Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Explosión en norma L^p de ecuaciones estocásticas de reacción-difusión

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

con Orientación en

Probabilidad y estadística

P r e s e n t a

Miríam Guadalupe Báez Hernandez

Director de Tesis:

Dr. José Alfredo López Mimbela

Guanajuato, Gto.. Septiembre de 2014

Integrantes del jurado

Presidente: Dr. Antonio Murillo Salas
Secretario: Dr. Aroldo Pérez Pérez
Vocal y director de tesis: Dr. José Alfredo López Mimbela

Director de Tesis:

____
Dr. José Alfredo López Mimbela

Explosión en norma L^p de ecuaciones estocásticas de reacción-difusión.

Miríam Guadalupe Báez Hernández

Agradecimientos

A mi familia, por su cariño, valioso apoyo y comprensión en cada decisión que he tomado.

A Ernesto, por su compresión, amistad, amor y por compartir su vida conmigo.

A mis amigos: Adán, Alfredo, Ana, Arturo, Carlos, Flor, George, Gerardo, Ilce, Jairo, Jendry, Johnatan, Jonás, Karen, Lili, Marco, Martha, Mary, Miguel, Robert, Rodrígo, Sandra, Sharo, Tulio y Yareli. Hicieron que mi estancia fuera más agradable y divertida. Un especial agradecimiento a Yessica y Adelki.

A la familia Gabriel Argüelles, por su apoyo, amistad, consejos y por motivarme a continuar mis estudios de posgrado.

Al Dr. José Alfredo López Mimbela, por el apoyo para hacer posible este trabajo, orientación y sus valiosos consejos.

A mis sinodales, los Dres. Antonio Murillo Salas y Aroldo Pérez Pérez, por el tiempo dedicado para la revisión de este trabajo, así como las contribuciones para mejorarlo.

A la Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska, por su ayuda, paciencia y dedicación durante mi primer año en la maestría.

Al CONACYT, por brindarme apoyo económico para poder llevar acabo mis estudios de posgrado.

A CIMAT, por todo el apoyo brindado durante mis estudios.

Para finalizar, hago mención que este trabajo forma parte del proyecto CONACYT No. 157772, Sistemas Estocásticos No Lineales, dirigido por el Dr. José Alfredo López Mimbela.

Índice general

Introducción

En el presente trabajo se estudia el problema de la no existencia de soluciones globales para una clase de ecuaciones de reacción-difusión del tipo de Itô, de la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) + \sigma(u(x,t))\partial_t W(x,t), \quad t > 0,\\
u(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathcal{D},\\
u(x,t) &= 0, \quad x \in \partial\mathcal{D},
\end{aligned}$$

donde Δ es el operador de Laplace en un dominio acotado $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ con frontera suave $\partial\mathcal{D}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ es una función no lineal, σ es una función dada y $W(x,t)$ es un campo aleatorio de Wiener en dimensión 1. La condición inicial g se supondrá medible y no negativa. Es decir, se busca determinar condiciones sobre el estado inicial g, el término no lineal f y el ruido multiplicativo $W(x,t)$, bajo las cuales las soluciones positivas de la ecuación anterior exploten en norma L^p en un tiempo finito, donde $p \geq 1$.

La presente tesis se basa en los artículos fundamentales de P.L. Chow [3] y [4], donde, además de los casos que aquí expondremos, se estudian ecuaciones parciales estocásticas sobre $\mathbb{R}^d$, así como ecuaciones cuyos coeficientes dependen del gradiente ∇u de la función incógnita u. La motivación de la autora al escribir este trabajo, así como su contribución, consistió en presentar de forma unificada y accesible los métodos más representativos de este interesante tema.

El interés en estudiar este tipo de problemas se origina en las diversas aplicaciones de las versiones determinísticas de esta clase de ecuaciones, las cuales surgen como modelos matemáticos en áreas como dinámica poblacional, teoría de la combustión, propagación de especies, etc. Ver por ejemplo [1] y [2].

El trabajo previo sobre explosión en tiempo finito de ecuaciones de reacción-difusión en un dominio acotado con condición de Dirichlet en la frontera se remonta a 1963, cuando S. Kaplan demostró por primera vez que, para una cierta clase de funciones no lineales f, la norma $\|\cdot\|_\infty$ de la solución de la ecuación diferencial explota en un tiempo finito siempre que el estado inicial g y la función no lineal f satisfagan condiciones apropiadas. Posteriormente este resultado fue generalizado por Fujita y por muchos otros autores más. Desde entonces, se conoce que las soluciones a esta clase de ecuaciones pueden desarrollar singularidades en un tiempo finito, ver [17], [16], [23] y [26].

Existe una amplia literatura sobre el tema de explosión de soluciones de ecuaciones de reacción-difusión determinísticas [17] y [16]. En el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias estocásticas existen resultados generales sobre la explosión y la no explosión de sus soluciones [10], sin embargo hasta el momento se ha estudiado poco este tipo de comportamientos para ecuaciones diferenciales parciales estocásticas generales debido a las dificultades técnicas que presenta el análisis estocástico en dimensión infinita. Para algunos casos especiales de funciones f y σ se ha podido determinar la probabilidad de la existencia de soluciones globales, así como la probabilidad de que cualquier solución sea local.

Basándose en la revisión de varios artículos pioneros en este tema [3] y [4], el propósito de este trabajo es presentar de forma accesible y razonablemente autocontenida los conceptos, las herramientas y los resultados principales sobre explosión en norma L^p de las soluciones positivas de ecuaciones diferenciales parciales estocásticas.

El tratamiento aquí expuesto se centra en un tipo especial de ecuaciones de reacción-difusión del tipo de

Itô en dimensión infinita, del prototipo dado arriba. En particular, el operador de difusión asociado a la ecuación diferencial es autoadjunto, fuertemente elíptico con coeficientes suaves.

Primero se presentan conceptos y propiedades fundamentales de la teoría de semigrupos lineales de operadores acotados en un espacio de Banach, así como su relación con las ecuaciones de evolución. Posteriormente se pasa a tratar el caso estocástico.

En el caso determinista estudiaremos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones locales y globales, donde es de destacar que para ecuaciones con término no lineal f, una condición crucial es que f sea continua de Lipschitz.

Para tratar el caso estocástico se introducen primeramente nociones probabilísticas básicas, como la integral estocástica y los campos aleatorios de Wiener. Después, pasamos a considerar ecuaciones lineales con ruido aditivo para, finalmente, estudiar ecuaciones de reacción-difusión.

Al igual que en la mayoría de problemas relacionados con ecuaciones diferenciales, en el análisis de ecuaciones de reacción-difusión lo primero que se presenta son resultados para la existencia y unicidad de soluciones. Una vez hecho esto, nos encaminamos a los dos objetivos principales del trabajo: a) el estudio de condiciones en los parámetros de la ecuación a estudiar que sean suficientes para que las soluciones sean positivas y b) el análisis de condiciones suficientes para la existencia de soluciones positivas cuya norma L^p explote en tiempo finito. Primeramente se examinan condiciones suficientes para que las soluciones a esta clase de ecuaciones sean positivas; estas condiciones atañen a los términos f, σ, y a las condiciones iniciales.

Posteriormente estudiamos el comportamiento explosivo de soluciones positivas, enfocando nuestro análisis al comportamiento de sus normas L^p. De este análisis se desprenden dos conjuntos de condiciones suficientes para explosión en norma L^p. El primer conjunto de condiciones afecta principalmente al término no lineal f, mientras que el otro conjunto de condiciones concierne mayormente al ruido multiplicativo. Con base en estos conjuntos de hipótesis obtendremos dos resultados acerca de la explosión en norma L^p de las soluciones de ecuaciones.

Notación

Símbolo	**Signifiado**
c.s.	Casi seguramente
c.d.	Casi donde quiera
$\mathbb{N}$	$\{1,2,\dots\}$
$\mathbb{R}^d$	Espacio euclidiano de dimensión $d \in \mathbb{N}$
C_0	Semigrupo fuertemente continuo
$\mathcal{D}$	Dominio acotado de $\mathbb{R}^d$
$\partial\mathcal{D}$	Frontera de $\mathcal{D}$
A	Operador acotado
$\rho(A)$	Resolvente del operador A
H	Espacio de Hilbert
X	Espacio de Banach
$C[0,\infty)$	$\{f : [0,\infty) \to \mathbb{R} : f$ es continua y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe y es finito $\}$
A^*	Adjunto de A
$B(V,W)$	$\{S : V \to W,\ S$ es lineal y continua$\}$
H^k	$\{\varphi \in L^2 : \varphi$ tiene derivadas parciales generalizadas hasta de orden $k\}$
$L^2(\mathcal{D})$	Espacio de las funciones cuadrado integrables en $\mathcal{D}$
HS	Hilbert-Schmidt
R	Operador nuclear
TrR	Traza de un operador nuclear
W_t	Proceso de Wiener
$r(x,y)$	Función de covarianza
Δ	Operador de Laplace
λ_k	$k-$ésimo valor propio
e_k	$k-$ésima función propia asociada al valor propio λ_k

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es presentar algunos conceptos y resultados que desempeñan un papel importante para el desarrollo del trabajo. Se comenzará con definiciones y conceptos básicos de la teoría de semigrupos, después en la sección 2 se introducen los semigrupos autoadjuntos, y además se dan condiciones para las cuales un semigrupo bajo cierto tipo de perturbación sea nuevamente semigrupo. La teoría de semigrupos es fundamental para el estudio de ecuaciones diferenciales, debido a que el problema de valores iniciales se dice que está bien puesto si el operador asociado genera un semigrupo fuertemente continuo en X; ver teorema 2.1.2. El contenido de este capítulo puede consultarse en [21], [9], [27], [18], [14], [29] y [12].

1.1. Teoría de semigrupos

Definición 1.1.1 *Una familia $\mathcal{T} = \{T_t = T(t), 0 \leq t < \infty\}$ de operadores lineales, definidos en un espacio de Banach X, es llamada semigrupo C_0 (ó semigrupo fuertemente continuo) si*

(i) $\| T(t) \| < \infty$, *para $t \geq 0$, es decir,*

$$\sup\{\| T(t)f \| : f \in X, \| f \| < \infty\} < \infty, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(ii) $T(t+s)f = T(t)T(s)f$, *para todo $f \in X$, y para todo $t, s \geq 0$.*

(iii) $T(0)f = f$, *para todo $f \in X$.*

(iv) $t \to T(t)f$ *es una función continua de t, para cada $f \in X$.*

$\mathcal{T}$ es un semigrupo de contracciones C_0 si además

(v) $\| T(t)f \| \leq \| f \|$, *para todo $f \in X$, y para todo $t \geq 0$, es decir, si $\| T(t) \| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.*

El generador (infinitesimal) de $\mathcal{T}$ es el operador A dado por

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t}, \quad \text{para todo } \ f \in \mathcal{D}(A), \quad \text{donde} \quad \mathcal{D}(A) = \left\{ f \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existe } \right\}.$$

Notar que si $u(t) = T_t f$, $t \geq 0$, entonces

$$\frac{u(t+s) - u(t)}{s} = \frac{T(t+s)f - T(t)f}{s} = \frac{T(s)h - h}{s}, \quad \text{donde} \quad h = T(t)f.$$

Por lo tanto, al hacer s tender a 0, y suponiendo que $h \in \mathcal{D}(A)$, se obtiene

$$\frac{d}{dt} u(t) = Ah = A[T(t)f] = Au(t).$$

El siguiente resultado da expresiones explícitas del semigrupo para generadores acotados.

Teorema 1.1.2 *Sea* $A \in B(X) = \{L : X \to X,\ L \text{ lineal y } \parallel L \parallel < \infty\}$. *Entonces*

$$\mathcal{T} = \left\{ T(t) = e^{tA} = \sum_{n\geq 0} \frac{(tA)^n}{n!}; \quad t \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

es semigrupo C_0 *tal que* $\parallel T(t) - I \parallel \to 0, \quad t \to 0$, *y además* A *es el generador de* $\mathcal{T}$.
Recíprocamente, si $\mathcal{T} = \{T(t), t \geq 0\}$ *es semigrupo* C_0 *que cumple*

$$\lim_{t\to 0} \parallel T(t) - I \parallel = 0,$$

entonces el generador A *de* $\mathcal{T}$ *es acotado y* $T(t) = e^{tA}$, *para todo* $t \geq 0$.

Demostración Considerar $\quad S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(tA)^n}{n!}, \quad$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Si $M \in \mathbb{N}$,

$$\parallel S_{N+M}(t) - S_N(t) \parallel \;=\; \left\| \sum_{n=N+1}^{N+M} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+M} \frac{t^n \parallel A \parallel^n}{n!} \to 0, \quad \text{si} \quad N \to \infty,$$

y entonces $S_N(t)$ converge en norma de operador a un límite $T(t)$ debido al criterio de Cauchy. Al evaluar en cero, se tiene $T(0) = I$ y la propiedad de semigrupo se sigue de que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x+y)^p}{p!}.$$

Así, para $t, s \in \mathbb{R}$, para todo $f \in X$,

$$\begin{aligned} T(t)T(s)f &= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(tA)^n}{n!} \right) \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(sA)^n}{n!} \right) f, \\ &= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{[(t+s)A]^n}{n!} \right) f, \\ &= T(t+s)f. \end{aligned}$$

La función $t \to T(s)f$ es continua, ya que si $t \in \mathbb{R}$ y $f \in X$, tomando el límite cuando $s \to t$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{s\to t} T(s)f &= \lim_{s\to t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(sA)^n}{n!} f \right), \\ &= \lim_{s\to t} \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{(sA)^n}{n!} f \right), \\ &= \lim_{k\to\infty} \lim_{s\to t} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{(sA)^n}{n!} f \right), \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{(tA)^n}{n!} f \right), \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} f \right), \\ &= T(t)f. \end{aligned}$$

Además,

$$\| T(t)-I \| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \| A \|^n}{n!} = e^{t\|A\|} - 1 \to 0, \text{ cuando } t \to 0.$$

Análogamente,

$$\left\| \frac{T(t)-I}{t} - A \right\| \leq \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!} \right\| \leq \| A \|^2 \, e^{t\|A\|} t \to 0 \quad \text{si } t \downarrow 0.$$

Por lo tanto, A es el generador de $\mathcal{T}$.

Recíprocamente, sea $B(t)f = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t T(s)f ds$, para $f \in X,\ t > 0$.

Entonces

$$\|B(t)f - f\| = \left\| \frac{1}{t}\int_0^t [T(s)-I]f ds \right\| \leq \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \|T(s)-I\| ds \|f\| < 1,$$

para algún t_0 suficientemente pequeño. Así, para tal $t_0 > 0$, $B(t_0)$ es invertible y por lo tanto $t_0 B(t_0)$ es invertible.

Luego,

$$h^{-1}(T(h)-I) = h^{-1}\left[\int_0^{t_0} T(s+h)ds - \int_0^{t_0} T(s)ds\right]\left[\int_0^{t_0} T(s)ds\right]^{-1},$$

haciendo un cambio de variable tomando $r = s+h$ obtenemos

$$\begin{aligned} &= h^{-1}\left[\int_h^{t_0+h} T(r)dr - \left(\int_0^h T(s)ds + \int_h^{t_0} T(s)ds\right)\right]\left[\int_0^{t_0} T(s)ds\right]^{-1}, \\ &= h^{-1}\left(\int_{t_0}^{t_0+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\right)\left(\int_0^{t_0} T(s)ds\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo que

$$h^{-1}(T(h)-I) \to [T(t_0)-I]\left(\int_0^{t_0} T(s)ds\right)^{-1}, \quad \text{cuando } h \to 0.$$

Teniéndose así que el operador lineal acotado es el generador infinitesimal del semigrupo $T(t)$. Como A es también el generador infinitesimal del C_0-semigrupo $\exp(tA)$ se sigue que $T(t) = \exp(tA)$ para todo $t \geq 0$, ver [21], pp. 3.

■

Observación 1.1.3 *Si $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, $J = [a,b]$ y $h : J \to (X, \|\cdot\|)$, entonces*

$$\frac{dh}{dt}, \quad \int_a^b h(s)ds,$$

se definen igual que en el caso $X = \mathbb{R}$ ó $X = \mathbb{C}$, sólo que los límites son en la norma de X.

Teorema 1.1.4 *Sea $\mathcal{T}$ un semigrupo C_0 de generador A.*

a) *Para todo f en X,* $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f \, ds = T(t)f.$

b) *Para todo f en X,* $\displaystyle\int_0^t T(s)f\ ds \in \mathcal{D}(A)$ *y* $\displaystyle A\left(\int_0^t T(s)f\ ds\right) = T(t)f - f.$

c) *Para todo f en $\mathcal{D}(A)$, $T(t)f \in \mathcal{D}(A)$, y* $\displaystyle\frac{d}{dt}T(t)f = AT(t)f = T(t)Af.$

d) *Para todo f en $\mathcal{D}(A)$,* $\displaystyle T(t)f - T(s)f = \int_s^t T(r)Af\ dr = \int_s^t AT(r)f\ dr.$

Demostración

a) Sea $f \in X$. Debido a que $s \mapsto T(s)f$ es continua, aplicando el teorema fundamental del cálculo resulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)fds = T(t)f.$$

b) Sea $f \in X$, $h > 0$. Debido a que $T(h)$ es continuo (por la condición **(i)** de la Definición 1.1.1), Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)fds &= \frac{1}{h}\int_0^t [T(s+h)f - T(s)f]ds,\\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)fds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)fds,\\
&\to T(t)f - f,
\end{aligned}$$

cuando $h \downarrow 0$, lo cual prueba **b)**.

c) Sean $f \in \mathcal{D}(A)$, $h > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}T(t)f &= \frac{T(h+t)-T(t)}{h}f,\\
&= T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)f,\\
&\to T(t)Af, \text{ si } h \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T(t)f \in \mathcal{D}(A)$ y $AT(t)f = T(t)Af$.

Se ha probado que $\displaystyle\frac{d}{dt}^{+} T(t)f = AT(t)f.$

Para obtener **c)** falta probar que $\displaystyle\frac{d}{dt}^{-} T(t)f = T(t)Af.$

Pero

$$\lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{T(t)f - T(t-h)f}{h} - T(t)Af\right) = \lim_{h\downarrow 0} T(t-h)\left(\frac{T(h)f-f}{h} - Af\right) + \lim_{h\downarrow 0}(T(t-h)Af - T(t)Af),$$

el primer término de la expresión anterior es cero, debido a que $\|T(t-h)\|$ está acotado para todo $h \in [0,t]$ y $f \in \mathcal{D}(A)$. El segundo término es cero por la continuidad fuerte del semigrupo.

d) De **c)** se obtiene que, para $0 \leq s \leq t$,

$$\int_s^t \frac{d}{dr} T(r) f dr = \int_s^t AT(r) f dr = \int_s^t T(r) A f dr,$$

y por lo tanto

$$T(t)f - T(s)f = \int_s^t AT(r) f dr = \int_s^t T(r) A f dr.$$

■

Definición 1.1.5 *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach. Un operador lineal $A : X \to Y$ es cerrado si su gráfica*

$$\mathcal{G}(A) = \{(f, Af) : f \in \mathcal{D}(A)\},$$

es subespacio cerrado de $X \times Y$, o equivalentemente si se cumple la condición

$$f_n \in \mathcal{D}(A), \quad f_n \to f \quad y \quad Af_n \to g, \text{ entonces } \ f \in \mathcal{D}(A) \quad y \quad Af = g.$$

Propiedades 1.1.6 *Sea $A : X \to Y$ cerrado.*

1. *Para todo $B \in B(X, Y)$, donde $B(X, Y) = \{S : X \to Y, S$ es lineal y continua$\}$, $A + B$ con dominio $\mathcal{D}(A)$ es cerrado.*
2. *A^{-1} es cerrado si A es inyectivo.*
3. *A es acotado si $\mathcal{D}(A) = \overline{\mathcal{D}(A)}$.*
4. *Un operador acotado es cerrado si y sólo si su dominio es cerrado.*

Demostración Ver [12], pp. 238.

■

Definición 1.1.7 *Sea $A : X \to X$ lineal. El conjunto resolvente de A es*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \to X \text{ es biyectivo y } (\lambda I - A)^{-1} \in B(X)\},$$

donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, según que $(X, \|\cdot\|)$ sea espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$.

Corolario 1.1.8 *Si A es cerrado,*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \to X \text{ es biyectiva}\}.$$

El operador resolvente de A, $R(\lambda)$ $\lambda \in \rho(A)$, está dado por

$$R(\lambda) \equiv (\lambda - A)^{-1} \equiv (\lambda I - A)^{-1}.$$

El conjunto $\sigma(A) = \mathbb{K} \setminus \rho(A)$ se llama espectro de A.

Demostración Ver [12], pp. 238.

■

Lema 1.1.9 ***Identidad del resolvente.*** *Sea $A : X \to X$ cerrado. Para cualquier $\lambda, \mu \in \rho(A)$ se cumple*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1},$$

y en particular $(\lambda - A)^{-1}$ y $(\mu - A)^{-1}$ conmutan.

Demostración Si $f \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned}(\lambda - A)[(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}](\mu - A)f =& (\mu - A)f - (\lambda - A)f \\ =& (\mu - \lambda)f.\end{aligned}$$

De aquí, multiplicando a la izquierda por $(\lambda - A)^{-1}$ y tomando f de la forma $f = (\mu - A)^{-1}g$, donde g es un elemento del dominio, se obtiene la igualdad deseada. La conmutatividad se obtiene al intercambiar λ por μ.

■

Lema 1.1.10 *Sea $A : X \to X$ cerrado y $h \in C([a, b], X)$ con Rango$(h) \subset \mathcal{D}(A)$ y $Ah \in C([a, b], X)$. Entonces*

$$\int_a^b h(t)dt \in \mathcal{D}(A) \quad y \quad A\int_a^b h(t)dt = \int_a^b Ah(t)dt.$$

Demostración Tomando sumas de Riemann sobre una partición del intervalo $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$,

$$f = \int_a^b h(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} h(t_i)(t_i - t_{i-1}),$$

$$g = \int_a^b Ah(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Ah(t_i)(t_i - t_{i-1}),$$

como

$$A \sum_i h(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_i Ah(t_{i'})(t_i - t_{i-1}),$$

el resultado se sigue de que A es cerrado. Por lo tanto, $f \in \mathcal{D}(A)$ y $Af = g$.

■

Lema 1.1.11 *Un semigrupo C_0 queda determinado por su generador.*

Demostración Si $\{T(t), t \geq 0\}$ y $\{S(t), t \geq 0\}$ son C_0 semigrupos con generador A, para $f \in \mathcal{D}(A)$ y definiendo

$$u : [0, t] \to X \quad \text{por} \quad u(s)f = T(s)S(t - s)f, \quad 0 \leq s \leq t,$$

se tiene entonces

$$\frac{d}{ds}u(s)f = (T(s)A)S(t - s)f + T(s)(-A)S(t - s)f = 0.$$

Lo cual implica que $u(s)f$ es constante en $0 \leq s \leq t$. Por lo tanto,

$$T(t)f = u(t)f = u(0)f = S(t)f, \quad \text{para todo } t \geq 0, \ \text{ para toda } f \in \mathcal{D}(A).$$

Como $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, se sigue que

$$\{T(t), t \geq 0\} = \{S(t), t \geq 0\}.$$

■

Lema 1.1.12 *Si C, D generan, respectivamente semigrupos C_0 de contracciones, $\{u(t), t \geq 0\}$ y $\{v(t), t \geq 0\}$, y además*

$$u(t)v(s) = v(s)u(t), \qquad \text{para todo} \quad s, t \geq 0,$$

entonces para toda $f \in \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$,

$$\|u(t)f - v(t)f\| \leq t\|Cf - Df\|.$$

Demostración Como

$$u(t)f - v(t)f = \int_0^1 \frac{d}{ds}\{u(ts)v[t(1-s)]f\}ds,$$

calculando la derivada dentro de la integral se obtiene

$$= \int_0^1 u(ts)v[t(1-s)]t(Cf - Df)ds.$$

Por lo tanto

$$\|u(t)f - v(t)f\| \quad \leq \quad \int_0^1 t\|Cf - Df\|ds = t\|Cf - Df\|.$$

∎

El Teorema de Hille-Yosida enunciado enseguida, brinda una herramienta que permite caracterizar los operadores que generan semigrupos de contracciones.

Teorema 1.1.13 ***(Teorema de Hille-Yosida)*** *A genera un semigrupo C_0 de contracciones $\{T(t), t \geq 0\}$, si y sólo si A es cerrado, $\mathcal{D}(A)$ es denso, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ y $\quad \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\lambda}, \quad$ para toda $\lambda > 0$.*

Demostración Si $f \in X$, $f_t := \displaystyle\int_0^t T(s)f\ ds \in \mathcal{D}(A)$ y además $\dfrac{1}{t}f_t \to f$, $t \to 0$. Así, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
Si $f_n \in \mathcal{D}(A)$, $f_n \to f$ y $Af_n \to g$, entonces

$$\frac{1}{t}[T(t) - I]f_n = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Af_n\ ds.$$

Por la contuidad de $T(t)$, $\dfrac{1}{t}[T(t) - I]f_n \to \dfrac{1}{t}[T(t) - I]f$. Debido a que

$$\frac{1}{t}\left\|\int_0^t T(s)[Af_n - g]\ ds\right\| \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|T(s)\|\|Af_n - g\|\ ds \leq \|Af_n - g\| \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

Se sigue que $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t T(s)Af_n\ ds \to \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t T(s)g\ ds$, donde $\displaystyle\int_0^t T(s)Af_n\ ds = (T(t) - I)f_n$. Haciendo $t \to 0$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[T(t) - I]f = g \quad \text{y} \quad Af = g.$$

Así, A es cerrado.

Notar que para toda $\lambda > 0$, $\{e^{-\lambda t}T(t)\}_{t\geq 0}$ es semigrupo C_0 de generador $(A - \lambda I)$ cuyo dominio es $\mathcal{D}(A)$. Se tiene entonces

$$-e^{-\lambda t}T(t)f + f = (\lambda - A)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)fds, \quad f \in X, \tag{1.1.1}$$

$$-e^{-\lambda t}T(t)f + f = \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)(\lambda - A)fds. \tag{1.1.2}$$

Notar que

$$\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)fds = \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,t]}(s)e^{-\lambda s}T(s)fds$$

y

$$\|\mathbb{1}_{[0,t]}(s)e^{-\lambda s}T(s)f\| \;\; \leq \;\; \mathbb{1}_{[0,t]}(s)e^{-\lambda s}\|f\| \leq \|f\|e^{-\lambda s}.$$

Además $t \to \|f\|e^{-\lambda t}$ es integrable en $[0,\infty)$. Por el Teorema de convergencia dominada,

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)f\ ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)f\ ds \in X.$$

Haciendo $t \to \infty$ en (1.1.1) y (1.1.2):

$$f = (\lambda - A)\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)fds, \quad f \in X, \tag{1.1.3}$$

$$f = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)(\lambda - A)fds, \quad f \in \mathcal{D}(A). \tag{1.1.4}$$

Sea $R(\lambda)f := \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)fds$, $f \in X$. Entonces (1.1.3) y (1.1.4) se traducen en

$$f = (\lambda - A)R(\lambda)f, \quad \text{para toda } f \in X \quad \text{y}$$
$$R(\lambda)(\lambda - A)f = f \quad \text{para toda } f\ \mathcal{D}(A),$$

por lo que $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$. Además $R(\lambda)$ es acotado pues

$$\|R(\lambda)f\| \;\; = \;\; \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)fds\right\| \leq \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\lambda s}\|T(s)f\|ds \leq \|f\|\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Entonces $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1/\lambda$, para $\lambda > 0$ y

$$(\lambda - A)^{-1}g = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)gds, \quad g \in X, \tag{1.1.5}$$

lo cual revela que el operador resolvente es la transformada de Laplace del semigrupo, y (1.1.5) es la fórmula de inversión.

