Ejemplo 2.1.17. *Se puede verificar directamente que la relación en $\mathbb{Z}^+$ dada por*

$$a \leq b \Leftrightarrow a|b,$$

donde $a|b$ quiere decir que a divide a b, es un orden parcial. Si $*$ es la operación binaria asociada con $\leq$ en el caso join, sabemos que $a * b$ es la mínima cota superior de a y b, es decir, es un elemento que es mayor o igual que ambos y que si hay otra cota superior, debe de ser mayor que $a * b$. De esto se puede ver que $a * b$ es el mínimo común múltiplo de a y b, denotado por $mcm(a, b)$.

Por ejemplo, si $S_1 = \{1, 2, 3, 6\}$, el diagrama de Hasse de $(S_1, *)$ es la figura (2.1.1). Es claro que $(S_1, *)$ es una semiretícula join, con unidad $e = 1$, ya que cada par de elementos tiene una mínima cota superior. Una base de S_1 es $\{1, 2, 3\}$. Además, es claro que $(S_1, *) \cong (P_{fin}(\{a, b\}), \cup)$.

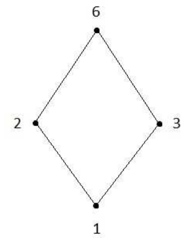


Figura 2.1.1: Diagrama de Hasse para S_1.

Si $S_2 = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$*, el diagrama de Hasse de la semiretícula join con unidad* $(S_2,*)$ *es la figura (2.1.2). Una base de* S_2 *es* $\{1,2,3,5\}$ *y además* $(S_2,*) \cong (P_{fin}(\{a,b,c\}),\cup)$.

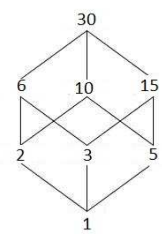


Figura 2.1.2: Diagrama de Hasse para S_2.

Si $S_3 = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$*, el diagrama de Hasse de la semiretícula join con unidad* $(S_3,*)$ *es la figura (2.1.3). Una base de* S_3 *es* $\{1,2,3,4,8\}$*, sin embargo en este caso* $(S_3,*)$ *no es isomorfo a* $(P_{fin}(X),\cup)$ *para ningún conjunto* X*. Ya que si hubiera dicho isomorfismo, en particular sería una biyección y, como la cardinalidad de* $P_{fin}(X)$ *es* $2^{|X|}$*, entonces* $|X| = 3$*, es decir* $X = \{a,b,c\}$*. El isomorfismo además sería un isomorfismo entre los posets correspondientes, luego preservaría las cadenas de orden. En* $(P_{fin}(X),\cup)$*, la cadena mas larga de orden es de longitud 4, por ejemplo:* $\emptyset \subset \{a\} \subset \{a,b\} \subset \{a,b,c\}$ *y en* $(S,*)$ *hay cadenas de longitud 5:* $1 \preceq 2 \preceq 6 \preceq 12 \preceq 24$*. Por lo tanto* $(S_3,*)$ *no puede ser isomorfo a* $(P_{fin}(X),\cup)$ *para ningún* X*.*

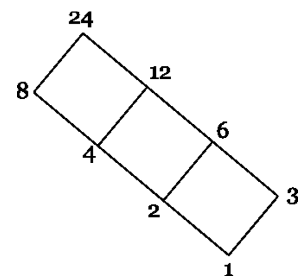


Figura 2.1.3: Diagrama de Hasse para S_3.

Ejemplo 2.1.18. *Sea S_4^1 la semiretícula de 4 elementos determinada por la siguiente tabla de multiplicación:*

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	a
c	a	a	c	a
d	a	a	a	d

Su diagrama de Hasse es el de la figura (2.1.4), y en este caso también se tiene que S_4^1 no es isomorfo a $(P_{fin}(X), \cup)$ para ningún conjunto X; ya que si así fuera, $\emptyset \in P_{fin}(X)$ y $\emptyset \subset A$ para cualquier $A \in P_{fin}(X)$, sin embargo en S_4^1 no hay ningún elemento que satisfaga esa propiedad. Como podemos ver a se puede generar de 4 maneras con los elementos de la base $\{b, c, d\}$: $a = b * c$, $a = c * d$, $a = b * d$ y $a = b * c * d$. Además esta semiretícula no tiene unidad.

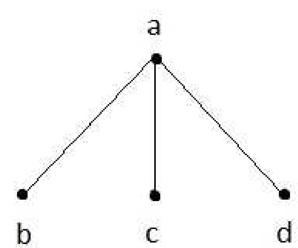


Figura 2.1.4: Diagrama de Hasse para S_4^1.

Con estos ejemplos anteriores podemos ver que no todas las semiretículas son isomorfas a $P_{\text{fin}}(X)$ para algún X, por lo cual tiene sentido extender el concepto de diversidad a semiretículas, lo cual haremos en la siguiente sección.

2.2. Diversidades sobre semiretículas

Como ya dijimos $(P_{\text{fin}}(X), \cup)$ es una semiretícula, pero también lo es $(2^X, \cup)$. Entonces para extender la definición nos restringiremos al caso de semiretículas finitamente generadas, ya que el hecho de que sean finitamente generadas será fundamental para probar varios resultados de diversidades que queremos. Antes de generalizar la definición necesitamos un análogo a la cardinalidad para elementos de S. Por lo que resta de la sección sea $(S, *)$ join una semiretícula finitamente generada con unidad e. Sea $(S, \leq)$ el poset inducido por la relación de orden usual en el caso *join*. Abusando de la notación denotaremos por $\leq$ tanto al orden inducido por $*$ en S como al orden usual en $\mathbb{R}^+$.

Definición 2.2.1. *Una función de pseudo-cardinalidad en S es una función $c : S \to [0, \infty]$ que satisface*

1. $c(a) = 0 \Leftrightarrow a = e$.
2. *Si $a, b \in S$ tienen pseudo-cardinalidad 1 entonces si $c(a * b) \leq 1$ se tiene que $a = b$.*
3. *$c(a * b) \leq c(a) + c(b)$ para cualesquiera $a, b \in S$.*

Podemos observar que, si $(S, *) = (P_{\text{fin}}(X), \cup)$, la cardinalidad usual de conjuntos satisface los axiomas de la definición anterior.

Ejemplo 2.2.2. *Sea $(S, *)$ una semiretícula finita* join *con unidad e, mostraremos la construcción explícita de una función de pseudo-cardinalidad en S, la cual denotaremos por $\hat{c}$. Sea $V \subset S$ una base de S y sea $\hat{c} : S \to \mathbb{R}^+$ dada por*

- $\hat{c}(s) = 0 \Leftrightarrow s = e$.
- $\hat{c}(s) = 1 \Leftrightarrow s \in V \setminus \{e\}$.
- *Para $s \notin V$, $\hat{c}(s)$ es el menor número de elementos de V que hay que multiplicar para obtener s.*

Ahora veamos que esta función satisface los axiomas de la definición de función de pseudo-cardinalidad.

1. *Por definición, $\hat{c}(s) = 0 \Leftrightarrow s = e$.*
2. *Sean $a, b \in S$ de pseudo-cardinalidad 1 (por lo tanto ambos son diferentes de la identidad), entonces $a, b \in V \setminus \{e\}$, supongamos que $\hat{c}(a * b) \leq 1$. Supongamos que $a \neq b$, entonces $a * b$ es diferente de al menos uno de los elementos de $\{a, b\}$. Supongamos, sin*

pérdida de generalidad, que $a*b \neq a$, $\hat{c}(a*b) \neq 0$ ya que si así fuera entonces $a*b=e$ y luego tendríamos que $a \leq e$, lo cual es imposible. Entonces $\hat{c}(a*b)=1$, lo cual quiere decir que $a*b \in V\setminus\{e\}$. Pero para cualquier elemento $s \in S$ que entre sus factores tenga a $a*b$ se puede reemplazar dicho factor por los factores a y b, por lo tanto $V\setminus\{a*b\}$ también genera a S contradiciendo que V sea base. En la última afirmación hay que notar que, como $a*b \neq a$, entonces $V\setminus\{a*b\} \subsetneq V$. Por lo tanto $a=b$.

3. *Sean $a,b \in S$. Tenemos varios casos:*

   - *Si a o b son la identidad entonces, si por ejemplo $b=e$,*

   $$\hat{c}(a*b)=\hat{c}(a) \leq \hat{c}(a)+\hat{c}(b).$$

   - *Si ninguno es la identidad, pero $a,b \in V\setminus\{e\}$ entonces $\hat{c}(a)+\hat{c}(b)=2$. Por otro lado, $a*b$ es el producto de dos factores (a y b), por lo tanto $\hat{c}(a*b) \leq 2$ y luego $\hat{c}(a*b) \leq 2 = \hat{c}(a)+\hat{c}(b)$.*
   - *Si uno de los dos tiene pseudo-cardinalidad 1 y el otro, mayor que 1. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \in V\setminus\{e\}$ y $b \notin V$. Sean $n=\hat{c}(b)$ y $s_1,\ldots,s_n \in V\setminus\{e\}$ tales que $b=s_1*\ldots*s_n$, entonces $a*b=a*s_1*\ldots*s_n$ y por lo tanto, $\hat{c}(a*b) \leq n+1$. De todo esto se sigue que,*

   $$\hat{c}(a*b) \leq n+1=\hat{c}(a)+\hat{c}(b).$$

   - *Si $a,b \notin V$, sean $n=\hat{c}(a)$, $m=\hat{c}(b)$ y $s_1,\ldots,s_n \in V\setminus\{e\}$, $u_1,\ldots,u_m \in V\setminus\{e\}$ tales que $a=s_1*\ldots*s_n$ y $b=u_1*\ldots*u_m$. Entonces, $a*b=s_1*\ldots*s_n*u_1*\ldots*u_m$ y por lo tanto, $\hat{c}(a*b) \leq n+m$. De todo esto se sigue que,*

   $$\hat{c}(a*b) \leq n+m=\hat{c}(a)+\hat{c}(b).$$

Por lo tanto, $\hat{c}$ es una función de pseudo-cardinalidad en S. A menos que indiquemos lo contrario, siempre tomaremos esta función de pseudo-cardinalidad por el resto del capítulo.

Ejemplo 2.2.3. *En el ejemplo (2.1.17), los elementos de las semiretículas S_2 y S_3 tienen las siguientes pseudo-cardinalidades:*

$$S_2 \qquad\qquad\qquad\qquad S_3$$

$$\hat{c}(s)=\begin{cases}0, & s=e\\ 1, & s\in\{2,3,5\}\\ 2, & s\in\{6,10,15,30\}\end{cases} \qquad \hat{c}(s)=\begin{cases}0, & s=e\\ 1, & s\in\{2,3,4,8\}\\ 2, & s\in\{6,8,12,24\}\end{cases}$$

Definición 2.2.4. *Sea $(S,*)$ una semiretícula finitamente generada. Una diversidad en S es una función $\delta : S \to \mathbb{R}^+$ que satisface*

1. $\delta(a) = 0 \Leftrightarrow \hat{c}(a) \leq 1$.

2. $\delta(a*b) \leq \delta(a*c) + \delta(c*b)$ *si* $c \in S \setminus \{e\}$.

Llamaremos diversidad a la función δ ó al par (S,δ), siempre que no haya ambigüedad.

Ahora veremos que las propiedades de diversidades demostradas en [1] siguen satisfaciéndose en este caso más general.

Proposición 2.2.5. *Sea (S,δ) una diversidad. Sean $a,b \in S$ tales que $a \leq b$, entonces $\delta(a) \leq \delta(b)$.*

Demostración. Como S es finitamente generada existen $u_1,...,u_n \in S$ tales que $b = u_1 * ... * u_n$ y como $a \leq b$, $b = a*b$, entonces $b = a * u_1 * ... * u_n$. Usando la desigualdad del triángulo para diversidades, y como podemos suponer que $u_k \neq e$ para $k = 1,..,n$, tenemos,

$$\begin{aligned}\delta(a) &= \delta(a*e)\\ &\leq \delta(a*u_1) + \delta(u_1*e)\\ &= \delta(a*u_1),\end{aligned}$$

esto debido a que $\delta(u_1 * e) = \delta(u_1) = 0$, ya que $c(u_k) = 1$ para $k = 1,...,n$ por la definición de la función de pseudo-cardinalidad. Haciendo inducción en n tenemos,

$$\delta(a) \leq \delta(a*u_1) \leq \delta(a*u_1*u_2) \leq ... \leq \delta(a*u_1*\cdots*u_n) = \delta(b).$$

□

Proposición 2.2.6. *Sea (S,δ) una diversidad, sean $a,b \in S$ con alguna cota inferior diferente de e. Entonces,*

$$\delta(a*b) \leq \delta(a) + \delta(b)$$

Demostración. Sea c una cota inferior de a y b diferente de e, entonces $a*c = a$ y $b*c = b$. Como $c \neq e$, usando la desigualdad del triángulo de diversidades tenemos,

$$\delta(a*b) \leq \delta(a*c) + \delta(b*c) = \delta(a) + \delta(b)$$

□

En el caso clásico de diversidad del primer capítulo, la función δ está definida sobre $P_{\text{fin}}(X)$; aunque en varios resultados X también juega un papel importante. En nuestro caso la función está definida sobre S, y no tenemos explícitamente quien juegue el papel de X.

