



Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

Métodos Monte Carlo y Productos Estructurados

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Probabilidad y Estadística

P r e s e n t a

Oscar J. Suárez Ruíz.

Director de Tesis:

Dr. Daniel Hernández-Hernández

Guanajuato, México. Julio de 2012

Índice general

1. Una introducción a las finanzas estructuradas	6
1.1. Definición y clasificación de las finanzas estructuradas.	7
1.2. Derivados de tasas de interés	10
1.3. Derivados de crédito	15
1.4. Notas estructuradas	18
1.5. Uso de de los productos estructurados	20
2. Modelos financieros y volatilidad estocástica	23
2.1. El proceso cuadrático de Bessel	23
2.2. El modelo de Heston	24
2.3. Cambio de medida en modelos de volatilidad estocástica	29
2.4. Modelos de riesgo de crédito	33
3. Principios de simulación Monte Carlo	37
3.1. Simulación del modelo de Heston.	37
3.2. Simulación de modelos de riesgo de crédito	44
3.3. Fundamentos de integración por Monte Carlo	46
3.4. Técnicas de reducción de varianza	48
3.5. Muestreo por importancia	61
4. Resultados y conclusiones	65
4.1. Nota Referenciada a Índice	65
4.2. Derivados de tasa de interés	70
4.3. Consideraciones finales	72

Introducción

En esta tesis consideramos el problema financiero de valuación de activos contingentes y describimos algunas de las metodologías empleadas en la actualidad, las cuales incluyen métodos computacionales. Este es un enunciado muy general, ya que en el medio financiero existe una gran cantidad de activos contingentes y activos subyacentes, por lo que es necesario delimitar nuestro problema para hacerlo tratable, así como aplicarlo en áreas en donde nuestros métodos tengan importancia. Hemos elegido los productos estructurados como nuestro objeto de estudio, así como los métodos Monte Carlo como herramienta de estimación.

Existen varias maneras de definir qué es un activo contingente. Desde un enfoque probabilista es una variable aleatoria medible con respecto a la filtración del proceso de precios en un mercado. Desde un punto de vista financiero, los activos contingentes están representados por los productos derivados; dichos productos son llamados de esta manera por que su rendimiento está referenciado al comportamiento de otro activo, llamado activo subyacente. Los activos subyacentes pueden ser de diversas naturalezas: materias primas, acciones, índices bursátiles, carteras crediticias, tipos de cambio, tasas de interés, y recientemente energía y clima, por citar algunos. Es claro que la dinámica del activo subyacente impacta de manera directa en el precio del derivado, lo cual ha dado pie al desarrollo de una amplia área de investigación.

En 1973, Black & Scholes propusieron el siguiente modelo basado en ecuaciones diferenciales estocásticas para la dinámica de los precios: $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$, donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Los parámetros μ y σ representan la tendencia y la volatilidad respectivamente. Este modelo resulta ser algo limitante ya que sus parámetros son constantes, y se han realizado pruebas empíricas de que en general, esto no se cumple. En otros modelos se ha propuesto tomar $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ como un proceso estocástico y varias dinámicas para el mismo, por esta razón dichos modelos son nombrados de volatilidad estocástica. En este entorno surgió el modelo de Heston en 1993, para modelar la volatilidad

$$\begin{aligned}dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dB_t.\end{aligned}$$

Existen otras propuestas de modelos de difusión para la volatilidad, tales como Hull & White (1987) y Cheney & Scott (1989). Por otro lado, el enfoque estadístico de series de tiempo nos permite hacer modelación de la volatilidad por medio de modelos ARCH y sus variantes.

El principal objetivo del segundo capítulo es estudiar las propiedades del modelo de Heston, así como una vista rápida de los modelos de riesgo de crédito. Para esto hacemos una revisión de los procesos relacionados con este modelo y especificamos propiedades que nos servirán en capítulos posteriores.

Una gran cantidad de los derivados que se cotizan en la actualidad no tienen una fórmula explícita de valuación, dados los modelos subyacentes o la complejidad del retorno de dichos productos financieros, por lo que su valuación requiere del uso de métodos numéricos. Algunas de las técnicas numéricas empleadas para valuación de derivados son: solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, método del elemento finito e inversión numérica de la función característica. En el presente trabajo adoptaremos como método de valuación la simulación Monte Carlo, es más tratable para nosotros por poder explotar diversos resultados estadísticos; adicionalmente la tasa de convergencia es del orden $O(n^{-1/2})$, cosa que no se sostiene en todos los casos cuando usamos otros métodos, sobre todo cuando se busca integrar en varias dimensiones, como es el caso de los derivados que dependen de la trayectoria del bien subyacente.

Para poder implementar métodos Monte Carlo, es necesario contar con un método de simulación para el bien subyacente, lo cual estudiamos en la primera sección del Capítulo 3 para los modelos propuestos. Comenzamos con la simulación del modelo de Heston, para esto se tiene el enfoque de Broadie & Kaya (2004), quienes desarrollaron un algoritmo basado en simular primero la volatilidad y luego usar las propiedades distribucionales del proceso $\{\ln(S_t)\}_{t \geq 0}$ condicionado a la información del proceso $\{v_t\}_{t \geq 0}$. En el desarrollo de este algoritmo nos encontramos con el problema de simular trayectorias de la variable $\int_0^t v_s ds \mid v_t, v_0$. Este problema fue abordado con inversión numérica de la función característica por Broadie & Kaya (2004) y con una expansión de variables gamma por Glasserman (2011). En esta tesis se propone usar un método casi-exacto que usa una simulación exacta del proceso de volatilidad y una aproximación para la integral del mismo proceso. Como siempre existe, la posibilidad de hacer una discretización de ambos procesos, lo cual se evalúa en capítulos posteriores. Recordando que nuestro objetivo es estimar precios de activos financieros, los cuales resultan ser valores esperados, por lo que incluimos en el tercer capítulo los fundamentos que nos permiten usar la simulación como un método de estimación, así como algunos de los métodos de reducción de varianza usados, con la finalidad de hacer más eficientes los estimadores. En este contexto, ejemplificamos la reducción de varianza y la simulación de trayectorias del modelo de Heston con un ejemplo sencillo.

Existe una amplia variedad de instrumentos derivados hoy en día. Una manera de clasificarlos a través de la estructura de su flujo de efectivo es la siguiente:

- Futuros y forwards.
- Swaps.
- Opciones.
- Notas referenciadas.

En el Capítulo 1 mostraremos ejemplos sobre algunos de estos derivados. Debido que los productos estructurados forman parte de los instrumentos derivados podemos estudiarlos matemáticamente como activos subyacentes. Dentro de estos productos podemos encontrar derivados de todos los tipos que mencionamos en la clasificación, sin embargo todos tienen características similares.

A lo largo del primer capítulo damos una introducción a las finanzas estructuradas y definimos a los productos estructurados como aquellos que son empleados en transacciones de finanzas estructuradas. Damos una breve clasificación y sobre los productos estructurados y finalmente algunos ejemplos de las estructuras financieras en donde son empleados.

Por su complejidad, los productos estructurados no tienen formas cerradas de valuación. En la práctica se emplean diversas posiciones financieras para su valuación y cobertura, por lo que encontramos aquí una gran área de oportunidad para aplicaciones de los métodos Monte Carlo. En el capítulo 4 incorporamos todas las herramientas descritas en los capítulos anteriores con este objetivo, tomamos la varianza de los estimadores como medida de eficiencia y comparamos los efectos de reducción de varianza de distintos métodos descritos en el Capítulo 1. Hacemos también una comparación de los resultados obtenidos al implementar métodos de discretización. Para poder hacer simulaciones de los modelos propuestos debemos conocer los parámetros más plausibles de dichos modelos, por lo que se presenta adicionalmente algunas opciones de estimación de los mismos.

Capítulo 1

Una introducción a las finanzas estructuradas

En los capítulos anteriores hemos hablado sobre modelos estocásticos y sobre integración numérica usando resultados estadísticos. Ahora vamos a mostrar un panorama general de los productos estructurados, en los cuales encontramos una aplicación interesante sobre las técnicas matemáticas que hemos estudiado. He decidido el nombre de éste capítulo como finanzas estructuradas ya que es necesario comprender el origen de los productos financieros, así como su importancia y uso, es por eso que en el presente capítulo daremos una reseña sobre estos instrumentos financieros. Comenzamos por una introducción que nos llevará a definir las finanzas y productos estructurados, así como una clasificación que nos ayude a comprender de una mejor manera la naturaleza de los riesgos financieros relacionados. En las secciones posteriores a la primera hablaremos puntualmente de algunos de estos productos, desglosaremos su construcción y haremos la matematización de los flujos de efectivo que implican, esto con el objetivo de usar estos elementos para aplicar las técnicas de simulación en el capítulo siguiente. Finalmente incluimos una sección de aplicaciones que mostrará ejemplos sobre algunos flujos de efectivo, estructuras financieras y coberturas de riesgo en las cuales empleamos productos estructurados. En este capítulo vamos a describir el funcionamiento de los productos financieros, así como su uso, sin embargo no vamos a ahondar en temas de valuación de dichos instrumentos financieros ya que es en lo que nos vamos a enfocar durante el siguiente capítulo.

Antes de comenzar de lleno con definiciones financieras, vamos a ilustrar el concepto de finanzas estructuradas con un ejemplo relativamente sencillo. Supongamos que el banco A otorga un crédito por 100 pesos a la empresa B, con una tasa de interés del 5%. El banco busca cubrirse del riesgo del incumplimiento de su contraparte, para esto compra un swap de incumplimiento con un costo p^1 en una sola exhibición, el cual le repone los pagos que no haga B. El swap de incumplimiento es emitido por un tercer agente financiero, llamémoslo C, analicemos las consecuencias de esta serie de operaciones. Ahora, C tiene un pasivo riesgoso, que son los incumplimientos de B. Por otro lado, A ha formado un bono sin riesgo, que hace pagos periódicos equivalentes al 5% y un pago final de 100 pesos, el costo inicial que incurre por este bono es $100 + p^1$, este bono es denominado bono sintético, ya que no existe físicamente, sólo se puede observar en los flujos de efectivo.