Recíprocamente, se define la aproximación de Yosida A_λ para todo $\lambda > 0$:

$$A_\lambda \;\; := \;\; \lambda A(\lambda - A)^{-1} = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I \in B(X).$$

Siendo A_λ acotada, $\{e^{tA_\lambda}, t \geq 0\}$ es semigrupo C_0 de contracciones pues

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}\| &= e^{-t\lambda}\|e^{t\lambda^2(\lambda-A)^{-1}}\|, \\
&\leq e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2\|(\lambda-A)^{-1}\|}, \\
&\leq e^{-t\lambda}e^{t\lambda}, \\
&\leq 1, \quad t \geq 0, \ \lambda > 0.
\end{aligned}$$

Ahora probaremos que se cumple

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda f = Af, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{D}(A), \tag{1.1.6}$$

pues si $g \in \mathcal{D}(A)$,

$$\lambda(\lambda - A)^{-1}g - (\lambda - A)^{-1}Ag = (\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)g = g,$$

donde $\quad (\lambda - A)^{-1}Ag \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$ ya que

$$\|(\lambda - A)^{-1}Ag\| \quad \leq \quad \|(\lambda - A)^{-1}\|\|Ag\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ag\| \to 0 \text{ cuando } \quad \lambda \to \infty,$$

de modo que $\lambda(\lambda - A)^{-1}g \to g$ cuando $\lambda \to \infty$ para todo $g \in \mathcal{D}(A)$. De hecho

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda - A)^{-1}g \to g, \text{ para toda } \ g \in \overline{\mathcal{D}(A)} = X,$$

ya que si $F \in X$, existe una sucesión F_n en $\mathcal{D}(A)$ tal que $F_n \to F$ pues $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
Así,

$$\lambda(\lambda - A)^{-1}F = \lambda(\lambda - A)^{-1}[(F - F_n) + F_n],$$

luego

$$\begin{aligned}
\|\lambda(\lambda - A)^{-1}F - F\| &\leq \|\lambda(\lambda - A)^{-1}(F - F_n)\| + \|\lambda(\lambda - A)^{-1}F_n - F\|, \\
&\leq \|\lambda\|\|(\lambda - A)^{-1}\|\|F - F_n\| + \|\lambda(\lambda - A)^{-1}F_n - F_n\| + \|F_n - F\|,
\end{aligned}$$

donde el lado derecho de la última desigualdad tiende a 0. Por otro lado,

$$(\lambda - A)^{-1}Af \quad = \quad R(\lambda)Af = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Afdt = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)fdt = AR(\lambda)f = A(\lambda - A)^{-1}f = \frac{A_\lambda f}{\lambda}.$$

Aplicando lo anterior a $g = Af$, $f \in \mathcal{D}(A)$, se obtiene

$$A_\lambda f = \lambda(\lambda - A)^{-1}Af \to Af,$$

cuando λ tiende a infinito, lo cual es (1.1.6).
Ahora, se aplica el Lema 1.1.12 con

$$C = A_\lambda, \quad D = A_\mu, \quad \lambda, \mu > 0,$$

y se obtiene para $f \in \mathcal{D}(A)$,

$$\|e^{tA_\lambda}f - e^{tA_\mu}f\| \leq t\|A_\lambda f - A_\mu f\| \to 0,$$

cuando $\lambda, \mu \to \infty$, para todo $f \in \mathcal{D}(A)$ y t fijo. Se sigue que $\{e^{tA_\lambda}\}_{\lambda>0}$ es de Cauchy y converge cuando λ tiende a infinito por ser $B(X)$ completo.
Definiendo

$$T(t)f = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}f, \quad f \in \mathcal{D}(A). \tag{1.1.7}$$

Se cumple

i) $\|T(t)\| \leq 1,\ T(0) = I$ y

ii) $T(t+s) = T(t)T(s),\ s,t \geq 0.$

Siendo $T(t)$ acotado y $\mathcal{D}(A)$ denso, existe una única extensión continua de $T(t)$ a X denotada también por $T(t)$, para la cual se cumple (1.1.7) con $f \in X$. Si $f \in \mathcal{D}(A)$, se tiene

$$T(t)f - f = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} f - f = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda f ds,$$

y como $\|e^{sA_\lambda}A_\lambda f\| \leq \|f\|$, por el Teorema de convergencia dominada se tiene que

$$T(t)f - f = \int_0^t T(s)Afds.$$

Luego

$$T(t)f = f + \int_0^t T(s)Afds. \tag{1.1.8}$$

Por lo tanto, $T(\cdot)f : [0,\infty) \to X$ es continua para toda $f \in \mathcal{D}(A)$.

Si $f \in X$ y $(f_n) \subset \mathcal{D}(A)$ con $f_n \to f$, entonces para todo $T > 0$,

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|T(t)f - T(t)f_n\| \quad = \quad \sup_{0\leq t\leq T} \|T(t)(f - f_n)\| \leq \|f - f_n\| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty,$$

de modo que $T(t)f_n \to T(t)f$ uniformemente en compactos. Por lo que $T(\cdot)f$ es continua en cada compacto, es decir, $T(\cdot)f$ es continua. Se ha probado que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es C_0 semigrupo de contracciones.

Sea B el generador de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. La igualdad (1.1.8) muestra que $B \supset A$, es decir, $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ y $B|_{\mathcal{D}(A)} = A$.

De la primera parte de la prueba (para B) y por hipótesis (para A), $1 \in \rho(B)$, $1 \in \rho(A)$. Luego, $(I-B)^{-1}$, $(I-A)^{-1}$ existen y son acotados con $(I-B)^{-1} \supset (I-A)^{-1}$.

En particular,

$$\mathcal{D}((I-B)^{-1}) = \mathcal{D}((I-A)^{-1}) = X,$$

lo cual implica $(I-B)^{-1} = (I-A)^{-1}$, luego $(I-A)(I-B)^{-1} = I$ y por unicidad de la inversa, $I-A = I-B$ y así $A = B$.

■

Proposición 1.1.14 *Sea $\{T(t), t \geq 0\}$ semigrupo C_0. Existen constantes $M \geq 1$ y $\omega \geq 0$ tales que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

Demostración Por definición, para cada $f \in X$, $t \to T(t)f$ con $t \in [0,\infty)$ es continua. Luego $t \mapsto \|T(t)f\|$, $t \in [0,1]$ es acotada: existe $M_f > 0$ tal que $\|T(t)f\| \leq M_f$, para todo $t \in [0,1]$. Para continuar necesitamos los siguientes resultados, los cuales se pueden consultar en [25], pp. 41-44.

Teorema 1.1.15 ***de Banach-Steinhaus*** *Sean X, Y espacios vectoriales topológicos, Γ es una colección de mapeos lineales continuos de X a Y y B es el conjunto de todas los $x \in X$ cuyas órbitas*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda(x) : \Lambda \in \Gamma\}$$

son acotadas en Y.

Si B es de segunda categoría en X, entonces $B = X$ y Γ es equicontinua.

Teorema 1.1.16 *Si Γ es equicontinua y $E \subset X$ es acotado, existe $F \subset Y$ acotado con $\gamma(E) \subset F$ para todo $\gamma \in \Gamma$.*

En nuestro caso: $\Gamma = \{T(t), t \in [0,1]\}$, $B = \{f \in X : \{T(t)f, 0 \leq t \leq 1\}\}$. Como $B = X$, B es de segunda categoria y por el Teorema 1.1.15 la familia de operadores Γ debe ser equicontinua.

Luego, tomando $E = \{f \in X : \|f\| \leq 1\}$ en el Teorema 1.1.16, entonces existe $F \subset X$, donde F puede ser la bola

$$F = \{f \in X : \|f\| \leq M\},$$

tal que para todo $f \in E$, $T(t)f \in F$ para todo $t \in [0,1]$, es decir,

$$\|T(t)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|T(t)f\| \leq M, \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

Como $T(0) = I$, $M \geq 1$. Sea $\omega = \log M \geq 0$. Para $t > 0$, sea n el menor entero mayor que t.

Entonces

$$\|T(t)\| \leq \left\| \left[T\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \right\| \leq M^n \leq M^{t+1} = Me^{\omega t}.$$

∎

Teorema 1.1.17 *A es el generador de un C_0 semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ si y sólo si A es cerrado, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ y existe una constante $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda \in \rho(A)$, para todo $\lambda > \omega$ y se cumple*

$$\|(\lambda - \omega)^n (\lambda - A)^{-n}\| \leq M,$$

siempre que $\lambda > \omega$ y $n = 1, 2, \ldots$ En tal caso

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Además, existe una norma $|||\cdot|||$ en X tal que $\{S(t) = e^{-\omega t}T(t), t \geq 0\}$ es semigrupo de contracciones en $(X, |||\cdot|||)$ de generador $A - \omega I$.

Demostración Ver [9], pp. 20-21.

∎

Ejemplo 1.1.18 *Sea $X := C[0,\infty) := \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f$ es continua y $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe y es finito$\}$, con norma $\| f \|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \geq 0\}$. Es bien sabido que $(X, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. Si*

$$(Z(t)f)(x) = f(x + vt), \quad x \geq 0, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

donde $v > 0$ es una constante, entonces $\{Z(t), t \geq 0\}$ es semigrupo de contracciones y el generador de $\{Z(t), t \geq 0\}$ es $Af = vf'$, $\mathcal{D}(A) = \{f \in X, f' \in X\}$.

Ejemplo 1.1.19 *Sea (E, d) espacio polaco. $\{X(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, proceso de Markov homogeneo en el tiempo. $E-$valuado, definido en (Ω, F, P). Sea*

$$X = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es Borel-medible, acotada}\},$$

con norma

$$\|f\|_\infty = \text{esssup}(f).$$

Así, $(X, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. Ponemos $\mathbb{E}f(X_t) = \int_\Omega f(X_t(\omega))dP(\omega)$. Sea $\{p_t(x, B)\}$ la familia de probabilidades de transición de $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, es decir,

$$P[X(t) \in B | X(0) = x] = p_t(x, B), \quad t > 0, \ x \in X, \ B \in \mathbb{B}(E).$$

Sea $(T(t)f)(x) = \mathbb{E}[f(X_t)|X_0 = x]$, $f \in X$, $x \in E$, $t \geq 0$. Entonces

i) $(T(0)f)(x) = \mathbb{E}[f(X_0)|X_0 = x] = f(x)$. *Luego,* $T(0) = I$.

ii) *Debido a la ecuación de Chapman-Kolmogorov,*

$$\begin{aligned}
(T(t+s)f)(x) &= \int_E f(z)p_{t+s}(x,dz),\\
&= \int_E f(z)\int_E p_t(x,dy)p_s(y,dz),\\
&= \int_E p_t(x,dy)\int_E f(z)p_s(y,dz),\\
&= (T_t(T_s f))(x),
\end{aligned}$$

que da la propiedad de semigrupo.

Si se considera un proceso de Poisson $\{X(t), t \geq 0\}$ *en* $\mathbb{R}$, *para cada* $x \in \mathbb{Z}^+$ *las probabilidades de transición al tiempo* t *están dadas como sigue*

$$p_t(x,y) = \begin{cases} e^{-\lambda t}, & si\ y = x,\\ e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!}, & si\ y = x+1,\\ \vdots, & \\ e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, & si\ y = x+k,\ k \in \mathbb{Z}^+\\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Entonces, para $f \in X$, *el generador infinitesimal asociado a este proceso está dado por*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\left(\frac{T(t)f(x) - f(x)}{t}\right) &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(f(x+k)\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} - f(x)\right)\right),\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}[f(x)e^{-\lambda t} - f(x)] + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} f(x+k)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right),\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}[f(x)e^{-\lambda t} - f(x)] + \frac{1}{t}f(x+1)e^{-\lambda t}\lambda t + \frac{1}{t}\sum_{k=2}^{\infty} f(x+k)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right),
\end{aligned}$$

de lo que se obtiene que $Af(x) = -\lambda f(x) + \lambda f(x+1)$. *Luego*

$$(Af(0), Af(1), \ldots) = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \ldots & 0\\ 0 & -\lambda & \lambda & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(0)\\ f(1)\\ \vdots \end{pmatrix}.$$

1.2. Teorema de Lummer-Philips

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definición 1.2.1 *Sea* $A : H \to H$ *un operador lineal con* $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. *El operador adjunto* A^* *de* A *se define mediante la relación*

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, A^*g\rangle, \quad f \in \mathcal{D}(A) \ \ y \ \ g \in \mathcal{D}(A^*).$$

Más precisamente, $g \in \mathcal{D}(A^*)$ si y sólo si $f \mapsto \langle Af, g\rangle$ es un funcional lineal acotado en $\mathcal{D}(A)$, en cuyo caso se extiende por continuidad a $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Luego, por el Teorema de Riesz, existe $h \in H$ único tal que

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, h\rangle, \quad f \in \mathcal{D}(A)$$

y entonces se define $A^*g = h$.

Propiedades 1.2.2 **(i)** *Si $A \in B(H)$, entonces $A^* \in B(H)$ y $\|A\| = \|A^*\|$.*

(ii) *Si $A, B \in B(H)$,entonces se cumple $(AB)^* = B^*A^*$.*

(iii) *Se cumple $(A+B)^* \supset A^* + B^*$ siempre que $\overline{\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)} = H$.*

(iv) *Si A es cerrado y $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$, entonces también A^* es cerrado.*

(v) *Se verifica $A^{**} = A$.*

Demostración Ver [9], pp. 30.

Teorema 1.2.3 *Sea A generador de un semigrupo C_0 $\{T(t), t \geq 0\}$ en H. Entonces $\{T(t)^*, t \geq 0\}$ es semigrupo C_0 en H de generador A^*.*

Demostración Debido a que $\{T(t), t \geq 0\}$ es semigrupo, se tiene que

$$[T(t+s)]^* = [T(t)T(s)]^* = T^*(s)T^*(t) \quad y \quad (T(0))^* = I^* = I.$$

Para la continuidad fuerte, se supone que

$$\|T(t)^*\| \leq \|T(t)\| \leq e^{\omega t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Para todo $f \in H$,

$$\begin{aligned}
\|T(t)^*f - f\|^2 &= \langle T(t)^*f - f, T(t)^*f - f\rangle,\\
&= \|T(t)^*f\|^2 + \|f\|^2 - \langle f, T(t)f\rangle - \langle T(t)f, f\rangle,\\
&\leq e^{2\omega t}\|f\|^2 + \|f\|^2 - \langle f, T(t)f\rangle - \langle T(t)f, f\rangle,\\
&\to 0, \text{cuando} \quad t \to 0,
\end{aligned}$$

debido a que $\{T(t)\}$ es fuertemente continuo y a la continuidad de $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Sea B el generador de $\{T(t)^*, t \geq 0\}$. Para $f \in \mathcal{D}(A)$ y $g \in \mathcal{D}(B)$

$$\langle Af, g\rangle = \lim_{t\to 0}\langle t^{-1}[T(t) - I]f, g\rangle = \lim_{t\to 0}\langle f, t^{-1}[T(t)^* - I]g\rangle = \langle f, Bg\rangle.$$

Pero se sabe que $\langle Af, g\rangle = \langle f, A^*g\rangle$, luego $B \subset A^*$.
Sea ahora, $g \in \mathcal{D}(A^*)$. Entonces para todo $f \in \mathcal{D}(A)$.

$$\begin{aligned}
\langle f, T(t)^*g - g\rangle &= \langle f, T(t)^*g\rangle - \langle f, g\rangle,\\
&= \langle T(t)f - f, g\rangle\\
&= \left\langle \int_0^t AT(s)f ds, g\right\rangle,\\
&= \int_0^t \langle T(s)f, A^*g\rangle ds,\\
&= \int_0^t \langle f, T(s)^*A^*g\rangle ds,\\
&= \left\langle f, \int_0^t T(s)^*A^*g ds\right\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces

$$T(t)^*g - g = \int_0^t T(s)^* A^* g ds,$$
$$\frac{1}{t}\left[T(t)^*g - g\right] = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)^* A^* g ds.$$

Al tomar $t \to 0$, $Bg = A^*g$, luego $A^* \subset B$.
Por lo tanto $A^* = B$.

■

Definición 1.2.4 *Un operador lineal $B : H \to H$ se llama simétrico si $B \subset B^*$, es decir, si $\overline{\mathcal{D}(B)} = H$ y $\langle Bf, g\rangle = \langle f, Bg\rangle$, para todo $f, g \in \mathcal{D}(B)$.*

B es autoadjunto si $B^* = B$.

Corolario 1.2.5 *$\{T(t), t \geq 0\}$ es un semigrupo C_0 autoadjunto en H, es decir, $T(t)$ es autoadjunto para todo $t \geq 0$ si y sólo si su generador es autoadjunto.*

Definición 1.2.6 *Un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \to X$ es disipativo si para toda $f \in \mathcal{D}(A)$ y para toda $\mu > 0$, $\|(\mu I - A)f\| \geq \mu\|f\|$. A se llama $m-$disipativo si A es disipativo y además*

$$Rango(I\mu - A) = X, \quad para\ toda\ \mu > 0.$$

Las pruebas de los siguientes resultados se pueden consultar en [9], pp. 26-27.

Teorema 1.2.7 ***(Teorema Lummer-Philips)*** *Un operador lineal $A : X \to X$ es generador de un semigrupo C_0 de contracciones en X si y sólo si*

(a) $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$

(b) *A es $m-$disipativo*

Lema 1.2.8 *Sea X espacio de Hilbert (con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$) y $f, g \in X$. Entonces*

$$\|f\| \leq \|f - \mu g\| \quad para\ toda \quad \mu > 0$$

si y sólo si existe $\varphi \in X'$ (el dual de X) tal que $\|\varphi\|^2 = \|f\|^2 = \varphi(f)$ y además

$$Re\langle g, \varphi\rangle \leq 0.$$

Capítulo 2

El problema de Cauchy lineal y no lineal

Teniendo como base la teoría de semigrupos, en este capítulo se describen algunas condiciones bajo las cuales ciertas ecuaciones diferenciales con condición inicial tienen solución. En la primera sección se aborda el problema de Cauchy lineal, y se definen tipos de soluciones tales como: clásica, mild y fuerte, además se dan condiciones suficientes bajo las cuales dicho problema tiene alguna de estas soluciones. En la segunda sección se presenta el problema de Cauchy no lineal, y se dan condiciones bajo las cuales éste tiene solución local o global, para lo cual se hará uso del teorema de Banach-Picard. El contenido de este capítulo se basa en [21], [9], [27], [14], [7] y [28].

2.1. Problemas de Cauchy lineales

Sea $A : X \to X$ lineal con $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. La ecuación

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t > 0,\ u(0) = x \in \mathcal{D}(A), \tag{2.1.1}$$

se llama problema de Cauchy, o problema de valores iniciales.

Definición 2.1.1 *Una solución clásica de (2.1.1) es una función* $u : [0, \infty) \to X$ *tal que* $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, *para todo* $t \geq 0$, $u \in C^1([0, \infty), X)$ *y se cumple (2.1.1).*

Teorema 2.1.2 *El PVI (2.1.1) está bien puesto si y sólo si* A *genera un semigrupo* C_0, $\{T(t), t \geq 0\}$ *en* X. *En tal caso la solución de (2.1.1) está dada por* $u(t) = T(t)x$.

Demostración Ver [9], pp. 83-84.

■

Considerar el PVI no homogéneo

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = x, \tag{2.1.2}$$

donde $f : [0, a) \to X$ con $a \in \mathbb{R}^+$ y A es generador de un semigrupo C_0, $\{T(t), t \geq 0\}$.

Definición 2.1.3 *Una función* $u : [0, a) \to X$ *es solución clásica de (2.1.2) si* $u \in C([0, a), X) \cap C^1((0, a), X)$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ *para todo* $0 < t < a$ *y se cumple la ecuación (2.1.2).*

Observación 2.1.4 *Si u es solución clásica de la ecuación (2.1.2), sea $g(s) = T(t-s)u(s)$, $0 \le s \le t$, que es $X-$valuada y derivable en $0 < s < t$ si $0 < t < a$. Entonces*

$$\begin{aligned}\frac{dg(s)}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s),\\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s),\\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Si $f \in L^1([0,a),X)$, $T(t-s)f(s)$ es integrable, ya que $\int_0^a \|f(s)\|ds < \infty$, luego

$$\int_0^a \|T(t-s)\|\|f(s)\|ds \le M \int_0^a e^{\omega t - s}\|f(s)\|ds < \infty.$$

Así, integrando $\frac{dg(s)}{ds}$ de 0 a t, y usando (2.1.3),

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{dg(s)}{ds} &= \int_0^a T(t-s)f(s)ds,\\ T(t-t)u(t) - T(t-0)u(0) &= \int_0^a T(t-s)f(s)ds,\\ u(t) - T(t)x &= \int_0^a T(t-s)f(s)ds,\end{aligned}$$

de lo cual se obtiene

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{2.1.4}$$

Corolario 2.1.5 *Si $f \in L^1([0,a),X)$, entonces para toda $x \in X$ el PVI (2.1.2) admite a lo más una solución clásica, y si tiene solución ésta está dada por (2.1.4).*

Demostración Si $u(t)$ y $v(t)$ son soluciones de la ecuación (2.1.2), entonces $w(t) = u(t) - v(t)$ cumple

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} - \frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + f(t) - Au(t) - f(t) = Aw(t),$$

y es tal que $w(0) = 0$, así la única solución es, según el Teorema 2.1.2, $w(t) = T(t)0 = 0$.

■

Basta con pedir que la función f sea integrable para que la expresión (2.1.4) este bien definida.

Definición 2.1.6 *El lado derecho de (2.1.4) es una función continua de t para todo $f \in L^1([0,a),X)$, la cual está definida aún si ésta no fuera derivable. Llamaremos a $u(t)$, dada por (2.1.4), la solución mild de (2.1.2), aún si ésta no es solución clásica.*

Corolario 2.1.7 *La ecuación (2.1.2) puede no tener solución clásica, pero siempre que $f \in L^1([0,a),X)$, (2.1.2) tendrá solución mild dada por (2.1.4).*

Aún si f es continua puede ocurrir que la ecuación (2.1.2) no tenga solución clásica y que $T(t)x$ no sea diferenciable.

Observación 2.1.8 *Aún si f fuera continua no hay garantia de que (2.1.2) tenga solución: considérese $x \in X$ tal que $T(t)x$ no este en el dominio de A para todo $t \geq 0$. Entonces $f(s) = T(s)x$ es continua, pero el PVI*

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + T(t)x; \quad u(0) = 0,$$

no tiene solución clásica, no obstante que $0 \in \mathcal{D}(A)$. En efecto, la solución mild de la ecuación es

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t)0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t T(t-s)T(s)xds \\ &= \int_0^t T(t)xds \\ &= tT(t)x, \end{aligned}$$

la cual no es derivable.

Teorema 2.1.9 *Sea A el generador de un semigrupo C_0, $\{T(t)\}$ y sea $f \in L^1([0,a],X)$ continua en $(0,a]$. Sea*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq a. \tag{2.1.5}$$

El PVI (2.1.2) tiene solución clásica $u(t)$ en $[0,a)$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ si se cumple alguna de las condiciones (i) o (ii), donde

(i) $v(t) \in C^1((0,a),X)$,

(ii) $v(t) \in \mathcal{D}(A)$, *para todo* $0 < t < a$ *y* $Av(t) \in C((0,a),X)$.

Si (2.1.2) tiene solución clásica $u(t)$ en [0,a) para algún $x \in \mathcal{D}(A)$ entonces $v(t)$ cumple (i) y (ii).

Demostración Si (2.1.2) tiene solución $u(t)$ para algún $x \in \mathcal{D}(A)$, $u(t)$ está dada por (2.1.4).
Luego

$$v(t) = u(t) - T(t)x$$

es derivable con derivada

$$v'(t) = u'(t) - T(t)Ax,$$

que es continua en $(0,a)$, y así se cumple (i).
Si $x \in \mathcal{D}(A)$, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$, para todo $t \geq 0$ y

$$Av(t) = Au(t) - AT(t)x,$$

despejando $Au(t)$ en (2.1.2) y sustituyendo en la igualdad anterior se obtiene

$$Av(t) = u'(t) - f(t) - AT(t)x,$$

la cual es continua en $(0,a)$ y $v(t) \in \mathcal{D}(A)$, para todo $t \geq 0$. Luego, se cumple (ii).

Para la otra parte, se nota que si $0 < t < a$, y $h > 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}v(t) &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds,\\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds\right],\\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds\right],\\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds - \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds\right],\\
&= \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds.
\end{aligned}
$$

Se tiene entonces

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \tag{2.1.6}$$

Bajo la hipótesis (i), el límite cuando $h \to 0$ en el lado derecho existe. Luego

$$v(t) \in \mathcal{D}(A) \ \text{ y } \ Av(t) = v'(t) - f(t),$$

lo anterior debido a que f es continua.

Entonces $u(t) = T(t)x + v(t)$, $x \in \mathcal{D}(A)$, es la solución de (2.1.2) ya que

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= T(t)Ax + v'(t),\\
&= AT(t)x + Av(t) + f(t),\\
&= A[T(t)x + v(t)] + f(t),\\
&= Au(t) + f(t),
\end{aligned}
$$

con $u(0) = T(0)x + v(0) = T(0)x = x$.

Si se cumple (ii), $v(t) \in \mathcal{D}(A)$, $0 < t < a$, y por (2.1.6), al hacer $h \downarrow 0$, v tiene derivada derecha $D^+v(t)$, la cual cumple

$$D^+v(t) = Av(t) + f(t) \in C((0,a), X),$$

por lo cual $v(t) \in C^1((0,a), X)$ con $v'(t) = Av(t) + f(t)$ y $v(0) = 0$.

De igual manera que en (i) se ve que

$$u(t) = T(t)x + v(t)$$

es la solución de (2.1.2) para $x \in \mathcal{D}(A)$.

■

Corolario 2.1.10 *Sea A generador de semigrupo C_0 $\{T_t\}$. Si $f : [0,a] \to X$ es de clase C^1 en $[0,a]$, entonces el PVI (2.1.2) posee solución clásica u en $[0,a)$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$.*

Demostración Se tiene

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds,$$

derivando se obtiene

$$\begin{aligned} v'(t) &= T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s), \\ &= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds, \end{aligned}$$

la cual es continua en $(0, a)$ y ahora se aplica el Teorema 2.1.9 con la condición (i).