Usando la función de pseudo-cardinalidad $\hat{c}$, denotemos por X_S al conjunto de todos los elementos de la semiretícula S que tienen pseudo-cardinalidad 1. Es decir,

$$X_S = \{s \in S \mid \hat{c}(s) = 1\}$$

Podemos ver que, por la definición de $\hat{c}$, X_S es una base de S. X_S jugará el papel de X en el caso clásico de diversidad, notar que si $(S,*) = (P_{\text{fin}}(X), \cup)$, entonces X_S se puede ver como X. A X_S también lo llamaremos *conjunto base de S*.

En el ejemplo (2.1.4), se tiene

$$X_{S_3^1} = \{b, c\} \quad X_{S_3^1} = \{a, b, c\}$$

Ahora adaptaremos los resultados que relacionan las funciones métricas con diversidades del caso clásico a este caso general.

Proposición 2.2.7. *Definamos la función $d_\delta : X_S \times X_S \to \mathbb{R}^+$ dada por*

$$d_\delta(s_1, s_2) = \delta(s_1 * s_2),$$

entonces (X_S, d_δ) es un espacio métrico.

Demostración. Claramente d_δ es no negativa, d_δ es simétrica por la simetría de $*$. Sean $s_1, s_2, s_3 \in X_S$, entonces $d_\delta(s_1, s_1) = \delta(s_1 * s_1) = \delta(s_1) = 0$ ya que $\hat{c}(s_1) = 1$. Y si $d_\delta(s_1, s_2) = 0$ entonces $\delta(s_1 * s_2) = 0$, lo cual por la definición de diversidad se tiene, $\hat{c}(s_1 * s_2) \leq 1$ y por la definición de pseudo-cardinalidad tenemos que $s_1 = s_2$. Todo esto quiere decir que $d_\delta(s_1, s_2) = 0 \Leftrightarrow s_1 = s_2$.
Finalmente, usando la desigualdad del triángulo para diversidades tenemos,

$$d_\delta(s_1, s_2) = \delta(s_1 * s_2) \leq \delta(s_1 * s_3) + \delta(s_3 * s_2) = d_\delta(s_1, s_3) + d_\delta(s_2, s_3).$$

Entonces (X_S, d_δ) es un espacio métrico. $\square$

Proposición 2.2.8. *Sea $d_{2,\delta} : X_S \times X_S \times X_S \to \mathbb{R}^+$ dada por $d_{2,\delta}(s_1, s_2, s_3) = \delta(s_1 * s_2 * s_3)$, entonces $d_{2,\delta}$ es una 2-semi-métrica en X_S.*

Demostración. $d_{2,\delta}$ es simétrica bajo permutaciones en los argumentos ya que $*$ es una operación conmutativa.

Ahora veamos que satisface la desigualdad del tetraedro. Recordemos que si $s_1, s_2 \in X_S$ entonces $s_1 \leq s_1 * s_2$. Sean $s_1, s_2, s_3, s_4 \in X_S$,

$$\begin{aligned}
d_{2,\delta}(s_1, s_2, s_3) &= \delta((s_1 * s_2) * s_3) \leq \delta(((s_1 * s_2) * s_3) * s_4) \\
&= \delta((s_1 * s_2) * (s_3 * s_4)) \\
&\leq \delta((s_1 * s_2) * s_4) + \delta(s_4 * (s_3 * s_4)) \\
&= d_{2,\delta}(s_1, s_2, s_4) + \delta(s_4 * (s_3 * s_4)) \\
&\leq d_{2,\delta}(s_1, s_2, s_4) + \delta((s_1 * s_4) * (s_3 * s_4)) \\
&\leq d_{2,\delta}(s_1, s_2, s_4) + \delta((s_1 * s_4) * s_3) + \delta(s_3 * (s_3 * s_4)) \\
&= d_{2,\delta}(s_1, s_2, s_4) + d_{2,\delta}(s_1, s_4, s_3) + \delta(s_3 * (s_3 * s_4)) \\
&\leq d_{2,\delta}(s_1, s_2, s_4) + d_{2,\delta}(s_1, s_4, s_3) + \delta((s_3 * s_2) * (s_3 * s_4)) \\
&= d_{2,\delta}(s_1, s_2, s_4) + d_{2,\delta}(s_1, s_4, s_3) + \delta((s_4 * s_2) * s_3) \\
&= d_{2,\delta}(s_1, s_2, s_4) + d_{2,\delta}(s_1, s_4, s_3) + d_{2,\delta}(s_4, s_2, s_3)
\end{aligned}$$

y por lo tanto $d_{2,\delta}$ es una 2-semimétrica en X_S. □

De manera análoga a la demostración de la proposición (1.2.7) podemos demostrar que $d_{n,\delta}(s_1, ..., s_{n+1}) := \delta(s_1 * ... * s_{n+1})$ es una n-semimétrica en X_S. Y de la misma manera, $d_{n,\delta}$ es una n-distancia en X_S.

Ahora que hemos extendido el concepto de diversidad a semiretículas daremos un ejemplo concreto de diversidad sobre semiretícula.

Ejemplo 2.2.9. *Sea $\delta_c : S \to \mathbb{R}^+$ una función dada por*

$$\delta_c(s) = \begin{cases} 0 & \text{, si } \hat{c}(s) \leq 1 \\ \hat{c}(s) & \text{, en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces δ_c es una diversidad en S.

El primer axioma de la definición de diversidad es claro que se satisface por definición. Solo falta demostrar la desigualdad del triángulo. Sean $a, b, c \in S$ con $c \neq e$, entonces,

$$
\begin{aligned}
\delta_c(a*b) &= \begin{cases} 0 & , si\ \hat{c}(a*b) \leq 1 \\ \hat{c}(a*b) & , en\ otro\ caso. \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \delta_c(a*c)+\delta_c(b*c) & , si\ \hat{c}(a*b) \leq 1 \\ \hat{c}(a)+\hat{c}(b) & , en\ otro\ caso. \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \delta_c(a*c)+\delta_c(b*c) & , si\ \hat{c}(a*b) \leq 1 \\ \delta_c(a)+\delta_c(b) & , en\ otro\ caso. \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \delta_c(a*c)+\delta_c(b*c) & , si\ \hat{c}(a*b) \leq 1 \\ \delta_c(a*c)+\delta_c(b*c) & , en\ otro\ caso. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Este ejemplo, en particular nos da un ejemplo más de diversidad en el sentido clásico para $(P_{fin}(X), \cup)$ *y la cardinalidad usual (ejemplo (1.1.6)).*

Observación 2.2.10. *Como ya hemos dicho cuando digamos que* (S, δ) *es una diversidad nos referimos a que* δ *está definida sobre* S*, pero además que la función de pseudo-cardinalidad en* S *es* $\hat{c}$ *y que* X_S *es una base de* S*, donde sus elementos son los de pseudo-cardinalidad 1 (excepto la unidad).*

Observación 2.2.11. *Sea* $s \in S$*, al decir* los generadores de s *nos referimos a los elementos* $s_1, ..., s_n \in X_S$ *tales que* $s = s_1 * ... * s_n$*, donde* $n = \hat{c}(s)$*. Si hubiera varios subconjuntos de* X_S *con cardinalidad* n*, tal que el producto de sus elementos es* s*, escogemos* a priori *un subconjunto de ellos para cada* $s \in S$*, y a esos elementos nos referiremos como los generadores de* s.

Solamente en dos ocasiones usaremos esta terminología, en cada una de ellas verificaremos que la elección de los generadores de cada elemento $s \in S$ *no influye en los resultados.*

2.3. El tight-span de una diversidad en una semiretícula

El tight-span de un espacio métrico es el espacio hiperconvexo (en consecuencia métrico), escencialmente único, "minimal" en el cual puede ser encajado dicho espacio. Dress [28] e Isbell [29] demostraron independientemente la existencia y propiedades del tight-span. Se llama *T-Theory* al área de las matemáticas discretas que trata con el estudio del tight-span y construcciones relacionadas. Una de las principales aplicaciones del tight-span es la visualización de métricas finitas y la construcción de árboles filogenéticos para especies.

Bryant y Tupper, en [1], desarrollaron el concepto de tight-span de una diversidad. Demostraron que en este caso el tight-span vuelve a ser una diversidad y tiene propiedades análogas al caso clásico: también es hiperconvexo y "minimal" entre otras propiedades. Al generalizar el concepto de diversidad a semiretículas queremos conservar las mismas propiedades. Es por eso que en estas dos secciones siguientes construiremos el tight-span de una diversidad sobre una semiretícula, seguiremos la construcción de [1] y veremos que también es una diversidad y además hiperconvexa.

En esta sección y la siguiente supondremos que $(S,*)$ es una semiretícula join finitamente generada con unidad e y sea δ una diversidad en S. Denotaremos por $\preceq$ el orden inducido por la operación $*$.

Definición 2.3.1. *Sea P_S el conjunto de todas las funciones $f : S \to \mathbb{R}$ que satisfacen $f(e) = 0$ y*

$$\sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) \geq \delta\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right), \tag{2.3.1}$$

para todo $\mathscr{A} \in P_{fin}(S)$. Denotemos $f \preceq g$ si $f(a) \leq g(a)$ $\forall a \in S$. El tight-span *de (S,δ) es el conjunto de funciones $T_S \subset P_S$ que son minimales bajo $\preceq$.*

Proposición 2.3.2. *El orden $\preceq$ de la definición (2.3.1) es un orden parcial en P_S.*

Demostración.

- Sea $f \in P_S$, entonces $f \preceq f$ ya que $f(a) \leq f(a)$ para cualquier $a \in S$.
- Si $f,g \in P_S$ son tales que $f \preceq g$ y $g \preceq f$ entonces $f(a) \leq g(a)$ y $g(a) \leq f(a)$ para cualquier $a \in S$ y luego, $g(a) = f(a)$ para cualquier $a \in S$, lo que quiere decir que $f = g$.
- Sean $f,g,h \in P_S$ tales que $f \preceq g$ y $g \preceq h$ entonces $f(a) \leq g(a)$ y $g(a) \leq h(a)$ para cualquier $a \in S$ y luego, $f(a) \leq h(a)$ para cualquier $a \in S$, lo que quiere decir que $f \preceq h$.

Por lo tanto $\preceq$ es un orden parcial en P_S. $\square$

Observación 2.3.3. *Observemos que si en (2.3.1) tomamos $\mathscr{A} = \{a\}$ para cualquier $a \in S$ se sigue que, si $f \in P_S$, entonces $f(a) \geq 0$ $\forall a \in S$.*

Observación 2.3.4. *P_S no es vacio ya que $h_s \in T_S \subset P_S$ para cualquier $s \in X_S$. Las funciones h_s están definidas en la definición (2.3.7).*

Teorema 2.3.5. *Sea $f : S \to \mathbb{R}$ y supongamos que $f(e) = 0$. Entonces $f \in T_S$ si y sólo si, para todo $a \in S$ se tiene,*

$$f(a) = \sup_{\mathscr{B} \in P_{fin}(S)} \left\{ \delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b \in \mathscr{B}} f(b) \right\}. \tag{2.3.2}$$

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Supongamos que $f \in T_S$. Para cualquier $a \in S$ y todo $\mathscr{B} \subset S$ tenemos

$$\sum_{b \in \mathscr{B} \cup \{a\}} f(b) \geq \delta\left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B} \cup \{a\}} b\right), \tag{2.3.3}$$

es decir,

$$f(a) + \sum_{b \in \mathscr{B}} f(b) \geq \delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B}} b\right)\right),$$

entonces,

$$f(a) \geq \delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b \in \mathscr{B}} f(b). \tag{2.3.4}$$

Por otra parte f es un elemento mínimo en el orden parcial $\preceq$ de P_S. De (2.3.4) se sigue que,

$$f(a) \geq \sup_{\mathscr{B} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b \in \mathscr{B}} f(b) \right\}. \tag{2.3.5}$$

Supongamos que $\exists\, a_0 \in S$ tal que

$$f(a_0) > \sup_{\mathscr{B} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(a_0 * \left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b \in \mathscr{B}} f(b) \right\}, \tag{2.3.6}$$

definamos la función

$$g(a) = \begin{cases} f(a) & a \neq a_0 \\ \sup\limits_{\mathscr{B} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(a_0 * \left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b \in \mathscr{B}} f(b) \right\} & a = a_0 \end{cases} \tag{2.3.7}$$

Primero veamos si $g \neq f$, ambas funciones toman diferentes valores al evaluarlas en a_0,

$$g(a_0) = \sup_{\mathscr{B} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(a_0 * \left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b \in \mathscr{B}} f(b) \right\} < f(a_0),$$

esto, por (2.3.6). Ahora, como $g(a) = f(a)$ para $a \neq a_0$ y $g(a_0) < f(a_0)$ entonces $g \preceq f$. Ahora veamos que $g \in P_S$, sea $\mathscr{A} \subset S$ finito, si $a_0 \notin \mathscr{A}$ entonces,

$$\sum_{a \in \mathscr{A}} g(a) = \sum_{a \in \mathscr{A}} f(a) \geq \delta\left(\mathop{*}_{a \in \mathscr{A}} a\right), \tag{2.3.8}$$

Y si $a_0 \in \mathscr{A}$ entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in\mathscr{A}} g(a) = g(a_0) + \sum_{a\in\mathscr{A}\setminus\{a_0\}} g(a) \\
&= \sup_{\mathscr{B}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(a_0 * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b\in\mathscr{B}} f(b) \right\} + \sum_{a\in\mathscr{A}\setminus\{a_0\}} f(a) \\
&\geq \delta\left(a_0 * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{A}\setminus\{a_0\}} b\right)\right) - \sum_{b\in\mathscr{A}\setminus\{a_0\}} f(b) + \sum_{a\in\mathscr{A}\setminus\{a_0\}} f(a) \\
&= \delta\left(a_0 * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{A}\setminus\{a_0\}} b\right)\right) \\
&= \delta\left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{A}} b\right).
\end{aligned}$$

De esto y de (2.3.8) se sigue que $g \in P_S$, además $g \neq f$ y $g \preceq f$ lo que contradice que $f \in T_S$. Entonces no existe a_0 que satisfaga (2.3.6), por lo tanto, $\forall a \in S$ se satisface (2.3.2).