Siguiendo con el ejemplo, C busca cubrirse a su vez de sus pasivos contingentes, por lo que

emite un bono riesgoso referenciado al rendimiento del crédito. En la práctica, dicho bono es llamado nota referenciada por crédito y a grosso modo funciona como sigue: si B hace todos sus pagos, C hace pagos periódicos con cierta tasa de interés, si B deja de pagar en algún momento entonces C también dejan de pagar o bien pagan una tasa más baja. Así, C transmite a su vez el riesgo al mercado. Supongamos que la tasa de interés de la nota es también 5% y que bajo incumplimiento de B paga 0%, supongamos también que C emite la nota con una prima p^2 y que la tasa que ofrece es del 5% y 0% en caso de incumplimiento de B. Notemos que C tiene como pasivo un bono con tasa de rendimiento del 5%, ya que en caso de incumplimiento le pagará al banco A, mientras que en caso contrario paga la misma tasa al tenedor de la nota, mientras que su ingreso es $p^1 + p^2$. En la práctica, C es una entidad financiera creada con el fin de hacer emitir la nota referenciada y cubrir el riesgo de A, es por eso que se denomina Vehículo de Propósito Especial (VPE). Debido a la complejidad del mercado el VPE debe hacer más atractivas las notas que emite por lo que a su vez invierte el capital recibido con la finalidad de emitir instrumentos de distinta calificación crediticia y con distintos esquemas de rendimiento.

En el ejemplo aparecen transacciones y flujos de efectivo comunes de las finanzas estructuradas y existen elementos clave, tales como la transferencia de riesgo, el uso de instrumentos derivados, las estructuras sintéticas y el VPE. Más adelante, mostraremos definiciones más detalladas sobre estos conceptos.

1.1. Definición y clasificación de las finanzas estructuradas.

A pesar de que las finanzas estructuradas son ampliamente usadas en la actualidad, no existe una definición universalmente aceptada para este término. En el 2005, el Banco de Pagos Internacionales (BIS, por sus siglas en inglés) dió la siguiente definición

Definición Las finanzas estructuradas pueden definirse como una forma de intermediación financiera, basada en tecnología de puesta en seguridad. Incluye la formación de portafolios de activos y la venta a inversionistas de instrumentos referenciados a dichos portafolios. Típicamente, varias clases de valores son emitidas, cada una con diferente perfil de riesgo-retorno. Adicionalmente, el portafolio de activos colateral subyacente esta legalmente separado de la hoja de balance el originador de la transacción. Los activos en el portafolio colateral pueden ser desde instrumentos de efectivo hasta estructuras sintéticas. Dependiendo de la naturaleza de estos activos, los portafolios pueden contener una gran cantidad de valores relativamente homogéneos o bien estar constituido de exposiciones al riesgo de un número limitado de deudores.

Fender & Mitchel (2011) definen las finanzas estructuradas bajo las siguientes características esenciales:

1. La puesta en común de activos, ya sean basados en efectivo o sintéticos.
2. Separación del riesgo de crédito del portafolio de activos colateral y el riesgo de crédito del originador, usualmente mediante la transferencia del activo subyacente a un Vehículo de Propósito Especial.

- Partición de obligaciones que están respaldadas por el portafolio de activos.

Por otro lado, Fabozzi (2006) define las finanzas estructuradas como sigue:

Definición Las finanzas estructuradas empleadas de acuerdo a los requerimientos del tenedor del bien (llamado originador) con el objeto de financiamiento, liquidez, transferencia de riesgo, etc. Cuando ningún producto en la plataforma puede satisfacerlo. Son productos hechos a la medida con la característica de ser una herramienta financiera flexible.

De acuerdo a estas definiciones observamos que la principal característica de las finanzas estructuradas es la transferencia de riesgo de entidades financieras hacia otras por medio de emisión de instrumentos de distinta calificación, esto lo podemos observar en el siguiente diagrama que nos muestra los actores del mercado que participan en un esquema usual de finanzas estructuradas publicado por el BIS, 2005.

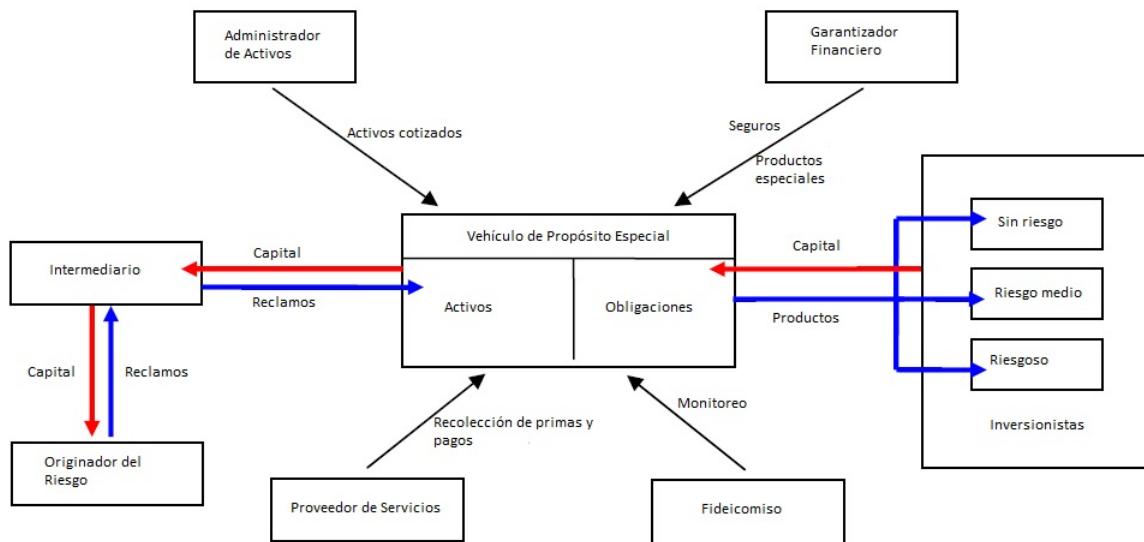


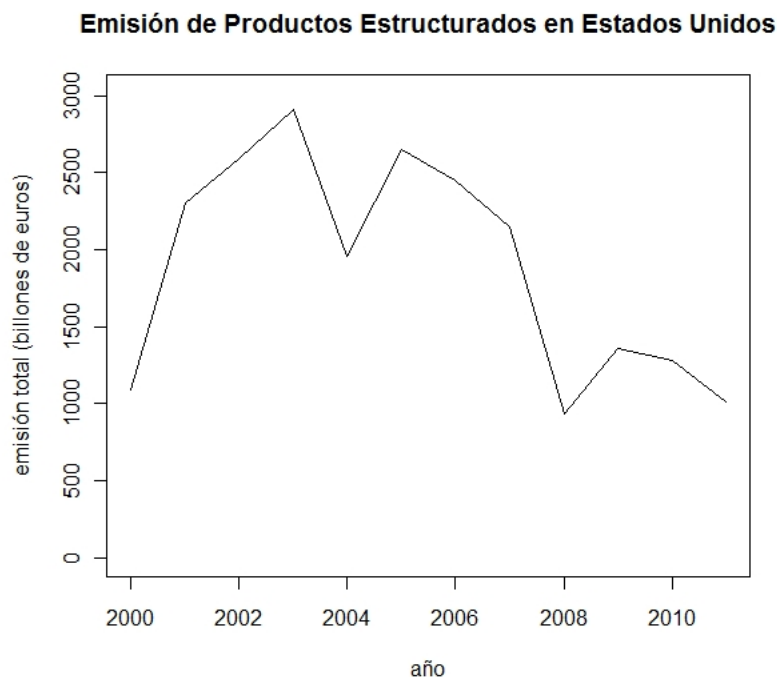
Figura (1.1)

Dentro del diagrama falta resaltar el rol de las agencias calificadoras, las cuales evalúan el riesgo de crédito tanto del originador, como de los productos emitidos por el Vehículo de Propósito Especial, un Vehículo de Propósito Especial (VPE) es aquella entidad que se encarga de administrar los fondos, creando portafolios de inversión, el VPE emite distintos productos financieros al mercado que son consumidos por inversionistas de acuerdo a su apetito por el riesgo. El capital proviene tanto de los productos emitidos como de primas pagadas por el originador del riesgo al VPE. Como se observa, hay un fideicomiso que se encarga del monitoreo de estos movimientos. El originador del riesgo generalmente es un banco, aunque puede ser cualquier institución con requerimientos de riesgo que no puedan ser cubiertos por el mercado y el intercambio capital-reclamos se hace por medio de derivados de crédito y notas hechas a la medida de los requerimientos del originador. Este es un esquema usual y varían los instrumentos usados de acuerdo a los requerimientos del originador, la fuente de riesgo puede

ser tanto una tasa de interés, un tipo de cambio, una cartera de crédito o bien elementos del mercado accionario.

Como podemos observar, las finanzas estructuradas no sólo incluyen instrumentos financieros, también están constituidas por técnicas y posiciones financieras que son usadas para transferencia de riesgo y permiten la interacción de varios agentes financieros. Una posición fundamental, la cual no estudiaremos en este trabajo, la juegan las calificadoras de riesgo. Es importante, para un buen funcionamiento del mercado de finanzas estructuradas el óptimo desempeño de dichas calificadoras, ya que calificaciones incorrectas podrían generar falsas expectativas sobre el rendimiento y riesgo de los productos emitidos, así como sobre la estabilidad o inestabilidad del originador del riesgo. Este es un tema que se ha venido estudiando recientemente y requiere de un profundo análisis, uno de los principales retos en este tenor es modelar el riesgo de crédito implicado, ya que existen una compleja dependencia entre los incumplimientos de los productos emitidos.