Corolario 2.1.11 *Sea A como en el Corolario 2.1.10. Sea $f \in L^1([0, a], X) \cap C((0, a), X)$. Si $f(s) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $0 < s < a$ y $Af(s) \in L^1([0, a], X)$, entonces para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ el PVI (2.1.2) tiene solución en $[0, a)$.*

Demostración La prueba es similar al Corolario 2.1.10, usando la condición (ii) del teorema 2.1.9.

■

Definición 2.1.12 *$u : [0, T] \to X$ es solución fuerte de (2.1.2) si*

(a) *u es derivable casi donde quiera (c.d.) en $[0, T]$,*

(b) *$u' \in L^1([0, T], X)$, $u(0) = x$ y $u'(t) = Au(t) + f(t)$ c.d. en $[0, T]$.*

Una solución clásica también es fuerte.

Observación 2.1.13 *Si $A = 0$ y $f \in L^1([0, T], X)$ en general (2.1.2) no tiene solución clásica, a menos que f sea continua. Sin embargo sí tendría solución fuerte, dada por*

$$u(t) = u(0) + \int_0^t f(s)ds.$$

2.2. Problemas de Cauchy no lineales

Considerar

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \tag{2.2.7}$$

donde A genera C_0 semigrupo $\{T(t)\}$ en un espacio de Banach X. Además, la perturbación $f(t, u(t))$ depende de la función incognita buscada.

Ejemplo 2.2.1 *Sean $X = \mathbb{R}$, $A = 0$, $f(t, x) = x^2$.*

Con condición inicial $u_0 = \dfrac{1}{c}$, donde $c > 0$.

Se obtiene

$$\frac{du(t)}{dt} = u^2(t); \quad u(0) = \frac{1}{c},$$

cuya solución es $u(t) = \frac{1}{c-t}$, $0 \leq t < c$ y $u(t) \nearrow \infty$, es decir explota cuando $t \to c^-$.

Notamos que la solución posee soluciones locales, las cuales son no globales si $u(0) > 0$, y que el intervalo de existencia de cada solución depende de la condición inicial.

Ejemplo 2.2.2 *Sea* $b(x) = 2sign(x)\sqrt{|x|}$ *y considerémos la ecuación*

$$\frac{du(t)}{dt} = b(u(t)), \quad u(0) = c.$$

Esta ecuación tiene una única solución para todo $c \neq 0$*. Para* $c = 0$*, hay una infinidad de soluciones: una es* $u(t) \equiv 0$*, pero también* $u_1(t) = t^2$ *ó* $u_2(t) = -t^2$ *son soluciones.*

Teorema 2.2.3 ***de Banach-Picard*** *Sea* $(\mathcal{M}, d)$ *espacio métrico completo. Sea* $0 < \alpha < 1$ *y* $S : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ *tal que*

$$d(S^n x, S^n y) \leq \alpha d(x, y) \tag{2.2.8}$$

para algún $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $x, y \in \mathcal{M}$*. Entonces* S *tiene un único punto fijo* x_0 *en* $\mathcal{M}$*, es decir,* $Sx_0 = x_0$*.*

Demostración Si (2.2.8) vale para $n = 1$, esto es $d(Sx, Sy) \leq \alpha d(x, y)$, tendremos

$$\begin{aligned} d(S^2x, S^2y) &= d(S(Sx), S(Sy)), \\ &\leq \alpha d(Sx, Sy), \\ &\leq \alpha^2 d(x, y), \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} d(S^m x, S^{m+n} y) &= d(S^m x, S^m(S^n y)), \\ &\leq \alpha^m d(x, S^n y), \end{aligned}$$

dado que m, n son arbitrarios, haciendo tender m a infinito, se obtiene que $\alpha^m d(x, S^n y) \to 0$.

Por lo que, tomando $x = y$, se tiene que $\{S^m x\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}$, y existe $x_0 \in \mathcal{M}$ con $S^m x \to x_0$, $m \to \infty$.

Se cumple $Sx_0 = x_0$, ya que

$$\begin{aligned} Sx_0 &= S\left(\lim_{m\to\infty} S^m x\right), \\ &= \lim_{m\to\infty} S^{m+1} x, \\ &= x_0. \end{aligned}$$

Para la unicidad de x_0, si $x_1 \in \mathcal{M}$ es tal que $Sx_1 = x_1$, entonces

$$\begin{aligned} d(Sx_1, Sx_0) &\leq \alpha d(x_1, x_0) \\ &= \alpha d(Sx_1, Sx_0). \end{aligned}$$

Si $d(Sx_1, Sx_0) \neq 0$, la desigualdad anterior diría que $\alpha \geq 1$, lo cual implica que $d(Sx_1, Sx_0) = 0$, por lo que $x_1 = x_0$.

Si la desigualdad (2.2.8) se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$, por el primer caso aplicado a $S^1 = S^n$, S^n tiene punto fijo único, x_0.

Luego,

$$S^n(Sx_0) = S(S^n x_0) = Sx_0,$$

y por lo tanto Sx_0 es punto fijo de S^n, y como x_0 es único se cumple $Sx_0 = x_0$, que es lo que se pide.

∎

Si $u(t)$ es solución clásica de la ecuación (2.2.7), procediendo como antes se ve que

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds. \tag{2.2.9}$$

Si f y $\{T(t)\}$ son dados, (2.2.9) determina una ecuación integral para u. Toda solución de (2.2.9) se llama solución mild de la ecuación (2.2.7).

Teorema 2.2.4 ***Existencia de soluciones locales.*** *Sea $\Omega \subset X$ abierto y $u_0 \in \Omega$. Sea $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to X$ conjuntamente continua y que cumple*

$$\textit{para todo} \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \quad \textit{existe} \quad \kappa = \kappa(\tau) \quad \textit{tal que}$$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le \kappa\|x-y\|, \qquad \textit{para todo} \;\; 0 \le t \le \tau, \;\; \textit{para todo} \;\; x, y \in \Omega,$$

(Condición de Lipschitz). Entonces para $\tau > 0$ suficientemente pequeño existe una única solución mild de (2.2.7) definida en $[0,\tau)$.

Demostración Sean $\tau > 0$, $Y = C([0,\tau], X)$ y E una vecindad cerrada de u_0 contenida en Ω. Dotamos a Y de la norma $\|h\|_Y = \sup\limits_{0\le t\le\tau} \|h(t)\|_X$.

Sea S dada por

$$(Su)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds, \quad 0 \le t \le \tau,$$

donde

$$u \in \mathcal{M} := \{v \in Y : v(0) = u_0 \text{ y } v([0,\tau]) \subset E\}.$$

Entonces $Su \in Y$ y $\mathcal{M}$ es métrico y completo pues E es cerrado.

Sean M, ω tales que

$$\|T(t)\| \le Me^{t\omega}, \qquad \text{para todo} \;\; t \ge 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|Su - Sv\|_Y &= \sup_{0\le t\le\tau} \|Su(t) - Sv(t)\|, \\
&= \sup_{0\le t\le\tau} \left\| \int_0^t T(t-s)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))] \right\|, \\
&\le Me^{\omega\tau} \int_0^\tau \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds, \\
&\le Me^{\omega\tau}\kappa(t) \int_0^\tau \|u(s) - v(s)\|,
\end{aligned}$$

y como $\|u(s) - v(s)\| \le \sup\limits_{0\le s\le\tau} \|u(s) - v(s)\| = \|u - v\|_Y$, lo anterior da

$$\|Su - Sv\|_Y \le Me^{\omega\tau}\kappa(\tau)\tau\|u - v\|_Y. \tag{2.2.10}$$

y $Me^{\omega\tau}\kappa(\tau)\tau \to 0$ cuando $\tau \to 0$, ya que κ puede tomarse no decreciente en τ.

Se verá ahora que $S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Sin perder generalidad, supóngase que E es acotado, por ejemplo $E = \overline{B(u_0, R)}$.

Entonces

$$\begin{aligned}\|Su-u_0\|_Y &\le \sup_{0\le t\le\tau}\|T(t)u_0-u_0\| + \sup_{0\le t\le\tau}\left\|\int_0^\tau T(t-s)f(s,u(s))\right\|,\\ &= J_1(\tau)+J_2(\tau),\end{aligned}$$

donde $J_1(\tau) = \sup_{0\le t\le\tau}\|T(t)u_0-u_0\|$ y $J_2(\tau) = \sup_{0\le t\le\tau}\left\|\int_0^\tau T(t-s)f(s,u(s))\right\|$.

$J_1(t)\to 0$ si $\tau\to 0$ por continuidad de $\{T(t)\}$, mientras que

$$J_2(\tau)\le \tau M e^{\omega t}\sup_{0\le t\le\tau}\|f(t,u(t))\|,$$

y usando la condición de Lipschitz obtenemos

$$\begin{aligned}J_2(\tau) &\le \tau M e^{\omega t}\left[\sup_{0\le t\le\tau}\|f(t,u_0)\| + \kappa(\tau)\sup_{0\le t\le\tau}\|u(t)-u_0\|\right],\\ &\to 0.\end{aligned}$$

Como $\|Su-u_0\|_Y = \sup_{0\le t\le\tau}\|Su(t)-u_0\|$, lo anterior implica que $(Su)(0)=u_0$ y además para $0\le t\le\tau$,

$$\|(Su)(t)-u_0\|\le\|Su-u_0\|_Y\to 0,\quad \tau\to 0^+.$$

Tomando $\tau>0$ suficientemente pequeño, $Su([0,\tau])\subset E$, lo que implica que $S(\mathcal{M})\subset\mathcal{M}$. De (2.2.10) se sigue que para todo $\tau>0$ suficientemente pequeño, $S:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ es una contracción. Aplicando el Teorema de Banach-Picard se obtiene que S tiene una único punto fijo $u\in\mathcal{M}$, es decir,

$$u(t)=(Su)(t)=T(t)u_0+\int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds,\quad 0\le t\le\tau.$$

■

Teorema 2.2.5 ***Existencia de soluciones globales.*** *Sea $x_0\in X$ y $f:\mathbb{R}_+\times X\to X$ tal que para todo $\tau>0$ existe $\kappa=\kappa(\tau)$ tal que*

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\le\kappa(\tau)\|x-y\|,\quad \textit{para todo}\ \ x,y\in X,\quad \textit{para todo}\ \ 0\le t\le\tau.$$

Entonces

$$\begin{cases}\frac{du(t)}{dt}=Au(t)+f(t,u(t)) & t\ge 0,\\ u(0)=x_0,\end{cases}\tag{2.2.11}$$

tiene una única solución mild en $[0,\infty)$.

Demostración Sean S,M,ω como en el Teorema anterior, y

$$S^m(u)(t)=T(t)u_0+\int_0^t T(t-s)f(s,S^{m-1}u(s))ds,\quad m=1,2,\ldots.$$

Afirmamos que

$$\|S^nu(t)-S^nv(t)\|\le(M\kappa(t)e^{\omega t}t)^n\sup_{0\le s\le t}\|u(s)-v(s)\|/n!\tag{2.2.12}$$

para todo $t > 0$, $u, v \in C([0,t], X)$ ($\kappa(t)$ puede tomarse no decreciente).

Haciendo inducción, para el caso $n = 1$ la desigualdad (2.2.12) se cumple.

Suponiendo que (2.2.12) se cumple para $n = m$, entonces

$$\begin{aligned}
\|S^{m+1}u(t) - S^{m+1}v(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)\left(f(s, S^m u(s)) - f(s, S^m v(s))\right) ds \right\|, \\
&\leq Me^{\omega t} \int_0^t \kappa(s)[M\kappa(s)e^{\omega s}s]^m \sup_{0 \leq r \leq s} \frac{\|u(r) - v(r)\|}{m!} ds, \\
&\leq [M\kappa(t)e^{\omega t}]^{m+1} \sup_{0 \leq rt} \|u(r) - v(r)\| \int_0^t s^m ds/m!.
\end{aligned}$$

Así, (2.2.12) también vale para $n = m + 1$, y por inducción (2.2.12), vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\tau > 0$ arbitrario pero fijo, y sea n tan grande que

$$\alpha = \frac{[Me^{\omega t}\kappa(\tau)\tau]}{n!} < 1.$$

Entonces de (2.2.12) se sigue que

$$\|S^n u - S^n v\|_y \leq \alpha \|u - v\|_Y,$$

para todo $u, v \in Y = C([0,\tau], X)$. Por el Teorema de Banach-Picard S tiene una único punto fijo en Y. Y por lo tanto, la ecuación (2.2.11) tiene una única solución mild en $[0,\tau]$. Como $\tau > 0$ es cualquiera, se sigue el resultado.

■

Teorema 2.2.6 *Sea $f : [0,\infty) \times X \to X$ continua en t y que cumple:*
Para todo $c > 0$, existe $\kappa(c)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \kappa(c)\|x - y\|;$$

$$\forall 0 \leq t \leq c, \quad \|x\| \leq c.$$

Sea $u \in C([0,\tau), X)$ una solución mild de (2.2.7), para algún $u_0 \in X$ en $[0,\tau)$, donde $\tau < \infty$. Entonces

(a) *Si $\tau > 0$, existe a lo más una solución mild en $[0,\tau)$.*

(b) *Se cumple que*

- **(b.1)** *existe una solución mild en $\mathbb{R}^+$, ó bien*
- **(b.2)** *existe un $\tau = \tau_{max} > 0$, tal que existe una solución mild u en $[0,\tau)$, que satisface*

$$\lim_{\tau \to \tau^-} \|u(t)\| = \infty.$$

Demostración Ver [21], pp. 185-186.

■

Teorema 2.2.7 *Sea* $t_0 \geq 0$. *Si* A *genera* C_0 *semigrupo* $\{T(t)\}$ *en* X *y* $f : [t_0, \tau] \times X \to X$ *es continuamente diferenciable para algún* $\tau > t_0$, *entonces la solución del* PVI

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)) \quad t \geq 0, \\ \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

donde $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, *es solución clásica.*

Demostración Ver [21], pp.187-188.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Ecuaciones estocásticas semilineales

La finalidad de este capítulo es introducir ecuaciones estocásticas con ruido aditivo. Para ello en la primera sección se presentan resultados básicos concernientes a un operador diferencial L, y posteriormente se define un campo aleatorio de Wiener. En la segunda sección se introducen los conceptos necesarios para poder definir la integral estocástica y en la tercera sección se presentan ecuaciones estocásticas con ruido blanco, las cuales se resolverán usando el método de expansión de funciones propias, lo cual posteriormente se generaliza para estudiar ecuaciones estocásticas con ruido aditivo. El contenido de este capítulo puede consultarse en [4], [12] y [15].

3.1. Ecuaciones estocásticas semilineales

Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ dominio acotado de frontera suave $\partial\mathcal{D}$. Denotemos $H = L^2(\mathcal{D})$, dotado de la norma $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, donde $x \in L^2(\mathcal{D})$. Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, sea

$$H^k := \left\{\varphi \in L^2(\mathcal{D}) : \varphi \text{ tiene derivadas generalizadas hasta de orden } k\right\}$$

el espacio de Sobolev de orden k, con norma

$$\|\varphi\|_k = \sqrt{\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{d}\int_{\mathcal{D}}\left|\frac{\partial^j\varphi(x)}{\partial x_i^j}\right|^2 dx}.$$

Sea H^{-k} el espacio dual de H^k, con norma $\|\cdot\|_{-k}$. Para todo $\xi \in H^{-k}$, y para todo $x \in H^k$ escribimos $\xi(x) = \langle \xi, x\rangle = \langle x, \xi\rangle_k$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ es la dualidad entre H^k y H^{-k}.

Denotamos $H^0 \equiv H = L^2(\mathcal{D})$, con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_0 = (\cdot,\cdot)$. Se define el operador L el cual está dado por

$$Lu(x) = \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{d} a_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x)u(x), \quad x \in \mathcal{D}, \quad u \in Dom(L). \tag{3.1.1}$$

Supondremos que $a_{jk}, a_j, c \in C_b^m$ en $\overline{\mathcal{D}}$, $m \geq 2$ y en lo subsecuente se supondrá que los coeficientes a_{jk} son simétricos, es decir, $a_{jk} = a_{kj}$. En este caso el operador L se escribe en forma de divergencia

$$Lu = \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + \sum_{j=1}^{d} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u. \tag{3.1.2}$$

Nótese que debido a la suavidad de los coeficientes

$$Lu = \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_k} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{d} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u,$$

$$= \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j(x) + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_k} a_{jk}(x) \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Por lo tanto, el operador en forma de divergencia se reduce a la forma usual

$$Lu = \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} (b_j(x,t)) \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

donde $b_j(x,t) = a_j(x,t) + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial a_{jk}(x)}{\partial x_k}$.

Definición 3.1.1 *L se llama fuertemente (o uniformemente) elíptico si existen $\alpha_1, \alpha_0 > 0$ tales que para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d) \in \mathcal{D}$,*

$$\alpha_0 |\xi|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \leq \alpha_1 |\xi|^2.$$

Por ejemplo tomando, $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_j = 0$, $c \equiv 0$, da $A = \Delta$.
Caso especial:
Poniendo $a_{jk} = a_{kj}$ y $b_j = 0$ para todo $j, k = 1, \ldots, d$, se obtiene el operador

$$Au := \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] + c(x)u.$$

En este caso $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$, para toda $\varphi, \psi \in C_0^\infty$, donde C_0^∞ es el conjunto de las funciones $C^\infty(\mathcal{D})$ con soporte compacto.

Así, A es autoadjunto, fuertemente elíptico.

Sea H_0^m la cerradura de $C_0^\infty(\mathcal{D})$ en H^m con $m \geq 1$. Existe $\gamma > 0$ tal que para toda $\varphi \in H_0^1$ se cumple

$$\langle (A - \beta I)\varphi, \varphi \rangle \leq -\gamma \|\varphi\|_1^2, \quad \text{para toda } \beta > c_0, \tag{3.1.3}$$

donde $c_0 = \sup_{x \in \mathcal{D}} |c(x)| + \alpha_0$.

Definición 3.1.2 *Si $A : H_0^1 \to H$ cumple la desigualdad (3.1.3), A se llama coercitivo.*

Definición 3.1.3 *La forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ asociada con el operador de divergencia L, definido en la ecuación (3.1.2) es*

$$B[u,v] = \int_{\mathcal{D}} \left(-\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} u(x) + c(x)u(x)v(x) \right) dx, \quad u, v \in H_0^1(\mathcal{D}).$$

Definición 3.1.4 *$u \in H_0^1(\mathcal{D})$ es solución débil del problema de valor en la frontera*

$$\begin{cases} Au = f, & \text{en } \mathcal{D}, \\ u = 0, & \text{en } \partial\mathcal{D}, \end{cases} \tag{3.1.4}$$

si se cumple

$$B[u,v] = (f,v) \quad \text{para toda} \quad v \in H_0^1(\mathcal{D}). \tag{3.1.5}$$

A la igualdad (3.1.5) se le llama forma variacional de la ecuación (3.1.4).

Teorema 3.1.5 *Pongamos $f(x) = \lambda u(x)$ en la igualdad (3.1.4). El problema de valores propios (3.1.4) posee una sucesión $\{\lambda_k\}$ de valores propios, cada uno de multiplicidad finita, tal que $-\infty < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ y $\lambda_k \nearrow \infty$, cuando $k \to \infty$.*

Correspondiente a cada λ_k, existe función propia e_k tal que $\{e_k, k = 1, 2, \ldots\}$ es una base ortonormal completa de $H = L^2(\mathcal{D})$.

Si además, los coeficientes de A son C^∞, también lo son las funciones e_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Demostración Ver [5], pp. 36.

■

Observación 3.1.6 *Si $A = \Delta$ y λ, φ son solución de la ecuación*

$$\begin{cases} Au = \lambda u, & \text{en } \mathcal{D}, \\ u = 0, & \text{en } \partial\mathcal{D}, \end{cases}$$

se debe cumplir

$$B[\varphi, \psi] = (\lambda\varphi, \psi),$$

donde

$$B[\varphi, \psi] = -\int_{\mathcal{D}} \psi'(x)\varphi'(x)dx = \int_{\mathcal{D}} \psi\Delta\varphi dx = (\Delta\varphi, \psi) \quad \text{para toda} \quad \psi \in H_0^1,$$

lo que se denota por $\Delta\varphi = \lambda\varphi$.

Definición 3.1.7 *A es estrictamente negativo si existe $\alpha > 0$ tal que $\langle A\varphi, \varphi\rangle \leq -\alpha\|\varphi\|^2$ para todo $\varphi \in H_0^1$.*

Observación 3.1.8 *Si A es estrictamente negativo y si $A\varphi = -\lambda\varphi$, entonces*

$$-\lambda\langle\varphi, \varphi\rangle = \langle -\lambda\varphi, \varphi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle \leq -\alpha\|\varphi\|^2 = -\alpha\langle\varphi, \varphi\rangle,$$

por lo tanto $\lambda \geq \alpha > 0$, es decir todos los eigenvalores de A son estrictamente positivos.

3.1.1. Operadores de Hilbert-Schmidt y operadores nucleares

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert.

Definición 3.1.9 *Sea $A : H_1 \to H_2$ un operador lineal.*

(1) *A es compacto si para toda sucesión $\{x_n\} \subset H_1$ acotada, $\{Ax_n\} \subset H_2$ posee una subsucesión convergente.*

(2) *A es degenerado si la dimensión de $A(H_1)$ es finita.*

Los siguientes tres teoremas pueden ser consultados en [13], pp. 7-9.

Teorema 3.1.10 *Si A es compacto, entonces A tiene descomposición polar $A = UT$ con $T : H_1 \to H_1$ compacto y positivo definido, es decir, $(T\varphi, \varphi)_{H_1} \geq 0$ para todo φ en H_1. Además, U definido de $T(H_1)$ a H_2 es isométrico: $\|U\varphi\|_{H_2} = \|\varphi\|_{H_1}$ para todo $\varphi \in T(H_1)$.*

Teorema 3.1.11 *Si A es compacto, entonces para toda $\varphi \in H_1$, $A\varphi$ se puede representar como*

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \varphi, h_n \rangle_{H_1} g_n,$$

λ_n y h_n son tales que $Th_n = \lambda_n$ y $Uh_n = g_n$ para todo n, donde $\{h_n\}$ y $\{g_n\}$ son familias ortonormales en H_1 y H_2 respectivamente.

Teorema 3.1.12 *Si $H_1 = H_2$ y A es compacto, autoadjunto, y satisface*

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \varphi, h_n \rangle_{H_1} h_n,$$

entonces $Ah_n = \lambda_n h_n$ para todo n.

Definición 3.1.13 *Si $A : H_1 \to H_1$ es compacto, A es de Hilbert-Schmidt si $\sum_n \lambda_n^2 < \infty$. A es nuclear o de traza finita si $\sum_n |\lambda_n| < \infty$; también se dice que A es de la clase de traza.*

Se define la norma del operador A como sigue

$$\|A\| = \sup_{\|f\|_{H_1}=1} \|Af\|_{H_2},$$

mientras que la norma Hilbert-Schmidt de un operador A es

$$\|A\|_2 := \|A\|_{HS} = \left(\sum_n \lambda_n^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_n \|Ah_n\|_{H_2}^2},$$

donde $\{h_n\}$ es cualquier base ortonormal de H_1. La norma nuclear o de traza de un operador A se define

$$\|A\|_1 = \sum_n |\lambda_n|.$$

Observación 3.1.14 *Se tiene que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$. Más aún, los operadores nucleares son la completación de los operadores degenerados respecto a la norma $\|\cdot\|_1$, mientras que los operadores Hilbert-Schmidt son la completación de los operadores degenerados respecto a la norma $\|\cdot\|_2$, y los operadores compactos son la completación de los operadores degenerados respecto a la norma $\|\cdot\|$.*

Ejemplo 3.1.15 *Sea l_2 el espacio de las sucesiones de números reales $\{x_n\}$ que satisfacen $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, con norma $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$.*

1. *Sea $A : l_2 \to l_2$ el operador dado por $A(x) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$, con $x = (x_1, x_2, \ldots)$, el cual es un operador de Hilbert-Schmidt con*
$$\|A\|_{HS} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}.$$

2. *Más generalmente, sea $A : l_2 \to l_2$ dado por $A(x_1, x_2, \ldots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$. Entonces el operador A es Hilbert-Schmidt si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$.*

Ejemplo 3.1.16 *Sea $H = L^2(\mathcal{D}, dx)$ y sea $R : H \to H$ el operador definido como sigue*
$$(R\varphi)(x) = \int_{\mathcal{D}} r(x,y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathcal{D},\ \varphi \in H,$$
donde $r : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ es medible. Si $\int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} |r(x,y)|^2 dxdy < \infty$, entonces R es de Hilbert-Schmidt y
$$\|R\|_{HS} = \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} |r(x,y)|^2 dxdy.$$
Si además, $r(x,y) = r(y,x)$ para todo $x, y \in D$, R es autoadjunto. Así, $\|R\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2$ donde $\{\mu_k\}$ son los valores propios de R. Ver [13], pp. 3-4.

3.2. Proceso de Wiener en H

Sea $H = L^2(\mathcal{D}, dx)$ donde $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ es un dominio acotado. Sea $R : H \to H$ un operador lineal nuclear positivo definido, es decir, $(R\varphi, \varphi) \geq 0$ para toda $\varphi \in H$, con
$$\|R\|_1 = TrR = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = \int_{\mathcal{D}} r(x,x)dx.$$

Sea $\{B_t^k, t \geq 0\}_{k=1,2,\ldots}$ una sucesión de movimientos brownianos en $\mathbb{R}$, estándar, independientes e idénticamente distribuidos. Definimos el campo aleatorio
$$W_t^n = W^n(\cdot, t) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k} B_t^k \varphi_k(\cdot),$$
donde $\{\varphi_k\}_k$ es una base ortonormal de H, siendo φ_k función propia de R correspondiente al valor propio μ_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Entonces
$$\mathbb{E}W_t^n(\cdot, t) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}(\mathbb{E}B_t^k)\varphi_k(\cdot) = 0, \text{ para todo } n \text{ y para todo } t$$

y

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[W^m(x,t)W^m(y,s)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\mu_i}\sqrt{\mu_j}B_t^iB_t^j\varphi_i(x)\varphi_j(y)\right],\\
&= \sum_{k=1}^{m}\mu_k\varphi_k(x)\varphi_k(y)\mathbb{E}(B_t^kB_s^k),\\
&= \sigma_m(x,y)(t\wedge s),
\end{aligned}
$$

donde $\sigma_m(x,y)=\sum_{k=1}^{m}\mu_k\varphi_k(x)\varphi_k(y)$.