- ($\Leftarrow$) Ahora supongamos que (2.3.2) se satisface $\forall a \in S$, entonces para todo $\mathscr{B} \subset S$ finito,

$$\begin{aligned}
f(a) &\geq \delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b\in\mathscr{B}} f(b) \\
f(a) + \sum_{b\in\mathscr{B}} f(b) &\geq \delta\left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}\cup\{a\}} b\right) \\
\sum_{b\in\mathscr{B}\cup\{a\}} f(b) &\geq \delta\left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}\cup\{a\}} b\right),
\end{aligned}$$

de aqui concluimos que $f \in P_S$.

Supongamos que $g \in P_S$ y que $g \preceq f$ y sea $a \in S$. Entonces para cualquier $\mathscr{B} \subset S$ finito se tiene,

$$\delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b\in\mathscr{B}} f(b) \leq \delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b\in\mathscr{B}} g(b) \leq g(a), \tag{2.3.9}$$

esta última desigualdad debido a que g satisface (2.3.1), esto quiere decir que $g(a)$ es cota superior de $\delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b\in\mathscr{B}} f(b)$ para cualquier $\mathscr{B} \subset S$ finito y por lo tanto es mayor que el supremo de dicho conjunto (que por (2.3.2) sabemos que es $f(a)$). Es decir,

$$f(a) = \sup_{\mathscr{B}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b\in\mathscr{B}} f(b) \right\} \leq g(a), \tag{2.3.10}$$

esto contradice que $g \preceq f$, luego $f \preceq g$ y entonces $f \in T_S$.

$\square$

El teorema anterior nos da una caracterización de los elementos de T_S. Ahora demostraremos algunas propiedades de T_S.

Proposición 2.3.6. *Supongamos que $f \in T_S$, entonces,*

1. $f(a) \geq \delta(a)$.
2. *Si $a, b \in S$ con $a \leq b$ entonces $f(a) \leq f(b)$. Es decir, f es monotona.*
3. $f(a * c) \leq \delta(a * b) + f(b * c)$ *para cualesquiera $a, b, c \in S$, $b \neq e$.*
4. $f(a * b) \leq f(a) + f(b)$ *para cualesquiera $a, b \in S$. Es decir, f es subaditiva.*
5. *Para todo $a \in S$ se tiene,*

$$f(a) = \sup_{b \in S} \left\{ \delta(a * b) - f(b) \right\}.$$

Demostración. 1. Sea $a \in S$, tomemos $\mathscr{A} = \{a\}$ en (2.3.1).

2. Sea $\mathscr{B} \subset B$ finito, y sean $a, b \in S$ tales que $a \leq b$, se puede verificar directamente que,

$$a * \left(\mathop{*}_{c \in \mathscr{B}} c \right) \leq b * \left(\mathop{*}_{c \in \mathscr{B}} c \right),$$

luego, por la monotonía de δ tenemos que

$$\delta\left(a * \left(\mathop{*}_{c \in \mathscr{B}} c \right) \right) \leq \delta\left(b * \left(\mathop{*}_{c \in \mathscr{B}} c \right) \right),$$

entonces,

$$\delta\left(a * \left(\mathop{*}_{c \in \mathscr{B}} c \right) \right) - \sum_{c \in \mathscr{B}} f(c) \leq \delta\left(b * \left(\mathop{*}_{c \in \mathscr{B}} c \right) \right) - \sum_{c \in \mathscr{B}} f(c),$$

y luego, usando (2.3.2) tenemos que,

$$f(a) \leq f(b).$$

3. Sean $a, b, c \in S$, $b \neq e$. Usando la caracterización (2.3.2) tenemos,

$$\begin{aligned} f(a * c) &= \sup_{\mathscr{B} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(a * c * \left(\mathop{*}_{d \in \mathscr{B}} d \right) \right) - \sum_{d \in \mathscr{B}} f(d) \right\} \\ &\leq \sup_{\mathscr{B} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta(a * b) + \delta\left(b * c * \left(\mathop{*}_{d \in \mathscr{B}} d \right) \right) - \sum_{d \in \mathscr{B}} f(d) \right\} \\ &= \delta(a * b) + \sup_{\mathscr{B} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(b * c * \left(\mathop{*}_{d \in \mathscr{B}} d \right) \right) - \sum_{d \in \mathscr{B}} f(d) \right\} \\ &= \delta(a * b) + f(b * c). \end{aligned}$$

4. Sean $a, b \in S$ para $\mathscr{C} \in P_{\text{fin}}(S)$ tenemos,

$$f(a) + f(b) + \sum_{c\in\mathscr{C}} f(c) = \sum_{c\in\mathscr{C}\cup\{a,b\}} f(c) \geq \delta\left(a * b * \left(\mathop{*}_{c\in\mathscr{C}} c\right)\right)$$

$$f(a) + f(b) \geq \delta\left(a * b * \left(\mathop{*}_{c\in\mathscr{C}} c\right)\right) - \sum_{c\in\mathscr{C}} f(c).$$

Tomando el supremo sobre todos los $\mathscr{C} \subset S$ finitos y usando la caracterización (2.3.2) tenemos,

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &\geq \sup_{\mathscr{C}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{\delta\left(a * b * \left(\mathop{*}_{c\in\mathscr{C}} c\right)\right) - \sum_{c\in\mathscr{C}} f(c)\right\} \\ f(a) + f(b) &\geq f(a * b). \end{aligned}$$

5. Sea $a \in S$. Notemos que si $\mathscr{B} \subset S$ es finito, podemos extender el inciso anterior usando inducción, es decir,

$$\sum_{b\in\mathscr{B}} f(b) \geq f\left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right). \tag{2.3.11}$$

Si en (2.3.2) tomamos $\mathscr{B} = \{b\}$ tenemos,

$$f(a) \geq \delta(a * b) - f(b) \quad \forall b \in S, \tag{2.3.12}$$

y luego,

$$f(a) \geq \sup_{b\in S} \left\{\delta(a * b) - f(b)\right\}. \tag{2.3.13}$$

De (2.3.11) tenemos que

$$\delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b\in\mathscr{B}} f(b) \leq \delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right) - f\left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)$$

y luego, de esto y (2.3.2) tenemos,

$$\begin{aligned} f(a) = \sup_{\mathscr{B}\in P_{\text{fin}}(S)} &\left\{\delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right) - \sum_{b\in\mathscr{B}} f(b)\right\} \\ &\leq \sup_{\mathscr{B}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{\delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right) - f\left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Por otro lado podemos ver que

$$\left\{\delta\left(a * \left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right)\right) - f\left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right) \mid \mathscr{B} \subset S \text{ finito}\right\} = \left\{\delta(a * b) - f(b) \mid b \in S\right\}. \tag{2.3.15}$$

Entonces usando (2.3.15), (2.3.14) se convierte en

$$f(a) \leq \sup_{b\in S} \left\{\delta(a * b) - f(b)\right\}, \tag{2.3.16}$$

De (2.3.13) y (2.3.16) tenemos que

$$f(a) = \sup_{b\in S} \{\delta(a * b) - f(b)\}.$$

□

Ahora buscamos una función δ_T en T_S de tal manera que (T_S, δ_T) sea una diversidad. Para este fin solo consideraremos, por el resto de la sección, diversidades acotadas (de la misma manera que se hace en [31]). Decimos que una diversidad δ es acotada si existe $M > 0$ tal que $\delta(a) < M$ para cualquier $s \in S$.

Definición 2.3.7. *Sea (S, δ) una diversidad, para $s \in X_S$ sea $h_s : S \to \mathbb{R}^+$ dada por*

$$h_s(a) = \delta(a * s)$$

Sea κ la función $s \mapsto h_s$.

Definición 2.3.8. *Sea (S, δ) una diversidad. Sea $\delta_T : P_{fin}(T_S) \to \mathbb{R}$ definida por $\delta_T(\emptyset) = 0$ y*

$$\delta_T(F) := \sup_{\mathscr{A} \in P_{fin}(S)} \left\{ \delta\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a \right) - \sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in F} f(a) \right\} \tag{2.3.17}$$

para cualquier $F \subset T_S$ finito no vacío. Como consecuencia de que δ sea acotada, δ_T es finita.

Proposición 2.3.9. *Si $f \in F$ entonces*

$$\delta_T(F) = \sup_{\mathscr{A} \in P_{fin}(S)} \left\{ f\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a \right) - \sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{g\in F\setminus\{f\}} g(a) \right\} \tag{2.3.18}$$

Demostración. Sea $F \subset T_S$ finito y sea $f \in F$. Para $\mathscr{A} \subset S$ finito definimos,

$$\mathscr{A}_1 = \left\{ a \in \mathscr{A} \mid f(a) > \inf_{g\in F} g(a) \right\}$$
$$\mathscr{A}_2 = \left\{ a \in \mathscr{A} \mid f(a) = \inf_{g\in F} g(a) \right\},$$

Es claro que

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2 \tag{2.3.19}$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
\delta_T(F) &= \sup_{\mathscr{A}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(\mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a \right) - \sum_{a\in\mathscr{A}} \operatorname{ínf}_{g\in F} g(a) \right\} \\
&= \sup_{\mathscr{A}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(\mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a \right) - \sum_{a\in\mathscr{A}_1} \operatorname{ínf}_{g\in F} g(a) - \sum_{a\in\mathscr{A}_2} \operatorname{ínf}_{g\in F} g(a) \right\} \\
&= \sup_{\mathscr{A}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(\mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a \right) - \sum_{a\in\mathscr{A}_1} \operatorname{ínf}_{g\in F\setminus\{f\}} g(a) - \sum_{a\in\mathscr{A}_2} f(a) \right\} \\
&= \sup_{\mathscr{B},\mathscr{C}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(\left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b \right) * \left(\mathop{*}_{c\in\mathscr{C}} c \right) \right) - \sum_{b\in\mathscr{B}} \operatorname{ínf}_{g\in F\setminus\{f\}} g(b) - \sum_{c\in\mathscr{C}} f(c) \right\}.
\end{aligned}
$$

Observemos que, al cambiar $\mathscr{A}_1$ por $\mathscr{B}$ y $\mathscr{A}_2$ por $\mathscr{C}$, si para $a\in\mathscr{B}$ se tiene $f(a) = \operatorname{ínf}_{g\in F} g(a)$ entonces el sumando $\operatorname{ínf}_{g\in F\setminus\{f\}} g(b)$ se puede pasar a la sumatoria sobre los elementos de $\mathscr{C}$ sin alterar la suma total. Análogamente, si para $a\in\mathscr{C}$ se tiene $f(a) > \operatorname{ínf}_{g\in F} g(a)$ entonces el sumando $f(b)$ se puede pasar a la sumatoria sobre los elementos de $\mathscr{B}$.

Ahora, como δ_T es finita y es cota superior de todos los elementos del conjunto anterior, independientemente de la elección de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, podemos tomar los supremos sobre $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ uno después del otro (en orden indistinto), en lugar de tomar los dos supremos simultáneamente. Al hacer esto, continuando con las igualdades anteriores, se tiene,

$$
\begin{aligned}
\delta_T(F) &= \sup_{\mathscr{B}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \sup_{\mathscr{C}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \delta\left(\left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b \right) * \left(\mathop{*}_{c\in\mathscr{C}} c \right) \right) - \sum_{c\in\mathscr{C}} f(c) \right\} - \sum_{b\in\mathscr{B}} \operatorname{ínf}_{g\in F\setminus\{f\}} g(b) \right\} \\
&= \sup_{\mathscr{B}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ f\left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b \right) - \sum_{b\in\mathscr{B}} \operatorname{ínf}_{g\in F\setminus\{f\}} g(b) \right\}
\end{aligned}
$$

Esta última igualdad se sigue de (2.3.2). Esto comprueba (2.3.18). □

Proposición 2.3.10. *(T_S, δ_T) es una diversidad.*

Demostración.

- Sea $F\in P_{\text{fin}}(T_S)$, observemos que si $\mathscr{A} = \{e\}$ tenemos

  $$\delta\left(\mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a \right) - \sum_{a\in\mathscr{A}} \operatorname{ínf}_{f\in F} f(a) = 0, \tag{2.3.20}$$

  entonces el supremo $\delta_T(F)$ debe de ser mayor o igual que (2.3.20) y luego

  $$\delta_T(F) \geq 0$$

  para cualquier $F\in P_{\text{fin}}(T_S)$.

- Ahora veremos que δ_T es monótona, ya que necesitamos esta propiedad en el resto de la demostración. Sean $\emptyset \neq F \subset G \subset T_S$ finitos, entonces para cualquier $\mathscr{A} \subset S$ finito tenemos
$$\sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in F} f(a) \geq \sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in G} f(a),$$
luego,
$$-\sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in F} f(a) \leq -\sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in G} f(a),$$
y entonces
$$\delta\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right) - \sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in F} f(a) \leq \delta\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right) - \sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in G} f(a).$$
Tomando supremos tenemos la monotonía,
$$\delta_T(F) \leq \delta_T(G).$$

- Si $F = \emptyset$, por definición $\delta_T(F) = 0$. Si $F = \{f\}$ entonces,
$$0 \leq \delta_T(F) = \delta_T(\{f\}) = \sup_{\mathscr{A}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{\delta\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right) - \sum_{a\in\mathscr{A}} f(a)\right\} = 0, \tag{2.3.21}$$
esta última igualdad se sigue del teorema (2.3.5). Luego, $0 \leq \delta_T(F) \leq 0$, y por lo tanto $\delta_T(F) = 0$.