El mercado de finanzas estructuradas en un tanto caprichoso, ya que está íntimamente relacionado con transferencias de riesgo es afectado de manera directa por la estabilidad financiera que se viva. En épocas de crecimiento económico la decreciente cantidad de incumplimientos en bonos corporativos se refleja en una ilusión de robustez de los productos estructurados y boyante emisión de los mismo, mientras que en épocas de recesión el incremento de incumplimientos obliga a los inversionistas a reevaluar sus posiciones y transferir sus inversiones a instrumentos menos riesgosos. En la siguiente gráfica podemos observar este efecto en la emisión total de productos estructurados en Estados Unidos, por año.



*Fuente: Asociación para los Mercados Financieros en Europa

Podemos decir que los productos estructurados son derivados ya que siempre existe un bien subyacente, aunque este sea de distinta naturaleza. Para nosotros los productos estructurados

serán aquellos que son empleados usualmente en transacciones de finanzas estructuradas. A grandes rasgos, podemos clasificarlos en los siguientes grupos:

- Derivados de tasas de interés.
- Derivados de crédito.
- Notas Estructuradas.

En secciones posteriores daremos una descripción detallada de los productos financieros que se comprenden en esta clasificación, por el momento queremos plasmar la idea de clasificar las finanzas estructuradas en dos grandes partes: los productos estructurados y las estructuras financieras, las estructuras son aquellas posiciones que involucran a varios productos financieros y que permiten una transferencia de riesgo como la que se presenta en la figura (1.1).

Existe una discusión recurrente sobre clasificar a las opciones exóticas como productos estructurados o no, este dilema yace en el hecho de que las opciones están diseñadas para la cobertura de riesgo, sin embargo no son usualmente empleadas en las estructuras financieras que hemos descrito. Cabe resaltar que la comprensión de este tipo de instrumentos de cobertura en su definición así como los flujos de efectivo que provocan es de gran ayuda en el contexto en el que trabajamos, sin embargo debido a la extensión de este trabajo no vamos a considerarlos en nuestra clasificación, solo vale la pena mencionar que muchas de las variantes de los productos aquí mencionados fueron inspiradas en opciones y variables de las mismas.

1.2. Derivados de tasas de interés

En esta sección vamos a describir el funcionamiento de los principales derivados de tasa de interés usados en el contexto de finanzas estructuradas. Recordemos que los derivados se pueden dividir por el tipo de bien subyacente en derivados de divisas, derivados de acciones, derivados de materias primas, derivados de tasa de interés y derivados de crédito. Los derivados de tasas de interés se caracterizan por no calcularse en base a unidades del bien subyacente, ya que las tasas de interés no se pueden fraccionar o dividir, en cambio se cuenta con un monto hipotético, al cual se aplica la tasa de interés a lo largo del periodo de maduración. Comenzamos nuestra discusión definiendo de manera general los productos estudiados.

Futuros Un futuro es un contrato legal en el cual dos contrapartes adquieren la obligación de compra-venta de un bien subyacente a un precio fijo en una fecha específica, dicho precio es llamado precio de ejercicio. La posición de compra se llama posición larga, mientras que la posición de venta se llama posición corta. A la fecha en que se acuerda realizar la compra-venta se llama fecha de maduración y el precio al cual se acuerda hacer la transacción se llama precio futuro.

Forward Un forward es futuro tipo “over the counter”, los contratos de este estilo son aquellos que no se cotizan en el mercado de derivados, en cambio, son acuerdos negociados entre las contrapartes a la medida de los requerimientos de riesgo de las mismas, en el caso más usual, existe un cliente y un vendedor, ya sea un banco o casa de bolsa. Los contratos

“over the counter” llevan un riesgo adicional, llamado riesgo de contraparte y es el riesgo de que alguna de las dos partes caiga en incumplimiento del contrato.

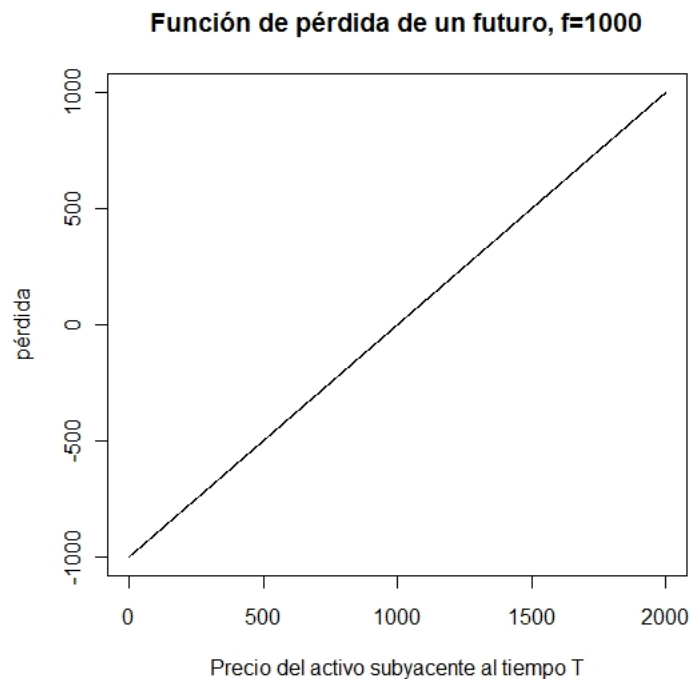
Swap En un contrato swap las contrapartes acuerdan intercambiar flujos de efectivo generados por dos bienes subyacentes, los cuales son generalmente del mismo mercado. Los flujos de efectivo son pagos periódicos y son calculados en base al monto hipotético del swap, entonces cada periodo se calcula el rendimiento del bien subyacente bajo las condiciones especificadas y ambas partes intercambian dichos montos de dinero.

Opción Mediante un contrato de opción, el comprador adquiere el derecho mas no la obligación de comprar o vender un bien subyacente a un precio fijo a cambio de una prima, se denominan call y put para opciones de compra y venta respectivamente. El precio al que se fija la compra o venta se llama precio de ejercicio.

En los contratos de futuro y forward de tasa de interés el bien subyacente es un instrumento referenciado a una tasa de interés, generalmente un bono, la tasa cupón del bono es llamada cupón hipotético. En estos contratos se acuerda un precio específico para el bono en cuestión y en la fecha de maduración se liquidan las posiciones, generalmente en efectivo aunque en algunos casos se le concede el derecho a obtener un bono a la posición larga. Existen dos grandes tipos de contratos forward: el forward completo y el forward sintético, en el primer contrato no se cobra ninguna prima mientras que en el sintético si hay un cobro de prima, para estos efectos es indistinguible un contrato de futuro de un forward. Para analizar la valuación de contratos de futuro denotemos por f el precio de ejercicio, entonces de la paridad call put se tiene:

$$C(0, s) - P(0, s) = S_0 - Ke^{-rT},$$

donde C y P son los precios de opciones Call y Put respectivamente con un precio de ejercicio K , r es la tasa libre de riesgo constante y T es la fecha de maduración. Ahora bien, notemos que la función de pérdida en un contrato de futuro completo se puede ilustrar en la siguiente gráfica, donde suponemos el precio de ejercicio $f = 1000$.



Si observamos, esto es equivalente a tener una posición larga en un call y una posición corta en un put ambos con el mismo precio de ejercicio, de aquí tenemos que para que el futuro este libre de prima el precio de ejercicio debe cumplir

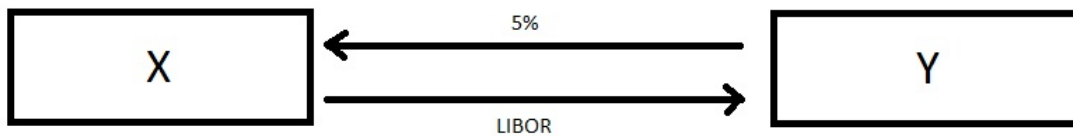
$$S_0 - fe^{-rT} = 0.$$

Finalmente obtenemos $f = S_0e^{rT}$. Este resultado se puede generalizar de la siguiente manera

$$f = E_{\mathbb{Q}}[S_T]. \quad (1.2.1)$$

Esta es una fórmula sencilla y elegante de valuación para un futuro, sin embargo existen distintas variantes sobre los futuros que no tienen una expresión tan simple, más adelante vamos a hacer una descripción general sobre estas variantes y haremos expresiones matemáticas que nos ayudarán a formular su valuación en el capítulo siguiente.

En un contrato de swap de tasa de interés, se fija el monto hipotético y periodo a periodo las contrapartes intercambian los intereses generados aplicando un rendimiento efectivo a dicho monto, el cual nunca se intercambia, ya que no tendría sentido financiero para ninguna de las dos partes. Generalmente una de las contrapartes aplica una tasa fija y la otra una tasa variable, referenciada a alguna tasa importante del mercado. Algunos ejemplos de tasas variables pueden ser las referidas a los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETE) emitidos por el Banco de México, o bien la tasa LIBOR, cuyo nombre se debe a las siglas en inglés de “London Interbank Offered Rate” y es la tasa a la que los principales bancos pagan rendimientos por sus certificados de depósito a otros bancos. En la siguiente figura podemos observar el funcionamiento de un swap típico.



A continuación vamos a describir posibles variantes de los contratos de forward y swap, los cuales podemos encontrar en el mercado de las finanzas estructuradas. Recordemos que los productos estructurados son hechos a la medida de los riesgos requeridos, por lo que mas allá de la clasificación que daremos pueden haber variables o combinaciones de los instrumentos aquí descritos, sin embargo trataremos de describir los más importantes.