Para $n>m\geq 1$,

$$
\begin{aligned}
\|W_t^n-W_t^m\|_H^2 &= \left\|\sum_{k=m+1}^{n}\sqrt{\mu_k}B_t^k\varphi_k\right\|^2,\\
&= \int_D\left|\sum_{k=m+1}^{n}\sqrt{\mu_k}B_t^k\varphi_k(x)\right|^2dx,\\
&= \sum_{k=m+1}^{n}\sum_{l=m+1}^{n}\sqrt{\mu_k}\sqrt{\mu_l}B_t^kB_t^l\int_D\varphi_k(x)\varphi_l(x)dx,\\
&= \sum_{k=m+1}^{n}\mu_k(B_t^k)^2,
\end{aligned}
$$

es submartingala. Usando la desigualdad de Doob para submartingalas positivas, si $T>0$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|W_t^n-W_t^m\|^2 &\leq \mathbb{E}\|W_T^n-W_T^m\|^2,\\
&= \mathbb{E}\int_{\mathcal{D}}(W_T^n(x)-W_T^m(x))^2dx,\\
&= \mathbb{E}\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=m+1}^{n}\sqrt{\mu_k}B_T^k\varphi_k(x)\right)^2dx,\\
&= \mathbb{E}\sum_{k=m+1}^{n}\sum_{j=m+1}^{n}\sqrt{\mu_k}\sqrt{\mu_j}B_T^kB_T^j\int_D\varphi_k(x)\varphi_j(x)dx,\\
&= \mathbb{E}\sum_{k=m+1}^{n}\mu_k(B_T^k)^2,\\
&= T\sum_{k=m+1}^{n}\mu_k\to 0,\quad \text{cuando}\quad n,m\to\infty,
\end{aligned}
$$

pues R es nuclear. Así, $\{W_t^n\}$ converge en L^2 a un límite $\{W_t\}$ el cual está dado por

$$
W_t=\lim_{n\to\infty}W_t^n=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\mu_k}B_t^k\varphi_k.
$$

El proceso $\{W_t\}$ se llama proceso de Wiener en H, con operador de covarianza R ó $R-$proceso de Wiener en H.

Definición 3.2.1 *Un proceso $H-$valuado $\{X_t\}$ se llama proceso gaussiano si para toda $\varphi \in H$, el proceso real $\{(X_t, \varphi)\}_t$ es gaussiano.*

Teorema 3.2.2 *El $R-$proceso de Wiener en H, $\{W_t, t \geq 0\}$ es un proceso continuo, gaussiano, $H-$valuado, con $W_0 = 0$ tal que*

(1) *Para todo $s, t \geq 0$, y para toda $g, h \in H$, $\mathbb{E}(W_s, g) = 0$, $\mathbb{E}(W_s, g)(W_t, h) = (t \wedge s)(Rg, h)$.*

(2) *$\{W_t\}$ posee incrementos estacionarios e independientes.*

(3) *$\{W_t, t \geq 0\}$ es una martingala continua $H-$valuada en L^2 y $\exists\ c > 0$ tal que*

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|W_t\|^2 \leq cT(TrR), \quad \textit{para todo } T > 0.$$

(4) *Si $r(x, y)$ es Hölder continua en $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ entonces $W(x, t)$ es un campo aleatorio continuo en $x \in \mathcal{D}$ y $t \geq 0$.*

Demostración Los enunciados **(1)** y **(2)** se siguen directamente de las propiedades de $\{B_t^k\}$.

Para **(3)** se usará que si para toda $k \in \mathbb{N}$, $\{x_t^k, t \geq 0\}$ es martingala respecto a la filtración $\{F_t\}_{t \geq 0}$, y si $x_t^k \to x_t$ en $L^2(\Omega, F, P)$ cuando $k \to \infty$ entonces $\{x_t\}$ es $\{F_t\}-$martingala.

Aplicando lo anterior a $\{W_t^n\}$, se tiene que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es martingala. Y debido a la convergencia uniforme en t, y a que cada $\{W_t^n\}$ es continuo c.s., entonces $\{W_t, t \geq 0\}$ también es continuo c.s. La desigualdad en el enunciado **(3)** se sigue de la desigualdad de Doob.

Ahora bien, para probar el enunciado **(4)** consideramos $M(x, y, t) := W(x, t) - W(y, t)$, $t \geq 0$ la cual es martingala continua, real-valuada, con $M_0 = 0$ y $\mathbb{E}|M_T|^p < \infty$, con $p > 0$ y variación cuadrática

$$[M(x, y, \cdot)]_t = t\{r(x, x) - 2r(x, y) + r(y, y)\}.$$

Y para toda $p > 0$, existen constantes c_p y C_p tales que

$$c_p \mathbb{E}[M]_T^{p/2} \leq \mathbb{E}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |M(t)|^p\right\} \leq C_p \mathbb{E}[M]_T^{p/2},$$

lo anterior, se conoce como la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy. Además, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |W(x, t) - W(y, t)|^{2p} &= \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |M(x, y, t)|^{2p}, \\
&\leq c_1 \mathbb{E}[M(x, y, \cdot)]_T^p, \\
&\leq c_2 T |r(x, x) - 2r(x, y) + r(y, y)|^p, \\
&\leq c_3(p, T)|x - y|^{p\alpha},
\end{aligned}$$

donde α es el exponente de Hölder de r.

Tomando $p > d/\alpha$ y usando criterio de continuidad de Kolmogorov se concluye que $W(x, t)$ es continua en (x, t).

∎

3.3. Integral estocástica

Sea $\{f(\omega,x,t)\}$ campo aleatorio, continuo, adaptado, tal que para todo $T>0$ fijo, se cumple que

$$\mathbb{E}\int_0^T \|f(\cdot,t)\|^2 dt = \int_\Omega \int_0^T \int_{\mathcal{D}} |f(\omega,x,t)|^2 dxdtdP(\omega) < \infty, \tag{3.3.6}$$

y sea $\{\sigma(\omega,t,x)\}$ un campo aleatorio adaptado, continuo escencialmente acotado, esto es,

$$\mathbb{E}\int_0^T \sup_{x\in\mathcal{D}} |\sigma(x,t)|^2 dt < \infty. \tag{3.3.7}$$

Tomamos $\sigma^k(x,t) = \sigma(x,t)\varphi_k(x)$, con $x\in\mathcal{D}$, donde φ_k son las funciones propias correspondientes a cada valor propio μ_k para cada $k=1,2,\ldots$. Entonces,

$$\mathbb{E}\int_0^T \|\sigma^k(\cdot,t)\|^2 dt = \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathcal{D}} |\sigma(x,t)\varphi_k(x)|^2 dxdt,$$

y usando que $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} \varphi_k^2(x)dx = 1$, se tiene que

$$\mathbb{E}\int_0^T \|\sigma^k(\cdot,t)\|^2 dt \leq \mathbb{E}\int_0^T \sup_{x\in\mathcal{D}} |\sigma(x,t)|^2 dt < \infty,$$

y asi σ^k cumple la ecuación (3.3.6). Entonces la integral estocástica $H-$valuada, $I_t^k(x)$, para una k dada, es

$$I_t^k(x) = \left(\int_0^t \sigma_s^k dB_s^k\right)(x) = \left(\int_0^t \sigma_s dB_s^k\right)\varphi_k(x),$$

donde la integral está bien definida como límite en L^2 de las sumas aproximantes

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \sigma(\cdot, t_j\wedge t)[B^k_{t_{j+1}\wedge t} - B^k_{t_j\wedge t}]\right)(x)\varphi_k(x),$$

cuando $\max|t_{j+1}-t_j| \to 0$, donde $0\leq j\leq n-1$. Además

$$\mathbb{E}\|I_t^k\|^2 \leq \mathbb{E}\int_0^T \sup_{x\in\mathcal{D}} |\sigma(x,t)|^2 dt := C(T), \quad \text{para toda } k \text{ para todo } t\in[0,T]. \tag{3.3.8}$$

Ponemos

$$J_t^n := \int_0^t \sigma_s dW_s^n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}\left(\int_0^t \sigma_s dB_s^k\right)\varphi_k := \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} I_t^k.$$

De las expresiones anteriores (3.3.7) y (3.3.8), se tiene que para toda $n>m$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|J_t^n - J_t^m\| &= \sum_{k=m+1}^n \mu_k \mathbb{E}\|I_t^k\|^2, \\ &\leq C(T)\sum_{k=m+1}^n \mu_k \to 0, \quad n,m\to\infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{J_t^n\}$ de L^2-martingalas continuas converge a un límite, J_t, $t \in [0,T]$. Ponemos

$$J_t := \int_0^t \sigma_s dW_s, \tag{3.3.9}$$

y decimos que J_t es la integral estocástica de σ respecto al $R-$proceso de Wiener $\{W_t\}$ (donde $W_t = \lim_{n\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k} B_t^k \varphi_k$).

Teorema 3.3.1 *Sea $\{\sigma_t \equiv \sigma(\cdot,t)\}$ campo aleatorio, continuo y adaptado, el cual satisface la condición (3.3.7). Entonces $\{J_t\}$ dado en (3.3.9) es $H-$valuado, continuo, y cumple*

1. *Para toda $g, h \in H$, $\mathbb{E}(J_t, g) = 0$ y*

$$\mathbb{E}[(J_t, g)(J_s, h)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge s} (Q_\tau, g, h) d\tau\right] \tag{3.3.10}$$

con

$$(Q_\tau, g, h) = \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} q(x,y,\tau) g(x) h(y) dx dy, \tag{3.3.11}$$

siendo $q(x,y,\tau) = r(x,y)\sigma(x,\tau)\sigma(y,\tau)$.

2. *También*

$$\mathbb{E}\|J_T\|^2 = \mathbb{E}(J_T, J_T) = \mathbb{E}\int_0^t TrQ_s ds, \tag{3.3.12}$$

con $TrQ_t = \int_{\mathcal{D}} q(x,x,t)dx$.

3. *$\{J_t\}$ es martingala en L^2, $H-$valuada con operador de covariación local Q_τ definido por*

$$\langle (J,g),(J,h)\rangle_t = \int_0^t (Q_s, g, h) ds.$$

Se denota $[J]_t = \int_0^t Q_s ds$. A $[J]_t$ se llama operador característico local.

Demostración Ver [5], pp. 41-42.

∎

En el siguiente resultado las condiciones para σ son menos restrictivas, y a cambio de eso se pide que la función de covarianza, r, sea acotada.

Teorema 3.3.2 *Sea $\sigma_t = \sigma(\cdot,t) \in H$ un campo aleatorio, adaptado, continuo, que cumple*

$$\mathbb{E}\int_0^T \|\sigma(\cdot,t)\|^2 dt = \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathcal{D}} |\sigma(x,t)|^2 dx dt < \infty. \tag{3.3.13}$$

Si $r(\cdot,\cdot)$ cumple que $r_0 = \sup_{x\in D} r(x,x) < \infty$, entonces

$$J_t = \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

está bien definida y cumple las propiedades del Teorema anterior.

Demostración Ver [5], pp. 41-42.

■

Notemos que

$$Tr\ Q_t = \int_{\mathcal{D}} q(x,x,t)dx = \int_{\mathcal{D}} r(x,x)\sigma^2(x,t)dx,$$

de lo cual lo podemos reescribir como $TrQ_t = \|\sigma_t\|_R^2$.

Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$, un dominio acotado, con frontera $\partial\mathcal{D}$ suave. Consideramos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (\kappa\Delta - \alpha I)u + \dot{W}(x,t), \quad x \in \mathcal{D} \ \ t \in (0,T), \\ \\ u\big|_{\partial\mathcal{D}} = 0; \quad u(x,0) = h(x), \end{cases} \tag{3.3.14}$$

donde el operador Δ está dado por $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, con $\kappa > 0$, $\alpha > 0$ y $h \in H = L^2(\mathcal{D})$, y donde $\dot{W}(x,t)$ denota formalmente la derivada de $W(x,t) = W(\cdot,t)$, el cual es un proceso de Wiener, $H-$valuado, que satisface

$$\mathbb{E}W(x,t) = 0, \quad \mathbb{E}[W(x,t)W(y,s)] = (t \wedge s)r(x,y),$$

y

$$TrR = \int_{\mathcal{D}} r(x,x)dx < \infty, \text{ con } (Rf)(x) = \int_{D} r(x,y)f(y)dy.$$

Ahora bien, para resolver la ecuación (3.3.14), se usará el método de expansión en funciones propias.

Sean $\{\lambda_k\}$ los eigenvalores de $-\kappa\Delta + \alpha I$ en $\mathcal{D}$, con condición de Dirichlet en la frontera, y $\{e_k\}$ el sistema completo ortonormal de correspondientes eigenfunciones, tal que

$$\begin{cases} (-\kappa\Delta + \alpha)e_k = \lambda_k e_k, \\ \\ e_k\big|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad k = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.3.15}$$

con $0 < \alpha < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ y $\lambda_k \nearrow \infty$, $k \to \infty$, $e_k \in C^\infty(\mathcal{D})$. Buscamos una solución de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_t^k e_k(x), \tag{3.3.16}$$

donde $\{u_t^k\}_{t\geq 0}$, $k = 1,2,\ldots$ son procesos estocásticos que están por determinarse. Con este fin, se supondrá que R y L, recordemos que $L = -\kappa\Delta + \alpha I$, tienen el mismo conjunto $\{e_k\}$ de eigenfunciones. Así, supondremos que $Re_k = \sigma_k^2 e_k$ para toda k. Entonces

$$W(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k e_k(x) B_t^k,$$

con $TrR = \sum_k \sigma_k^2 < \infty$.

Si $u(x,t)$ está dada por la expresión (3.3.16), aplicando producto escalar con e_k se tiene

$$(du_t, e_k) = d\sum_{l=1}^{\infty}(e_l u_t^l, e_k) = d\sum_{l=1}^{\infty} u_t^l(e_l, e_k) = du_t^k. \tag{3.3.17}$$

Como u debe cumplir

$$du_t = (\kappa\Delta - \alpha)udt + dW(x,t), \tag{3.3.18}$$

al aplicar producto escalar con e_k en (3.3.18) se obtiene

$$\begin{aligned}(du_t, e_k) &= ((\kappa\Delta - \alpha)u_t dt + dW(x,t), e_k),\\ &= (u_t dt, (\kappa\Delta - \alpha)e_k) + (dW(x,t), e_k),\\ &= (u_t dt, -\lambda_k e_k) + \left(e_k, \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l e_l(x) dB_t^l\right)\\ &= (u_t dt, -\lambda_k e_k) + \sigma_k dB_t^k.\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Conjuntando las expresiones obtenidas en (3.3.17) y (3.3.19) se tiene

$$du_t^k = -\lambda_k u_t^k dt + \sigma_k \, dB_t^k,$$

$$\text{con} \quad u_0^k = h_k := (h, e_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \text{ donde} \quad h \in L^2(\mathcal{D}),$$

el cual es un sistema infinito de ecuaciones de Langevin, cuya solución es

$$u_t^k = h_k e^{-\lambda_k t} + \sigma \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} dW_s^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.3.20}$$

es decir, $\{u_t^k\}$ son procesos de Ornstein-Uhlenbeck independientes, de media

$$\hat{u}_t^k = \mathbb{E}[u_t^k] = h_k e^{-\lambda_k t} \quad \text{y}$$

$$Cov(u_t^k, u_s^l) = \delta_{kl} \frac{\sigma_k^2}{2\lambda_k} [e^{-\lambda_k |t-s|} - e^{-\lambda_k (t+s)}]. \tag{3.3.21}$$

Para más detalle del proceso de Ornstein-Uhlenbeck ver [11], pp. 159.

Usando la expresión (3.3.20) y denotando

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{-\lambda_k t} e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_t e_k(x), \quad \text{y}$$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_t^k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sigma_k \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} dW_s^k\right) e_k(x)\right],$$

se tendrá $u(x,t) = \hat{u}(x,t) + v(x,t)$, es decir, u es suma de las dos series $\hat{u}$ y v. A continuación se probará que ambas series son convergentes.

Se verá la convergencia de la primera serie. Si $h \in L^2(\mathcal{D})$, entonces $h(x)$ admite el desarrollo en serie

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k e_k(x). \tag{3.3.22}$$

Ahora, si $\{G_t, t \geq 0\}$ es el semigrupo en H, con generador $\kappa\Delta - \alpha I$, se tendrá

$$G_t h = \sum_k l_k T_t e_k$$

y por el Teorema del mapeo espectral (ver Apéndice B)

$$G_t h = \sum_k l_k e^{-\lambda_k t} e_k. \tag{3.3.23}$$

Al tomar el producto de h con e_k, debido a la ortonormalidad de $\{e_k\}$, se obtiene

$$(h, e_k) = \sum l_m (e_m, e_k) = l_k,$$

así, los coeficientes de la serie están completamente determinados y al sustituir la expresión anterior en (3.3.23) resulta

$$(G_t h)(x) \;=\; \sum_k e^{-\lambda_k t}(h, e_k) e_k(x) = \sum_k e^{-\lambda_k t} h_k e_k(x) = \hat{u}(x,t).$$

Así, $\{G_t, t \geq 0\}$ tiene como generador $(\kappa\Delta - \alpha I)$ y es tal que $(G_t h)(x) = \hat{u}(x,t)$. Se sigue que $\hat{u}$ cumple la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \hat{u}(x,t)}{\partial t} = (\kappa\Delta - \alpha I)\hat{u}(x,t), \text{ con } \hat{u}(x,0) = h(x),$$

la cual está bien puesta, además $\hat{u}(x,t)$ es solución mild, ya que si $h \in H^2$ entonces $\hat{u}(x,t)$ sería solución clásica.

Para la serie

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_t^k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sigma_k \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} dW_s^k\right] e_k(x), \tag{3.3.24}$$

considerando una suma parcial

$$v^n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} v_t^k e_k(x),$$

al tomar la norma y aplicando esperanza se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|v^n(\cdot,t)\|^2 &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} v_t^k e_k(x), \sum_{k=1}^{n} v_t^k e_k(x)\right)_H\right], \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} (v_t^k)^2\right], \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|v_t^k|^2, \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{2\lambda_k}(1 - e^{-2\lambda_k t}), \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{2\lambda_k}.
\end{aligned}$$

donde se uso (3.3.21) en la última igualdad.

Debido a que $\lambda_k > \alpha$ y que $\sigma_k^2 = (Re_k, e_k)$, entonces al tomar el supremo sobre t se tiene

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\|v^n(\cdot,t)\|^2 \leq \frac{1}{2\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 \leq \frac{1}{2\alpha}TrR < \infty,$$

de donde se sigue que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\|v(\cdot,t) - v^n(\cdot,t)\|^2 \leq \frac{1}{2\alpha}\sum_{k=n+1}^{\infty}\sigma_k^2 \to 0, \quad \text{cuando} \quad n\to\infty,$$

lo cual demuestra la convergencia de la serie (3.3.24) en L^2.

En general, la condición $TrR < \infty$ no implica que $u(x,t)$, dada por

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_t^k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{u}_t^k + \sum_{k=1}^{\infty} v_t^k e_k(x), \tag{3.3.25}$$

sea solución clásica, es decir que $u(\cdot,t) \in \text{Dom}(\kappa\Delta - \alpha I) \subset H^2$ y que cumpla casi seguramente que

$$u(x,t) = h(x) + \int_0^t (\kappa\Delta - \alpha I)u(x,s)ds + W(x,t), \quad (x,t)\in\mathcal{D}\times[0,T].$$

De hecho, $\{Av^n(\cdot,t)\}_n = \left\{(\kappa\Delta - \alpha I)\sum_{k=1}^{n} v_t^k e_k\right\}_k$ puede divergir en H. Por ejemplo, se sabe que el eigenvalor λ_k posee la propiedad asintótica

$$\lambda_k \sim c_d(\mathcal{D})k^{2/d} + o(k^{2/d}), \text{ cuando } k\to\infty,$$

donde la constante $c_d(\mathcal{D})$ es independiente de k, ver [5], pp. 44. Tomando $d=2$, entonces λ_k se aproxima a una constante c_k con k suficientemente grande. Así, si $\sigma_k \sim \frac{c_2}{k}$, cuando $k\to\infty$, entonces la suma $\sum_{k=2}^{n}\lambda_k\sigma_t^2$ diverge cuando $n\to\infty$, lo cual implica que $\mathbb{E}\|Av^n(\cdot,t)\|\to\infty$.

Teorema 3.3.3 *Sea $u(x,t)$ dada por (3.3.25). Si*

$$W(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k e_k(x)B_t^k,$$

entonces $u(\cdot,t); 0\leq t\leq T$, es un proceso $H-$valuado, adaptado, gaussiano, continuo en la media cuadrática y es la única solución débil de (3.3.14), en el sentido de que

$$(u(\cdot,t),\varphi) = (h,\varphi) + \int_0^t (u(\cdot,s),A\varphi)ds + W(\cdot,t) \quad c.s,$$

para toda $\varphi\in C_0^\infty$, *para todo* $t\in[0,T]$.

Demostración Sólo falta probar que u es continua en L^2 y que u es solución débil.

Primero probaremos que u es continua en L^2. Así, para $0\leq s\leq t\leq T$, tenemos que

$$u(\cdot,t) - u(\cdot,s) = (\hat{u}(t,\cdot) - \hat{u}(s,\cdot)) + (v(\cdot,t) - v(\cdot,s)). \tag{3.3.26}$$

Notemos que al tomar la norma de los primeros términos de la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned}\|\hat{u}(t,\cdot)-\hat{u}(s,\cdot)\| &= \|G_t h - G_s h\|,\\ &= \|G_s(G_{t-s}h-h)\|,\\ &\leq \|G_s\|\|G_{t-s}h-h\|,\end{aligned}$$

y como $\{G_s, s\geq 0\}$ es el semigrupo C_0 en H generado por $A=\kappa\Delta-\alpha I$, éste satisface

$$\|G_s\|\leq e^{-\alpha s},$$

mientras que

$$\|G_{t-s}h-h\|\to 0,\quad \text{si} \quad t-s\to 0$$

debido a que $\{G_s, s\geq 0\}$ es C_0 semigrupo. Por lo que $\|G_s\|\|G_{t-s}h-h\|\to 0$ cuando $t-s\to 0$.

Para los otros dos últimos términos de la expresión (3.3.26), tenemos que al aplicar norma bajo H y esperanza obtenemos

$$\mathbb{E}\|v(\cdot,t)-v(\cdot,s)\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\|v_t^k-v_s^k\|^2, \tag{3.3.27}$$

donde $v_t^k=\sigma_k\int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)}dB_s^k$, pero para $0\leq s<t\leq T$,

$$\begin{aligned}v_t^k-v_s^k &= \sigma_k\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-r)}dB_r^k-\int_0^s e^{-\lambda_k(s-r)}dB_r^k\right),\\ &= \sigma_k\left(\int_0^s [e^{-\lambda_k(t-r)}-e^{-\lambda_k(s-r)}]dB_r^k+\int_s^t e^{-\lambda_k(t-r)}dB_r^k\right).\end{aligned}$$

Notando que los intervalos de integración son ajenos, se sigue que las integrales son independientes y tienen media 0. Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|v_t^k-v_s^k\|^2 &= \sigma_k^2\left(\mathbb{E}\Big|\int_0^s [e^{-\lambda_k(t-r)}-e^{-\lambda_k(s-r)}]dB_r^k\Big|+\mathbb{E}\Big|\int_s^t e^{-\lambda_k(t-r)dB_r^k}\Big|^2\right),\\ &= \sigma_k^2\left(\int_0^s [e^{-\lambda_k(t-r)}-e^{-\lambda_k(s-r)}]dr+\int_s^t e^{-2\lambda_k(t-r)}dr\right)\\ &\leq \sigma_k^2[1-e^{-2\lambda_k(t-s)}],\\ &\leq \sigma_k^2[1-e^{-2\lambda_k(t-s)}],\\ &\leq 2\sigma_k^2(t-s).\end{aligned}$$

Sustituyendo en la serie (3.3.27) obtenemos que

$$\mathbb{E}\|v(\cdot,t)-v(\cdot,s)\|^2\leq\sum_{k=1}^{\infty}2\sigma_k^2(t-s)=(2TrR)(t-s).$$

Así, lo anterior prueba que $u(\cdot,t)$ es continua en L^2.

Ahora se verá que u es solución débil. Para ello consideremos

$$u^n(x,t)=\sum_{k=1}^{n}u_t^k e_k(x).$$

Entonces, al aplicar el producto escalar bajo H de $u^n(x,t)$ con $\varphi \in C_0^\infty$, tenemos

$$(u^n(\cdot,t),\varphi) = \sum_{k=1}^{n} u_t^k (e_k,\varphi),$$

donde, como antes,

$$\begin{cases} du_t^k = -\lambda_k u_t^k dt + \sigma_k dB_t^k, \\ u_0^k = h_k, \quad k = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

Luego sustituimos la forma integral de u_t^k en la expresión anterior, obteniendo así

$$(u^n(\cdot,t),\varphi)_H = \sum_{k=1}^{n} \left(h_k - \lambda_k \int_0^t u_s^k ds + \sigma_k B_t^k \right) (e_k,\varphi)_H.$$

Entonces

$$(u^n(\cdot,t),\varphi) = \left(\sum_{k=1}^{n} (h,e_k)e_k, \varphi \right) + \left(-\sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^t u_s^k ds \right) \lambda_k e_k, \varphi \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k B_t^k e_k, \varphi \right).$$

Usando ahora que $A = \kappa\Delta - \alpha I$ es autoadjunto se tiene

$$\begin{aligned} (u^n(\cdot,t),\varphi) &= \left(\sum_{k=1}^{n} (h,e_k)e_k, \varphi \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^t u_s^k ds \right) e_k, A\varphi \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k B_t^k e_k, \varphi \right), \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} (h,e_k)e_k, \varphi \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^t u_s^k e_k ds \right), A\varphi \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k B_t^k e_k, \varphi \right), \\ &= (h^n,\varphi) + \int_0^t (u^n(\cdot,s),A\varphi) ds + (W^n(\cdot,t),\varphi), \end{aligned}$$

donde h^n y W^n son las $n-$ésimas sumas parciales de h y W, respectivamente, en L^2. Ahora bien, h^n, u^n y W^n convergen en L^2 cuando $n \to \infty$. Usando esto y la continuidad del producto escalar se sigue que

$$(u(\cdot,t),\varphi) = (h,\varphi) + \int_0^t (u(\cdot,s),A\varphi) ds + (W(\cdot,t),\varphi) \quad \text{c.s.}, \tag{3.3.28}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty$, para todo $t \in [0,T]$.

Para probar la unicidad de la solución, sean u y $\tilde{u}$ soluciones débiles de la ecuación diferencial (3.3.14). Sea $\mu = u - \tilde{u}$, la cual cumple

$$(\mu(\cdot,t),\varphi)_H = \int_0^t (\mu(\cdot,s),A\varphi) ds.$$

Ahora, tomando $\varphi = e_k$ y poniendo $\mu_t^k = (\mu(\cdot,t),e_k)$, obtenemos

$$\mu_t^k = -\lambda_k \int_0^t \mu_s^k ds, \quad \text{con} \quad k = 1,2,3,\ldots,$$

lo que implica, usando la desigualdad de Jensen, que

$$|\mu_t^k|^2 \le \lambda_k^2 T \int_0^t |\mu_s^k|^2 ds, \quad k = 1,2,\ldots,$$

y de la desigualdad de Gronwall se sigue que

$$\mu_t^k = (u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t), e_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

por lo tanto,

$$u(\cdot,t) = \tilde{u}(\cdot,t) \quad \text{c.s} \quad \text{en } H \quad \text{para todo } \ t.$$

■

Observación 3.3.4 *La función de transición $G(x,y;t)$ del semigrupo $\{G_t\}$ generado por $(\kappa\Delta - \alpha I)$ admite la siguiente representación*

$$G(x,y;t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} e_k(x) e_k(y),$$

ver [22], pp. 122-123.