  Finalmente, si $|F| > 1$ entonces existen al menos $f_1, f_2 \in F$ diferentes. Como $f_1 \neq f_2$, $\exists a_0 \in S$ tal que $f_1(a_0) \neq f_2(a_0)$, supongamos sin pérdida de generalidad que $f_1(a_0) > f_2(a_0)$. Entonces, usando la definición de δ_T y (2.3.18) tenemos,
$$\begin{aligned}\delta_T(F) \geq \delta_T\left(\{f_1, f_2\}\right) &= \sup_{\mathscr{A}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{\delta\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right) - \sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in\{f_1,f_2\}} f(a)\right\} \\ &= \sup_{\mathscr{A}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{f_1\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right) - \sum_{a\in\mathscr{A}} f_2(a)\right\} \\ &\geq \sup_{a\in S}\left\{f_1(a) - f_2(a)\right\} \\ &\geq f_1(a_0) - f_2(a_0) > 0.\end{aligned}$$
Con esto hemos probado que $\delta_T(F) = 0$ si y sólo si $|F| \leq 1$.

- Ahora probaremos la desigualdad del triángulo para diversidades. Sean $F, G, H \subset T_S$ finitos con $H \neq \emptyset$. Supongamos que F y G son disjuntos, sea $h \in T_S \setminus (F \cup G)$, $h \in H$.

Entonces por el lema (2.3.18) tenemos,

$$\delta_T(F \cup \{h\}) = \sup_{\mathscr{A} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ h\left(\mathop{*}_{a \in \mathscr{A}} a \right) - \sum_{a \in \mathscr{A}} \inf_{f \in F} f(a) \right\} \tag{2.3.22}$$

$$\delta_T(G \cup \{h\}) = \sup_{\mathscr{B} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ h\left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B}} b \right) - \sum_{b \in \mathscr{B}} \inf_{g \in G} g(b) \right\} \tag{2.3.23}$$

Como $h \in T_S$, h es subaditiva, entonces,

$$h\left(\mathop{*}_{a \in \mathscr{A}} a \right) + h\left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B}} b \right) \geq h\left(\mathop{*}_{c \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}} c \right). \tag{2.3.24}$$

Combinando (2.3.22), (2.3.23) y (2.3.24) tenemos,

$$\begin{aligned}
\delta_T(F \cup \{h\}) + \delta_T(G \cup \{h\}) &= \sup_{\mathscr{A} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ h\left(\mathop{*}_{a \in \mathscr{A}} a \right) - \sum_{a \in \mathscr{A}} \inf_{f \in F} f(a) \right\} \\
&\quad + \sup_{\mathscr{B} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ h\left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B}} b \right) - \sum_{b \in \mathscr{B}} \inf_{g \in G} g(b) \right\} \\
&\geq \sup_{\mathscr{A}, \mathscr{B} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ h\left(\mathop{*}_{a \in \mathscr{A}} a \right) + h\left(\mathop{*}_{b \in \mathscr{B}} b \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{a \in \mathscr{A}} \inf_{f \in F} f(a) - \sum_{b \in \mathscr{B}} \inf_{g \in G} g(b) \right\} \\
&\geq \sup_{\mathscr{A}, \mathscr{B} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ h\left(\mathop{*}_{c \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}} c \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\sum_{a \in \mathscr{A}} \inf_{f \in F} f(a) + \sum_{b \in \mathscr{B}} \inf_{g \in G} g(b) \right) \right\} \\
&\geq \sup_{\mathscr{C} \in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ h\left(\mathop{*}_{c \in \mathscr{C}} c \right) - \sum_{c \in \mathscr{C}} \inf_{f \in F \cup G} f(c) \right\} \\
&\geq \delta_T(F \cup G \cup \{h\}) \geq \delta_T(F \cup G)
\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $\delta_T(F \cup \{h\}) + \delta_T(G \cup \{h\}) \geq \delta_T(F \cup G)$, pero por monotonía, $\delta_T(F \cup H) + \delta_T(H \cup G) \geq \delta_T(F \cup \{h\}) + \delta_T(G \cup \{h\})$. Luego,

$$\delta_T(F \cup G) \leq \delta_T(F \cup H) + \delta_T(H \cup G). \tag{2.3.25}$$

Si $F \cap G \neq \emptyset$ entonces podemos reescribir

$$F \cup G = ((F \cup G) \setminus (F \cap G)) \cup (F \cap G).$$

y claramente $(F \cup G) \setminus (F \cap G)$ y $(F \cap G)$ son disjuntos y no vacios, por lo tanto podemos aplicar el argumento anterior a estos conjuntos disjuntos para obtener el mismo resultado (2.3.25).

$\square$

Definición 2.3.11. *Sean (S_1, δ_1) y (S_2, δ_2) dos diversidades, una función $\pi : X_{S_1} \to X_{S_2}$ es un encaje si es inyectiva y si $\forall\, a \in S_1$ se tiene $\delta_1(a) = \delta_2(\pi(a))$.*

Teorema 2.3.12. *La función κ de la definición (2.3.7) es un encaje de (X_S, δ) en (T_S, δ_T).*

Demostración. De la definición (2.3.11) vemos que necesitamos extender κ de X_S, a S. Para $s \in S$, sean $s_1, \ldots, s_n \in X_S$ los generadores de s (como se especifica en la observación (2.2.11)), entonces definimos,

$$\kappa(s) = \{\kappa(s_1), \ldots, \kappa(s_n)\}.$$

Cuando usemos esta extensión, al final de la demostración, veremos que la elección de los generadores no juega un papel en el resultado que estamos probando.

- Primero veamos que κ es una función de X_S en T_S. Es decir, que si $s \in X_S$ entonces $\kappa(s) = h_s \in T_S$. Para tener $h_s \in T_S$ se debe de cumplir que $h_s \in P_S$ y que es minimal bajo el orden parcial $\preceq$.

  Sea $\mathscr{A} \subset S$ finito. Para demostrar que $h_s \in P_S$ hay que demostrar que $h_s(e) = 0$, lo cual es claro ya que $h_s(e) = \delta(s * e) = \delta(s) = 0$, y que,

$$\sum_{a \in \mathscr{A}} h_s(a) \geq \delta\left(\mathop{*}_{a \in \mathscr{A}} a\right). \tag{2.3.26}$$

  Primero demostremos que

$$\sum_{a \in \mathscr{A}} \delta(a * s) \geq \delta\left(\left(\mathop{*}_{a \in \mathscr{A}} a\right) * s\right), \tag{2.3.27}$$

  lo que haremos usando inducción sobre $n = |\mathscr{A}|$. Para $n = 2$, denotemos $\mathscr{A} = \{a_1, a_2\}$. Notemos que s es cota inferior de $\{a_1 * s, a_2 * s\}$, ya que $a_1 * s \geq s$ y $a_2 * s \geq s$, además $s \neq e$ ya que $s \in X_S$. Luego por la proposición (2.2.6),

$$\sum_{a \in \mathscr{A}} \delta(a * s) = \delta(a_1 * s) + \delta(a_2 * s) \geq \delta((a_1 * s) * (a_2 * s)) = \delta(a_1 * a_2 * s).$$

Supongamos que (2.3.27) se satisface para n, denotemos por $\mathscr{A} = \{a_1, ..., a_n\}$ y sea $b \in S$. Veamos que (2.3.27) se satisface para $n+1$,

$$\begin{aligned}\sum_{a\in\mathscr{A}\cup\{b\}} \delta(a*s) &= \sum_{a\in\mathscr{A}} \delta(a*s) + \delta(b*s)\\ &\geq \delta\left(\left(\mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a\right) * s\right) + \delta(b*s)\\ &\geq \delta\left(\left(\mathop{*}_{a\in\mathscr{A}\cup\{b\}} a\right) * s\right).\end{aligned}$$

Luego, (2.3.27) se satisface para cualquier $s \in X_S$.

Ahora, denotemos $\mathscr{A} = \{a_1, ..., a_n\}$. Usando (2.3.27) tenemos

$$\sum_{a\in\mathscr{A}} h_s(a) = \sum_{a\in\mathscr{A}} \delta(a*s) \geq \delta\left(\left(\mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a\right) * s\right) \geq \delta\left(\mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a\right),$$

por lo tanto $h_s \in P_S$.

Ahora veamos que h_s es minimal. Sea $a \in S$ y $g \in P_S$ tal que $g \preceq h_s$. Ya que $h_s(s) = \delta(s*s) = \delta(s) = 0$, tenemos,

$$h_s(a) = \delta(a*s) \leq g(a) + g(s) \leq g(a) + h_s(s) = g(a) \leq h_s(a),$$

luego $g(a) = h_s(a)\ \forall a \in S$. Esto significa que h_s es minimal y por lo tanto $h_s \in T_S$. Por lo tanto, si $s \in X_S$ entonces $\kappa(s) \in T_S$.

- Para ver que κ es inyectiva veamos que si $s_1 \neq s_2$, entonces $h_{s_1}(s_1) = 0$ pero $h_{s_2}(s_1) = \delta(s_1 * s_2) > 0$, es decir, h_{s_1} y h_{s_2} no coinciden en un punto, por lo tanto son funciones diferentes. Lo cual quiere decir que $h_{s_1} \neq h_{s_2}$ para diferentes $s_1, s_2 \in X_S$.

- Ahora demostraremos que $\delta_T(\kappa(y)) = \delta(y)$ para cualquier para cualquier $y \in S$, para esto probaremos las dos desigualdades opuestas.

Sea $y \in S$ y sean $y_1, ..., y_n \in X_S$ los generadores de y. Sea $\mathscr{A} = \{y_1, ..., y_n\} \subset S$, por la definición de δ_T tenemos,

$$\begin{aligned}\delta_T(\kappa(y)) &= \sup_{\mathscr{B}\in P_{\text{fin}}(S)}\left\{\delta\left(\mathop{*}_{b\in\mathscr{B}} b\right) - \sum_{b\in\mathscr{B}}\inf_{f\in\kappa(y)} f(b)\right\}\\ &\geq \delta\left(\mathop{*}_{i=1,\dots,n} y_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\inf_{j=1,\dots,n} h_{y_j}(y_i)\\ &= \delta\left(\mathop{*}_{i=1,\dots,n} y_i\right) = \delta(y).\end{aligned}$$

Es decir, $\delta_T(\kappa(y)) \geq \delta(y)$. Observemos que la elección de los generadores de y no afecta la desigualdad anterior, ya que si escogemos otros generadores de y, $w_1,\dots,w_n \in X_S$ y tomamos, de la misma manera, $\mathscr{A} = \{w_1,\dots,w_n\} \subset S$ entonces $\kappa(y) = \{\kappa(w_1),\dots,\kappa(w_1)\} = \left\{h_{w_1},\dots,h_{w_1}\right\}$ y luego,

$$\begin{aligned}\sum_{a\in\mathscr{A}}\inf_{f\in\kappa(y)} f(a) &= \sum_{i=1,\dots,n}\inf_{j=1,\dots,n} h_{w_j}(w_i)\\ &= \sum_{i=1,\dots,n} h_{w_i}(w_i) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto se sigue satisfaciendo que $\delta_T(\kappa(y)) \geq \delta(y)$ independientemente de quienes tomemos como los generadores de y.

Ahora sean $y \in S$ y $\mathscr{A} \in P_{\text{fin}}(S)$ dado por $\left\{a_1,\dots,a_j\right\}$. Sean $y_1,\dots,y_n \in X_S$ los generadores de y, tomemos j de esos generadores, denotados como $z_1,\dots,z_j$, de la siguiente manera: para cada $i = 1,\dots,j$ sea $z_i \in \left\{y_1,\dots,y_n\right\}$ tal que $\delta(z_i * a_i) \leq \delta(y_k * a_i)$ para todo $k = 1,\dots,n$. Entonces, usando la desigualdad del triángulo para diversidades tenemos,

$$\delta(y * a_1) \leq \delta(y * z_1) + \delta(z_1 * a_1) = \delta(y) + \delta(z_1 * a_1)$$

y luego,

$$\delta(y) \geq \delta(y * a_1) - \delta(z_1 * a_1). \tag{2.3.28}$$

Aplicando la desigualdad del triángulo otra vez,

$$\delta(y * a_1 * a_2) \leq \delta(y * a_1 * z_2) + \delta(z_2 * a_2) = \delta(y * a_1) + \delta(z_2 * a_2),$$

y luego,

$$\delta(y * a_1) \geq \delta(y * a_1 * a_2) - \delta(z_2 * a_2). \tag{2.3.29}$$

Combinando (2.3.28) y (2.3.29) tenemos,

$$\delta(y) \geq \delta(y * a_1 * a_2) - \delta(z_1 * a_1) - \delta(z_2 * a_2).$$

Repitiendo este cálculo tenemos,

$$\begin{aligned}
\delta(y) &\geq \delta\left(y * \left(\mathop{*}_{i=1,\dots,j} a_i\right)\right) - \sum_{i=1}^{j} \delta(z_i * a_i)\\
&\geq \delta\left(\mathop{*}_{i=1,\dots,j} a_i\right) - \sum_{i=1}^{j} \delta(z_i * a_i)\\
&= \delta\left(\mathop{*}_{i=1,\dots,j} a_i\right) - \sum_{i=1}^{j} h_{z_i}(a_i),
\end{aligned}$$

por construcción de cada z_i se tiene que $h_{z_i}(a_i) = \text{ínf}_{h\in\kappa(y)} h(a_i)$, continuando con las desigualdades anteriores se tiene,

$$\delta(y) = \delta\left(\mathop{*}_{i=1,\dots,j} a_i\right) - \sum_{i=1}^{j} \mathop{\text{ínf}}_{h\in\kappa(y)} h(a_i).$$

Y como esto se satisface para cualquier $\mathscr{A} \subset S$ finito, tomamos el supremo y tenemos,

$$\delta(y) \geq \sup_{\mathscr{A}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{\delta\left(\mathop{*}_{i=1,\dots,j} a_i\right) - \sum_{a\in\mathscr{A}} \mathop{\text{ínf}}_{h\in\kappa(y)} h(a)\right\} = \delta_T(\kappa(y)).$$

De la misma manera como hicimos en la demostración de la otra desigualdad, vemos que si tomamos otros generadores de y obtenemos otra vez que $\delta(y) \geq \delta_T(\kappa(y))$.