Tapas, pisos y collares

Viéndolo desde una manera práctica, estos contratos son una especie de opción, en ellos la posición larga acepta pagar una prima a cambio de protección. Al inicio se fija una tasa de interés llamada tapa o piso y se toma otra tasa de referencia, si la tasa de referencia excede la tapa, la posición corta recompensa al comprador con la diferencia. Entonces las tapas son protección contra el alza de las tasas de interés, por el contrario los pisos son protección contra la caída de las tasas de interés. Denotemos por H la función de pérdida, si K es el monto hipotético, i es la tasa de referencia, i_t es la tapa y T es la fecha de maduración tenemos que la función de pérdida para el vendedor de una tapa es

$$H(i) = K(i - i_t)(T) I_{\{i \geq i_t\}},$$

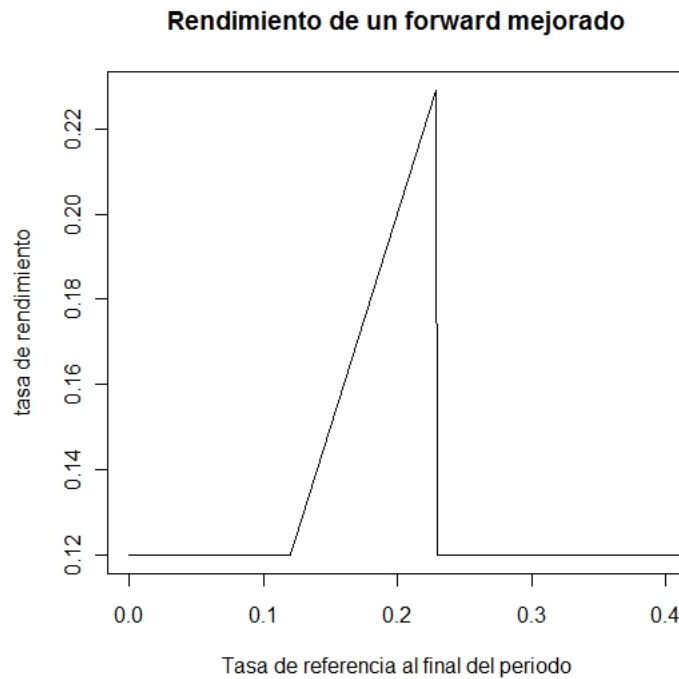
Análogamente, si i_p es el piso se tiene la función de pérdida

$$H(i) = K(i_p - i)(T) I_{\{i < i_p\}}.$$

Los collares se pueden definir fácilmente como la combinación de una tapa y un piso.

Forward Mejorado

En este contrato el comprador se cubre contra la caída en el precio del bien subyacente (en nuestro caso una tasa de interés), de tal manera que se asegura un nivel mínimo y se tiene una participación parcial bajo una alza en los precios, de tal manera que mientras el precio se mantenga en un nivel determinado el retorno aumenta en la misma proporción y si sale de dicho rango se recibe el nivel mínimo. Este producto es también conocido como forward tiburón, debido a la gráfica que arroja el precio del bien subyacente contra el rendimiento del contrato. En la siguiente imagen podemos ver un ejemplo cuando el nivel mínimo es 0.12 y el nivel máximo es 0.23.



El forward mejorado puede ser aplicado también a otro tipo de bienes subyacentes como tipo de cambio o índices accionarios, de una manera matemática escribimos la función de pérdida de la posición corta como sigue

$$H(i) = K (iI_{\{i \in [a,b]\}} + aI_{\{i \notin [a,b]\}}).$$

Donde K es el monto hipotético, a es el rendimiento mínimo y b es un margen superior.

Swap de moneda cruzada

El swap usual hace un intercambio de rendimientos en la misma moneda, el swap de moneda cruzada tanto los montos hipotéticos como los rendimientos se hacen en monedas diferentes. La principal motivación de una entidad financiera para entrar a este tipo de contratos es el pagar intereses en monedas con tasas más bajas y por otro lado recibir intereses en monedas con tasas más altas. Este contrato se inicia sin cobro de prima, sin embargo generalmente los montos hipotéticos son intercambiados en la fecha de maduración, por lo que ambas contrapartes están expuestas al riesgo de los movimientos en el tipo de cambio, visto desde otro puntos de vista se tiene implícito un contrato forward de tipo de cambio.

Turbo swap

Este contrato hace participe al comprador de los movimientos favorables sobre una tasa de interés de referencia, periódicamente se intercambia una tasa de interés fija por una tasa de interés que dependiendo del nivel de la tasa de referencia puede ser igual a la misma o

proporcionalmente mayor, un ejemplo de tasa variable del tipo turbo swap es la siguiente

$$g_k = 0I_{\{i_k < r_1\}} + i_k I_{\{r_1 \leq i_k \leq r_2\}} + 2i_k I_{\{i_k > r_2\}},$$

donde i_k es la tasa de referencia efectiva al final del k -ésimo periodo, $\{r_1, r_2\}$ son dos límites tales que $r_1 < r_2$. Como observamos en el ejemplo el comprador participa de las ganancias cuando incrementa la tasa de interés, pero también asume el riesgo cuando pueda bajar decha tasa. De una manera general podemos plantear la tasa variable g como sigue

$$g_k = a_1 i_k I_{\{i_k < r_1\}} + a_2 i_k I_{\{r_1 \leq i_k \leq r_2\}} + a_3 i_k I_{\{i_k > r_2\}}.$$

Los niveles a_1, a_2, a_3 son determinados por el cliente y observamos que $a_1 < a_2 < a_3$. La contraparte del turbo swap se puede encontrar cuando $a_1 > a_2 > a_3$, en este caso el contrato es conocido como swap amortiguador y el objetivo que persigue es precisamente amortiguar las caídas en la tasa de interés de referencia. En ambos casos los intervalos $\{i_k < r_1\}$, $\{r_1 \leq i_k \leq r_2\}$ y $\{i_k > r_2\}$ son escenarios pesimista, neutral y optimista respectivamente.

Swap corredor

En el swap tipo corredor se consideran dos tasas predeterminadas, y dos eventos $\{i_k \in [r_1, r_2]\}$, $\{i_k \notin [r_1, r_2]\}$. El primer evento se considera como un evento optimista y el complemento como un evento pesimista, por lo que el cliente recibe una mejor tasa bajo un evento optimista y una tasa más pequeña durante un evento pesimista. Este producto es generalmente cotizado sin costo, sin embargo la tasa fija que el cliente paga es determinada en base al rendimiento esperado. La tasa de interés de retorno es de la siguiente forma

$$g_k = a_1 I_{\{i_k \in [r_1, r_2]\}} + a_2 I_{\{i_k \notin [r_1, r_2]\}}.$$

Donde $0 < a_1 < a_2 < 1$.

Existen otras extensiones de los productos aquí descritos, así como variantes que no mencionaremos debido a la extensión de este trabajo, cabe mencionar que la gran diversidad de productos es heredada de los requerimientos de riesgo de las empresas en la actualidad. En la última sección de este capítulo ilustraremos ejemplos en donde los swaps y forwards son empleados para cobertura de riesgo, por ahora seguiremos con la clasificación de los productos empleados en finanzas estructuradas.

1.3. Derivados de crédito

En un contrato de derivado de crédito hay dos elementos indispensables, el primero es la entidad de referencia. Dicha entidad puede ser una empresa, un contrato riesgoso (bonos, préstamos, etc.), un portafolio de contratos riesgosos y en algunos casos se tiene un conjunto de entidades del tipo de las mencionadas, en todos los casos deben ser especificadas y definidas en el contrato. El segundo elemento indispensable es el evento de crédito, un evento de crédito es cualquier evento que cause una disminución en la calidad crediticia de la entidad de referencia o bien imposibilite o deteriore la capacidad para cumplir con sus obligaciones, notemos que podemos tomar los instrumentos financieros emitidos por un agente como parte de sus obligaciones.

De acuerdo a la Asociación Internacional de Swaps y Derivados (ISDA, por sus siglas en inglés) los eventos de crédito quedan definidos en los siguientes seis puntos.

- Bancarrota. En este evento se cuenta también la insolvencia de la entidad de referencia y retiro del mercado por razones administrativas y/o judiciales.
- Fallo en el pago. Se incluyen fallos en el pago tanto de intereses como principal, generalmente se fija un umbral y si el fallo excede dicho umbral se confirma el evento de crédito, si ningún umbral es definido la ISDA ha determinado que dicho umbral sea 1 millón.
- Adelanto de la obligación. Al igual que en fallo de pago, se define un umbral que si es excedido se considera como un evento de crédito, si el umbral no es especificado, la ISDA determina que es 10 millones.
- Incumplimiento de obligación. Incluye el incumplimiento total de algún pago de las obligaciones por parte de la entidad de referencia.
- Negación y rezago. Incluye la negación de las obligaciones o al menos una por parte de la entidad de referencia, así como declaración de moratoria en alguna de las mismas.
- Reestructuración. Cubre cualquier arreglo por parte de la entidad de referencia de sus obligaciones que cause una situación adversa en su confianza crediticia.

Cabe mencionar que estos puntos son excluyentes y en caso de que exista más de un evento, se tomará el primero que suceda como el evento de crédito, por ejemplo, si ocurre adelanto de obligación y esto causa incumplimiento de obligación, se tomará como que el adelanto de la obligación es el evento de crédito.

Los derivados de crédito se pueden dividir en dos grupos por su tipo de liquidación: en efectivo y liquidación física. En los derivados con liquidación en efectivo se intercambian primas periódicas por dinero en efectivo en caso de un evento de crédito, mientras que en el segundo esquema se pagan las primas periódicas y en caso de un evento de crédito se intercambian los pagos faltantes por los títulos de las obligaciones de referencia, que pueden ser bonos o préstamos. Ahora vamos a dar una descripción rápida sobre los principales derivados de crédito en el mercado.