La solución débil de la ecuación diferencial (3.3.14) está dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \hat{u}(x,t) + v(x,t), \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{-\lambda_k t} e_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sigma_k \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} dB_s^k \right) e_k(x), \end{aligned} \tag{3.3.29}$$

donde $\sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k)_H e^{-\lambda_k t} e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathcal{D}} h(y) e_k(y) e_k(x) e^{-\lambda_k t} dy$, *y así*

$$\hat{u}(x,t) = \int_{\mathcal{D}} G(x,y;t) h(y) dy = (G_t h)(x).$$

Para la otra serie en (3.3.29),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sigma_k \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} dB_s^k \right) e_k(x) &= \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k (t-s)} e_k(x) e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k e_k(y) dB_s^k \right) \right] dy \\ &= \int_0^t \int_{\mathcal{D}} G(x,y;t-s) W(y,ds) dy, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es debida a la ortonormalidad de las $\{e_k\}$. Así, se sigue que

$$u(\cdot,t) = G_t h(\cdot) + \int_0^t G_{t-s} W(\cdot, ds), \tag{3.3.30}$$

donde $G_0 h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (e_k, h) e_k(x) = h(x)$, *y se verifica que*

$$G_t(G_s h) = G_{t+s} h, \quad \text{para todo } t, s > 0.$$

Notemos que la expresión (3.3.30) puede estar bien definida, aún si R no tiene traza finita.

3.4. Ecuaciones lineales con ruido aditivo

Sea $\{W(x,t), x \in \mathcal{D}, t \in [0,T]\}$ un $R-$campo aleatorio gaussiano continuo, con función de covarianza $r(x,y)$, la cual satisface

$$\sup_{x\in\mathcal{D}} r(x,x) \leq r_0 < \infty.$$

Sean $f(x,t)$, $\sigma(x,t)$, dos campos aleatorios con $x \in \mathcal{D}, t \in [0,T]$, tales que $f(\cdot,t)$ y $\sigma(\cdot,t)$ son $\{F_t\}-$adaptados y satisfacen

$$\mathbb{E}\int_0^T [\|f(\cdot,s)\|^2 + \|\sigma(\cdot,s)\|^2]ds < \infty, \tag{3.4.31}$$

y la integral

$$M(\cdot,t) = \int_0^t \sigma(\cdot,ds)W(\cdot,ds) \equiv \int_0^t \sigma_s dW_s \equiv M_s,$$

es martingala $H-$valuada. Denotando

$$w(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds + M(x,t) \quad \text{o} \quad w_t = \int_0^t f_s ds + M_t,$$

tenemos que $\{w(x,t)\}$ es una semimartingala, la cual es dependiente del espacio y $q(x,y;t)$, $f(x,t)$ son sus características locales, donde $q(x,y;t)$ está dada

$$q(x,y;t) = r(x,y)\sigma(x,t)\sigma(y,t).$$

Considerémos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (\kappa\Delta - \alpha I)u - \dot{V}(x,t), \quad x \in \mathcal{D} \quad \text{y} \quad t \in (0,T), \\ u\big|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad u(x,0) = h(x), \end{cases} \tag{3.4.32}$$

donde

$$\dot{V}(x,t) = f(x,t) + \sigma(x,t)\dot{W}(x,t).$$

Como antes, denotamos

$$G(x,y;t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} e_k(x) e_k(y)$$

y definimos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathcal{D}} G(x,y;t)h(y)dy + \int_{\mathcal{D}}\int_0^t G(x,y;t-s)dyV(y,ds), \\ &= \int_{\mathcal{D}} G(x,y;t)h(y)dy + \int_0^t\int_{\mathcal{D}} G(x,y;t-s)f(y,s)dyds \\ &+ \int_0^t\int_{\mathcal{D}} G(x,y;t-s)\sigma(y,s)W(y,ds)dy, \end{aligned} \tag{3.4.33}$$

que es la solución mild de la ecuación (3.4.32). Se puede demostrar que la solución mild es también solución débil de la ecuación (3.4.32), es decir, para todo $\varphi \in C_0^2$ se satisface

$$(u_t,\varphi) = (h,\varphi) + \int_0^t (u_s, A\varphi)ds + \int_0^t (f_s,\varphi)ds + \int_0^t (\varphi, \sigma_s dW_s), \tag{3.4.34}$$

donde el operador A está dado por $A = \kappa\Delta - \alpha I$.

Lo anterior conlleva a los siguientes resultados, de los cuales se hará la prueba del segundo teorema ya que la demostración del teorema 3.4.2 es análoga a la del teorema 3.4.1. Estos dos resultados pueden consultarse en [5], pp. 53-55.

Teorema 3.4.1 *Si se cumple la condición (3.4.31) y u está dada por la expresión (3.4.33), entonces para toda $h \in H$ y para todo $t \in [0,T]$, $u(\cdot,t)$ es un proceso $H-$valuado, adaptado, continuo en media cuadrática y es la única solución débil de la ecuación (3.4.32) la cual satisface la expresión (3.4.34).*

Teorema 3.4.2 *Bajo las hipótesis del Teorema anterior, $u(\cdot,t) \equiv u_t$ cumple que*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|^2\right) \le C(T)\left(\|h\|^2 + \mathbb{E}\int_0^T [\|f(\cdot,s)\|^2 + TrQ_s]ds\right).$$

Demostración En efecto, de las expresiones (3.3.30), (3.3.28) y (3.3.29) se sigue que

$$u_t = G_t h + \int_0^t G_{t-s} f_s ds + v_t,$$

con $v_t = \displaystyle\int_0^t G_{t-s}\sigma_s W(\cdot, ds)$. Aplicando norma y usando la desigualdad del triángulo, obtenemos

$$\|u_t\| \le \|G_t h\| + \left\|\int_0^t G_{t-s} f_s ds\right\| + \|v_t\|,$$

y al elevar al cuadrado tenemos

$$\begin{aligned}\|u_t\|^2 &\le \left(\|G_t h\| + \left\|\int_0^t G_{t-s} f_s ds\right\| + \|v_t\|\right)^2, \\ &\le 3\left(\|G_t h\|^2 + \left\|\int_0^t G_{t-s} f_s ds\right\|^2 + \|v_t\|^2\right). \qquad (3.4.35)\end{aligned}$$

Ahora se examinará los dos primeros sumandos de lado derecho de (3.4.35).

Para $\|G_t h\|^2$, se tiene

$$\begin{aligned}\|G_t h\|^2 &= (G_t h, G_t h)_H, \qquad (3.4.36)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}(e_k, h)e_k, \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}(e_k, h)e_k\right), \qquad (3.4.37)\end{aligned}$$

y usando la ortonormalidad de las $\{e_k\}$ obtenemos

$$\|G_t h\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k t}(h, e_k)^2 \le \|h\|^2. \qquad (3.4.38)$$

Mientras que para el segundo término

$$\left\|\int_0^t G_{t-s} f_s ds\right\|^2 = \left\|\frac{t}{t}\int_0^t G_{t-s} f_s ds\right\|^2 = t^2\left\|\frac{1}{t}\int_0^t G_{t-s} f_s ds\right\|^2,$$

donde $\|\cdot\|$ es una función convexa y $\dfrac{ds}{t}$ es una distribución uniforme en $[0,t]$. Así, por la desigualdad de Jensen se tiene

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t G_{t-s}f_s ds\right\|^2 &\leq t^2\int_0^t \frac{\|G_{t-s}f_s\|^2}{t}ds,\\ &= t\int_0^t \|G_{t-s}f_s\|^2 ds,\\ &\leq t\int_0^t \|f_s\|^2 ds.\end{aligned}$$

Con las estimaciones anteriores, al tomar esperanza y supremo en (3.4.35) obtenemos

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|u_t\|^2 \leq 3\left(\|h\|^2 + T\mathbb{E}\int_0^T \|f_s\|^2 ds + \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|v_t\|^2\right).$$

Para estimar el término $\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|v_t\|^2$, recordamos que

$$\begin{aligned}v_t(\cdot) := v(x,t) &= \int_0^t\int_{\mathcal{D}} G(x,y;t-s)\sigma(y,s)W(y,ds),\\ &= \int_0^t\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k(t-s)}e_k(x)e_k(y)\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma(\cdot,s)W(\cdot,ds),e_k)e_k(y)\right),\end{aligned}$$

y por ortonormalidad

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)}(\sigma(\cdot,s)W(\cdot,s),e_k)dy\right)e_k(x).$$

Denotando por v_t^k a la integral en la serie anterior queda

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_t^k e_k(x),$$

donde v_t^k es tal que

$$v_t^k \;=\; \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)}d\int_0^s(\sigma(\cdot,r)W(\cdot,dr),e_k) = \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)}d\int_0^s(e_k,\sigma_r dW_r) = \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)}dZ_s^k,$$

donde Z_s^k denota la integral $\int_0^s (e_k,\sigma_r dW_r)$. Se tiene además, que $\{Z_r^k\}$ es martingala continua con

$$[Z^k]_t = \int_0^t q_s^k ds.$$

Usando integración por partes se ve que

$$Z_t^k = v_t^k + \lambda_k\int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)}Z_s^k ds,$$

así, al despejar v_t^k obtenemos

$$v_t^k = Z_t^k - \lambda_k \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} Z_s^k ds$$

y al tomar la norma y elevendo al cuadrado obtenemos

$$\begin{aligned} |v_t^k|^2 &= \left| Z_t^k - \lambda_k \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} Z_s^k ds \right|^2, \\ &\leq 2\left|Z_t^k\right|^2 + 2\left|\lambda_k \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} Z_s^k ds\right|^2, \\ &\leq 2\left|Z_t^k\right|^2 + 2\lambda_k^2 \left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} |Z_s^k| ds\right)^2, \\ &\leq 2\left|Z_t^k\right|^2 + 2\lambda_k^2 \sup_{0\leq s\leq t} |Z_s^k|^2 \left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)ds}\right)^2, \\ &\leq 2\left|Z_t^k\right|^2 + 2\lambda_k^2 \sup_{0\leq s\leq t} |Z_s^k|^2 \frac{1}{\lambda_k^2}(1-e^{-\lambda_k t})^2, \\ &\leq 2\left|Z_t^k\right|^2 + 2\sup_{0\leq s\leq t} \left|Z_s^k\right|^2, \\ &\leq 4\left|Z_t^k\right|^2. \end{aligned}$$

Con lo anterior y luego de aplicar supremo sobre t y esperanza obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T} |v_s^k|^2 &\leq 4\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T} \left|Z_s^k\right|^2 \\ &\leq c\mathbb{E}|Z_T^k|^2, \\ &\leq c\int_0^T \mathbb{E}(Q_s e_k, e_k) ds, \end{aligned} \tag{3.4.39}$$

donde c es una constante y $(Q_s e_k, e_k) = \int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} \sigma(x,s)\sigma(y,s)e_k(x)e_k(y)dydx$.

Pero

$$\|v_t\|^2 = \left(\sum_k^\infty v_t^k e_k, \sum_k^\infty v_t^k e_k\right)_H = \sum_{k=1}^\infty |v_t^k|^2 \leq \sum_{k=1}^\infty \sup_{0\leq t\leq T} |v_t^k|^2, \tag{3.4.40}$$

así, al tomar sumas finitas en la desigualdad (3.4.40), se tendrán sumas monónotonas y por el Lema de Fatou

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|v_t\|^2 \leq \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}|v_t^k|^2 \leq c\int_0^T \mathbb{E}(TrQ_s)ds < \infty.$$

Notemos que

$$Z_t^k = (M(\cdot,t), e_k(\cdot))_H,$$

donde $M(\cdot,t)$ está dado por

$$M(\cdot,t) = \int_0^t \sigma(\cdot,s)W(\cdot,ds),$$

así, tenemos que

$$Z_t^k = \int_0^t (e_k(\cdot), \sigma(\cdot, s)W(\cdot, ds)),$$

por lo que la variación cuadrática de Z_t^k está dada como sigue

$$[Z_t^k]_t = \int_0^t \left(\int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \sigma(x,s)\sigma(y,s)e_k(x)e_k(y)dydx \right) ds.$$

Luego,

$$\mathbb{E}|Z_t^k|^2 = \int_0^t \mathbb{E}(Q_s e_k, e_k)ds.$$

Uniendo las tres estimaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \|u_t\|^2 &\le 3\left(\|h\|^2 + T\mathbb{E}\int_0^T \|f_s\|^2 ds + c\int_0^T \mathbb{E}(TrQ_s)ds \right), \\ &\le C(T)\left(\|h\|^2 + \mathbb{E}\int_0^T [\|f(\cdot,s)\|^2 + TrQ_s]ds \right). \end{aligned}$$

■

Definición 3.4.3 *Sea $T > 0$ y $(\Omega, F, \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0})$ espacio filtrado. La $\sigma-$álgebra predecible es la $\sigma-$álgebra $\mathcal{P}$ generada por los conjuntos*

a) *$(s,t] \times B$, donde $(s,t] \subset [0,T]$, $B \in \mathcal{F}_s$ para todo $s > 0$ y*

b) *$\{0\} \times B_0$, donde $B_0 \in \mathcal{F}_0$.*

Un proceso $(X_t)_{t\ge 0}$ definido en (Ω, F) es predecible si $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ es $\mathcal{P}$-medible en $[0,T]\times\Omega$.

Corolario 3.4.4 *Todo proceso adaptado continuo a la izquierda es predecible.*

Demostración Ver [24], pp. 186.

Teorema 3.4.5 *Si $\mathbb{E}\int_0^T \left(\|f(\cdot,s)\|^2 + \|\sigma(\cdot,s)\|^2 \right) ds < \infty$ y $h \in H$, entonces la ecuación (3.4.32) tiene una única solución dada por (3.4.33), la cual es predecible, H^1-valuada, con trayectorias continuas en H sobre $[0,T]$. Además*

(A) *existe una constante C, la cual depente de T, $C(T) > 0$, tal que*

$$\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \|u(\cdot,t)\|^2 + \mathbb{E}\int_0^t \|v(\cdot,t)\|_1^2 dt \le C(T)\left(\|h\|^2 + \mathbb{E}\int_0^T [\|f(\cdot,s)\|^2 + TrQ_s]ds \right), \tag{3.4.41}$$

(B) *se cumple la ecuación de energía*

$$\begin{aligned} \|v(\cdot,t)\|^2 = \|h\|^2 &+ 2\int_0^t \langle Au(\cdot,s), u(\cdot,s)\rangle ds + 2\int_0^t (u(\cdot,s), f(\cdot,s))ds \\ &+ 2\int_0^t (u(\cdot,s), M(\cdot,ds)) + \int_0^t TrQ_s ds, \end{aligned} \tag{3.4.42}$$

donde $M(\cdot, ds) = \sigma(\cdot,s)W(\cdot,ds)$.

Demostración Ver [5], pp. 56-57.

∎

Con regularidad de H^1 de u se puede ver que u también es solución de la ecuación variacional

$$(u_t, \varphi) = (h, \varphi) + \int_0^t \langle Au_s, \varphi \rangle ds + \int_0^t (f_s, \varphi) ds + \int_0^t (\varphi, dM_s), \quad \text{con} \quad \varphi \in H_1, \tag{3.4.43}$$

las soluciones de la ecuación anterior se llaman soluciones fuertes.

Teorema 3.4.6 *Si las condiciones:*

(a) $\sigma(\cdot, t)$ *es un proceso predecible,* $H-$*valuado tal que para* $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^t TrQ_t dt\right\}^p = \mathbb{E}\left\{\int_0^T \int_{\mathcal{D}} q(x, x, t) dx dt\right\}^p < \infty.$$

(b) $f(\cdot, t)$ *es un proceso* $\mathcal{F}_t-$*adaptado en* H *tal que para* $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^T \|f(\cdot, t)\|^2 dt\right\}^p < \infty.$$

se cumplen, entonces para cualquier $h \in H$, *la solución* $u(\cdot, t)$ *de la ecuación (3.4.32) dada por (3.4.33) es un proceso predecible,* $H-$*valuado, el cual es continuo en* H *y satisface*

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|^{2p} + \mathbb{E}\left\{\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_1^2 dt\right\}^p \leq C\left\{\|h\|^{2p} + \mathbb{E}\left[\int_0^T \|f(\cdot, t)\|^2 dt\right]^p + \mathbb{E}\left[\int_0^T (TrQ_t) dt\right]^p\right\} \tag{3.4.44}$$

Demostración Ver [5], pp. 64-65.

∎

Capítulo 4

Ecuaciones estocásticas de reacción-difusión.

El objetivo de este capítulo es explorar la posibilidad de explosión provocada por el ruido de una cierta clase de ecuaciones no lineales. Así el contenido del capítulo se presenta de la siguiente manera: en la primera sección se introducen ecuaciones estocásticas de reacción-difución, en la cual se describen condiciones para tener soluciones del tipo mild y se presentan soluciones locales para este tipo de ecuaciones, además de resultados de existencia y unicidad para soluciones globales; en la segunda sección se presentan condiciones sobre las condiciones iniciales, el término no lineal y el ruido multiplicativo para que el problema de valores en la frontera con condición de Dirichlet tengan solución positiva; finalmente en la tercera sección se busca determinar condiciones sobre el estado inicial, el término no lineal, y el ruido multiplicativo bajo las cuales las soluciones positivas exploten en norma L^p en un tiempo finito para $p \geq 1$. El contenido de este capítulo puede consultarse en [3], [5], [4], [12] y [6].

4.1. Ecuaciones de reacción-difusión estocásticas

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\kappa\Delta - \alpha)u + f(u,x,t) + \dot{V}(u,x,t), \quad x \in \mathcal{D},\ t \in (0,T), \tag{4.1.1}$$

$$u\big|_{\partial\mathcal{D}} = 0; \quad u(x,0) = h(x), \quad \text{donde}$$

$$\dot{V}(u,x,t) = g(x,t) + \sigma(u,x,t)\frac{\partial}{\partial t}W(x,t), \tag{4.1.2}$$

siendo $g(x,t)$, y $f(u,x,t)$ y $\sigma(u,x,t)$ campos aleatorios predecibles dados para $(u,x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}$. La forma integral de la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \int_{\mathcal{D}} G(x,y;t)h(y)dy + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} G(x,y;t-s)g(y;s)dsdy + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} G(x,y;t-s)f(u(y,s),y,s)dsdy \\ & + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} G(x,y;t-s)\sigma(u(y,s),y,s)W(y,ds)dy, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

donde $G(x,y;t)$ es la densidad de transición del semigrupo generado por $(\kappa\Delta - \alpha I)$, la cual está dada por $G(x,y;t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} e_k(x)e_k(y)$.

Definición 4.1.1 *Una solución continua de la ecuación (4.1.3) se llama solución mild de la ecuación diferencial (4.1.1). Más precisamente, $u \in L^2(\Omega \times [0,T]; H)$ es solución mild de la ecuación(4.1.1), si u es un proceso predecible $H-$valuado y cumple*

$$u_t = G_t h + \int_0^t G_{t-s} g_s ds + \int_0^t G_{t-s} F_s(u) ds + \int_0^t G_{t-s} \Sigma_s(u) dW_s,$$

para casi todo $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ *y que además satisface*

$$\mathbb{E}\int_0^T (\|F_t(u)\|^2 + (R\Sigma_t(u), \Sigma_t(u))_H)dt = \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathcal{D}} [|f(u(x,t),x,t)|^2 + r(x,x)\sigma^2(u(x,t),x,t)]dtdx < \infty,$$

donde $u_t = u(\cdot, t)$, $F_t(u) = f(u(\cdot,t),\cdot,t)$, $g_t = g(\cdot,t)$, $\Sigma_t(u) = \sigma(u(x,t),\cdot,t)$ *y* $dW_t = W(\cdot,t)$.

Para probar un resultado de existencia de soluciones es necesario considerar las siguientes condiciones:

(A1) $f(r,x,t)$ y $\sigma(r,x,t)$ son predecibles y existe $k_1 > 0$ tal que

$$\|f(u,\cdot,t)\|^2 + \|\sigma(u,\cdot,t)\|^2 \leq k_1(1 + \|u\|^2) \quad \text{c.s.},$$

para cualquier $u \in H$, $t \in [0,T]$.

(A2) Existe constante $k_2 > 0$ tal que

$$\|f(u,\cdot,t) - f(v,\cdot,t)\|^2 + \|\sigma(u,\cdot,t) - \sigma(v,\cdot,t)\|^2 \leq k_2(\|u - v\|^2) \quad \text{c.s.},$$

para cualquier $u, v \in H$, $t \in [0,T]$.

(A3) $g(\cdot,t)$ es proceso predecible, $H-$ valuado, tal que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \|g_t\|^2 dt\right)^p < \infty,$$

para cualquier $p \geq 1$ y $W(x,t)$ es un $R-$proceso de Wiener de traza finita cuyo núcleo $r(x,y)$ está acotado por $r_0 > 0$.

Sea $X_{p,T}$ el conjunto de todos los procesos u que son continuos, F_t-adaptados, $H-$valuados, continuos sobre $0 \leq t \leq T$, y tales que

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T} \|u(\cdot,t)\|^{2p} < \infty, \text{ para un } p \geq 1 \text{ dado.}$$

Entonces $(X_{p,T}, \|\cdot\|_{p,T})$ es espacio de Banach con norma

$$\|u\|_{p,T} = \left(\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T} \|u_t\|^{2p}\right)^{1/2p}. \tag{4.1.4}$$

Definimos el operador Γ_t en $X_{p,T}$, el cual está dado como sigue:

$$\Gamma_t u = G_t h + \int_0^t G_{t-s}F_s(u)ds + \int_0^t G_{t-s}g_s ds + \int_0^t G_{t-s}\Sigma_s(u)dW_s, \; u \in X_{p,T}. \tag{4.1.5}$$

Lema 4.1.2 *Bajo las condiciones (**A1**)-(**A3**) y* $p \geq 1$*, el operador* Γ_t*, dado en (4.1.5), es acotado y es tal que*

$$\Gamma_t(X_{p,T}) \subset X_{p,T},$$

y además

$$\|\Gamma u\|_{p,T}^{2p} \leq b_1\left[1 + \|h\|^{2p} + \mathbb{E}\left(\int_0^T \|g_t\|^2 dt\right)^p + \|u\|_{p,T}^{2p}\right] \tag{4.1.6}$$

para alguna constante $b_1 > 0$ *que depende sólo de* p, r_0 *y* T.

Demostración De la condición (**A1**) tenemos que

$$\|F_t(u)\|^2 \leq k_1(1+\|u\|^2) - \|\Sigma_s(u)\|^2 \leq k_1(1+\|u\|^2),$$

integrando con respecto a T y elevando a la p,

$$\left(\int_0^T \|F_t(u)\|^2 dt\right)^p \leq \left(\int_0^T k_1(1+\|u_t\|^2)dt\right)^p,$$

aplicando esperanza

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^T \|F_t(u)\|^2 dt\right)^p &\leq k_1^p \mathbb{E}\left(\int_0^T (1+\|u_t\|^2)dt\right)^p, \\
&\leq k_1^p \mathbb{E}\left(T + \int_0^T \|u_t\|^2 dt\right)^p, \\
&\leq k_1^p \mathbb{E}\left[2^{p-1}\left(T^p + \left(\int_0^T \|u_t\|^2 dt\right)^p\right)\right], \\
&\leq k_1^p 2^p \left[T^p + \mathbb{E}\left(\int_0^T \|u_t\|^2 dt\right)^p\right], \\
&\leq (2k_1T)^p\left(1+\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|u\|^{2p}\right).
\end{aligned}$$

Así, existe una constante C_1, la cual depende de p y T, y satisface

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \|F_t(u)\|^2 dt\right)^p \leq C_1\left(1+\|u\|_{p,T}^{2p}\right). \tag{4.1.7}$$

Además, como

$$\|\Sigma_t(u)\|_R^2 = TrQ_t(u) = \int_{\mathcal{D}} r(x,x)\sigma^2(u(x,t),x,t)dx \leq r_0\|\Sigma_t(u)\|^2,$$

de la condición (**A1**),

$$\|\Sigma_t(u)\|_R^2 \leq k_1 r_0(1+\|u_t\|^2),$$

integrando con respecto a t y elevando a la p, obtenemos

$$\left(\int_0^T \|\Sigma_t(u)\|_R^2 dt\right)^p \leq \left(\int_0^T k_1 r_0(1+\|u_t\|^2)dt\right)^p,$$

aplicando esperanza

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Sigma_t(u)\|_R^2 dt\right)^p &\leq \mathbb{E}\left(\int_0^T k_1 r_0 (1+\|u_t\|^2) dt\right)^p, \\
&\leq (k_1 r_0)^p\, \mathbb{E}\left(T + \int_0^T \|u_t\|^2 dt\right)^p, \\
&\leq (k_1 r_0)^p\, 2^{p-1}\left(T^p + \mathbb{E}\left(\int_0^T \|u_t\|^2 dt\right)^p\right), \\
&\leq (2k_1 r_0)^p \left(T^p + \mathbb{E}\left(\int_0^T \|u\|^2 dt\right)^p\right), \\
&\leq (2k_1 r_0 T)^p \left(1 + \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T} \|u\|^{2p}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, existe una constante C_2, la cual depende de r_0, T y p, que satisface

$$
\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Sigma_t(u)\|_R^2 dt\right)^p \leq C_2\left(1 + \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T} \|u\|^{2p}\right). \tag{4.1.8}
$$

Poniendo $v = \Gamma u$, donde Γu está dado por (4.1.5), se obtiene debido a (4.1.7) y (4.1.8) que $(v(\cdot,t))_t$ es un proceso adaptado y continuo en H. Aplicando el teorema 3.4.6 obtenemos la estimación

$$
\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|\Gamma u_t\|^{2p} \leq C\left\{\|h\|^{2p} + \mathbb{E}\left[\int_0^T \|F_t(u)\| dt\right]^p + \mathbb{E}\left(\int_0^T \|g_t\|^2 dt\right)^p + \mathbb{E}\left[\int_0^T \|\Sigma_t(u)\|_R^2 dt\right]^p\right\}
$$

usando las estimaciones (4.1.7) y (4.1.8), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|\Gamma u_t\|^{2p} &\leq C\left\{\|h\|^{2p} + C_1\left(1 + \|u\|_{p,T}^{2p}\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \|g_t\|^2 dt\right)^p + C_2\left(1 + \mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|u\|^{2p}\right)\right\} \\
\|\Gamma u\|_{p,T}^{2p} &\leq b_1\left[1 + \|h\|^{2p} + \mathbb{E}\left(\int_0^T \|g_t\|^2 dt\right)^p + \|u\|_{p,T}^{2p}\right],
\end{aligned}
$$

donde b_1 es una constante que depende de r_0, p y T.