De lo anterior concluimos que $\delta(y) = \delta_T(\kappa(y))$.

Todo lo anterior demuestra que κ es un encaje de X_S en T_S.

□

Observación 2.3.13. *Si llamamos $\hat{\kappa}$ a la extensión de κ de X_S a S definida en la demostración anterior entonces, para el caso particular de la semiretícula $(P_{fin}(X), \cup)$, la función*

$$\hat{\kappa} : \left(P_{fin}(X), \cup\right) \to \left(P_{fin}(T_X), \cup\right)$$

es un homomorfismo de semiretículas. Para verificar esto tomemos $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ elementos de $P_{fin}(X)$, entonces,

$$\begin{aligned}
\hat{\kappa}(A \cup B) &= \hat{\kappa}\left(\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}\right)\\
&= \left\{h_{a_1}, \dots, h_{a_n}, h_{b_1}, \dots, h_{b_m}\right\}\\
&= \left\{h_{a_1}, \dots, h_{a_n}\right\} \cup \left\{h_{b_1}, \dots, h_{b_m}\right\} = \hat{\kappa}(A) \cup \hat{\kappa}(B).
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "i"'] & T_X \arrow[d, "i"] \\
P_{fin}(X) \arrow[r] & P_{fin}(T_X)
\end{tikzcd}$$

2.4. Hiperconvexidad

Como dijimos en la introducción de la sección anterior, demostraremos que el tight-span de una diversidad sobre una semiretícula es hiperconvexo, para recuperar en este contexto más general el resultado demostrado en [1].

Definición 2.4.1. *Una diversidad* (S,δ) *se dice que es hiperconvexa si para cualquier función* $r : S \to \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$\delta\left(\mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a\right) \leq \sum_{a\in\mathscr{A}} r(a),$$

para cualquier $\mathscr{A} \subset S$ *finito con* $r(e) = 0$*, existe un* $z \in X_S$ *tal que* $\delta(z * y) \leq r(y)$ *para todo* $y \in S$*.*

Observación 2.4.2. *Las funciones* r *de la definición anterior son precisamente las funciones de* P_S*.*

Para probar la hiperconvexidad definiremos una función auxiliar y demostraremos un par de propiedades de esta función.

Definición 2.4.3. *Sea* (S,δ) *una diversidad. Para* $F \subset T_S$ *finito, sea* $\Phi_F : S \to \mathbb{R}^+$ *dada por*

$$\Phi_F(y) = \inf_{\mathscr{A}\in P_{fin}(S)} \left\{ \sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in F} f(a) \,\middle|\, \mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a = y \right\}.$$

Proposición 2.4.4. *Si* $F \subset T_S$ *es finito se tiene,*

$$\delta_T(F) \geq \sup_{y\in S} \left\{\delta(y) - \Phi_F(y)\right\}.$$

Demostración. Sea $y \in S$ y sea $\mathscr{P}(y) = \left\{\mathscr{A} \in P_{\text{fin}}(S) \,\middle|\, \mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a = y\right\}$. y tiene un número finito de generadores, si $\mathscr{A} \in \mathscr{P}(y)$ y como $\mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a = y$, $\mathscr{A}$ puede tener a lo más $2^{\hat{c}(y)} - 1$ elementos (ya que no consideramos la posibilidad $e \in \mathscr{A}$ debido a que $f(e) = 0$ para cualquier $f \in T_S$). Si tomamos otros generadores de y, de cualquier manera $\mathscr{A}$ sólo puede tener a lo más $2^{\hat{c}(y)} - 1$ elementos. De lo anterior se sigue que $\mathscr{P}(y)$ es finito, independientemente de los generadores de y que tomemos.

Para cada $y \in S$, sea $\hat{\mathscr{A}}_y$ tal que

$$\sum_{a\in\hat{\mathscr{A}}_y} \inf_{f\in F} f(a) \leq \sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in F} f(a)$$

para cualquier $\mathscr{A} \in \mathscr{P}(y)$, la existencia se garantiza debido a que $\mathscr{P}(y)$ es finito, si hubiera varios elementos en $\mathscr{P}(y)$ con esta caracteristica, elegimos alguno de ellos, esta elección no cambia ninguno de los argumentos siguientes. Entonces,

$$\Phi_F(y) = \sum_{a\in\hat{\mathscr{A}}_y} \inf_{f\in F} f(a).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in S}\left\{\delta(y) - \Phi_F(y)\right\} &= \sup_{y\in S}\left\{\delta(y) - \sum_{a\in\hat{\mathscr{A}}_y} \inf_{f\in F} f(a)\right\} \\
&= \sup_{y\in S}\left\{\delta\left(\mathop{*}_{a\in\hat{\mathscr{A}}_y} a\right) - \sum_{a\in\hat{\mathscr{A}}_y} \inf_{f\in F} f(a)\right\} \\
&= \sup_{\substack{\hat{\mathscr{A}}_y \\ y\in S}} \left\{\left(\mathop{*}_{a\in\hat{\mathscr{A}}_y} a\right) - \sum_{a\in\hat{\mathscr{A}}_y} \inf_{f\in F} f(a)\right\},
\end{aligned}$$

esta última igualdad se satisface porque para cada $y \in S$ podemos construir de manera única un $\hat{\mathscr{A}}_y$ y para cada $\hat{\mathscr{A}}_y$ podemos recuperar, de manera única, $y = \mathop{*}_{a\in\hat{\mathscr{A}}_y} a$. Retomando tenemos,

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in S}\left\{\delta(y) - \Phi_F(y)\right\} &= \sup_{\substack{\hat{\mathscr{A}}_y \\ y\in S}} \left\{\left(\mathop{*}_{a\in\hat{\mathscr{A}}_y} a\right) - \sum_{a\in\hat{\mathscr{A}}_y} \inf_{f\in F} f(a)\right\} \\
&\leq \sup_{\mathscr{A}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{\left(\mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a\right) - \sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in F} f(a)\right\} = \delta_T(F).
\end{aligned}$$

La última desigualdad se satisface debido a que cada colección $\hat{\mathscr{A}}_y$, con $y \in S$, es también una colección perteneciente a $\mathscr{P}(y)$ y luego es también una colección de elementos de $P_{\text{fin}}(S)$. Es decir, el conjunto sobre el que se toma el segundo supremo contiene al conjunto sobre el que se toma el primer supremo.

$\square$

Lema 2.4.5. *Para $F, G \subset T_S$ finitos y $z, y \in S$ tenemos,*

$$\Phi_{F\cup G}(y * z) \leq \Phi_F(y) + \Phi_G(z)$$

Demostración. Sean $F, G \subset T_S$ finitos y $z, y \in S$. Sea $\varepsilon > 0$, por definición se tiene

$$\Phi_F(y) = \inf_{\mathscr{A}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{\sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{f\in F} f(a) \,\middle|\, \mathop{*}_{a\in\mathscr{A}} a = y\right\},$$

entonces, por las propiedades del supremo, existe $\mathscr{A}_0 \subset S$ finito tal que $y = \underset{a\in\mathscr{A}_0}{*} a$ y,

$$\Phi_F(y) \leq \sum_{a\in\mathscr{A}_0} \inf_{f\in F} f(a) < \Phi_F(y) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4.1}$$

Pero como F es finito entonces, para cada $a \in \mathscr{A}_0$, sea $f_a \in F$ tal que

$$f_a(a) = \inf_{f\in F} f(a).$$

Luego, (2.4.1) se convierte en

$$\Phi_F(y) \leq \sum_{a\in\mathscr{A}_0} f_a(a) < \Phi_F(y) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4.2}$$

Análogamente, $\exists\, \mathscr{B}_0 \subset S$ finito tal que $z = \underset{b\in\mathscr{B}_0}{*} b$, y una colección $\{g_b\}_{b\in\mathscr{B}_0} \subset G$ tal que

$$\Phi_G(z) \leq \sum_{b\in\mathscr{B}_0} g_b(b) < \Phi_G(z) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definamos la colección $\mathscr{C}_0 = \mathscr{A}_0 \cup \mathscr{B}_0$ y la colección $\{h_c\}_{c\in\mathscr{C}} \subset F \cup G$ dada por,

$$h_c = \begin{cases} f_c, & c \in \mathscr{A}_0 \\ g_c, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\Phi_F(y) + \Phi_G(z) + \varepsilon &> \sum_{a\in\mathscr{A}_0} f_a(a) + \sum_{b\in\mathscr{B}_0} f_b(b) \\
&= \sum_{c\in\mathscr{C}_0} h_c(c) \\
&\geq \sum_{c\in\mathscr{C}_0} \inf_{h\in F\cup G} h(c) \\
&\geq \inf_{\mathscr{A}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{h\in F\cup G} h(a) \,\middle|\, \underset{a\in\mathscr{A}}{*} a = y * z \right\},
\end{aligned}$$

esta última desigualdad se satisface sólo si $\mathscr{C}_0$ es finito, lo cual es claro por definición, y si $\underset{c\in\mathscr{C}_0}{*} c = y * z$, lo cual también es claro ya que $y = \underset{a\in\mathscr{A}_0}{*} a$ y $z = \underset{b\in\mathscr{B}_0}{*} b$. Continuando con la desigualdad anterior tenemos,

$$\begin{aligned}
\Phi_F(y) + \Phi_G(z) + \varepsilon &> \inf_{\mathscr{A}\in P_{\text{fin}}(S)} \left\{ \sum_{a\in\mathscr{A}} \inf_{h\in F\cup G} h(a) \,\middle|\, \underset{a\in\mathscr{A}}{*} a = y * z \right\} \\
&= \Phi_{F\cup G}(y * z).
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \to 0$ se obtiene el resultado. $\square$

Teorema 2.4.6. *Para cualquier diversidad (S,δ), el tight-span (T_S,δ_T) es hiperconvexo.*

Demostración. Sea $r : P_{\text{fin}}(T_S) \to \mathbb{R}^+$ tal que $r(e) = 0$ y

$$\sum_{F\in\mathscr{F}} r(F) \geq \delta_T \left(\bigcup_{F\in\mathscr{F}} F\right).$$

para cualquier $\mathscr{F} \subset P_{\text{fin}}(T_S)$ finito.
Queremos demostrar que $\exists\, g \in T_S$ tal que $\delta_T\left(\{g\}\cup F\right) \leq r(F)$ para cualquier $F \subset T_S$ finito.
Definimos la función w en S dada por

$$w(a) = \inf_{\substack{F\subset T_S \\ |F|<\infty}} \{r(F) + \Phi_F(a)\}.$$

Entonces, como $\Phi_F(e) = 0$, $w(e) = 0$. Sea $\mathscr{A} \subset S$ finito, y $\{F_a\}_{a\in\mathscr{A}}$ una colección de subconjuntos finitos de T_S. Del lema (2.4.5) y de la proposición (2.4.4) tenemos,

$$\delta_T\left(\bigcup_{a\in\mathscr{A}} F_A\right) \geq \sup_{y\in S}\left\{\delta(y) - \Phi_{\bigcup_{a\in\mathscr{A}} F_A}(y)\right\} \geq \delta\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right) - \Phi_{\bigcup_{a\in\mathscr{A}} F_A}\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right).$$

De aquí, despejando $\delta\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right)$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\delta\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right) &\leq \delta_T\left(\bigcup_{a\in\mathscr{A}} F_A\right) + \Phi_{\bigcup_{a\in\mathscr{A}} F_A}\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right) \\
&\leq \sum_{a\in\mathscr{A}} r(F_a) + \sum_{a\in\mathscr{A}} \Phi_{F_a}(a) \\
&= \sum_{a\in\mathscr{A}} \left(r(F_a) + \Phi_{F_a}(a)\right).
\end{aligned}$$

Tomando el ínfimo tenemos

$$\delta\left(\underset{a\in\mathscr{A}}{*} a\right) \leq \sum_{a\in\mathscr{A}} w(a),$$

y entonces $w \in P_S$. Esto quiere decir que hay un $g \in P_S$ tal que $g \leq w$, con el orden parcial entre funciones de P_S definido en la sección anterior. Tomemos $F \subset T_S$ finito, aplicando la proposición (2.3.9) tenemos,

$$\begin{aligned}
\delta_T\left(F\cup\{g\}\right) &\leq \sup_{a\in S}\left\{g(a) - \Phi_F(a)\right\} \\
&\leq \sup_{a\in S}\{w(a) - \Phi_F(a)\} \\
&\leq \sup_{a\in S}\{r(F) + \Phi_F(a) - \Phi_F(a)\} \\
&= r(F).
\end{aligned}$$

Entonces (T_S,δ_T) es hiperconvexo. □

2.5. Diversidades completas

En [8] se estudian las propiedades analíticas de las diversidades en el sentido clásico. En particular se estudia la continuidad uniforme de funciones y la convergencia uniforme en términos de espacios conformes. El concepto de espacios conformes se introduce en [8] para generalizar la noción de espacios uniformes para el caso de diversidades. Los espacios uniformes son espacios topológicos con una estructura adicional que se usa para definir las propiedades de completitud, continuidad uniforme y convergencia uniforme.