Swap de incumplimiento de crédito

El swap de incumplimiento de crédito es también conocido como CDS por sus siglas en inglés (Credit Default Swap). Este tipo de derivados están generalmente referenciados a algún bono, el cual es conocido como la obligación de referencia y la entidad de referencia es el emisor del bono. En CDS existe un comprador y un vendedor, el comprador acepta pagar una prima periódica a cambio de protección sobre el bono riesgoso, en caso de un evento de crédito el comprador deja de pagar la prima y el vendedor le hace una remuneración en efectivo, que generalmente son los pagos incumplidos por la entidad de referencia. Si al finalizar el plazo estipulado no ocurre ningún evento de crédito, el vendedor se queda con las primas cobradas. Si el derivado es de liquidación física el comprador debe ceder el bono al vendedor en caso de un evento de crédito.

Para ejemplificar el funcionamiento de este instrumento financiero consideremos un bono en tiempo discreto con valor nominal K y denotemos por τ el tiempo en que sucede un evento de crédito. Sea T el tiempo de maduración, entonces si $\{\tau < T\}$ el total de primas pagadas es

$$P_0(\tau) = p_1(\tau)e^{-r1} + p_2(\tau)e^{-r2} + \dots p_\tau(\tau)e^{-r\tau} = \sum_{i=1}^{\tau} p_i(\tau)e^{-ri},$$

por otro lado, suponiendo que la tasa cupón es c , el total de incumplimiento después de τ será

$$I_0(\tau) = \sum_{i=\tau}^T Kce^{-ri} + Ke^{-rT},$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo. La función de pérdida del vendedor de un swap de incumplimiento de crédito queda determinada por

$$I_0(\tau) - P_0(\tau).$$

Una variación del CDS es el swap de incumplimiento de crédito basado en índices, el cual toma como entidades de referencia un conjunto de empresas que estén consideradas en algún índice financiero, como el Índice de Precios y Cotizaciones calculado por la Bolsa Mexicana de Valores. En este instrumento se cubren los eventos de crédito incurridos por todas las empresas que forman el índice hasta la fecha de maduración, con la única diferencia que cuando ocurra un evento de crédito a alguna empresa, el comprador seguirá pagando una prima por la cobertura del riesgo de las empresas restantes, la cual es más baja. En caso de un segundo evento de crédito, el vendedor pagará los incumplimientos y el comprador seguirá pagando una prima aún más baja y así sucesivamente.

En general, aquellos swaps de incumplimiento en los que existen varias entidades de referencia se denominan swap de incumplimiento canasta, aquí pueden estar diseñados bajo varios mecanismos, ya sea pagar únicamente el primer incumplimiento, o pagar todos los incumplimientos cuando sueda el último, o bien pagar los incumplimientos como sucedan mientras no rebasen un límite máximo de pago.

En la valuación de derivados de crédito la variable crucial es el tiempo de incumplimiento τ , en la actualidad se hacen grandes esfuerzos para modelar dicha variable. Las calificadoras de crédito juegan un papel de gran importancia en la valuación ya que su juicio influye de manera directa en el cálculo de las probabilidades de incumplimiento. Dicha modelación se puede complicar mientras aumenta el número de entidades de referencia debido a las correlaciones que puede haber entre los incumplimientos.

Notas Referencias de Crédito

El funcionamiento de una nota referenciada de crédito es similar al de un bono cuponado, en el que la tasa cupón está determinada en función de la realización de un evento de crédito. Existe una amplia variedad de instrumentos de este tipo, por ejemplo podría tener una sola entidad de referencia o bien podría ser un conjunto de entidades de referencia. Por otro lado, la obligación de referencia podría ser un préstamo, un bono, o bien un conjunto de obligaciones, como la

cartera de crédito de un banco. En términos prácticos, el comprador es también comprador del riesgo y quien emite la nota es el vendedor del riesgo, ya que cuando suceda un evento de crédito la tasa cupón tiende a bajar o bien terminar.

La motivación para la existencia de este tipo de productos en el mercado va en dos direcciones. En primer lugar por el emisor, el cual es generalmente un banco, quien quiere cubrirse del riesgo que le generan sus carteras de crédito e inversiones riesgosas y por el otro lado los inversionistas que compran estas notas ya que generalmente ofrecen un posible rendimiento mayor al de los bonos no riesgosos.

Al igual que un swap de incumplimiento de crédito se tiene liquidación en efectivo y liquidación física. En la liquidación en efectivo, bajo un evento de crédito el emisor paga el valor nominal menos una tasa de recuperación o bien termina el pago de los cupones, mientras que bajo el segundo esquema de liquidación el vendedor adicionalmente entrega la obligación de referencia al comprador en caso de evento de crédito. En este sentido podemos ver que las notas referenciadas por crédito y los CDS son contrapartes, ya que en el primer instrumento el emisor vende su riesgo a los inversionistas mientras que en el segundo el emisor vende cobertura de dicho riesgo a los inversionistas.

Para ejemplificar el funcionamiento de una nota referenciada de crédito consideremos un valor nominal K , una tasa cupón constante c_0 sin evento de crédito y una tasa cupón c_1 en caso de evento de crédito. Consideremos también T como el tiempo de maduración y una tasa de recuperación j , si $\{\tau < T\}$ el pago por parte del emisor será

$$\sum_{i=1}^{\tau} K c_0 e^{-ri} + \sum_{i=\tau+1}^T K c_1 e^{-ri} + e^{-rT} K (1 - j).$$

Donde r es la tasa libre de riesgo. Más adelante ejemplificaremos el uso de estos productos financieros, en donde podremos ver tanto la estrategia de cobertura de riesgo como el papel que juegan los inversionistas en el mercado de los derivados de crédito.

1.4. Notas estructuradas

Las notas estructuradas son productos ad hoc, los cuales son negociados directamente entre el cliente y el emisor, quien generalmente es un banco. Peng & Dattatreya (1995) describen tres pasos en la creación de una nota estructurada:

1. Etapa conceptual. Aquí el banquero comprende las motivaciones del cliente para participar en el mercado de las notas estructuradas.
2. Proceso de identificación. El banquero identifica el componente subyacente, para esto se determinan entre otras cosas las siguientes características: nacionalidad, riesgo-retorno, madurez, calificación de crédito.
3. Etapa de Construcción. Finalmente, el emisor reúne datos del mercado y la información de emisión. Básicamente se determinan los costos de financiamiento, de emisión y la estructura de capital y cupón.

Para comprender el funcionamiento de las notas estructuradas, podríamos decir que tienen un flujo de efectivo similar al de un bono, es decir, el cliente hace un pago inicial mientras que el emisor paga cupones periódicos y se tiene un valor nominal que se liquida al tiempo de maduración. En una nota estructurada estos elementos son variables: la tasa cupón puede variar con el tiempo, la liquidación del valor nominal puede ser adelantada o bien retrasada, el valor nominal podría tener el mecanismo de una opción. De esta manera partimos de instrumentos tradicionales (como los bonos) para construir instrumentos con un perfil sumamente flexible. Para aterrizar esta idea, mencionaremos algunos ejemplos de notas estructuradas.

Nota referenciada a tasa de interés y flotadores

Se toma una tasa de interés de referencia y determinamos los cupones en función de dicha tasa de interés, generalmente es la misma tasa más o menos un margen. Si denotamos por c la tasa cupón un ejemplo podría ser

$$c = i + k,$$

donde i es la tasa de interés de referencia y k es un margen positivo.

Un flotador incluye un factor que multiplica a la tasa de interés de referencia, llamémoslo L , cuando $L > 1$ se dice que es un flotador apalancado y cuando $L < 1$ se llama flotador no apalancado. En este tipo de nota la tasa cupón queda determinada por

$$c = Li + k.$$

Existe también la posibilidad que la dinámica de la tasa cupón sea inversa a la tasa de interés referenciada, este caso se denomina flotador inverso y se tiene la siguiente expresión

$$c = k - Li.$$

Notas tipo escalera y rango

En instrumentos de este tipo se cuenta con distintos escenarios, bajo los cuales podrá ir cambiando la tasa cupón a lo largo del tiempo. Básicamente formamos un conjunto de intervalos para la tasa de interés de referencia, llamémoslos A_1, A_2, \dots, A_n , tales que $\cup_{i=1}^n A_i = [0, 1]$ y $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$. Entonces la tasa cupón en el t -ésimo periodo queda determinada por

$$c_t = \sum_{j=1}^n k_j I_{\{i_t \in A_j\}}.$$

Donde $\{k_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ son tasas de interés predeterminadas para cada uno de los escenarios A_j .

Por otro lado, en las notas rango la tasa cupón es igual a la tasa de referencia, mientras esta se encuentre dentro de un margen determinado. Cuando la tasa de referencia sale de dicho margen, la tasa cupón se hace cero. Podemos ver que este instrumento está diseñado para reducir los costos ya que solo se obtendrán rendimientos bajo ciertos escenarios, sin embargo también es más riesgoso. Definamos el rango como un conjunto A , entonces la tasa cupón en el t -ésimo periodo será

$$c_t = i_t I_{\{i_t \in A\}}.$$

El conjunto A es generalmente un intervalo en el cual el cliente tiene la idea que la tasa subyacente podría estar al final del periodo, más aún, dicho conjunto puede cambiar a lo largo del tiempo de acuerdo a las expectativas del cliente. Así A_j será el conjunto rango en el j -ésimo periodo y así mismo la tasa cupó será

$$c_j = i_j I_{\{i_j \in A_j\}}.$$

Nota referenciada a índice o acción

Como su nombre lo indica, en una nota referenciada a índice o acción el bien subyacente puede ser un índice bursátil o una acción cotizada en la bolsa de valores. En cada periodo hasta la fecha de maduración se calcula el rendimiento que tuvo el bien subyacente y la nota paga dicho rendimiento. El mínimo rendimiento es cero, esto quiere decir que si el desempeño del bien subyacente durante un periodo arroja pérdidas, la tasa cupón será cero en ese periodo, entonces la tasa cupón en el t -ésimo periodo queda determinada por

$$c_t = \max(0, i_t + k), \quad (1.4.1)$$

donde i_t es el rendimiento del bien subyacente durante el periodo t y k es un margen, el cual también puede ser negativo. Este instrumento tiene la bondad de obtener el rendimiento del bien subyacente sin ser partícipe de sus pérdidas. En la vida real notas de este tipo son generalmente emitidas por empresas del sector privado para atraer inversionistas con un perfil más riesgoso. Como veremos en la sección siguiente el emisor puede hacer un contrato de swap al mismo tiempo que emite las notas y de esta manera tener una deuda en tasa fija, debido a que no hay ningún contrato que avale dicha deuda en tasa fija se dice que es una estructura sintética.