■

Lema 4.1.3 *Bajo las condiciones (**A1**)-(**A3**) el mapeo $\Gamma : X_{p,T} \to X_{p,T}$ es Lipschitz continuo. Además, para todo $u, u^{'} \in X_{p,T}$ con $0 \leq T \leq 1$, existe constante positiva b_2, independiente de $T \in [0,1]$ tal que*

$$
\|\Gamma u - \Gamma u^{'}\|_{p,T} \leq b_2\sqrt{T}\|u - u^{'}\|_{p,T}.
$$

Demostración De la condición (**A2**), tenemos

$$
\begin{aligned}
\|F_t(u) - F_t(u')\|^2 &\leq k_2(\|u-u'\|^2) - \|\Sigma_t(u) - \Sigma_t(u')\|^2, \\
&\leq k_2(\|u-u'\|^2),
\end{aligned}
$$

e integrando sobre t y elevando a la p,

$$\left(\int_0^t \|F_t(u) - F_t(u')\|^2 dt\right)^p \leq \left(\int_0^t k_2(\|u_t - u_t'\|^2) dt\right)^p,$$

aplicando esperanza

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^t \|F_t(u) - F_t(u')\|^2 dt\right)^p &\leq \mathbb{E}\left(\int_0^t k_2(\|u_t - u_t'\|^2) dt\right)^p, \\ &\leq (k_2 T)^p \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \|u - u'\|^{2p} \\ &= (k_2 T)^p \|u - u'\|_{p,T}^{2p}. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

De la condición (**A3**), tenemos que

$$\|\Sigma_t(u) - \Sigma_t(u')\|_R^2 \leq r_0 \|\Sigma_t(u) - \Sigma_t(u')\|^2,$$

aplicando la condición (**A2**)

$$\|\Sigma_t(u) - \Sigma_t(u')\|_R^2 \leq k_2 r_0 \|u_t - u_t^{'}\|^2.$$

Integrando con respecto a t, y elevando a la p

$$\left(\int_0^T \|\Sigma_t(u) - \Sigma_t(u')\|_R^2 dt\right)^p \leq \left(k_2 r_0 \int_0^T \|u_t - u_t^{'}\|^2 dt\right)^p,$$

aplicando esperanza

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Sigma_t(u) - \Sigma_t(u')\|_R^2 dt\right)^p &\leq (k_2 r_0)^p\, \mathbb{E}\left(\int_0^T \|u_t - u_t^{'}\|^2 dt\right)^p, \\ &\leq (k_2 r_0 T)^p\, \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \|u_t - u_t^{'}\| dt^{2p}\right), \\ &= (k_2 r_0 T)^p \|u - u^{'}\|_{p,T}^{2p}. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Denotemos $v = \Gamma u$, $v' = \Gamma u'$ y $\delta v = v - v'$. De la expresión (4.1.5) tenemos

$$\delta v_t = \int_0^t G_{t-s}[F_s(u) - F_s(u')] ds + \int_0^t G_{t-s}[\Sigma_t(u) - \Sigma_t(u')] dW_s.$$

Aplicando el Teorema 3.4.6 obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \|\delta v_t\|^{2p} &= \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \|\Gamma_t(u) - \Gamma_t(u')\|^{2p}, \\ &\leq C\mathbb{E}\left\{\left(\int_0^T \|F_t(u) - F_t(u')\|^2 dt\right)^p + \left(\int_0^T \|\Sigma_t(u) - \Sigma_t(u')\|_R^2 dt\right)^p\right\}.\end{aligned}$$

Aplicando las estimaciones (4.1.9) y (4.1.10) en la desigualdad anterior, obtenemos

$$\|\Gamma u_t - \Gamma u_t'\|_{p,T}^{2p} \leq C(1+r_0^p)(k_2 T)^p \|u-u'\|_{p,T}^{2p}, \tag{4.1.11}$$

lo cual implica

$$\|\Gamma u_t - \Gamma u_t'\|_{p,T} = b_2\sqrt{T}\|u-u'\|_{p,T}, \tag{4.1.12}$$

donde b_2 es una constante que depende de p y r_0.

■

Teorema 4.1.4 *Sea h un campo aleatorio $\mathcal{F}_0-$medible, con $\mathbb{E}\|h\|^{2p} < \infty$ para algún $p \geq 1$. Si se cumplen **(A1)**, **(A2)** y **(A3)**, entonces la ecuación diferencial*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\kappa\Delta - \alpha I)u + f(u,x,t) + \dot{V}(u,x,t), \quad x \in \mathcal{D},\ t \in (0,T)$$

$$\textit{con} \quad u(x,t)\big|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad u(x,0) = h(x),$$

posee una única solución mild, la cual es un proceso $H-$valuado, adaptado y continuo u, y $u \in L^{2p}(\Omega, C([0,T];H))$.

Demostración Probaremos que la ecuación

$$u_t = G_t h + \int_0^t G_{t-s} g_s ds + \int_0^t G_{t-s} F_s(u) ds + \int_0^t G_{t-s}\Sigma_s(u) dW_s, \tag{4.1.13}$$

tiene una única solución en $X_{p,T}$. Para lo cual, tenemos de los Lemas 4.1.2 y 4.1.3 que el operador $\Gamma : X_{p,T} \to X_{p,T}$ es acotado y Lipschitz continuo.

Además, se cumple

$$\|\Gamma u - \Gamma u'\|_{p,T} \leq b_2\sqrt{T}\|u-u'\|_{p,T}, \text{ con } T \in [0,1] \text{ y } b_2 \text{ positivo},$$

en particular, se cumple

$$\|\Gamma u - \Gamma u'\|_{p,T} \leq \frac{1}{2}\|u-u'\|_{p,T}, \tag{4.1.14}$$

pues si $T \leq T_1$ con $T_1 = \dfrac{1}{4b_2^2}$, entonces

$$\|\Gamma u - \Gamma u'\|_{p,T} \leq \frac{1}{2}\|u-u'\|_{p,T} \leq \frac{1}{4b_2^2}\|u-u'\|_{p,T} \leq \|u-u'\|_{p,T}.$$

Por lo tanto, Γ es una contracción en el espacio de Banach $X_{p,T}$.

Así, Γ posee un único punto fijo u, el cual satisface la ecuación

$$\Gamma_t u = u \text{ para } 0 \leq t \leq T.$$

Lo anterior implica que la ecuación (4.1.13) tiene una única solución local en $[0,T]$. La solución puede ser extendida sobre cualquier intervalo finito $[0,T']$, con $T < T'$: basta considerar la ecuación (4.1.13) en el intervalo $[T,T']$ con condición inicial u_T, y proceder como antes.

■

Ejemplo 4.1.5 *Consideremos la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\kappa\Delta - \alpha)u + a(\sin u) + \sigma_0(x,t)u\dot{W}$$
$$u(\cdot,t)\big|_{\partial\mathcal{D}} = 0; \quad u(x,0) = h(x), \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R},\ t \in [0,T],$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante, y existe $c > 0$ tal que

$$|\sigma_0(x,t)| \leq c \quad \textit{c.s. para todo} \ \ [x,t] \in \mathcal{D} \times [0,T],$$

y σ_0 es un campo aleatorio predecible.
Pongamos

$$f(u,x,t) = a \operatorname{sen} u(x,t),$$
$$\sigma(u,x,t) = \sigma_0(x,t)u(x,t).$$

*Entonces las condiciones (**A1**) y (**A2**) se cumplen. Además, si (**A3**) se cumple y h es un campo aleatorio $\mathcal{F}_0-$medible con $\mathbb{E}\|h\|^{2p} < \infty$ para algún $p \geq 1$, entonces la ecuación admite una única solución mild $H-$valuada, continua y adaptada.*

4.1.1. Soluciones locales

Ahora, consideremos las siguientes condiciones

($\mathbf{A}_n$1) $f(r,x,t)$ y $\sigma(r,x,t)$ son campos aleatorios predecibles y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe C_n tal que se cumple

$$\|f(u,\cdot,t)\|^2 + \|\sigma(u,\cdot,t)\|^2 \leq C_n, \quad \text{c.s.},$$

para todo $u \in H$ con $\|u\| \leq n$ y para todo $t \in [0,T]$.

($\mathbf{A}_n$2) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe constante κ_n tal que

$$\|f(u,\cdot,t) - f(v,\cdot,t)\|^2 + \|\sigma(u,\cdot,t) - \sigma(v,\cdot,t)\|^2 \leq k_n\|u - v\|, \quad \text{c.s.},$$

para todo $u, v \in H$ con $\|u\| \vee \|v\| \leq n$ y para todo $t \in [0,T]$.

(A4) Existe constante $C_1^{'} > 0$ tal que

$$(u, f(u,\cdot,t)) + \frac{1}{2}TrQ_t(u) \leq C_1^{'}(1 + \|u\|^2), \quad \text{c.s.}$$

para todo $u \in H$, para todo $t \in [0,T]$.

Bajo las condiciones descritas anteriormente, y la condición (**A3**) se puede probar que la ecuación diferencial dada en el Teorema 4.1.4, tiene una solución local. Si además la condición (**A4**) se cumple, entonces dicha solución existe en cualquier intervalo de tiempo finito.

Se define el siguiente truncamiento. Para todo $n > 0$, sea $\eta_n : [0,\infty) \to [0,1]$ tal que $\eta_n \in C^\infty$ y cumple

$$\eta_n(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq n, \\ 0, & \quad r > 2n. \end{cases}$$

Teorema 4.1.6 *Suponer que ($\mathbf{A}_n$**1**), ($\mathbf{A}_n$**2**) y (**A3**) se cumplen, y que h es campo aleatorio $\mathcal{F}_0-$medible tal que $\mathbb{E}\|h\|^2 < \infty$. Entonces el problema (4.1.1) posee una única solución local $u(\cdot,t)$, la cual es un proceso $H-$valuado, adaptado y continuo.*

*Si también se cumple (**A.4**), entonces la solución existe para $t \in [0,T]$ para cualquier $T > 0$ y $u \in L^2(\Omega; C(C(0,T); H))$ cumple*

$$\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \|u(\cdot,t)\|^2 \le C(1+\mathbb{E}\|h\|^2), \tag{4.1.15}$$

para alguna constante $C = C(T) > 0$.

Demostración Consideramos la versión truncada de la ecuación (4.1.1), es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= (\kappa\Delta - \alpha)u(x,t) + f_n(u,x,t) + g(x,t) + \sigma_n(u,x,t)\dot{W}(x,t), \\ u\big|_{\partial\mathcal{D}} &= 0; \quad u(x,0) = h(x), \end{aligned}$$

donde

$$f_n(u,x,t) = f(J_n u, x, t) \quad \sigma_n(u,x,t) = \sigma(J_n u, x, t),$$

con $J_n u = \eta_n(\|u\|)u$. Las condiciones ($\mathbf{A}_n$**1**) y ($\mathbf{A}_n$**2**) implican que f_n y σ_n cumplen las condiciones globales (**A1**) y (**A2**).

Veamos, por ejemplo, que ($\mathbf{A}_n$**2**) implica (**A2**).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\|u\| \ge \|v\|$, entonces

$$\|f_n(u,\cdot,t) - f_n(v,\cdot,t)\|^2 + \|\sigma_n(u,\cdot,t) - \sigma_n(v,\cdot,t)\|^2 = \|f(J_n u,\cdot,t) - f(J_n v,\cdot,t)\|^2 + \|\sigma(J_n u,\cdot,t) - \sigma(J_n v,\cdot,t)\|^2$$

de ($\mathbf{A}_n$**2**) tenemos

$$\begin{aligned} \|f_n(u,\cdot,t) - f_n(v,\cdot,t)\|^2 + \|\sigma_n(u,\cdot,t) - \sigma_n(v,\cdot,t)\|^2 &\le k_n\|J_n u - J_n v\| \quad \text{c.s} \\ &= k_n\|\eta_n(\|u\|)u - \eta_n(\|v\|)v\| \\ &\le k_n\|\eta_n(\|u\|)(u-v) + v[\eta_n(\|u\|) - \eta_n(\|v\|)]\|^2, \end{aligned}$$

y por la definición de η_n, obtenemos que

$$\|f_n(u,\cdot,t) - f_n(v,\cdot,t)\|^2 + \|\sigma_n(u,\cdot,t) - \sigma_n(v,\cdot,t)\|^2 \le k_n\|u-v\|,$$

lo cual es (**A2**).

Por el Teorema 4.1.4, la ecuación tiene una única solución u^n en H, sobre $[0,T]$ y $u^n(\cdot,t)$ es continua.

Definamos

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t > 0 : \|u^n(\cdot,t)\|\} > n, & \text{si } \{t>0 : \|u^n(\cdot,t)\|\} \ne \emptyset, \\ T, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $t < \tau_n$ entonces $u_t = u^n(t,\cdot)$ es solución de la ecuación (4.1.1).

Y ya que $\tau_n \le \tau_{n+1}$ c.s. para todo n, ponemos

$$\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n, \quad \text{c.s..}$$

Si $t < \tau_\infty$, entonces $t < \tau_n$ para alguna $n > 0$ y en tal caso ponemos

$$u(t,\cdot) \equiv u_t = u^n(t,\cdot).$$

En particular, si $\tau_\infty < T$ se cumple

$$\lim_{t\to\tau_\infty} \|u_t\| = \infty,$$

lo cual hace de u una solución local definida en un intervalo de tiempo maximal.

Para la unicidad, supongamos que hay otra solución $\widetilde{u}_t$, con $t < \tau$ donde τ es tiempo de paro, entonces, por la parte de unicidad del Teorema 4.1.4, debe ser

$$\widetilde{u}_t = u^n(t,\cdot) \quad \text{para} \quad t < \tau_n,$$

de lo cual se sigue que $\widetilde{u}_t = u_t$ para $t < \tau_\infty$ y que $\tau = \tau_\infty$.

Para probar la existencia de la solución global, bajo la condición adicional (**A4**), usaremos que

$$\mathbb{E}\|u_{t\wedge\tau_n}\|^2 \leq \|h\|^2 + C_1T + \mathbb{E}\int_0^t \|g_s\|^2 ds + (C+1)\mathbb{E}\int_0^t \|u_{s\wedge\tau_n}\|^2 ds,$$

esta desigualdad se puede consultar en [5], pp. 73.

Tomando esperanza en la desigualdad anterior, y usando que $\mathbb{E}\int_0^t \|g_s\|^2 ds < \infty$ debido a (**A3**), y como $\mathbb{E}\|h\|^2 < \infty$, entonces

$$\mathbb{E}\|u_{t\wedge\tau_n}\|^2 \leq C_2 + (C+1)\mathbb{E}\int_0^t \|u_{s\wedge\tau_n}\|^2 ds, \tag{4.1.16}$$

donde C_2 es una constante positiva. Al aplicar la desigualdad de Gronwall en la desigualdad (4.1.16), obtenemos

$$\mathbb{E}\|u_{t\wedge\tau_n}\|^2 \leq C_T,$$

donde $C_T > 0$, la cual no depende de n. Notemos que

$$\mathbb{E}\|u_{t\wedge\tau_n}\|^2 \geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{[\tau_n\leq T]}\|u_{T\wedge\tau_n}\|^2\right] \geq n^2\mathbb{P}[\tau_n \leq T],$$

Así, obtenemos que

$$\mathbb{P}[\tau_n \leq T] \leq \frac{C_T}{n^2} \quad \text{y ya que} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{C_T}{n^2} < \infty,$$

por el Teorema Borel-Cantelli, se sigue que $\mathbb{P}[\tau_\infty \leq T] = 0$, lo cual implica $\mathbb{P}[\tau_\infty > T] = 1$.

Como $T > 0$ arbitraria, entonces $\tau_\infty = \infty$ c.s.. Así se sigue que $u(\cdot,t) = \lim_{n\to\infty} u^n(\cdot,t)$ es solución global.

■

Ejemplo 4.1.7 *Sea $\mathcal{D} = (0,1)$ y consideremos la ecuación diferencial*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha u + \gamma\varphi(\|u\|)u + \sigma_0 u\frac{\partial}{\partial t}W(x,t),\\
u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,\\
u(x,0) &= h(x), \quad 0 < x < 1,
\end{aligned}$$

con $\kappa, \alpha, \sigma_0 \in (0,\infty)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ en C^1, $h \in L^2([0,1])$, donde $W(x,t)$ es un campo aleatorio de Wiener con núcleo de covarianza $r(x,y)$, acotado por r_0.

En este caso

$$f(u,x,t) = \gamma\varphi(\|u\|)u, \quad \sigma(u,x,t) = \sigma_0 u$$

*y $g(x,t) = 0$. Observemos que la condición (**A3**) se cumple, esto es,*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|g_t\|^2 dt\right]^2 < \infty.$$

*Debido a que σ es lineal en u, para probar la existencia de una solución basta verificar que f es localmente acotada y de Lipschitz en $L^2([0,1])$, lo cual se sigue de que $\varphi \in C^1$ y φ, φ' son acotadas en cualquier intervalo acotado. Por lo tanto, se cumple (**A_n1**), (**A_n2**) y (**A3**), y por lo tanto la ecuación posee una única solución local según el Teorema 4.1.6.*

Además, si $\gamma \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned}(u, f(u,\cdot,t)) + \frac{1}{2}TrQ_t(u) &= \gamma\varphi(\|u\|)(u,u) + \frac{1}{2}\sigma_0^2\|u\|_R^2,\\ &\leq \frac{1}{2}r_0\sigma_0^2\|u\|^2,\end{aligned}$$

*por lo que la condición (**A4**) se cumple. Así, si $\gamma \leq 0$, la solución existe en $[0,T]$ para todo $T > 0$.*

4.2. Soluciones positivas

Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ un dominio acotado, con frontera $\partial\mathcal{D}$ suave, $H = L^2(\mathcal{D})$; $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, con $x \in L^2(\mathcal{D})$.

Como antes, H^1 denota el espacio de Sobolev en $\mathcal{D}$ de orden 1, sea H_0^1 la cerradura en H del espacio de funciones continuas con soporte compacto en $\mathcal{D}$.

Sea $W(x,t)$ un campo aleatorio de Wiener definido en el espacio filtrado $(\Omega, F, P, \mathcal{F}_t)$, con $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$, el cual satisface

$$\mathbb{E}(W(x,t)) = 0 \qquad \mathbb{E}[W(x,t)W(y,s)] = (t \wedge s)r(x,y),$$

para $0 \leq s,t \leq T$, donde r es la función de covarianza, y se supondrá que

$$\sup_{x,y\in\mathcal{D}} |r(x,y)| \leq r_0 \quad \text{y} \quad \int_{\mathcal{D}} r(x,x)dx < \infty. \tag{4.2.17}$$

Considerémos la ecuación semilineal estocástica

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Au + f(u,x,t) + \sigma(u,\nabla u,x,t)\dot{W}(x,t), & \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathcal{D}, \\ u(x,t)\Big|_{\partial\mathcal{D}} = h(x) = 0, & t \in (0,T), \end{cases} \tag{4.2.18}$$

donde $f(u,x,t)$ y $\sigma(c,x,t)$ son campos aleatorios predecibles dados y el operador $A = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right]$ es autoadjunto y uniformemente elíptico con coeficientes suaves, es decir, existen $\alpha_1, \alpha_0 > 0$ tales que para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathcal{D}$, se satisface

$$\alpha_0|\xi|^2 \leq b(x,\xi) \leq \alpha_1|\xi|^2, \tag{4.2.19}$$

donde

$$b(x,\xi) := \sum_{j,k=1}^d a_{j,k}(x)\xi_j\xi_k, \quad \text{con} \quad x \in \overline{\mathcal{D}}. \tag{4.2.20}$$

En forma integral la ecuación (4.2.18) está dada por

$$u_t = g + \int_0^t [A(u_s) + F_s(u_s)]ds + \int_0^t \Sigma_s(u_s)dW_s, \tag{4.2.21}$$

con $u_t = u(\cdot, t)$, $F_t(u) = f(u, \cdot, t)$, $\Sigma_t(u) = \sigma(u, \xi, \cdot, t)$, y donde A es un operador lineal tal que $A : H^1 \to H^{-1}$, donde H^{-1} es el espacio dual de H^1. Se supondrá además que $F_t : H \to H$ es continua,y que para toda $v \in H^1$, $\Sigma_t(v) : C(\overline{\mathcal{D}}) \to H$.

La prueba del siguiente resultado puede consultarse en [5], pp. 175-177.

Teorema 4.2.1 *Sea H espacio de Hilbert y sea $V \subset H$ un espacio reflexivo de Banach con norma $\|\cdot\|_V$ y espacio dual V'. Si las siguientes condiciones se cumplen:*

(C1) *Sea A_t una familia de operadores lineales continuos cerrados con dominio $\mathcal{D}(A)$ (independiente de ω y t), denso en H tal que $A_t : V \to V'$, y para cualquier $v \in V$, $A_t v$ es un proceso $V'-$valuado, continuo y adaptado.*

(C2) *Para cualquier $u, v \in V$, existe $\alpha > 0$ tal que*

$$|\langle A_t u, v\rangle| \leq \alpha\|u\|_V\|v\|_V, \quad \textit{c.s. para cada } t.$$

(C3) *A_t es cohersivo, es decir, existen constantes $\beta > 0$ y $\gamma > 0$ tal que*

$$\langle A_t u, v\rangle \leq -\beta\|v\|^2_{H^1} + \gamma\|v\|^2, \quad \textit{para toda } \; v \in V \quad \textit{c.s. para cada } t.$$

(C4) *Para cualquier $v \in V$, $F_t(v)$ y $\Sigma_t(v)$ son procesos $\mathcal{F}_t-$adaptados con valores en V y $\mathcal{L}^2_R$ respectivamente, donde $\mathcal{L}^2_R$ denota el espacio $\mathcal{L}_2(K_R, H)$ de operadores de Hilbert-Schmidt, siendo K_R un subespacio de K, y K, H son espacios de Hilbert separables.*

Suponga que existen constantes positivas b, c tales que

$$\mathbb{E}\int_0^T \{\|F_t(0)\|^2 + \|\Sigma_t(0)\|^2\}^2 dt \leq b, \quad y$$

$$\|\hat{F}_t(v)\|^2_R + \|\hat{\Sigma}_t(v)\|^2_R \leq C(1 + \|v\|^2) \quad \textit{c.s. para cada } t,$$

donde $\hat{F}_t(v) = F_t(v) - F_t(0)$, $\hat{\Sigma}_t(v) = \Sigma_t(v) - \Sigma_t(0)$.

(C5) *Existe $k > 0$ tal que, para cualesquier $u, v \in H$ la condición de Lipschitz*

$$\|F_t(u) - F_t(v)\|^2 + \|\Sigma_t(u) - \Sigma_t(v)\|^2 \leq k\|u - v\| \quad \textit{se cumple c.s. para cada } t.$$

Entonces, para cada $h \in H$, la ecuación

$$\begin{aligned} du_t &= A_t u_t + F_t(u_t)dt + \Sigma_t(u_t)dW_t, \; t \in (0, T), \\ u_0 &= h \in H, \end{aligned}$$

tiene una única solución fuerte $u \in L^2(\Omega, C[0, T]; H) \cap L^2(\Omega_T : V)$.

Aplicando este resultado a nuestro caso y si las condiciones (**C1**)-(**C5**) se cumplen, entonces la ecuación (4.2.18) tiene una única solución fuerte $u \in L^2(\Omega, C[0, T]; H) \cap L^2((0, T); H^1)$. Ahora bien, si los términos no lineales son sólo Lipschitz continuos localmente y la condición de monotonia no se cumple, sólo se puede asegurar la existencia de una solución local.

Para probar que cualquier solución de la ecuación (4.2.18) es no negativa cuando f y g son funciones positivas, necesitamos hacer además los siguientes supuestos:

(P1) Existe una constante $\delta > 0$, tal que

$$\frac{1}{2}r(x,x)\sigma(c,\xi,x,t) - \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \delta c^2, \quad \text{para todo } \ c \in \mathbb{R}, x \in \overline{\mathcal{D}}, \xi \in \mathbb{R}^d, \ \text{y } t \in [0,T].$$

(P2) La función $f(c,x,t)$ es continua en $\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{D}} \times [0,T]$ y tal que $f(c,x,t) \geq 0$ para $c \leq 0$ y $x \in \mathcal{D}$, $t \in [0,T]$.

(P3) Las condiciones iniciales y de frontera son positivas y continuas.

Antes de presentar el resultado de positividad es necesario enunciar dos resultados previos. Para ello se define la parte negativa de c, con $c \in \mathbb{R}$, la cual está dada por la función

$$\eta(c) = c^- = \begin{cases} 0, & c \geq 0, \\ -c, & c < 0. \end{cases}$$

Tomando $\kappa(c) = \eta^2(c)$, se sigue que

$$\kappa(c) = \begin{cases} 0, & c \geq 0, \\ c^2, & c < 0. \end{cases}$$

Sea κ_ε una regularización de clase C^2 de $\kappa(c)$, la cual se define con el fin de posteriormente emplear la fórmula de Itô, y está dada de la siguiente manera:

$$\kappa_\varepsilon(c) = \begin{cases} c^2 - \frac{\varepsilon^2}{6}, & c < -\varepsilon, \\ -\frac{c^2}{\varepsilon}\left(\frac{c}{2\varepsilon} + \frac{4}{3}\right), & -\varepsilon \leq c < 0, \\ 0, & c \geq 0. \end{cases}$$

Lema 4.2.2 *$\kappa_\varepsilon^{'}$ y $\kappa_\varepsilon^{''}$ son continuas y satisfacen*

$$\kappa_\varepsilon^{'} = 0, \quad \text{si } c \geq 0,$$
$$\kappa_\varepsilon^{'} \leq 0, \ \text{si } c \in \mathbb{R}, \quad \kappa_\varepsilon^{''} \geq 0, \ \text{si } c \in \mathbb{R}.$$

Más aún, cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene que, uniformemente en $\mathbb{R}$,

$$\kappa_\varepsilon(c) \to \kappa(c), \quad \kappa_\varepsilon^{'}(c) \to -2\eta(c) \quad y \quad \kappa_\varepsilon^{''}(c) \to 2\theta(c),$$

donde $\theta(c) = \begin{cases} 0, & c \geq 0, \\ 1, & c < 0. \end{cases}$

Demostración Se tiene que

$$\kappa_\varepsilon^{'}(c) = \begin{cases} 2c, & c < -\varepsilon, \\ -\frac{2c^3}{\varepsilon^2} - \frac{4c^2}{\varepsilon}, & -\varepsilon \leq c < 0, \\ 0, & c \geq 0. \end{cases} \quad \text{y} \quad \kappa_\varepsilon^{''}(c) = \begin{cases} 2, & c < -\varepsilon, \\ -\frac{6c^2}{\varepsilon^2} - \frac{8c}{\varepsilon}, & -\varepsilon \leq c < 0, \\ 0, & c \geq 0. \end{cases}$$

Así, al tomar $\varepsilon \to 0$ en $\kappa_\varepsilon(r)$ y usando regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \kappa_\varepsilon(c) = \begin{cases} c^2, & c < 0, \\ 0, & c \geq 0. \end{cases} = \kappa(c).$$

De igual forma, se toma $\varepsilon \to 0$ en $\kappa_\varepsilon^{'}(c)$ y usando regla de L'Hôpital

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \kappa_\varepsilon^{'}(c) = \begin{cases} 2c, & c < 0, \\ 0, & c \geq 0. \end{cases} = -2c^- = \begin{cases} 0, & c \geq 0, \\ 2c, & c < 0. \end{cases} = -2\eta(c),$$

y para $\kappa_\varepsilon^{''}(c)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\kappa_\varepsilon^{''}(c) = \begin{cases} 2, & c<0, \\ 0, & c\geq 0. \end{cases} = 2\theta(c).$$

Además las convergencias son uniformes en todo $\mathbb{R}$. Para verlo sea $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión que converge a cero.