El estudio en [8] comienza definiendo los conceptos de convergencia, sucesión de Cauchy, continuidad y completitud en X en términos de una diversidad en lugar de hacerlo usando una métrica. En esta sección adaptaremos esta primera parte del estudio al caso de semiretículas finitamente generadas. Definiremos, al igual que en [8], los conceptos de convergencia y continuidad en términos de la diversidad definida sobre la semiretícula y veremos la relación que guarda con los mismos conceptos en términos de la métrica inducida por la diversidad.

Por el resto de la sección supondremos que $(S,*)$ es una semiretícula join finitamente generada con unidad e y δ una diversidad en S, X_S definida de la misma manera que lo hicimos en las secciones anteriores en términos de la función de pseudo-cardinalidad $\hat{c}$.

Definición 2.5.1. *Sean $x_0 \in X_S$ y $\{x_n\}_n \subset X_S$. Decimos que $\{x_n\}_n$ converge a x_0, denotado como $x_n \to x_0$ si*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{i_1,\ldots,i_n \geq N} \delta(x_0 * x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) = 0.$$

Decimos que la sucesión $\{x_n\}_n$ es de Cauchy si

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{i_1,\ldots,i_n \geq N} \delta(x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) = 0.$$

Cuando tenemos una diversidad definida en S sabemos que se tiene una métrica inducida definida en X_S y al tener una métrica podemos definir los conceptos de la definición anterior usando la métrica. En la definición anterior solo se definen dichas nociones en términos de la diversidad. En los siguientes resultados analizaremos la relación entre estos conceptos cuando se definen usando la métrica inducida y cuando se usa la diversidad.

Proposición 2.5.2. *Si una sucesión converge (en el sentido de la definición (2.5.1), su límite es único.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}_n$ converge tanto a $z, y \in X_S$. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ $\exists$ $M > 0$ tal que si $N > M$ se tiene

$$\sup_{i_1,\ldots,i_n \geq N} \delta(z * x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) < \varepsilon.$$

De la misma manera, $\exists$ $M' > 0$ tal que si $N > M'$ se tiene

$$\sup_{i_1,\ldots,i_n \geq N} \delta(y * x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) < \varepsilon.$$

Si $N > \text{máx}\left\{M, M'\right\}$ tenemos,

$$\delta(z * y) \leq \delta(z * x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) + \delta(y * x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) < 2\varepsilon$$

como esto se satisface para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que $\delta(z * y) = 0$. Por lo tanto, $\hat{c}(z * y) \leq 1$ y como $\hat{c}$ es una función de pseudo-cardinalidad, y $\hat{c}(z), \hat{c}(y) = 1$ entonces $z = y$. □

Proposición 2.5.3. *Toda sucesión convergente (en el sentido de la definición (2.5.1) es de Cauchy*

Demostración. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión convergente a $z \in X_S$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists$ $M > 0$ tal que si $N > M$, para cualesquiera $i_1, \ldots, i_n \geq N$ se tiene

$$\delta(z * x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) < \varepsilon,$$

pero por monotonía tenemos, $\delta(x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) \leq \delta(z * x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) < \varepsilon$ y luego,

$$\sup_{i_1,\ldots,i_n \geq N} \delta(x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) < \varepsilon,$$

y luego,

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{i_1,\ldots,i_n \geq N} \delta(x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) = 0.$$

Es decir, $\{x_n\}_n$ es de Cauchy. □

Definición 2.5.4. *Decimos que (X_S, δ) es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Observación 2.5.5. *Cuando (X_S, δ) sea completo también diremos que (X_S, δ) es una diversidad completa.*

Definición 2.5.6. *Sean (S_1, δ_1) y (S_2, δ_2) dos diversidades y $f : S_1 \to S_2$ una función tal que $f\left(X_{S_1}\right) = X_{S_2}$. Si f tiene la propiedad de que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $d > 0$ tal que si $a \in S_1$ es tal que $\delta_1(a) < d$ entonces $\delta_2(f(a)) < \varepsilon$. Entonces decimos que f es uniformemente continua.*

Proposición 2.5.7. *Sea* (S,δ) *una diversidad y sea* $\{x_n\}_n$ *una sucesión de Cauchy en* (X,d_δ)*, entonces* $\{x_n\}_n$ *tiene una subsucesión que es de Cauchy en* (X,δ)*.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en (X,d_δ), definamos la subsucesión $\left\{x_{n_i}\right\}_i$ de la siguiente manera,

$$n_i := \left\{n \,\middle|\, d_\delta(x_n,x_m) < 2^{-i} \ \forall\, m \geq n\right\}.$$

La existencia de estos índices está garantizada porque la sucesión original es de Cauchy en (X,d_δ). Por simplicidad, denotemos a esta subsucesión por la sucesión

$$y_i = x_{n_i}$$

Dado $\varepsilon > 0$ sea N tal que $2^{1-N} < \varepsilon$. Dados $n_{i_1} \leq n_{i_2} \leq \ldots \leq n_{i_m}$ mayores que N se tiene, por la desigualdad del triángulo,

$$\delta\left(y_{i_1} * \ldots * y_{i_m}\right) \leq \delta\left(y_{i_1} * y_{i_2}\right) + \delta\left(y_{i_2} * y_{i_3}\right) + \ldots + \delta\left(y_{i_{m-1}} * y_{i_m}\right).$$

Como $n_{i_2} \geq n_{i_1}$ entonces $d_\delta(x_{n_{i_1}}, x_{n_{i_2}}) = d_\delta(y_{i_1}, y_{i_2}) < 2^{-i_1}$. Análogamente, $d_\delta(y_{i_2}, y_{i_3}) < 2^{-i_2}$, ..., $d_\delta(y_{i_{m-1}}, y_{i_m}) < 2^{-i_{m-1}}$ y entonces,

$$\begin{aligned}
\delta\left(y_{i_1} * \ldots * y_{i_m}\right) &\leq d_\delta(y_{i_1}, y_{i_2}) + d_\delta(y_{i_2}, y_{i_3}) + \ldots + d_\delta(y_{i_{m-1}}, y_{i_m}) \\
&< \frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_{m-1}}} \\
&< \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}} + \ldots \\
&= \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Entonces $\left\{y_i\right\}_i$ es de Cauchy en (X,δ). □

Teorema 2.5.8. *Sea* (S,δ) *una diversidad y sea* d_δ *su métrica inducida, entonces* (X_S,d_δ) *es un espacio métrico completo si y sólo si* (X,δ) *es una diversidad completa.*

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Supongamos que (X_S,d_δ) es un espacio métrico completo. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en (X_S,δ), primero veamos que $\{x_n\}_n$ es también una sucesión de Cauchy en (X_S,d_δ). Para esto tomemos $\varepsilon > 0$, entonces $\exists\, M > 0$ tal que si $N > M$ se tiene

$$\sup_{i_1,\ldots,i_n \geq N} \delta(x_{i_1} * \ldots * x_{i_n}) < \varepsilon$$

y luego por monotonía,

$$\sup_{i_1,i_2\geq N} \delta(x_{i_1} * x_{i_2}) < \varepsilon$$

es decir, $d_\delta(x_{i_1}, x_{i_2}) < \varepsilon$, lo que quiere decir que $\{x_n\}_n$ es de Cauchy en (X_S, d_δ).
Como (X_S, d_δ) es completo y $\{x_n\}_n$ es de Cauchy entonces $\exists\ z \in X_S$ tal que $x_n \to z$.
Ahora veamos que $\{x_n\}_n$ converge a z en (X_S, δ).
Sea $\varepsilon > 0$ entonces $\exists\ N_1 > 0$ tal que $d_\delta(x_n, z)$ para todo $n > N_1$. Además, como $\{x_n\}_n$ es de Cauchy en (X_S, δ), $\exists\ N_2 > 0$ tal que si $n_1, ..., n_m \geq N_2$ se tiene $\delta(x_{n_1} * ... * x_{n_m}) < \varepsilon$.
Luego, si $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ se tiene para todo $n_1, ..., n_m \geq N$,

$$\begin{aligned}\delta(z * x_{n_1} * ... * x_{n_m}) &\leq \delta(z * x_{n_1}) + \delta(x_{n_1} * ... * x_{n_m}) \\ &= d_\delta(z, x_{n_1}) + \delta(x_{n_1} * ... * x_{n_m}) < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Y por lo tanto, $x_n \to z$ en (X_S, δ). Esto quiere decir que (X, δ) es una diversidad completa.

- ($\Leftarrow$) Supongamos que (X_S, δ) es una diversidad completa. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en (X_S, d_δ). Entonces por la proposición (2.5.7) hay una subsucesión $\left\{x_{i_n}\right\}_n$ que es de Cauchy en (X_S, δ) y como (X_S, δ) es completa entonces hay un $z \in X_S$ tal que $x_{i_n} \to z$ en (X_S, δ). Pero $x_{i_n} \to z$ en (X_S, d_δ) ya que $d_\delta(x_{i_n}, z) = \delta(x_{i_n} * z) \leq \delta(x_{i_{k_1}} * x_{i_{k_2}} * ... * x_{i_{k_m}} * z) < \varepsilon$ para $i_{k_1}, i_{k_2}, ..., i_{k_m} \geq N$ con N suficientemente grande. Por lo tanto para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene, para n, m suficientemente grande,

$$d_\delta(x_n, z) \leq d_\delta(x_n, x_{i_m}) + d_\delta(x_{i_m}, z) < \varepsilon$$

ya que $d_\delta(x_n, x_{i_m})$ es arbitrariamente pequeño ya que $\left\{x_{i_n}\right\}_n$ es de Cauchy en (X_S, d_δ), $d_\delta(x_{i_m}, z)$ es arbitrariamente pequeño ya que $\left\{x_{i_n}\right\}_n$ converge a z en (X_S, d_δ). Entonces (X, d_δ) es un espacio métrico completo.

□

CAPÍTULO 3

DIVERSIDADES INFINITAS

Como ya vimos en el capítulo 1 las diversidades están definidas en subconjuntos finitos. En el capítulo 2, entre otras cosas, generalizamos el trabajo de [1] y [8] sobre diversidades a semiretículas join finitamente generadas. En este capítulo veremos que es posible quitar la restricción de que las diversidades estén definidas solamente en los subconjuntos finitos y las definiremos en una clase de subconjuntos de X más grande que la clase de subconjuntos finitos, la cual incluye conjuntos infinitos.

En el caso clásico de diversidad es natural poner la restricción de los subconjuntos finitos ya que en las aplicaciones estos son los ejemplos útiles. Sin embargo, al considerar grafos o árboles infinitos (consultar por ejemplo [30]) puede surgir la necesidad por quitar esta restricción.

Definición 3.0.9. *Sea $X \neq \emptyset$ y $\delta : 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ una función que satisface que $\delta(A) = 0 \Leftrightarrow |A| \leq 1$. Sea*

$$\mathscr{B}_\delta(X) = \{A \subset X \,|\, \delta(A) < \infty\}$$

llamaremos a esta familia de subconjuntos de X, los conjuntos acotados de δ, además supondremos que $P_{fin}(X) \subset \mathscr{B}_\delta(X)$. Sea $\widetilde{\mathscr{B}}_\delta(X) \subset \mathscr{B}_\delta(X)$ un subconjunto maximal cerrado bajo la unión finita de conjuntos (en la siguiente proposición probaremos que dicho maximal existe). Si la restricción $\delta : \widetilde{\mathscr{B}}_\delta(X) \to \mathbb{R}^+$ satisface

1. *$\delta(A \cup C) \leq \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)$ para cualesquiera $A, B, C \in \widetilde{\mathscr{B}}_\delta(X)$, $B \neq \emptyset$.*

2. *$A \subset B \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$.*

entonces llamaremos a (X,δ) *una* diversidad infinita.

Proposición 3.0.10. *Sea* $\mathscr{B}_\delta(X)$ *como en la definición anterior y*

$$\mathbf{P} = \left\{\mathscr{A} \subset \mathscr{B}_\delta(X) \,\middle|\, \mathscr{A} \text{ es cerrado bajo la unión finita de conjuntos}\right\}.$$

Entonces $\mathbf{P}$ *tiene al menos un elemento maximal.*

Demostración. $\mathbf{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado bajo la inclusión. Demostraremos que cada cadena (es decir, cada subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior en $\mathbf{P}$, luego el lema de Zorn garantiza la existencia de un elemento maximal.

Sea $\mathbf{P}' \subset \mathbf{P}$ una cadena y sea $\mathscr{B} = \bigcup_{\mathscr{P}\in\mathbf{P}'} \mathscr{P}$. Claramente $\mathscr{P} \subset \mathscr{B}$ para cualquier $\mathscr{P} \in \mathbf{P}'$ y luego $\mathscr{B}$ es cota superior de $\mathbf{P}'$. Ahora veamos que $\mathscr{B} \in \mathbf{P}$, para esto se debe de cumplir que $\delta(B) < \infty$ para cualquier $B \in \mathscr{B}$ y que $\mathscr{B}$ sea cerrado bajo la unión finita.