Al igual que en las secciones anteriores, cabe resaltar que todos los instrumentos aquí descritos tienen algunas extensiones así como casos particulares, de los cuales no hablaremos en este trabajo debido a las limitaciones de tiempo. Por el momento hemos dado una perspectiva general de los productos usados en el contexto de finanzas estructuradas, sin embargo aún no presentamos ningún ejemplo de sus aplicaciones. Es importante plantear algunos ejemplos para poder resaltar la importancia que tienen los productos estructurados en la actualidad, por lo que de manera breve veremos algunos de estos casos.

1.5. Uso de de los productos estructurados

En esta sección haremos mención de los principales esquemas de cobertura de riesgo en los que se usan los productos estructurados en la actualidad. Es importante resaltar que no hemos presentado una definición muy general de los productos estructurados, por ejemplo la mayoría de las definiciones sobre productos estructurados no hacen mención sobre derivados de crédito, sin embargo, en el contexto en el que estamos trabajando es interesante considerarlos ya que representan una oportunidad de aplicación de la simulación Monte Carlo. Cabe mencionar también que el objetivo es presentar sólo una introducción rápida con el objeto de resaltar la importancia de los productos estructurados haciendo mención de su uso real, mas no ahondaremos mucho en el análisis financiero.

Comenzamos con un ejemplo sencillo sobre el uso de un swap de tasa de interés, como hemos mencionado anteriormente este instrumento intercambia una tasa de interés fija por una variable. Consideremos las empresas X y Y, las cuales están buscando financiamiento de 1 millón de pesos. X tiene una mejor calificación crediticia que Y y supongamos que X emite bonos con una tasa fija del 6% por su calificación crediticia, mientras que Y pide un préstamo al banco con una tasa variable que es LIBOR + 2%. Ambas empresas entran en un swap en el que existe un intermediario. X intercambia una tasa variable LIBOR por una tasa fija del 6.2%, mientras que Y paga una tasa fija de 6.45% y recibe una tasa variable LIBOR. Para ambas empresas el total de intereses pagados es como sigue

$$\text{Total de intereses pagados} = \text{Interés pagado en deuda} + \text{interés recibido en swap} - \text{interés pagado en swap}.$$

Para la empresa X se tiene

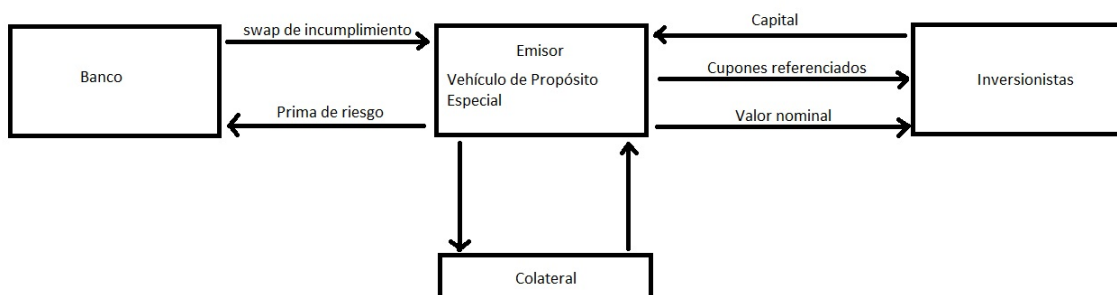
$$\text{Total de intereses} = 6\% + \text{LIBOR} - 6.2\% = \text{LIBOR} - 2\%$$

Mientras que para la empresa Y los intereses pagados son

$$\text{Total de intereses} = \text{LIBOR} + 2\% + 6.45\% - \text{LIBOR} = 8.45\%$$

Suponiendo que por su calificación crediticia la empresa Y le corresponda una tasa de interés fija de 10% en el mercado y a la empresa X una tasa variable de LIBOR + 0.3%, ambas empresas habrán mejorado sus costos de interés por medio de un swap, además de que Y se ha cubierto del riesgo de la alza en la tasa LIBOR. Si observamos un poco más este ejemplo nos daremos cuenta que la empresa X ha creado un bono sintético con una tasa LIBOR - 2%, el cual no se emite al mercado, pero en términos reales es lo que está pagando, análogamente Y está endeudada con un bono sintético con una tasa de 8.45%.

Otro ejemplo típico de finanzas estructuradas es la creación de una nota referenciada de crédito, usualmente estos instrumentos son emitidos por una empresa creada especialmente para administrar los riesgos implícitos en las transacciones, la cual es denominada Vehículo de Propósito Especial (VPE). El VPE emite notas referenciadas de crédito al mercado, por las cuales recibe una capital. Para ofrecer un mejor rendimiento a los inversionistas el VPE compra una swap de incumplimiento de crédito, el cual actuará en caso de un evento de crédito por lo que podríamos decir que el VPE tiene una postura neutral frente al riesgo de crédito, ya que está comprando cobertura de riesgo tanto a los inversionistas como al emisor del swap de incumplimiento de crédito. El capital recibido por el VPE es invertido en un fondo denominado colateral. Podemos ilustrar estas transacciones en el siguiente esquema.



Esta es una de las estructuras más sencillas en el mercado de derivados de crédito. Cuando tenemos una estructura más complicada que incluye un portafolio completo de obligaciones de referencia, un VPE y la emisión de bonos con varias calificaciones de crédito, los bonos emitidos llevan el nombre de Obligaciones de Deuda Colateral (ODC). Existe una gama bastante amplia de instrumentos de este tipo en el mercado, por ejemplo, cuando las obligaciones subyacentes son bonos se denomina Obligaciones de Bono Colateral (OBC), cuando es un portafolio de hipotecas se llaman Valores Respaldados por Hipotecas Residenciales ó Comerciales, cuando el portafolio subyacente son préstamos bancarios se denominan Obligaciones de Préstamo Colateral (OPC). En general, las obligaciones subyacentes pueden ser prestamos, bonos, e incluso otros activos en el mercado.

Por la naturaleza de la exposición al riesgo las ODC se dividen en dos grupos: en efectivo y sintéticas. Las obligaciones en efectivo son aquellas en las que el portafolio colateral está formado directamente por las obligaciones de referencia ya sea total o parcialmente, por otro lado, las sintéticas no tienen una exposición del riesgo directa a las obligaciones de referencia, sin embargo dicha exposición es transferida por instrumentos derivados, generalmente derivados de crédito.

En general, el funcionamiento de las ODC puede verse bien expresado en la figura (1.1). La motivación para la creación de este tipo de instrumentos es generalmente la cobertura de riesgo por parte del originador del riesgo, para lo cual en términos contables dicho originador se libera de los riesgos de las obligaciones subyacentes en su hoja de balance, en este caso las ODC son denominadas de hoja de balance. Otra motivación importante es la posible ventaja que puede obtener el VPE de las inversiones en el portafolio colateral y el costo de las obligaciones emitidas, así como los honorarios obtenidos por la administración de los riesgos, en este caso la ODC es denominada de arbitraje. En ambos casos, se trata de obligaciones en efectivo.

Hemos mostrado algunos ejemplos de posturas financieras que incluyen instrumentos estructurados, sin embargo por la amplia variedad de dichos productos financieros no podemos abarcar todos los casos en este trabajo. En el siguiente capítulo usaremos las técnicas de simulación Monte Carlo del Capítulo 3 para la valuación de algunos de los instrumentos descritos en este capítulo. Usaremos los modelos descritos en el segundo capítulo para explicar la dinámica del bien subyacente.

Capítulo 2

Modelos financieros y volatilidad estocástica

El principal objetivo de esta sección es estudiar los modelos que usaremos en secciones posteriores. Las herramientas que mostraremos serán de gran utilidad tanto en la simulación como en la modelación de activos riesgosos, tales como precios de activos cotizados y tasas de interés. Enfocaremos nuestra atención en estudiar modelos de varianza estocástica, los cuales tienen una alta relación con mercados incompletos. Comenzaremos estudiando el proceso cuadrático de Bessel, el cual no servirá en la construcción de los modelos CIR y Heston, modelo que se usará ampliamente en secciones posteriores. En la parte final del capítulo mostraremos un panorama general sobre los modelos usuales en riesgo de crédito. Adicionalmente incluimos un apartado de introducción a los cambios de medida en modelos de volatilidad estocástica, que es de gran ayuda para encontrar medidas de riesgo neutral para la valuación de activos contingentes.