Primero examinaremos la convergencia de κ_{ε_n}. Sea $\epsilon > 0$ dado.

- Si $c \in (\infty, -\varepsilon_n)$, entonces como $\varepsilon_n \to 0$, podemos elegir N_ε^1 para el cual se cumple $\varepsilon_n^2 < \varepsilon_1$ y

$$|\kappa_{\varepsilon_n}(c) - \kappa(c)| = \left|c^2 - \frac{\varepsilon_n^2}{6} - c^2\right| = \left|-\frac{\varepsilon_n^2}{6}\right| < \varepsilon_n^2 < \varepsilon^2 = \varepsilon_1,$$

  para todo $n \geq N_\varepsilon^1$.

- Si $c \in [-\varepsilon_n, 0)$, entonces como $\varepsilon_n \to 0$, podemos elegir N_ε^2 para el cual se cumple $3\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 < \varepsilon_2$ y

$$|\kappa_{\varepsilon_n}(c) - \kappa(c)| = \left|-\frac{c^3}{2\varepsilon_n^2} - \frac{4c^2}{3\varepsilon_n} - c^2\right| \leq \left|\frac{c^3}{2\varepsilon_n^2}\right| + \left|\frac{4c^2}{3\varepsilon_n}\right| + \left|c^2\right| \leq \left|\frac{\varepsilon_n^3}{2\varepsilon_n^2}\right| + \left|\frac{4\varepsilon_n^2}{3\varepsilon_n}\right| + \left|\varepsilon_n^2\right| < 3\varepsilon + \varepsilon^2 = \varepsilon_2,$$

  para toda $n \geq N_\varepsilon^2$.

- Si $c \in [0, \infty)$, entonces

$$|\kappa_{\varepsilon_n}(c) - \kappa(c)| < \varepsilon,$$

  para todo $n \geq N_\varepsilon$.

Así, tomando $N = \max\{N_\varepsilon, N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2\}$, tenemos que $|\kappa_{\varepsilon_n}(c) - \kappa(c)| < \varepsilon$ se cumple para todo $n \geq N$ y $c \in \mathbb{R}$, es decir, la sucesión $\{\kappa_{\varepsilon_n}\}$ converge uniformemente a κ en $\mathbb{R}$.

Ahora, analicemos la convergencia de κ'_{ε_n}. Sea $\epsilon > 0$ dado.

- Si $c \in (\infty, -\varepsilon_n)$, entonces se cumple

$$|\kappa'_{\varepsilon_n}(c) - \kappa'(c)| < \varepsilon,$$

  para todo $n \geq N_\varepsilon$.

- Si $c \in [-\varepsilon_n, 0)$, entonces debido a que $\varepsilon_n \to 0$, podemos elegir N_ε^3 para el cual se cumple $8\varepsilon_n < \varepsilon_3$ y

$$|\kappa'_{\varepsilon_n}(c) - \kappa'(c)| = \left|-\frac{2c^3}{\varepsilon_n^2} - \frac{4c^2}{\varepsilon_n} - 2c\right| \leq \left|\frac{2c^3}{\varepsilon_n^2}\right| + \left|\frac{4c^2}{\varepsilon_n}\right| + |2c| < 8\varepsilon = \varepsilon_3,$$

  para toda $n \geq N_\varepsilon^3$.

- Si $c \in [0, \infty)$, entonces

$$|\kappa'_{\varepsilon_n}(c) - \kappa'(c)| < \varepsilon,$$

  para todo $n \geq N_\varepsilon$.

Así, tomando $N' = \max\{N_\varepsilon, N_\varepsilon^3\}$, tenemos que $|\kappa'_{\varepsilon_n}(c) - \kappa'(c)| < \varepsilon$ se cumple para todo $n \geq N'$ y $c \in \mathbb{R}$, es decir, la sucesión $\{\kappa'_{\varepsilon_n}\}$ converge uniformemente a κ' en $\mathbb{R}$.

Finalmente, aplicando el mismo razonamiento tenemos que la sucesión $\{\kappa''_{\varepsilon_n}\}$ converge uniformemente a κ'' en $\mathbb{R}$.

■

Lema 4.2.3 *Sea* $\Phi_\varepsilon(u_t) = \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon(u(x,t))dx$.
Entonces la siguiente fórmula se cumple

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(u_t) = \Phi_\varepsilon(g) - \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))b(x,\nabla u)dxds + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))f(u,x,s)dxds \\ + \int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(h(x))\frac{\partial}{\partial\nu}u(x,s)dSdx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))r(x,x)\sigma^2(u,\nabla u,x,s)dxds \\ + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))\sigma(u,\nabla u,x,s)dW(x,s)dx, \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

donde $b(x,\xi)$ *está definido en (4.2.20),* dS *es la medida de superficie en* $\partial\mathcal{D}$ *y* $\frac{\partial}{\partial\nu}$ *denota la derivada con respecto al campo vectorial* $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_d)$ *con* $\nu_i(x) := \sum_{j=1}^d a_{ij}(x)n_j$ *y* $n = (n_1,\ldots,n_d)$ *es un vector unitario exterior a* $\partial\mathcal{D}$.

Demostración Aplicando fórmula de Itô a $\kappa_\varepsilon(u_t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\kappa_\varepsilon(u(x,t)) &= \kappa_\varepsilon(u(x,0)) + \int_0^t \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))du(x,s) + \frac{1}{2}\int_0^t \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))d\langle u,u\rangle_s \\ &= \kappa_\varepsilon(u(x,0)) + \int_0^t \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))[A(u)+f(u,\nabla u,x,s)]ds \\ &+ \int_0^t \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))\sigma(u,\nabla u,x,s)dW(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^t \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))d\langle u,u\rangle_s,\end{aligned}$$

integrando con respecto a x, obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(u(x,t)) &= \Phi_\varepsilon(g) + \int_0^t \Big(\kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s)),A(u(x,s))\Big)ds + \int_0^t \Big(\kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s)),f(u,\nabla u,x,s)\Big)ds \\ &+ \int_0^t \Big(\kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s)),\sigma(u,\nabla u,x,s)dW(x,t)\Big) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))r(x,x)\sigma^2(u,\nabla u,x,s)dxds, \\ \Phi_\varepsilon(u(x,t)) &= \Phi_\varepsilon(g) + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))A(u(x,s))dxds + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))f(u,\nabla u,x,s)dxds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))\sigma(u,\nabla u,x,s)dW(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))r(x,x)\sigma^2(u,\nabla u,x,s)dxds.\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Ahora bien, tomando el segundo término de lado derecho en la igualdad (4.2.23), tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))A(u(x,s))dxds &= \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))\left[\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,s)\right)\right]dxds, \\ &= \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,s)\right)\right]dxds,\end{aligned}$$

aplicando integración por partes en altas dimensiones, obtenemos

$$\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))A(u(x,s))dxds = \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \left[\int_{\partial\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,s)n_i dx \right] dS$$
$$- \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \left[\int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,s)a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,s)dx \right] ds,$$

donde $n = (n_1, \ldots, n_d)$ es un vector unitario exterior a $\partial\mathcal{D}$ y dS es la medida de superficie en $\partial\mathcal{D}$,

$$\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))A(u(x,s))dxds = \int_0^t \left[\int_{\partial\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s)) \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,s)n_i dx \right] dS$$
$$- \int_0^t \left[\int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s)) \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}u(x,s)a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,s)dx \right] ds,$$

tomando $\nu_i(x) := \sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)n_j$, tenemos

$$\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))A(u(x,s))dxds = \int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}} k_\varepsilon^{'}(u(x,s)) \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}u(x,s)\nu_j(x)dxdS$$
$$- \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))b(x,\nabla u(x,s))dxds.$$

Así, obtenemos que

$$\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))A(u(x,s))dxds = \int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(h(x))\frac{\partial}{\partial \nu}u(x,s)dxdS - \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))b(x,\nabla u(x,s))dxds.$$

Sustituyendo la expresión anterior en (4.2.23), resulta que

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(u_t) = \Phi_\varepsilon(g) &- \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))b(x,\nabla u)dxds + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))f(u,x,s)dxds \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(h(x))\frac{\partial}{\partial\nu}u(x,s)dSdx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))r(x,x)\sigma^2(u,\nabla u,x,s)dxds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))\sigma(u,\nabla u,x,s)dW(x,s)dx. \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

■

Una vez, enunciado los dos resultados anteriores, se probará el Teorema de positividad.

Teorema 4.2.4 *Si las condiciones **(P1)**,**(P2)** y **(P3)** se cumplen, entonces la solución al PVI de la ecuación (4.2.18) es positiva, es decir,*

$$u(x,t) \geq 0 \quad \textit{c.s. para casi todo } x \in \mathcal{D}, \textit{ para todo } \ t \in [0,T].$$

Demostración Agrupando términos de la expresión (4.2.22) resulta

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(u_t) &= \Phi_\varepsilon(g) + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \left(\kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s)) \left[\frac{1}{2} r(x,x)\sigma^2(u,\nabla u,x,s) - b(x,\nabla u) \right] + \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s)) f(u,x,s) \right) dxds \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(h(x)) \frac{\partial}{\partial\nu} u(x,s) dSds + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))\sigma(u,\nabla u,x,s) dW(x,s) dx\end{aligned}$$

y luego aplicando esperanza,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Phi_\varepsilon(u_t) &= \Phi_\varepsilon(g) + \mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \left(\kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s)) \left[\frac{1}{2} r(x,x)\sigma^2(u,\nabla u,x,s) - b(x,\nabla u) \right] + \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s)) f(u,x,s) \right) dxds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(h(x)) \frac{\partial}{\partial\nu} u(x,s) dSds,\end{aligned}$$

de la condición (**P1**) se tiene

$$\begin{aligned}&\leq \Phi_\varepsilon(g) + \mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \left(\kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))\delta[u(x,t)]^2 + \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s)) f(u,x,s) \right) dxds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(h(x)) \frac{\partial}{\partial\nu} u(x,s) dSds \\ &\leq \Phi_\varepsilon(g) + \delta\mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))|u(x,s)|^2 dxds + \mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s)) f(u,x,s) dxds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(h(x)) \frac{\partial}{\partial\nu} u(x,s) dSds. \qquad (4.2.25)\end{aligned}$$

Nótese que $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\Phi_\varepsilon(u_t) = \mathbb{E}\|\eta(u_t)\|^2$. En efecto: sea $\varepsilon' > 0$ dado. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\Phi_\varepsilon(u_t) - \mathbb{E}\|\eta(u_t)\|^2\right| &= \left| \int_\Omega \int_{\mathcal{D}} \left(\kappa_\varepsilon(u(t,x,\omega)) - \kappa(u(t,x,\omega))\right) dxdP \right|, \\ &\leq \int_\Omega \int_{\mathcal{D}} \left|\kappa_\varepsilon(u(t,x,\omega)) - \kappa(u(t,x,\omega))\right| dxdP, \\ &\leq \int_\Omega \int_{\mathcal{D}} \left(\sup_{r\in\mathbb{R}} |\kappa_\varepsilon(r) - \kappa(r)| \right) dxdP.\end{aligned}$$

Debido a que $\sup_{r\in\mathbb{R}} |\kappa_\varepsilon(r) - \kappa(r)| < \varepsilon'$ si ε es suficientemente pequeño, entonces

$$\left|\mathbb{E}\varphi_\varepsilon(u_t) - \mathbb{E}\|\eta\|^2\right| \leq P(\Omega)|\mathcal{D}|\varepsilon',$$

luego haciendo $\varepsilon' \downarrow 0$, se obtiene $\mathbb{E}\Phi_\varepsilon(u_t) \to \mathbb{E}\|\eta(u_t)\|^2$ cuando $\varepsilon \to 0$.
Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ en la desigualdad (4.2.25),

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\Phi_\varepsilon(u_t) &\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon(g) + \lim_{\varepsilon\to 0} \delta\mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))|u(x,s)|^2 dxds + \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s)) f(u,x,s) dxds \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}} \kappa_\varepsilon^{'}(h(x)) \frac{\partial}{\partial\nu} u(x,s) dSds.\end{aligned}$$

Por el teorema de convergencia uniforme, y usando el lema 4.2.2,

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}}|\eta(u(x,t))|^2 \leq \int_{\mathcal{D}}|\eta(g(x))|^2dx + \delta\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\lim_{\varepsilon\to 0}\kappa_\varepsilon^{''}(u(x,s))|u(x,s)|^2dxds$$
$$+\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\lim_{\varepsilon\to 0}\kappa_\varepsilon^{'}(u(x,s))f(u,x,s)dxds + \mathbb{E}\int_0^t\int_{\partial\mathcal{D}}\lim_{\varepsilon\to 0}\kappa_\varepsilon^{'}(h(x))\frac{\partial}{\partial\nu}u(x,s)dSds. \quad (4.2.26)$$

Sea

$$\theta(u)u^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } u \geq 0 \\ u & \text{si } u < 0, \end{cases} = \kappa(u) = \eta^2(u).$$

Entonces

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}}|\eta(u(x,t))|^2 \leq \int_{\mathcal{D}}|\eta(g(x))|^2dx + 2\delta\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\theta(u(x,s))|u(x,s)|^2dxds - 2\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\eta(u(x,s))f(u,x,s)dxds$$
$$-2\mathbb{E}\int_0^t\int_{\partial\mathcal{D}}\eta(h(x))\frac{\partial}{\partial\nu}u(x,s)dSds, \quad (4.2.27)$$

pero de la condición (**P3**) se tiene que $\eta(h(x)) = \eta(g(x)) = 0$, por lo que

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}}|\eta(u(x,t))|^2 \leq 2\delta\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\theta(u(x,s))|u(x,s)|^2dxds - 2\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\eta(u(x,s))f(u,x,s)dxds. \quad (4.2.28)$$

De lo anterior y de la condición (**P2**) se tiene que $\eta(u(x,s))f(u,x,s) \geq 0$. Por lo cual,

$$\mathbb{E}\|\eta(u_t)\|^2 \leq 2\delta\int_0^t \mathbb{E}\|\eta(u_s)\|^2ds,$$

y del Lema de Gronwall se sigue que $\|\eta(u_t)\| = 0$ para todo $t \in [0,T]$. Por lo tanto, $\eta(u(x,t)) = u^-(x,t) = 0$ c.s. para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $t \in [0,T]$. Lo cual prueba el resultado.

■

4.3. Existencia de soluciones que explotan en norma L^p

Una vez probado que el tipo de ecuaciones a estudiar bajo ciertas condiciones tiene soluciones positivas, ahora analizaremos un caso especial de éstas, de las cuales nos interesa examinar la posibilidad de explosión de estas soluciones positivas en norma L^p. Así, es conveniente hacer la siguiente definición.

Definición 4.3.1 *Una solución u_t explota en norma L^p en tiempo finito, si existe una constante $0 < T_p < \infty$, tal que*

$$\lim_{t\to T_p^-}\mathbb{E}\parallel u_t\parallel_p = \lim_{t\to T_p^-}\mathbb{E}\left\{\int_{\mathcal{D}}\mid u(x,t)\mid^p dx\right\}^{1/p} = \infty.$$

A T_p se le llama tiempo de explosión de u_t.

Considerando un caso especial de la ecuación (4.2.18), donde el término ∇u no aparece en σ, se obtiene la ecuación de reacción-difusión

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Au + f(u,x,t) + \sigma(u,x,t)\partial_t W(x,t), & \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathcal{D}, \\ u(x,t)\Big|_{\partial\mathcal{D}} = h(x), & t \in (0,T). \end{cases} \tag{4.3.29}$$

Para examinar este caso, consideremos el problema de valores propios para la ecuación con operador A autoadjunto y fuertemente elíptico,

$$\begin{cases} Av = -\lambda v & \text{en } \mathcal{D}, \\ v = 0 & \text{en } \partial\mathcal{D}. \end{cases} \tag{4.3.30}$$

Así, el problema de valores propios posee una sucesión $\{\lambda_k\}$ de valores propios, cada uno con multiplicidad finita tal que

$$-\infty < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots, \quad \text{y} \quad \lambda_k \nearrow \infty, \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Correspondiente a cada λ_k, existe e_k función propia tal que $\{e_k, k = 1, 2, \ldots\}$ forma una base ortonormal completa de $H = L^2(\mathcal{D})$.

Además, debido a que A es un operador autoadjunto, se tiene que los valores propios son estrictamente positivos. Renombramos la función propia $e_1 := \phi(x)$, correspondiente al valor propio λ_1, la cual no cambia el signo en el dominio $\mathcal{D}$; ver [6] p. 454.

Normalizamos la función ϕ de tal manera que

$$\phi(x) \ge 0, \quad \int_{\mathcal{D}} \phi(x)dx = 1. \tag{4.3.31}$$

Antes de presentar el resultado de explosión, es necesario imponer las siguientes condiciones en la función no lineal f, la cual corresponde a la velocidad de reacción.

(N1) Existe una función continua $F(c)$ y una constante $c_1 > 0$ tal que F es positiva, convexa y estrictamente creciente para $c \ge c_1$ y satisface

$$f(c,x,t) \ge F(c),$$

para $c \ge c_1$, $x \in \overline{\mathcal{D}}$, y $t \in [0,\infty)$.

(N2) Existe una constante $M_1 > c_1$ tal que $F(c) > \lambda_1 c$ para $c \ge M_1$.

(N3) La condición inicial positiva satisface

$$(\phi, u_0) = \int_{\mathcal{D}} \phi(x)g(x)dx > M_1.$$

(N4) Se cumple que

$$\int_{M_1}^{\infty} \frac{dc}{F(c) - \lambda_1 c} < \infty.$$

El siguiente teorema da condiciones para la existencia de soluciones positivas explosivas en norma L^p. Para probarlo se supondrá que se satisfacen las condiciones (**N1**)-(**N4**).

Teorema 4.3.2 *Suponga que la ecuación (4.3.29) tiene una única solución local y que las condiciones (**P1**)-(**P3**) se cumplen. Adicionalmente, se supondrá que las condiciones (**N1**)-(**N4**) se satisfacen. Entonces para cada número real $p \geq 1$, existe una constante $T_p > 0$, tal que*

$$\lim_{t \to T_p^-} \mathbb{E}\|u_t\|_p = \lim_{t \to T_p^-} \mathbb{E}\left\{\int_{\mathcal{D}} |u(x,t)|^p dx\right\}^{1/p} = \infty, \tag{4.3.32}$$

es decir, la solución explota en norma-L^p en tiempo finito.

Demostración Bajo las condiciones (**P1**)-(**P3**) y por el Teorema 4.2.4, la ecuación (4.3.32) tiene una única solución positiva. La prueba se hará por contradicción: se supondrá que las condiciones (**N1**)-(**N4**) se cumplen, pero que (4.3.32) es falsa. Es decir, supondremos que existe una solución global y un número $p \geq 1$ tal que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\left\{\int_{\mathcal{D}} |u(x,t)|^p dx\right\}^{1/p} < \infty, \tag{4.3.33}$$

para cualquier $T > 0$.

Sea $\phi(x)$ función propia, tal como se describió en (4.3.31), y defínase

$$\hat{u}(t) := \int_{\mathcal{D}} u(x,t)\phi(x)dx \geq 0. \tag{4.3.34}$$

Debido a (4.3.31), ϕ es una función de densidad de probabilidad de una variable ξ en $\mathcal{D}$, la cual es independiente de W_t. Así, la integral anterior se puede interpretar como una esperanza

$$\mathbb{E}_\xi[u(\xi,t)] = \int_\Omega u(\xi,t)d\mathbb{P} = \int_{\mathcal{D}} u(x,t)\phi(x)dx = \hat{u}(t)$$

donde la variable aleatoria ξ está definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y la segunda igualdad es debido al teorema cambio de variable.

Usando la linealidad del producto escalar y la forma integral de (4.2.21), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}(u(x,t),\phi(x)) &= \left(g(x) + \int_0^t Au(x,t)ds + \int_0^t f(u,x,s)ds + \int_0^t \sigma(u,x,s)dW(x,s), \phi(x)\right), \\ &= (g(x),\phi(x)) + \left(\int_0^t Au(x,t)ds, \phi(x)\right) + \left(\int_0^t f(u,x,s)ds, \phi(x)\right) + \left(\int_0^t \sigma(u,x,s)dW(x,s), \phi(x)\right),\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} u(x,t)\phi(x)dx &= \int_{\mathcal{D}} g(x)\phi(x)dx + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} [Au(x,t)]\phi(x)dxds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{D}} f(u,x,s)\phi(x)dxds + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \sigma(u,x,s)\phi(x)dW(x,s)dx,\end{aligned}$$

lo cual equivale a

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) &= (g,\phi) + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} [Au(x,t)]\phi(x)dxds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{D}} f(u,x,s)\phi(x)dxds + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \sigma(u,x,s)\phi(x)dW(x,s)dx.\end{aligned} \tag{4.3.35}$$

Aplicando esperanza en la ecuación (4.3.35)

$$\mathbb{E}\hat{u}(t) = (g,\phi) + \mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}[Au(x,t)]\phi(x)dxds + \mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}} f(u,x,s)\phi(x)dxds + \mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\sigma(u,x,s)\phi(x)dW(x,s)dx,$$

y como A es un operador autoadjunto, entones $(Au,\phi) = (u, A\phi) = -\lambda_1(u,\phi)$. Luego,

$$\mathbb{E}\hat{u}(t) = (g,\phi) - \lambda_1\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}} u(x,s)\phi(x)dxds + \mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}} f(u,x,s)\phi(x)dxds,$$

y por Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\hat{u}(t) &= (g,\phi) - \lambda_1\int_0^t\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} u(x,s)\phi(x)dxds + \int_0^t\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} f(u,x,s)\phi(x)dxds,\\ &= (g,\phi) - \lambda_1\int_0^t\mathbb{E}\hat{u}(s)ds + \int_0^t\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} f(u,x,s)\phi(x)dxds.\end{aligned}$$

Tomando $\mu(t) = \mathbb{E}\hat{u}(t)$ y $\mu_0 = (g,\phi)$, lo anterior se puede reescribir como

$$\mu(t) = \mu_0 - \lambda_1\int_0^t\mu(s)ds + \int_0^t\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} f(u,x,s)\phi(x)dxds,$$

donde $\mu(\cdot)$ y $\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} f(u,x,\cdot)\phi(x)dx$ son continuas debido a la continuidad de $u(x,\cdot)$ y la hipótesis (**P2**). Derivando con respecto a t, se obtiene

$$\begin{cases}\frac{d\mu(t)}{dt} = -\lambda_1\mu(t) + \mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} f(u,x,t)\phi(x)dx,\\ \mu(0) = \mu_0.\end{cases}\tag{4.3.36}$$

De la ecuación (4.3.36) y la condición (**N1**) se sigue que

$$\begin{cases}\frac{d\mu(t)}{dt} \geq -\lambda_1\mu(t) + \mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} F(u(x,t))\phi(x)dx,\\ \mu(0) = \mu_0.\end{cases}\tag{4.3.37}$$

La condición (**N1**), y el hecho de que $F(r)$ es convexa y además positiva para $c > c_1$, implican que el segundo término de la desigualdad (4.3.37) satisface

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} F(u(x,t))\phi(x)dx = \mathbb{E}[\mathbb{E}_\xi F(u(\xi,t))].$$

Por la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} F(u(x,t))\phi(x)dx &\geq F(\mathbb{E}[\mathbb{E}_\xi u(\xi,t)]),\\ &= F(\mathbb{E}\hat{u}(t)),\\ &= F(\mu(t)).\end{aligned}\tag{4.3.38}$$

Sustituyendo lo obtenido en (4.3.38) en la ecuación (4.3.37), y usando la condición (**N3**) se tiene

$$\begin{cases} \frac{d\mu(t)}{dt} \geq -\lambda_1\mu(t) + F(\mu(t)), \\ \\ \mu(0) = \mu_0. \end{cases} \tag{4.3.39}$$

Notando que $\mu_0 = (\phi, g) > M_1$, las condiciones (**N3**) y (**N2**) implican, junto con (4.3.39), que

$$F(\mu(t)) - \lambda_1\mu(t) > 0.$$

Entonces

$$\frac{dt}{d\mu(t)} \leq \frac{1}{F(\mu(t)) - \lambda_1(\mu(t))},$$

por variables separables se tiene

$$\int_0^T dt \leq \int_0^T \frac{d\mu(t)}{F(\mu(t)) - \lambda_1(\mu(t))}, \quad T > 0,$$

haciendo un cambio de variable, tomando $\mu(t) = c$ se obtiene

$$\int_0^T dt \leq \int_{\mu(0)}^{\mu(T)} \frac{dc}{F(c) - \lambda_1(c)}.$$

Esto, junto con la condición (**N3**), produce

$$T \leq \int_{\mu(0)}^{\mu(T)} \frac{dc}{F(c) - \lambda_1(c)} \leq \int_{M_1}^{\infty} \frac{dc}{F(c) - \lambda_1(c)}.$$

De la condición (**N4**), se sigue que la última integral está acotada. Esto implica que la última desigualdad no se cumple para T suficientemente grande, lo cual es una contradicción. Así,

$$\mu(t) = \mathbb{E}\int_{\mathcal{D}} u(x,t)\phi(x)dx,$$

debe explotar al tiempo

$$T_e \leq \int_{\mu(0)}^{\infty} \frac{dc}{F(c) - \lambda_1(c)}.$$

Ya que ϕ es acotada y continua en $\overline{\mathcal{D}}$, aplicando la desigualdad de Hölder para $p \geq 1$ resulta

$$\int_{\mathcal{D}} u(x,t)\phi(x)dx \leq \int_{\mathcal{D}} |u(x,t)\phi(x)|dx \leq \left(\int_{\mathcal{D}} |u(x,t)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_{\mathcal{D}} |\phi(x)|^q dx\right)^{1/q}, \tag{4.3.40}$$

con $q = p(p-1)$.
Aplicando esperanza se obtiene

$$\mu(t) \leq C_p\mathbb{E}\left\{\int_{\mathcal{D}} |u(x,t)|^p dx\right\}^{1/p},$$

donde $C_p = \left\{\int_{\mathcal{D}} |\phi(x)|^q dx\right\}^{1/q}$. Por lo tanto, la solución positiva explota en algún tiempo $T_p \leq T_e$ en norma-L^p, para cada $p \geq 1$, lo cual prueba (4.3.32).

■

A continuación se presenta otro resultado sobre explosión en norma L^p. En contraste con el teorema anterior, en esta caso se imponen condiciones en el ruido multiplicativo. Consideremos las siguientes condiciones:

(S1) La función de covarianza $r(x,y)$ es continua y positiva para $x, y \in \overline{\mathcal{D}}$, y cumple que

$$\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)v(x)v(y)dxdy \geq r_1 \int_{\mathcal{D}} v^2(x)dx$$

para cualquier $v \in H$ positivo y algún $r_1 > 0$.