Sean $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ entonces $\exists \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2 \in \mathbf{P}'$ tales que $B_1 \in \mathscr{P}_1$ y $B_2 \in \mathscr{P}_2$, como $\mathbf{P}'$ es totalmente ordenado entonces $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}_2$ o $\mathscr{P}_2 \subset \mathscr{P}_1$, supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}_2$ entonces $B_1, B_2 \in \mathscr{P}_2$ y como $\mathscr{P}_2$ es cerrado bajo la unión finita entonces $B_1 \cup B_2 \in \mathscr{P}_2 \subset \mathscr{B}$ y entonces $\mathscr{B}$ es cerrado bajo la unión finita.

Sea $B \in \mathscr{B}$ entonces $B \in \mathscr{P}$ para algún $\mathscr{P} \in \mathbf{P}'$ y como $\mathscr{P} \subset \mathscr{B}_\delta(X)$ se tiene $\delta(B) < \infty$. Entonces $\mathscr{B} \in \mathbf{P}$ y por el lema de Zorn se tiene el resultado. □

Observación 3.0.11. *Con el término* diversidad infinita *nos referimos a que la función se puede evaluar en conjuntos de cardinalidad infinita. No nos referimos a que la función diversidad pueda tomar valores infinitos, de hecho la restricción al dominio* $\widetilde{\mathscr{B}}_\delta(X)$ *impide que tome valores infinitos.*

Ejemplo 3.0.12.

1. *Sea* (X,d) *un espacio métrico, para* $A \subset X$ *sea* $\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$. *En este caso es claro que* $\mathscr{B}_\delta(X)$ *está formado por los conjuntos acotados de* X. *Como la unión de dos conjuntos acotados es acotado, entonces* $\widetilde{\mathscr{B}}_\delta(X) = \mathscr{B}_\delta(X)$. *Además, por definición,* δ *satisface la desigualdad del triángulo para diversidades y la condición de monotonía. A esta diversidad la seguiremos llamando diversidad de diámetro.*

2. *Sea* (X,d) *un* $\mathbb{R}$*-árbol, sabemos que* X *es infinito. Sea* δ_t *la diversidad de árbol real definida en la sección (1.4), esta función está definida para subconjuntos finitos de* X. *Sea* $\widetilde{\delta}_t$ *la extensión de* δ_t *a todos los subconjuntos de* X. *Si* $a,b \in X$ *son tales que* $[a,b] \subset X$ *entonces* $\widetilde{\delta}_t([a,b]) = \mu([a,b]) = d(a,b) < \infty$ *entonces, si* $\mathscr{G}$ *es el conjunto de todos los*

segmentos geodésicos de X acabamos de ver que $\mathscr{G} \subset \mathscr{B}_{\delta_t}(X)$. Además es claro que si tenemos dos segmentos geodésicos la unión de ellos es un conjunto con medida finita, por lo cual también tenemos que $\mathscr{G} \subset \widetilde{\mathscr{B}}_{\delta_t}(X)$. Con esto hemos visto que también podemos extender directamente la diversidad de árbol real a ciertos conjuntos infinitos.

Las demostraciones de las siguientes proposiciones son idénticas al caso finito de la sección anterior.

Proposición 3.0.13. *Si $A, B \in \widetilde{\mathscr{B}}_{\delta}(X)$ son tales que $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.*

Proposición 3.0.14. *Sea (X, δ) una diversidad infinita, si $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ está definida como $d(x, y) = \delta(\{x, y\})$ entonces (X, d) es un espacio métrico.*

Proposición 3.0.15. *Sea (X, δ) una diversidad infinita, definimos $d_{2,\delta} : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ dada por*

$$d_{2,\delta}(x, y, z) = \delta(\{x, y, z\})$$

entonces $d_{2,\delta}$ es una 2-semimétrica sobre X.

Proposición 3.0.16. *Sea (X, δ) una diversidad infinita, definimos $d_{n,\delta} : X^{n+1} \to \mathbb{R}^+$ dada por*

$$d_{n,\delta}(x_1, ..., x_{n+1}) = \delta(\{x_1, ..., x_{n+1}\})$$

entonces $d_{n,\delta}$ es una n-semimétrica y una n-distancia sobre X.

Observación 3.0.17. *Como podemos ver si tomamos la restricción de una diversidad infinita a $P_{fin}(X)$ tenemos una diversidad en el sentido clásico de [1].*

En la siguiente sección construiremos una medida exterior usando una diversidad infinita, la cual no podría ser construida usando la diversidad clásica definida sólo sobre subconjuntos finitos.

3.1. La medida de Hausdorff

La medida de Hausdorff s-dimensional es una medida exterior definida en un espacio métrico. La medida 0-dimensional de Hausdorff de un conjunto es el número de puntos del conjunto (e infinito, si el conjunto es infinito), la medidad 1-dimensional de una curva simple es la longitud de la curva, y la medida 2-dimensional de un conjunto medible en $\mathbb{R}^2$ es proporcional a su área. El concepto de la medida de Hausdorff generaliza la longitud, el área, volumen, etc. ya que también tenemos medidas de Hausdorff s-dimensionales para cuando s no es necesariamente un entero.

Se puede consultar [22] ó [14] para ver detalladamente la construcción y propiedades de la medida s-dimensional de Hausdorff. La definición de la medida se hace usando el diámetro de conjuntos. Como ya vimos en el primer capítulo, la función diámetro es una diversidad, por lo que surge la pregunta de si podemos sustituir el diámetro en la definición por una diversidad arbitraria. Esto es lo que haremos en esta sección.

Por el resto de la sección sea $X \neq \emptyset$ y δ una diversidad infinita definida sobre $\widetilde{\mathscr{B}}_\delta(X)$.

Definición 3.1.1. *Sea $Y \subset X$, decimos que $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un ε-cubrimiento de Y si,*

(I) $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es una colección numerable de elementos de* $\widetilde{\mathscr{B}}_\delta(X)$.

(II) $Y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$

(III) $\delta(Y_i) < \varepsilon$.

Si $Y \subset X$, en general no se puede garantizar que Y tenga un ε-cubrimiento. Sea $\mathscr{C}^\varepsilon \subset 2^X$ la colección de todos los subconjuntos de X que tienen al menos un ε-cubrimiento.

Observación 3.1.2. *$\mathscr{C}^\varepsilon$ es cerrado bajo la unión ya que si $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son dos ε-cubrimientos de Y y X respectivamente entonces $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es ε-cubrimiento de $X \cup Y$.*

Es claro que si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ entonces $\mathscr{C}^{\varepsilon_1} \subset \mathscr{C}^{\varepsilon_2}$, ya que un ε_1-cubrimiento es también un ε_2-cubrimiento. Sea

$$\mathscr{C} := \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} \mathscr{C}^\varepsilon$$

Proposición 3.1.3. *$P_{fin}(X) \subset \mathscr{C}^\varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$, en consecuencia $P_{fin}(X) \subset \mathscr{C}$ y luego $\mathscr{C} \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $A \in P_{\text{fin}}(X)$, sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Sea,

$$Y_i = \begin{cases} \{a_i\} & i = 1, \dots, n \\ \emptyset & i > n. \end{cases}$$

Entonces, como $\delta(\{a_i\}) = 0 < \varepsilon$, $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un ε-cubrimiento de A. □

Sean $\varepsilon > 0$ y $s \geq 0$, sea $\psi_\varepsilon^s : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ dada por

$$\psi_\varepsilon^s(A) = \text{ínf}\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta(Y_i)^s \mid \{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ es un } \varepsilon\text{-cubrimiento de } A \right\}.$$

Observación 3.1.4. *Si $A \in P_{fin}(X)$ entonces $\psi_\varepsilon^s(A) = 0$ para cualquier $\varepsilon > 0$ y $s > 0$ ya que si tomamos la cubierta usada en la demostración de la proposición (3.1.3), se tiene que $\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta(Y_i)^s = 0$ y luego el ínfimo es 0.*

De la proposición (3.1.3) vemos que $\mathscr{C} \neq \emptyset$ ya que todo $P_{\text{fin}}(X)$ está contenido en él, sin embargo por la observación anterior vemos que ψ_ε^s evaluada en todos esos elementos es cero. En el siguiente ejemplo veremos que en diversidades particulares hay ejemplos de conjuntos que están en $\mathscr{C}$ y donde ψ_ε^s no se anula.

Ejemplo 3.1.5. *A continuación analizaremos el caso de la diversidad de diámetro.*

- ***Diversidad de diámetro.*** *Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, sea $A = \overline{B(x,r)}$ la bola cerrada con centro en $x \in X$ y radio $r > 0$. A es compacto y por lo tanto totalmente acotado, entonces tiene una ε-cubierta finita, además claramente A no tiene medida 0, también podemos ver que $A \notin P_{fin}(X)$.*

Ahora extenderemos la definición de ψ_ε^s de $\mathscr{C}$ a todos los subconjuntos de X de la siguiente manera,

$$\hat{\psi}_\varepsilon^s(A) = \begin{cases} \psi_\varepsilon^s(A) & A \in \mathscr{C} \\ \infty & A \notin \mathscr{C}. \end{cases}$$

Proposición 3.1.6. *$\hat{\psi}_\varepsilon^s$ es una medida exterior en X para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $s > 0$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $s > 0$,

- Claramente $\emptyset \in \mathscr{C}$ y $\hat{\psi}_\varepsilon^s(\emptyset) = 0$.
- Sean $A, B \subset X$ tales que $A \subset B$. Si $B \in \mathscr{C}$ entonces $A \in \mathscr{C}$; y como un ε-cubrimiento de B también es ε-cubrimiento de A tenemos,

$$\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta(U_i)^s \mid \{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \varepsilon\text{-cubrimiento de } B \right\} \subset \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta(U_i)^s \mid \{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \varepsilon\text{-cubrimiento de } A \right\}, \quad (3.1.1)$$

entonces, tomando el ínfimo de ambos conjuntos tenemos,

$$\text{ínf}\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta(U_i)^s \mid \{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \varepsilon\text{-cubrimiento de } B \right\} \geq \text{ínf}\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta(U_i)^s \mid \{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \varepsilon\text{-cubrimiento de } A \right\}, \quad (3.1.2)$$

y luego, $\psi_\varepsilon^s(A) \leq \psi_\varepsilon^s(B)$. Si $B \notin \mathscr{C}$ entonces $\hat{\psi}_\varepsilon^s(B) = \infty$ y luego $\hat{\psi}_\varepsilon^s(A) \leq \hat{\psi}_\varepsilon^s(B)$.

- Sean $A_1, A_2, \ldots \subset X$. Si $A_n \in \mathscr{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $\gamma > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos una ε-cubierta numerable $\mathscr{D}_n$ de A_n tal que,

$$\sum_{U \in \mathscr{D}_n} \delta(U)^s \leq \psi_\varepsilon^s(A_n) + \frac{\gamma}{2^n}.$$

Entonces $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2 \cup \ldots$ es una ε-cubierta numerable de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\psi_\varepsilon^s\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &\leq \sum_{U \in \mathscr{D}} \delta(U)^s \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{U \in \mathscr{D}_n} \delta(U)^s\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_\varepsilon^s(A_n) + \frac{\gamma}{2^n}\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \psi_\varepsilon^s(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_\varepsilon^s(A_n) + \gamma.
\end{aligned}$$

Como lo anterior se satisface para todo $\gamma > 0$ entonces,

$$\psi_\varepsilon^s\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \psi_\varepsilon^s(A_n).$$

Si por el contrario, para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_n \notin \mathscr{C}$ entonces $\hat{\psi}_\varepsilon^s(A_n) = \infty$ y la condición de subaditividad se satisface trivialmente.

De lo anterior concluimos que $\hat{\psi}_\varepsilon^s$ es una medida exterior en X. □

Observación 3.1.7. *Usando la observación (3.1.4) vemos que se puede tener $\psi_\varepsilon^s(A) = 0$ para conjuntos con cardinalidad mayor que 1 así que ψ_ε^s no es una diversidad, por lo tanto una medida exterior, en general, no es una diversidad.*

Proposición 3.1.8. *Si $s < t$ entonces, para cualquier $A \subset X$ se tiene,*

$$\hat{\psi}_\varepsilon^s(A) \geq \varepsilon^{s-t} \hat{\psi}_\varepsilon^t(A).$$

Demostración. Si $A \notin \mathscr{C}$ la desigualdad se satisface trivialmente. Si $A \in \mathscr{A}$, sean $s, t > 0$ tales que $s < t$ y sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ε-cubrimiento de A entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \delta(U_n)^t &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta(U_n)^s \delta(U_n)^{t-s} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta(U_n)^s \varepsilon^{t-s} \\
&= \varepsilon^{t-s} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(U_n)^s,
\end{aligned}$$

luego, tomando infimos tenemos,

$$\varepsilon^{s-t}\psi_\varepsilon^t(A) \leq \psi_\varepsilon^s(A),$$

es decir,

$$\hat{\psi}_\varepsilon^s(A) \geq \varepsilon^{s-t}\hat{\psi}_\varepsilon^t(S).$$

□

Ahora definamos, para $A \subset X$,

$$\psi^s(A) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \psi_\varepsilon^s(A). \tag{3.1.3}$$

Equivalentemente podemos definir ψ^s como

$$\psi^s(A) = \sup_{\varepsilon>0} \psi_\varepsilon^s(A),$$

esta equivalencia se satisface porque ψ_ε^s es decreciente respecto a ε.