2.1. El proceso cuadrático de Bessel

Dado $(W_t)_{t \geq 0} = (W_{1,t}, W_{2,t}, \dots, W_{n,t})_{t \geq 0}$ un movimiento browniano n -dimensional, definimos el proceso cuadrático de Bessel de la siguiente manera

$$R_t = \sum_{i=1}^n W_{i,t}^2.$$

Es decir, la norma del vector W al tiempo t . Se puede mostrar que el proceso $(R_t)_{t \geq 0}$ satisface la ecuación diferencial estocástica dada por

$$dR_t = n dt + 2\sqrt{R_t} dW_t,$$

donde $W = (W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano en \mathbb{R} . El proceso cuadrático de Bessel cumple la propiedad de ser un proceso de Markov y, más aún, podemos generalizar su definición, como aquel proceso que cumple la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \lambda dt + \nu \sqrt{X_t} dW_t, \tag{2.1.1}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$. En adelante nos referiremos a este modelo como proceso de Bessel. La función de densidad de transición de este proceso está dada por

$$p^B(t; x, y) := \frac{\mathbb{P}(X_t \in dy \mid X_0 = x)}{dy} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\eta}{2}} \frac{e^{-2(x+y)/\nu^2 t}}{\nu^2 t/2} I_\eta\left(\frac{4\sqrt{xy}}{\nu^2 t}\right) \quad (2.1.2)$$

donde $\eta = 2\lambda/\nu^2 - 1$ y la función $I_\eta(x)$ es la función de Bessel modificada de primer tipo y está dada por

$$I_\eta(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\eta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n + \eta + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Debido a que $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov, podemos encontrar la probabilidad de transición del puente de Bessel de la siguiente manera

$$\begin{aligned} b^B(t_1, t_2, t; x_1, x_2, x) &:= \mathbb{P}(X_t \in dx \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2) \\ &= \frac{p^B(t - t_1; x_1, x) p^B(t_2 - t; x, x_2)}{p^B(t_2 - t_1; x_1, x_2)} \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo la ecuación (2.1.2), se obtiene que la densidad del puente de Bessel con punto inicial $X_0 = x$ y punto final $X_T = z$ está dada por

$$b^B(0, T, t; x, z, y) = \frac{T}{2\nu^2 t(T-t)} e^{-\frac{2}{\nu^2}(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})} \frac{I_\eta(4\sqrt{xy}/\nu^2 t) I_\eta(4\sqrt{yz}/\nu^2 (T-t))}{I_\eta(4\sqrt{xz}/\nu^2 T)}, \quad (2.1.3)$$

donde: $\bar{x} = \frac{x(T-t)}{Tt}$, $\bar{y} = \frac{yT}{t(T-t)}$ y $\bar{z} = \frac{zt}{T(T-t)}$.

El proceso cuadrático de Bessel es importante en el marco de trabajo de esta tesis, como podremos ver en las siguientes secciones.

2.2. El modelo de Heston

Heston (1993) propuso la siguiente dinámica bajo la medida objetiva de probabilidad \mathbb{P} , para modelar el precio de un activo riesgoso $S = (S_t)_{t \geq 0}$:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t. \quad (2.2.1)$$

El proceso $V = (v_t)_{t \geq 0}$ representa la volatilidad del activo, la cual a su vez satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$d\sqrt{v_t} = -\beta \sqrt{v_t} dt + \delta dB_t. \quad (2.2.2)$$

En el sistema de ecuaciones anterior, $W = (W_t)_{t \geq 0}$ y $B = (B_t)_{t \geq 0}$ son movimientos brownianos correlacionados, con coeficiente de correlación constante ρ , los parámetros β y δ son constantes positivas y $\mu \in \mathbb{R}$.

Definiendo $X_t = \sqrt{v_t}$, es decir, $v_t = X_t^2 = f(X_t)$, tenemos que X_t satisface

$$dX_t = -\beta X_t dt + \delta dB_t,$$

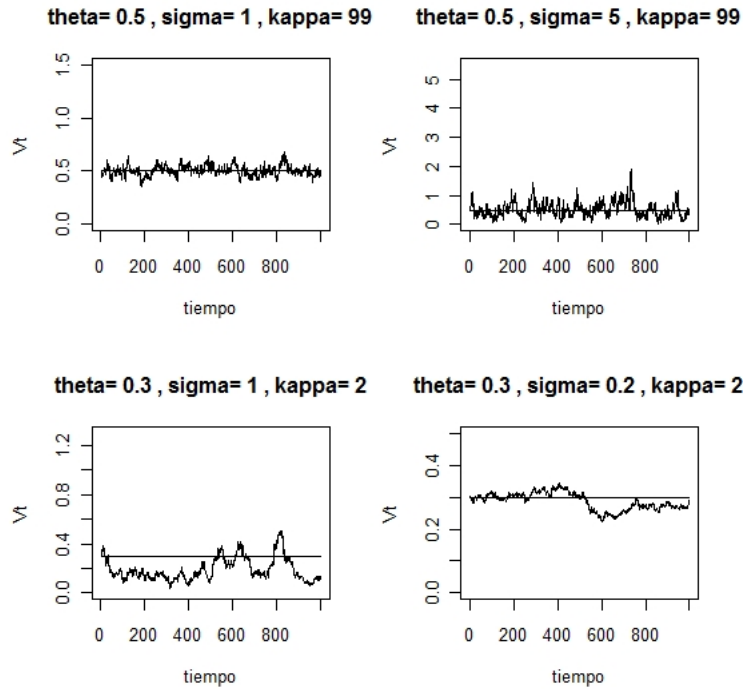


Figura 2.2.1: Proceso CIR

y usando la fórmula de Ito, tenemos que

$$\begin{aligned}
 dv_t &= df(X_t) = 2X_t dX_t + \frac{1}{2}(2)\delta^2 dt \\
 &= 2\sqrt{v_t}(-\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dB_t) + \delta^2 dt \\
 &= (\delta^2 - 2\beta v_t) dt + 2\delta\sqrt{v_t}dB_t.
 \end{aligned}$$

Reparametrizando adecuadamente la última expresión obtenemos

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t}dB_t. \quad (2.2.3)$$

La dinámica que sigue la volatilidad en el modelo de Heston es mejor conocida en el medio financiero como proceso CIR (Cox, Ingersoll & Ross, 1985), e inicialmente fué propuesto para modelar tasas de interés. Cabe mencionar que con anterioridad este modelo fué conocido como modelo de Feller. La parametrización que se presenta tiene una interpretación muy práctica. El proceso v oscila alrededor de un valor θ a lo largo del tiempo y la velocidad a la que regresa está fuertemente relacionada con κ , de manera que mientras crece dicho parámetro, el proceso regresa en un tiempo más corto. El parámetro σ representa una especie de volatilidad del proceso. Estas propiedades se observan en las figuras siguientes de simulaciones que indican los parámetros usados.

Cox, Ingersoll & Ross (1985) mostraron que existe una única solución de la ecuación (2.2.3)

tal que $v_t \geq 0 \forall t \geq 0$ y los procesos

$$\int_0^t \sqrt{v_s} dB_s, \int_0^t v_s^{3/2} dB_s$$

son martingalas.

Obtenemos la esperanza de v_t : para algún t fijo, primero escribimos (2.2.3) en su forma integral

$$v_t = v_0 + \kappa \int_0^t (\theta - v_s) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{v_s} dB_s.$$

Tomando esperanza de ambos lados, y dado que el último sumando es una martingala, se sigue que

$$E[v_t] = v_0 + \kappa \int_0^t (\theta - E[v_s]) ds.$$

Resolviendo la ecuación integral concluimos que

$$E[v_t] = \theta + e^{-\kappa t} (v_0 - \theta).$$

Haciendo un procedimiento análogo podemos encontrar el segundo momento de la variable v_t , para $t > 0$,

$$E v_t^2 = v_0^2 e^{-2\kappa t} + (\sigma^2 + 2\kappa\theta) \left(\frac{\theta}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) + \frac{v_0 - \theta}{\kappa} (e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) \right),$$

lo cual nos permite encontrar la varianza de v_t

$$Var[v_t] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (\theta (1 - e^{-2\kappa t}) + 2v_0 (e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t})), \quad t \geq 0.$$

El modelo CIR tiene varias propiedades interesantes. Para nuestros propósitos necesitamos determinar qué condiciones sobre el proceso nos aseguran una volatilidad no negativa, es decir $v_t \geq 0$ c.s. Para esto, definimos $\tau_\varepsilon := \inf \{t \geq 0 : v_t = \varepsilon\}$ y $\tau_{\varepsilon, \varepsilon'} := \tau_\varepsilon \wedge \tau_{\varepsilon'}$, y presetamos el siguiente resultado

Lema 2.1. *Dado $v_0 > 0$, entonces:*

- $\sigma^2 \leq 2\kappa\theta \Leftrightarrow P(\tau_0 < \infty) = 0$
- $\sigma^2 > 2\kappa\theta \Leftrightarrow P(\tau_0 < \infty) = 1$

Demostración. Antes de comenzar recordemos algunas propiedades sobre el generador de un proceso de Markov. Sea $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Markov de la forma

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t,$$

donde W es un movimiento browniano. Entonces, el generador de X está definido por el siguiente operador diferencial L

$$Lg(t, x) = (Lg)(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}g(t, x) + a(t, x)\frac{\partial}{\partial x}g(t, x) + b(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(t, x). \quad (2.2.4)$$

para toda función g doblemente diferenciable en (t, x) . Usando la fórmula de Ito, se tiene que

$$g(t, X_t) - g(0, X_0) - \int_0^t Lg(v, X_v)dv = \int_0^t \frac{\delta}{\delta x}g(v, X_v)b(v, X_v)dW_v. \quad (2.2.5)$$