(S2) Existe una constante positiva c_2, y existen funciones positivas y convexas $\sigma_0(c)$, $G(c)$, que son estrictamente crecientes en $[c_2, \infty)$ y cumplen

$$\sigma(c,x,t) \geq \sigma_0(c) \quad \text{y} \quad \sigma_0^2 \geq 2G(c^2),$$

para todo $x \in \overline{\mathcal{D}}$, $t \in [0, \infty)$.

(S3) Existe una constante $M_2 > c_2$ tal que

$$r_1 G(c) > \lambda_1 c, \quad \text{para} \;\; c > M_2.$$

(S4) La condición inicial u_0 satisface

$$(\phi, u_0) = \int_{\mathcal{D}} \phi(x)g(x)dx > M_2.$$

(S5) Se cumple

$$\int_{M_2}^{\infty} \frac{dc}{r_1 G(c) - \lambda_1 c} < \infty.$$

Teorema 4.3.3 *Supóngase que la ecuación (4.3.29) tiene una única solución local y que las condiciones **(P1)**-**(P3)** se cumplen. Adicionalmente, se supondrá que las condiciones **(S1)**-**(S5)** se satisfacen. Entonces para cada número real $p \geq 2$, existe una constante $0 < T_p < \infty$, tal que*

$$\lim_{t \to T_p^-} \mathbb{E}\|u_t\|_p = \lim_{t \to T_p^-} \mathbb{E}\left\{\int_{\mathcal{D}} |u(x,t)|^p dx\right\}^{1/p} = \infty, \tag{4.3.41}$$

es decir, la solución explota en norma-L^p en tiempo finito.

Demostración Bajo las condiciones (**P1**)-(**P3**) y por el Teorema 4.2.4, la ecuación (4.3.29) tiene una única solución positiva. La prueba se hará por contradicción, suponiendo que las condiciones (**S1**)-(**S5**) se cumplen, pero que (4.3.41) no se cumple. Es decir, supondremos que existe una solución global u y un número $p \geq 2$, tales que

$$\mathbb{E}\|u_t\|_p < \infty, \quad \text{para cualquier} \;\; T > 0. \tag{4.3.42}$$

Nuevamente trabajaremos con la función $\hat{u}(t)$, la cual se definió en el caso anterior. Luego, aplicando fórmula de Itô a $\hat{u}^2(t)$ y usando la expresión (4.3.35), se tiene

$$\begin{aligned}\hat{u}^2(t) = (g,\phi)^2 - 2\lambda_1 \int_0^t \hat{u}^2 ds + 2\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \hat{u}(s) f(u,x,s)\phi(x)dxds + 2\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \hat{u}(s)\sigma(u,x,s)\phi(x)dW(x,s)dx \\ + \int_0^t \int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)\phi(x)\phi(y)\sigma(u,x,s)dxdyds,\end{aligned}$$

tomando esperanza,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\hat{u}^2(t) &= \mathbb{E}(g,\phi)^2 - 2\mathbb{E}\lambda_1\int_0^t \hat{u}^2 ds + 2\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}} \hat{u}(s) f(u,x,s)\phi(x)dxds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)\phi(x)\phi(y)\sigma(u,x,s)dxdyds, \\ \mathbb{E}\hat{u}^2(t) &= (g,\phi)^2 - 2\mathbb{E}\lambda_1\int_0^t \hat{u}^2 ds + 2\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}} \hat{u}(s) f(u,x,s)\phi(x)dxds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)\phi(x)\phi(y)\sigma(u,x,s)dxdyds,\end{aligned}$$

se sigue del teorema Fubini que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\hat{u}^2(t) &= (g,\phi)^2 - 2\lambda_1\int_0^t \mathbb{E}\hat{u}^2 ds + 2\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}} \hat{u}(s) f(u,x,s)\phi(x)dxds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)\phi(x)\phi(y)\sigma(u,x,s)dxdyds,\end{aligned}$$

tomando $\eta(t) = \mathbb{E}\hat{u}^2(t)$

$$\begin{aligned}\eta(t) &= (g,\phi)^2 - 2\lambda_1\int_0^t \eta(s) ds + 2\mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}} \hat{u}(s) f(u,x,s)\phi(x)dxds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)\phi(x)\phi(y)\sigma(u,x,s)dxdyds.\end{aligned}$$

Derivando con respecto a t, se obtiene

$$\begin{aligned}&\frac{d\eta(t)}{dt} = -2\lambda_1\eta(t) + 2\mathbb{E}\hat{u}(t)\int_{\mathcal{D}} f(u,x,t)\phi(x)dx + \mathbb{E}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)\phi(x)\phi(y)\sigma(u,x,t)\sigma(u,y,t)dxdy, \quad (4.3.43)\\ &\eta(0) = \eta_0 = (g,\phi)^2.\end{aligned}$$

Tomando el último término en la expresión (4.3.43), sin considerar las esperanza, se obtiene por la condición (**S2**)

$$\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)\phi(x)\phi(y)\sigma(u,x,t)\sigma(u,y,t)dxdy \geq \int_{\mathcal{D}} r(x,y)\phi(x)\phi(y)\sigma_0^2(u)dx,$$

y debido a que $\phi \in H$, por la condición (**S1**), se tiene

$$\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)\phi(x)\phi(y)\sigma(u,x,t)\sigma(u,y,t)dxdy = r_1\int_{\mathcal{D}} \phi^2(x)\sigma_0^2(u)dx = r_1\int_{\mathcal{D}} [\phi(x)\sigma_0(u)]^2 dx,$$

aplicando desigualdad de Jensen,

$$\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)\phi(x)\phi(y)\sigma(u,x,t)\sigma(u,y,t)dxdy \geq r_1\left(\int_{\mathcal{D}} \phi(x)\sigma_0(u)dx\right)^2 \geq r_1\sigma_0^2(\hat{u}(t)).$$

Usando ahora la condición (**S2**), se obtiene

$$\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)\phi(x)\phi(y)\sigma(u,x,t)\sigma(u,y,t)dxdy \geq 2r_1G(\hat{u}^2(t)).$$

Con lo anterior y debido a que el segundo término de la ecuación (4.3.43) es positivo, se sigue que

$$\frac{d\eta(t)}{dt} \geq -2\lambda_1\eta(t) + 2r_1\mathbb{E}[G(\hat{u}^2(t))],$$

y aplicando desigualdad de Jensen en el segundo término,

$$\frac{d\eta(t)}{dt} \geq -2\lambda_1\eta(t) + 2r_1G(\eta(t)). \tag{4.3.44}$$

Así,

$$\frac{1}{2}\frac{d\eta(t)}{dt} \geq -\lambda_1\eta(t) + r_1G(\eta(t)). \tag{4.3.45}$$

Notando que $\eta_0 = (\phi, g) > M_2$, las condiciones (**S4**) y (**S3**) implican, junto con (4.3.45), que

$$r_1G(\eta(t)) - \lambda_1\eta(t) > 0,$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2}\frac{dt}{d\eta(t)} \leq \frac{1}{-\lambda_1\eta(t) + r_1G(\eta(t))},$$

e integrando con respecto a t, y aplicando variables separables se obtiene

$$\frac{1}{2}\int_0^T dt \leq \int_0^T \frac{d\eta(t)}{-\lambda_1\eta(t) + r_1G(\eta(t))}.$$

Haciendo un cambio de variable $c = \eta(t)$,

$$\frac{1}{2}T \leq \int_{\eta(0)}^{\eta(T)} \frac{dc}{-\lambda_1 c + r_1G(c)}.$$

Usando la condición (**S5**) y la desigualdad anterior se obtiene

$$\frac{1}{2}T \leq \int_{\eta(0)}^{\eta(T)} \frac{dc}{-2\lambda_1 c + 2r_1G(c)} \leq \int_{M_2}^{\infty} \frac{dc}{r_1G(c) - \lambda_1 c},$$

donde la ultima integral es acotada por la condición (**S3**), lo cual es una contradicción ya que lo anterior no se cumple para un T suficientemente grande.

Se ha demostrado que $\eta(t) = \mathbb{E}(u_t, \phi)^2$ explota en algún tiempo finito $T_e > 0$.

Así, por la desigualdad de Hölder empleada en (4.3.40), y elevando al cuadrado

$$\left(\int_{\mathcal{D}} u(x,t)\phi(x)dx\right)^2 \leq \left[\left(\int_{\mathcal{D}} |u(x,t)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_{\mathcal{D}} |\phi(x)|^q dx\right)^{1/q}\right]^2 = \left(\int_{\mathcal{D}} |u(x,t)|^p dx\right)^{2/p}\left(\int_{\mathcal{D}} |\phi(x)|^q dx\right)^{2/q},$$

aplicando esperanza se obtiene

$$\eta(t) \leq C_p^{'}\mathbb{E}\left\{\int_{\mathcal{D}} |u(x,t)|^p dx\right\}^{2/p},$$

donde $C_p^{'} = \left(\int_{\mathcal{D}} |\phi(x)|^q dx\right)^{2/q}$. Se sigue que (4.3.41) se cumple para $p \geq 2$.

■

4.4. Ejemplos

A continuación presentamos dos ejemplos de ecuaciones diferenciales las cuales cumplen las condiciones (**P1**)-(**P3**), además satisfacen las condiciones (**N1**)-(**N4**) y las condiciones (**S1**)-(**S5**) respectivamente. Con ello, al aplicar los teoremas 4.3.3 y 4.3.2, obtendremos que las soluciones a estas ecuaciones diferenciales son positivas y éstas explotan en tiempo finito en norma L^p.

Ejemplo 4.4.1 *Sea $\mathcal{D} = B(R)$ una bola de radio R en $\mathbb{R}^3$. Consideremos la ecuación*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |u|^{1+\alpha} + \gamma u \partial_t W(x,t), & \\ u(x,0) = a_0 e^{-\beta|x|}, & x \in \mathcal{D}, \\ u(x,t)\Big|_{\partial\mathcal{D}} = 0, & t \in (0,T). \end{cases} \tag{4.4.46}$$

donde $W(x,t)$ es un campo aleatorio con función de covarianza $r(x,y) = b_0 e^{-\rho \sum_{i=1}^3 x_i y_i}$ para $x, y \in \mathbb{R}^3$, donde $a_0, b_0, \alpha, \beta, \rho$ y γ son constantes estrictamente positivas.

*La función $f(u,x,t) = |u|^{1+\alpha}$ es continua en $\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{D}} \times [0,T]$, además $f(c,x,t) \geq 0$ para $c \leq 0$ y $x \in \mathcal{D}$, $t \in [0,T]$, además las condiciones iniciales y de frontera son positivas y continuas, de lo cual tenemos que se cumplen las condiciones **(P2)** y **(P3)**. Para verificar la condición **(P1)** tenemos lo siguiente*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} r(x,x)\sigma(c,\xi,x,t) - \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j &= \frac{1}{2} b_0 \sigma_0 e^{-\rho|x|^2}(s^2 + |\xi|^2) - |\xi|^2, \\ &\leq \sigma_0 \left(\frac{1}{2} b_0 \sigma_0 e^{-\rho|x|^2}(s^2 + |\xi|^2) - |\xi|^2 \right), \\ &\leq \left(\frac{1}{2} b_0 \sigma_0^2 - 1 \right) |\xi|^2 + \frac{1}{2} b_0 \sigma_0^2 s^2, \end{aligned}$$

*y si $\frac{1}{2} b_0 \sigma_0^2 < 1$, entonces se satisface la condición **(P2)**. Luego, del Teorema (4.2.4) tenemos que la solución u de la ecuación diferencial (4.4.46) es positiva.*

Para explorar el caso de explosión resolvemos la ecuación,

$$\begin{cases} \triangle v = -\lambda v & en\ \ \mathcal{D}, \\ v = 0 & en\ \ \partial\mathcal{D}, \end{cases} \tag{4.4.47}$$

y se obtiene que el valor propio más pequeño de $\triangle$ está dado por $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2$. Así, tendremos que la función propia normalizada correspondiente a este valor propio es $\phi(x) = \frac{1}{4R^2 r} \sin \frac{\pi r}{R}$, con $r = |x| \leq R$.

*Sea $F(s) = f(s) = |s|^{1+\alpha}$ con $\alpha > 0$, así tendremos que la condición **(N1)** se cumple. Sea $M \in \mathbb{R}_+$, tal que $M > \lambda_1^{1/\alpha} = \left(\frac{\pi}{R}\right)^{2/\alpha}$. Entonces para $s \geq M$,*

$$F(s) - \lambda_1 s = s^{1+\alpha} > 0,$$

*y para cualquier $\alpha > 0$, la integral $\int_M^\infty \frac{ds}{s^{1+\alpha} - \lambda_1 s}$ es convergente. Así, las condiciones **(N2)** y **(N4)** se cumplen. Para que la condición **(N3)** se cumpla requerimos que la siguiente desigualdad se cumpla*

$$\frac{a_0}{R} \int_0^R r e^{-\beta r} \sin \frac{\pi r}{R} dr > \left(\frac{\pi}{R}\right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}, \tag{4.4.48}$$

donde la integral tiene una expresión cerrada. Ahora, bien si la desigualdad (4.4.48) se cumpple, entonces por el teorema 4.3.2, la solución de la ecuacion (4.4.46) explota en tiempo finito en norma L^p, para $p \geq 1$.

Ejemplo 4.4.2 *Sea $\mathcal{D} = B(R)$ una bola de radio R en $\mathbb{R}^3$, consideremos la siguiente ecuación diferencial*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \kappa u^2 + \gamma u^{1+\alpha}\partial_t W(x,t), \\ u(x,0) = a_0 e^{-\beta|x|}, & x \in \mathcal{D}, \\ u(x,t)\Big|_{\partial\mathcal{D}} = 0, & t \in (0,T). \end{cases} \tag{4.4.49}$$

donde a_0, b_0, β, ρ, κ y γ son constantes estrictamente positivas, $W(x,t)$ es un campo aleatorio con función de covarianza $r(x,y) = b_0 e^{-\rho\sum_{i=1}^{3} x_i y_i}$ para $x, y \in \mathbb{R}^3$.

*Primero verificaremos que se cumplen las condiciones **(P1)-(P3)**: tenemos que la función $f(u,x,t) = \kappa u^2$ es continua en $\mathbb{R} \times \overline{\mathcal{D}} \times [0,T]$, además $f(c,x,t) \geq 0$ para $c \leq 0$ y $x \in \mathcal{D}$, $t \in [0,T]$, así la condición **(P2)** se cumple y del ejemplo anterior tenemos que las condiciomes **(P1)** y **(P3)** también se satisfacen.*

Tenemos además

$$r(x,y) \geq r_1 = b_0 e^{-\rho R^2}, \ \forall x, y \in B(R),$$

entonces

$$\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} r(x,y)v(x)v(y)dxdy \geq r_1 \left[\int_{\mathcal{D}} v(x)dx\right]^2,$$

*y con ello la condición **(S1)** se cumple. Como $\sigma(r,x,t) = \sigma_0(r) = \gamma(r)^{1+\alpha}$ y $G(r) = \gamma^2(r)^{1+\alpha}$ son convexas para $r > 0$, donde $2G(r^2) = \sigma_0^2(r) = \gamma^2(r^2)^{1+\alpha}$, tenemos entonces que la condición **(S2)** se cumple. Para la condición **(S3)** requerimos que la desigualdad*

$$\frac{1}{2} r_1 \gamma^2 r^{1+\alpha} - \lambda_1 r > 0,$$

*se cumpla para $r > M_2 = \left(\dfrac{4\lambda_1}{q_1\gamma^2}\right)^{1/\alpha}$, donde λ_1 corresponde al valor propio más pequeño que es solución de la ecuación (4.4.47). Para la condicón **(S4)**, necesitamos que la siguiente desigualdad se cumpla*

$$\frac{a_0}{R}\int_0^R r e^{-\beta r}\sin\frac{\pi r}{R}dr > \left(\frac{4\pi^2}{b_0\gamma^2 R^2}\right)^{1/\alpha} e^{-\rho R^2/\alpha}.$$

*Para $\alpha > 0$, la integral $\displaystyle\int_{M^2}^{\infty} \frac{dr}{\gamma^2 r^{1+\alpha} - \lambda_1 r}$ es convergente, por lo que la condición **(S5)** se cumple.*

Ahora, aplicando el teorema 4.3.3 la solución de la ecuación diferencial (4.4.49) explota en tiempo finito en norma L^p, para $p \geq 2$.

Comentarios finales

Al inicio del trabajo se realizó un estudio de teoría de semigrupos fuertemente continuos, donde se probó que un semigrupo está determinado por su generador, además se dieron herramientas para caracterizar operadores que generan semigrupos de contracción, tales como el Teorema de Hille-Yosida y el Teorema de Lummer-Philips. También, se probó que dado un operador que genera a un C_0 semigrupo añadiendole una perturbación, este semigrupo con la perturbación genera un semigrupo fuertemente continuo.

Durante el desarrollo del trabajo se mostraron condiciones para obtener soluciones al problema de valores iniciales, presentando para ello resultados para el caso determinista, para después extender las ideas al caso estocástico. En el caso determinista se hace notar la importancia del estudio de semigrupos fuertemente continuos, ya que es en este caso el problema de valores iniciales está bien puesto si el operador asociado a éste genera un C_0 semigrupo. Además se presentan tipos de soluciones, tales como clásica, mild y fuerte, y se dan condiciones para tener esta tipo de soluciones. Se hace notar que el problema de Cauchy lineal no homegéneo puede no tener solución clásica, pero bastara con que f sea integrable para que la solución sea mild. Para el estudio del problema de Cauchy no lineal, la pieza fundamental para la prueba de resultados de existencia de soluciones locales y globales es el Teorema de Banach-Picard.

A partir de eso, se definieron algunos operadores que emergen en el estudio de ecuaciones estocásticas semilineales, de igual manera se introdujeron herramientas para definir una clase de ecuaciones semilineales estocásticas como lo son: campos aleatorios, integral estocástica, procesos predecibles, operadores nucleares, y otros más. En el estudio de campos aleatorios de Winer se resalta el supuesto de que la función de covarianza está acotada, ya que el espacio en el que se trabaja es $L^2(\mathcal{D})$.

En el apartado de ecuaciones de reacción-difusión se dan dos conjuntos de condiciones bajo los cuales estas ecuaciones tendrán soluciones locales, resulta además que estos dos conjunto son equivalentes.

Finalmente, en el estudio de condiciones suficientes para la positividad casi segura de soluciones de una cierta clase de ecuaciones de reacción-difución del tipo de Itô en dimensión infinita, se mostraron que algunas de estas condiciones son del tipo Lipschitz para las funciones f y σ, y de coercitividad del operador, entre otras.

Posteriormente, se mostraron dos conjuntos de condiciones suficientes para que las soluciones positivas de estas ecuaciones exploten en norma L^p en tiempo finito, donde el primer conjunto de condiciones son sobre el término no lineal, mientras que en el segundo conjunto conciernen al ruido multiplicativo. Así estos dos componentes son de relevancia en la búsqueda de soluciones que explotan en norma L^p.

Apéndice A

Espectro de un operador compacto

Definición A.0.3 *Sean V, W espacios de Banach, $B(V, W) := \{S : V \to W, S$ es lineal y continua$\}$. $T \in B(V, W)$ es compacto si para todo $F \subset V$ acotado, $\overline{T(F)}$ es compacto.*

Equivalentemente, $T : V \to W$ es compacto si para toda sucesión $\{x_n\} \subset V$ acotada, $\{Tx_n\} \subset W$ posee una subsucesión convergente.

Propiedades A.0.4 *Sea $\mathcal{K}(V, W) = \{T \in B(V, W) : T$ es compacto$\}$.*

a) *$\mathcal{K}(V, W)$ es subespacio lineal cerrado de $B(V, W)$.*

b) *Si $T \in B(V, W)$ y dim(Rango(T)) $< \infty$, entonces T es compacto.*

Definición A.0.5 *Sea H espacio de Hilbert y $T : H \to H$ lineal y acotada.*

a) *$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T$ no es uno a uno$\}$ se llama espectro puntual de T. Los elementos de $\sigma_p(T)$ se llaman valores propios de T, y cada $x \in H$ tal que $x \neq 0$ y $(\mu I - T)x = 0$ para algún $\mu \in \sigma_p(T)$ es un vector propio de T asociado al valor propio μ.*

b) *$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T$ es uno a uno y $(\lambda I - T)(H)$ es denso en H pero $(\lambda I - T)(H) \subsetneq H\}$ es el espectro continuo de T.*

c) *$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T$ es uno a uno pero $(\lambda I - T)(H)$ no es denso$\}$ es el espectro residual de T.*

$\sigma(T) := \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ es el espectro de T.

Definición A.0.6 *Sea $T \in B(H)$. T es normal si $TT^* = T^*T$.*

En particular, si T es autoadjunto $T = T^*$ y T es normal.

Teorema A.0.7 *Sea H espacio de Hilbert y $T : H \to H$ normal y compacto. Entonces*

a) *$\sigma(T)$ es contable y no tiene puntos de acumulación, excepto probablemente $\mu = 0$.*

b) *Si $0 \neq \mu \in \sigma(T)$, entonces μ es un valor propio y el número de vectores propios asociados a μ y linealmente independientes es finito.*

c) *H posee una base ortonormal constituida por vectores propios de T. Si B es tal base, para todo $x \in H$, se cumple*

$$x = \sum_{y \in B} (x, y)y,$$

y para todo $x \in H$, todos excepto un conjunto contable de coeficientes (x, y) son cero.

Demostración Ver [7], p. 904.

Apéndice B

Teorema del mapeo espectral

Sea $\{T(t),\ t \geq 0\}$ un C_0 semigrupo en un espacio de Banach X, y sea A su generador infinitesimal. En esta sección se presentan resultados acerca de las relaciones que existen entre el espectro del operador A, y el espectro de cada uno de los operadores $T(t)$, para $t \geq 0$.

Lema B.0.8 *Sea $\{T(t),\ t \geq 0\}$ un C_0 semigrupo y sea A su generador infinitesimal. Si*

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} T(s)xds,$$

entonces

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad \textit{para cada} \quad x \in X,$$

y

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad \textit{para cada} \ \ x \in \mathcal{D}(A).$$

Teorema B.0.9 *Sea $\{T(t),\ t \geq 0\}$ C_0 semigrupo y sea A su generador. Entonces*

$$\sigma(T(t)) \supset e^{t\sigma(A)}, \quad \textit{para } t \geq 0.$$

Del apéndice anterior, sabemos que el espectro de un operador A está compuesto por: el espectro puntual $\sigma_p(A)$, el espectro continuo $\sigma_c(A)$ y el espectro residual $\sigma_r(A)$. Los resultados mostrados a continuación se refieren a estos conceptos.

Teorema B.0.10 *Sea $\{T(t),\ t \geq 0\}$ C_0 semigrupo y sea A su generador. Entonces*

$$e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(T(t)) \subset e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\}.$$

Mas precisamente, si $\lambda \in \sigma_p(A)$, entonces $e^{\lambda t} \in \sigma_p(T(t))$ y si $e^{\lambda t} \in \sigma_p(T(t))$ existe una constante k con $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda_k = \lambda + 2\pi ik/t \in \sigma_p(A)$.

Teorema B.0.11 *Sea $\{T(t),\ t \geq 0\}$ C_0 semigrupo y sea A su generador. Entonces,*

(i) *Si $\lambda \in \sigma_r(A)$ y ninguno de los $\lambda_n = \lambda + 2\pi in/t$, con $n \in \mathbb{Z}$ está en $\sigma_p(A)$, entonces $e^{\lambda t} \in \sigma_r(T(t))$.*

(ii) *Si $e^{\lambda t} \in \sigma_r(T(t))$, entonces ninguno de los $\lambda_n = \lambda + 2\pi in/t$, con $n \in \mathbb{Z}$ está en $\sigma_p(A)$ y existe una constante k, con $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda_k \in \sigma_r(A)$.*

El contenido de este apartado puede consultarse en [21] pp. 44-48.

Bibliografía

[1] Bebernes, J. *Mathematical problems from combustion theory.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 83, Springer, 1989.

[2] Britton, N.F. *Essential Mathematical Biology.* Springer, 2003.

[3] Chow, Pau-Liu. *Explosive Solutions of Stochastic Reaction-Diffusion Equations in Mean L^p-norm.* Journal of Differential Equations 250, 2011 p. 2567-2580.

[4] Chow, Pau-Liu. *Unbounded positive solutions of nonlinear parabolic Itô equations.* Communications on Stochastic Analysis Vol. 3, 2009 p. 211-222.

[5] Chow, Pau–Liu. *Stochastic partial differential equations.* Chapman & Hall, 2007.

[6] Courant, H. *Methods of mathematical physics, Vol 1.* John Wiley & Sons, 1991.

[7] Dunford, N.; Schwartz, J. *Linear operators part II: Spectral theory.* Wiley, 1988.

[8] Folland, G. *Introduction to partial differential equations.*Princeton Univrsity Press, 1995.

[9] Goldstein, J. *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Oxford University Press, 1985.

[10] Ikeda, N.; Watanabe, S. *Stochastic differential equations and diffusion processes.* North-Holland Mathematical Library, 24. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1989.

[11] Klebaner, C. *Introduction to stochastic calculus with applications.* Imperial College Press, 1998.

[12] Kolmogorov, A.N.; Fomin, S.V. *Introductory real analysis.* Dover Publications, 1975.

[13] Kuo, Hui-Hsiung. *Gaussian Measures in Banach Spaces Vol. 463 of Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, 1975.

[14] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley & Sons, 1978.

[15] Kunita, H. *Stochastic flows and stochastic differential equations.* Cambridge University Press, 1990.

[16] Levine, H.A. *The Role of Critical Exponents in Blow-Up Theorems.* Society for Industrial and Applied Mathematics 32, 1990. p. 262-. p.288.

[17] Levine, H.A. *The Role of Critical Exponents in Blow-Up Theorems: The Sequel* . Journal of Mathematical Analysis and Applications 243, 2000. p. 85-126.

[18] McKibben, M.A. *Discovering Evolution Equations with Applications. Vol 1.* CRC Press, 2011.

[19] Mueller, C. y Sowers, R. *Blow up for the heat equation with a noise term* . Probability Theory Related Fields 93, 1993. p.208.

[20] Nottrot, R. *Lecture notes in mathematics. Optimal processes on manifolds; an application of Stokes' theorem.* Springer-Verlag, 1982.

[21] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* . Springer, 2011.

[22] Port, A. y Stone, C. *Brownian motion and classical potential theory.* Academic Press, 1978.

[23] Quittner, P.; Souplet, P. *Superlinear parabolic problems. Blow-up, global existence and steady states.* Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[24] Revuz, D.; Yor, M. *Continuous martingales and brownian motion.* Springer Science & Business Media, 1999.

[25] Rudin, W.; *Análisis funcional.* Reverte, 1979.

[26] Samarskii, A.; Galaktionov, V.; Kurdyumov, S.; Mikhailov, A. *Blow-up in quasilinear parabolic equations.* De Gruyter Expositions in Mathematics, 19. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[27] Tanabe, H. *Equations of evolution.* Pitman, 1979.

[28] Taylor, M. *Partial Differential Equations I: Basic Theory.* Spinger, 2010.

[29] Yoshida, K. *Functional Analysis.* Springer, 1980.

Índice alfabético