Proposición 3.1.9. *ψ^s es una medida exterior para cualquier $s > 0$.*

Demostración. Sea $s > 0$,

(I) $\psi^s(\emptyset) = 0$ ya que, como ya vimos, $\psi_\varepsilon^s(\emptyset) = 0$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

(II) Sean $A \subset B$ dos subconjuntos de X, como $\psi_\varepsilon^s(A) \leq \psi_\varepsilon^s(B)$ para todo $\varepsilon > 0$ entonces, $\psi^s(A) \leq \psi^s(B)$.

(III) Sean $A_1, A_2, ... \subset X$, como ya tenemos la subaditividad para ψ_ε^s entonces, al tomar supremos se tiene,

$$\psi^s\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \psi^s(A_n).$$

Esto demuestra que ψ^s es una medida exterior en X. □

Denotemos,

$$d(E,F) := \inf_{\substack{x\in E \\ y\in F}} d_\delta(x,y).$$

Una medida exterior μ en X es una *medida exterior métrica* si, para cualesquiera $E, F \subset X$ positivamente separados (es decir, $d(E,F) > 0$), se tiene,

$$\mu(E\cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

Teorema 3.1.10. *ψ^s es una medida exterior métrica en X.*

Demostración. Ya demostramos que ψ^s es medida exterior en X. Sean $E, F \subset X$ positivamente separados. Si $E, F \in \mathscr{C}$ entonces $E \cup F \in \mathscr{C}$ tomemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon < d(E, F).$$

Sea $\{U_k\}$ una $\frac{\varepsilon}{2}$-cubierta de $E \cup F$, supongamos que $\exists\, U_n \in \{U_k\}$ tal que

$$U_n \cap E \neq \emptyset \ \text{ y } \ U_n \cap F \neq \emptyset.$$

Sea $\tilde{x}_n \in U_n \cap E$ y $\tilde{y}_n \in U_n \cap F$, luego

$$\varepsilon < d(E, F) < d_\delta(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n).$$

Pero como $\tilde{x}_n, \tilde{y}_n \in U_n$ entonces,

$$d_\delta(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \delta(\{\tilde{x}_n, \tilde{y}_n\}) \leq \delta(U_n) \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

De lo anterior tenemos que $\varepsilon < d_\delta(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) < \varepsilon$, esta contradicción nos indica que no existe dicho U_n que intersecte a E y F simultáneamente. Entonces, para cualquier $s > 0$ y cualquier $\varepsilon < d(E, F)$,

$$\psi^s_\varepsilon(E \cup F) = \psi^s_\varepsilon(E) + \psi^s_\varepsilon(F)$$

y tomando supremos tenemos,

$$\psi^s(E \cup F) = \psi^s(E) + \psi^s(F).$$

Si $E \notin \mathscr{C}$ ó $F \notin \mathscr{C}$ (supongamos, sin pérdida de generalidad que $E \notin \mathscr{C}$) entonces $\psi^s_\varepsilon(E) = \infty$ y por monotonía, $\psi^s_\varepsilon(E \cup F) = \infty$, por lo tanto trivialmente tenemos,

$$\psi^s_\varepsilon(E \cup F) = \psi^s_\varepsilon(E) + \psi^s_\varepsilon(F)$$

para cualquier $\varepsilon > 0$, entonces,

$$\psi^s(E \cup F) = \psi^s(E) + \psi^s(F).$$

$\square$

La restricción de ψ^s a los conjuntos ψ^s-medibles la llamamos la *medida s-dimensional de Hausdorff respecto a la diversidad δ*.

Consideremos un $A \subset X$, ahora estudiaremos el comportamiento de $\psi^s(A)$ vista como una función de $s > 0$. Para esto retomemos la proposición (3.1.8) y tomemos $s, t > 0$ tales que $s < t$. Tenemos varios casos:

- Supongamos que para algún s se tiene $\psi^s(A) < \infty$, de la proposición (3.1.8) tenemos,

$$\begin{aligned} \psi^t_\varepsilon(A) &\leq \varepsilon^{t-s}\psi^s_\varepsilon(A) \\ \psi^t(A) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \psi^t_\varepsilon(A) &\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\varepsilon^{t-s}\psi^s_\varepsilon(A)\right) \\ &= \left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{t-s}\right)\psi^s(A) = 0 \end{aligned}$$

  y luego, $\psi^t(A) = 0$.

- Supongamos ahora que $\psi^t(A) > 0$. Tenemos dos casos:

  - Si $\psi^t(A) = \infty$ entonces,

  $$\psi^s(A) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \psi^s_\varepsilon(A) \geq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\varepsilon^{s-t}\psi^t_\varepsilon(A)\right) = \infty,$$

    y luego, $\psi^s(A) = \infty$.

  - Si $\psi^t(A) < \infty$ entonces,

  $$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^{t-s}}\psi^t_\varepsilon(A) &\leq \psi^s_\varepsilon(A) \\ \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^{t-s}}\psi^t_\varepsilon(A) &\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \psi^s_\varepsilon(A) = \psi^s(A), \end{aligned}$$

    y luego,$\psi^s(A) = \infty$.

De esto concluimos que si $\exists\, s_0 > 0$ tal que $\psi^{s_0}(A)$ es finito se tiene,

$$\psi^s(A) = \begin{cases} \infty & 0 < s < s_0 \\ 0 & s_0 < s < \infty. \end{cases}$$

No sabemos, a priori el valor de $\psi^{s_0}(A)$. A s_0 lo denotaremos por $dim_\delta(A)$ y lo llamaremos la dimensión de Hausdorff de A respecto a la diversidad δ.

En la figura (3.1.1) vemos como se comporta la gráfica de $\psi^s(A)$ vista como función de s para un A fijo.

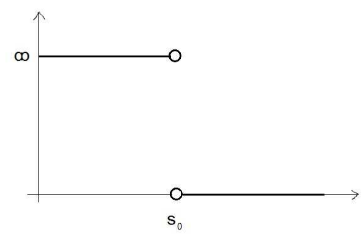


Figura 3.1.1: $\psi^s(A)$ como función de s.

Cuando se construye la medida s-dimensional de Hausdorff se definen los conjuntos fractales en función de la dimensión de Hausdorff. A continuación definiremos de manera análoga este concepto para la medida que hemos construido.

Definición 3.1.11. *Decimos que* $A \subset X$ *es un conjunto fractal respecto a la diversidad* δ*, si* $dim_\delta(A) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Observación 3.1.12. *En esta sección hemos visto que si tenemos una diversidad infinita* $(\widetilde{\mathscr{B}}_\delta(X), \delta)$ *podemos obtener una medida exterior* $\psi^s(A)$ *para cada* $s > 0$*. Si* X *es un* $\mathbb{R}$*-árbol y si tomamos* $s = 1$ *obtenemos la medida 1-dimensional de Hausdorff respecto a la diversidad* δ*, usando esta medida exterior podemos construir una nueva diversidad real de árbol usando la construcción de la sección (1.4).*

CONCLUSIONES

Resultados de la tesis

En este trabajo obtuvimos los siguientes resultados:

1. Encontraron ejemplos propios de diversidades diferentes a los dados en [1] y obtuvimos diversidades a partir de otras diversidades dadas.

2. Profundizamos la relación entre diversidades y funciones métricas al demostrar que una diversidad restringida a conjuntos de cardinalidad n es una $n-1$-semimétrica y una n-distancia.

3. Generalizamos la noción de diversidad a semiretículas finitamente generadas. Construimos el tight-span en este contexto y demostramos que el conjunto base de la semiretícula original se encaja en T_S, además T_S es una diversidad hiperconvexa, al igual que en el caso de [1].

4. Empezamos a extender el trabajo hecho en [8] al caso de semiretículas finitamente generadas definiendo la completitud en el conjunto base usando la diversidad de la semiretícula en lugar de la métrica inducida, probando que ambos conceptos son equivalentes.

5. Quitamos la restricción de que la diversidad esté definida solamente en conjuntos finitos, definiendola en una clase más grande subconjuntos que incluye ciertos conjuntos infinitos.

6. Usando esta noción de diversidad infinita definimos una generalización de la medida s-dimensional de Hausdorff usando una diversidad arbitraria en lugar del diámetro de conjuntos.

Preguntas abiertas

1. ¿Podemos extender el concepto de diversidad a semiretículas arbitrarias conservando los mismos resultados para el tight-span?

2. En el capítulo 3 faltó extender la noción de Tight-Span para diversidades infinitas de manera que se mantengan los resultados del encaje e hiperconvexidad de [1].

3. ¿Se pueden extender los resultados de [8] a diversidades infinitas?

4. Al considerar los conjuntos fractales respecto a una diversidad, ¿Hay una relación entre los conjuntos fractales usuales y los definidos usando una diversidad?

5. ¿Existen teoremas de punto fijo para diversidades? En [31] se da un teorema de punto fijo para funciones en X con la métrica inducida en función de ciertas hipótesis de la diversidad.

BIBLIOGRAFÍA

[1] D. Bryant & P. F. Tupper.
Hyperconvexity and tight-span theory for diversities.
Advances in Mathematics 231 (2012) 3172-3198.

[2] L. Libkin, V. Gurvich.
Trees as Semilattices.
Discrete Mathematics 145 (1995) 321-327.

[3] Steven N. Evans.
Probability and Real Trees.
École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXV - 2005.

[4] Alfred Tarski.
A Lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications.
Pacific J. Math. Volume 5, Number 2 (1955), 285-309.

[5] P. D. Andreev.
Semilinear metric semilattices on $\mathbb{R}$*-trees.*
Russian Mathematics, Volume 51, Number 6 (2007), 1-10.

[6] L. Ćirić, B. Samet, H. Aydi & C. Vetro.
Common fixed points of generalized contractions on partial metric spaces and an application.
Applied Mathematics and Computation 218 (2011) 2398-2406.

[7] A. Aliouche, C. Simpson.
Fixed points and lines in 2-metric spaces.
Advances in Mathematics 229 (2012) 668-690.

[8] Andrew Poelstra.
On the topological and uniform structure of diversities.
Journal of Function Spaces and Applications (2013). http://dx.doi.org/10.1155/2013/675057.

[9] S. Gähler.
Untersuchungen über verallgemeinerte m-metrische Räume. Math. Nachr. 40 (1969) 165-189.

[10] Peter Meyer-Nieberg.
Banach Lattices.
Springer-Verlag, 1991.

[11] C. Semple, M. Steel.
Phylogenetics.
Ofxord University Press, 2003.

[12] M. T. Barlow, S. J. Taylor.
Fractional dimension of sets in discrete spaces.
J. Phys. A: Math. Gen. 22 (1989) 2621-2626.

[13] M. T. Barlow, S. J. Taylor.
Defining Fractals subsets of $\mathbb{Z}^d$.
Oxford University Press, 1990.

[14] Gerald Edgar.
Measure, Topology and Fractal Geometry.
Springer, 2000.

[15] B. A. Davey, H. A. Priestley.
Introduction to Lattices and Order.
Cambridge University Press, 2002.

[16] Matthijs J. Warrens.
n-Way Metrics.
Journal of Classification (Springer), September 2010, Volume 27, Issue 2, pp 173-190.

[17] Klaus Nehring, Clemens Puppe.
Modelling phylogenetic diversity.
Resource and Energy Economics 26 (2004), 205-235.

[18] Klaus Nehring, Clemens Puppe.
A Theory of Diversity.
2001.

[19] S. Joly, G. Le Calvé.
Three-way distances.
Journal of Classification 12 (1995), 191-205.

[20] M. M. Deza, I. G. Rosenberg.
n-Semimetrics.
Europ. J. Combinatorics 21 (2000), 797-806.

[21] Micha A. Perle, Horst Martini, Yaakov S. Kupitz.
On the polygonal diameter of the interior, resp. exterior, of a simple closed polygon in the plane.
Discrete Applied Mathematics 161 (2013) 1576-1585.

[22] K. J. Falconer.
The geometry of fractal sets.
Cambridge University Press, 1985.

[23] S. Herrmann, V. Muolton.
Trees, tight-spans and point configurations.
Discrete Mathematics, 312 (2012), 2506-2521.

[24] Daniel P. Faith.
Conservation Evaluation and Phylogenetic Diversity.
Biological Conservation, 61 (1992), 1-10.

[25] K. Menger.
Untersuchungen über allgemeine Metrik.
Math. Ann. 100 (1928), 75-163.

[26] S. G. Matthews.
Partial Metric Topology.
Annals of the New York Academy of Sciences, 728 (1994), 183âĂŞ197.

[27] A. W. M. Dress, W. F. Terhalle.
The Real Tree.
Advances in Mathematics, 120 (1996), 283âĂŞ301.

[28] A. W. M. Dress.
Trees, tight extensions of metric spaces, and the cohomological dimension of certain groups: a note on combinatorial properties of metric spaces.
Advances in Mathematics, 53 (1984), 321-402.

[29] J.R. Isbell.
Six theorems about injective metric spaces.
Commentarii Mathematici Helvetici, 39-1 (1964-1965), 65-76.

[30] Reinhard Diestel (ed.)
Directions in Infinite Graph Theory and Combinatorics.
Topics in Discrete Mathematics 3, Elsevier - North Holland 1992.

[31] Rafa Espínola, Bożena Piatek
Diversities, Hyperconvexity and fixed points.
Nonlinear Analysis 95, Elsevier (2014), 229-245.