La solución de la ecuación (2.2.4), al igualarla con cero está sumamente relacionada con la probabilidad de transición, por lo tanto comenzamos por resolver $Lg(t, x) = 0$ para alguna función $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y doblemente diferenciable. Para nuestro proceso $\{v_t\}$, lo que se requiere resolver es la ecuación

$$\frac{\sigma^2}{2}x\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x) + \kappa(\theta - x)\frac{\partial}{\partial x}g(x) = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial está dada por

$$g(x) = \int_1^x e^{2\kappa t/\sigma^2} t^{-2\kappa\theta/\sigma^2} dt, \quad (2.2.6)$$

en el intervalo $(0, \infty)$. Ahora bien, tomando $0 < \varepsilon < v_0 < \varepsilon' < \infty$, y usando la ecuación (2.2.5) se tiene

$$g(v_{\tau_{\varepsilon, \varepsilon'} \wedge t}) = g(v_0) + \sigma \int_0^{\tau_{\varepsilon, \varepsilon'} \wedge t} g'(v_s)\sqrt{v_s}dB_s. \quad (2.2.7)$$

Como el integrando en la ecuación (2.2.7) está acotado, se sigue que $g(v_{\tau_{\varepsilon, \varepsilon'} \wedge t})$ es una martingala. Adicionalmente, notemos que por construcción $v_{\tau_{\varepsilon, \varepsilon'} \wedge t} \in [\varepsilon, \varepsilon']$, por lo que es una martingala acotada. Calculando esperanzas de ambos lados se sigue

$$g(v_0) = E [g(v_{\tau_{\varepsilon, \varepsilon'} \wedge t})] = g(\varepsilon)P(\tau_{\varepsilon} < \tau_{\varepsilon'}) + g(\varepsilon')(1 - P(\tau_{\varepsilon} < \tau_{\varepsilon'})),$$

de donde

$$P(\tau_{\varepsilon} < \tau_{\varepsilon'}) = \frac{g(\varepsilon') - g(v_0)}{g(\varepsilon') - g(\varepsilon)}. \quad (2.2.8)$$

Tomando límites adecuados en (2.2.8) podremos encontrar el resultado. Primero, asumimos $\sigma^2 \leq 2\kappa\theta$ y hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$; en (2.2.6) observamos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\varepsilon) = -\infty$, se sigue

$$P(\tau_0 < \tau_{\varepsilon'}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\tau_{\varepsilon} < \tau_{\varepsilon'}) = 0 \quad \forall \varepsilon' > 0.$$

Hacemos $\varepsilon' \rightarrow \infty$ y obtenemos que $P(\tau_0 < \infty) = 0$. Finalmente, asumimos $\sigma^2 > 2\kappa\theta$. Se puede demostrar que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\varepsilon) > -\infty$; y ahora basta notar que $g(\infty) = \infty$. Entonces haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ y luego $\varepsilon' \rightarrow \infty$, se sigue

$$P(\tau_0 < \tau_{\varepsilon'}) = \lim_{\varepsilon' \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\tau_\varepsilon < \tau_{\varepsilon'}) = \lim_{\varepsilon' \rightarrow \infty} \frac{g(\varepsilon') - g(v_0)}{g(\varepsilon') - g(\varepsilon)} = 1.$$

□

Consideremos ahora un proceso CIR v_t^1 definido de la siguiente manera,

$$dv_t^1 = \kappa(\theta^1 - v_t^1) dt + \sigma\sqrt{v_t^1} dB_t^\perp,$$

donde $\kappa, \sigma, \theta^1 > 0$ y $B^\perp = (B_t^\perp)_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano independiente de B . El siguiente resultado nos asegura que la clase de procesos CIR con parámetros comunes κ, σ son cerrados bajo convoluciones.

Lema 2.2. *El proceso definido por $u_t = v_t + v_t^1$ es un proceso CIR con la siguiente dinámica*

$$du_t = \kappa((\theta + \theta^1) - u_t) dt + \sigma\sqrt{u_t} dZ_t$$

donde $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano estándar.

Demostración Primero escribimos la dinámica del proceso $U = (u_t)_{t \geq 0}$ en términos de los otros dos procesos

$$\begin{aligned} du_t &= dv_t + dv_t^1 \\ &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t} dB_t + \kappa(\theta^1 - v_t^1) dt + \sigma\sqrt{v_t^1} dB_t^\perp \\ &= \kappa((\theta + \theta^1) - (v_t + v_t^1)) dt + \sigma\left(\sqrt{v_t} dB_t + \sqrt{v_t^1} dB_t^\perp\right) \\ &= \kappa((\theta + \theta^1) - (u_t)) dt + \sigma\sqrt{u_t} \frac{\left(\sqrt{v_t} dB_t + \sqrt{v_t^1} dB_t^\perp\right)}{\sqrt{u_t}} \end{aligned}$$

Para obtener el resultado basta mostrar que el proceso definido por $dZ_t = \frac{(\sqrt{v_t} dB_t + \sqrt{v_t^1} dB_t^\perp)}{\sqrt{u_t}}$ es un movimiento browniano. Expresamos Z_t en su forma integral

$$Z_t = \int_0^t \frac{\sqrt{v_t}}{\sqrt{u_t}} dB_t + \int_0^t \frac{\sqrt{v_t^1}}{\sqrt{u_t}} dB_t^\perp.$$

El teorema de Lévy nos garantiza que $(Z_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano si $(Z_t^2 - t)_{t \geq 0}$ es una

martingala local. De esta última representación obtengamos

$$\begin{aligned}
 Z_t^2 - t &= \left(\int_0^t \frac{\sqrt{v_t}}{\sqrt{u_t}} dB_t + \int_0^t \frac{\sqrt{v_t^1}}{\sqrt{u_t}} dB_t^\perp \right)^2 - t \\
 &= \left(\int_0^t \frac{\sqrt{v_t}}{\sqrt{u_t}} dB_t \right)^2 + \left(\int_0^t \frac{\sqrt{v_t^1}}{\sqrt{u_t}} dB_t^\perp \right)^2 + 2 \int_0^t \frac{\sqrt{v_t}}{\sqrt{u_t}} dB_t \int_0^t \frac{\sqrt{v_t^1}}{\sqrt{u_t}} dB_t^\perp - \int_0^t \frac{v_t + v_t^1}{u_t} dt \\
 &= \left(\int_0^t \frac{\sqrt{v_t}}{\sqrt{u_t}} dB_t \right)^2 - \int_0^t \frac{v_t}{u_t} dt + \left(\int_0^t \frac{\sqrt{v_t^1}}{\sqrt{u_t}} dB_t^\perp \right)^2 - \int_0^t \frac{v_t^1}{u_t} dt + 2 \int_0^t \frac{\sqrt{v_t}}{\sqrt{u_t}} dB_t \int_0^t \frac{\sqrt{v_t^1}}{\sqrt{u_t}} dB_t^\perp
 \end{aligned}$$

Debido a que $\frac{\sqrt{v_t}}{\sqrt{u_t}}, \frac{\sqrt{v_t^1}}{\sqrt{u_t}} \in L^2$ se tiene que el primer y segundo términos son martingalas locales. Por lo tanto, las integrales del tercer sumando son también martingalas locales. Finalmente, concluimos que $(Z_t^2 - t)_{t \geq 0}$ es una martingala local, lo cual es suficiente para asegurar el resultado. \square

El proceso CIR tiene la siguiente función de densidad de transición

$$p(t; x, y) = C_t e^{\kappa t} \left(\frac{y e^{\kappa t}}{x} \right)^{\frac{\eta}{2}} e^{-C_t(y e^{\kappa t} + x)} I_\eta \left(2C_t \sqrt{xy e^{\kappa t}} \right), \quad (2.2.9)$$

donde $C_t = \frac{\gamma}{e^{\kappa t} - 1}$, $\gamma = \frac{2\kappa}{\sigma^2}$ y $\eta = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1$. Al comparar (2.2.9) con la ecuación (2.1.2) se observa que la densidad de transición del proceso CIR puede ser expresada como la densidad de transición de un proceso de Bessel, con la siguiente reparametrización

$$p(t; x, y) = e^{\kappa t} p^B(S_\kappa(t); x, e^{\kappa t} y), \quad S_\kappa(t) = \frac{e^{\kappa t} - 1}{\kappa}. \quad (2.2.10)$$

Esta relación es muy importante en nuestro trabajo ya que más adelante la usaremos para implementar simulaciones del proceso CIR a partir del proceso de Bessel.

El modelo CIR es ampliamente usado para modelar tasas de interés y el modelo de Heston es usado en el contexto de precios accionarios a índices bursátiles en contextos de volatilidad estocástica. Cabe resaltar que el modelar la volatilidad es un reto, ya que no se tienen observaciones reales de este proceso, en la práctica muchas veces se usa la volatilidad implícita en opciones de distintas fechas de emisión como una aproximación de dicho proceso.

2.3. Cambio de medida en modelos de volatilidad estocástica

Una de las principales características sobre los modelos de volatilidad estocástica es que generan mercados incompletos. Matemáticamente, decimos que un mercado es completo cuando todos los activos contingentes son replicables. El segundo teorema fundamental de finanzas nos establece que el mercado es completo si y solo si la medida martingala es única. De una manera

más práctica podemos asegurar que un mercado es incompleto cuando existen más fuentes de riesgo que activos cotizados en el mercado. En este sentido, cuando la volatilidad es estocástica, produce una fuente de riesgo que no es cotizada en el mercado y por lo tanto esto produce un mercado incompleto, se sigue que potencialmente la medida martingala no es única.

Ahora, analicemos cómo podemos hacer cambios de medida en el modelo de Heston. Primero, escribimos las dinámicas del modelo de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t (\rho dB_t + \bar{\rho} dZ_t) \\ dv_t &= \kappa (\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dB_t, \end{aligned}$$

donde Z es un movimiento browniano independiente de B . Ahora definimos un cambio de medida en términos de su derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp\left\{-\int_0^T \gamma_1(u) dB_u - \int_0^T \gamma_2(u) dZ_u - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_1^2(u) du - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_2^2(u) du\right\}$$

Los procesos $(\gamma_i(t), 0 \leq t \leq T, i = 1, 2)$ son llamados procesos de riesgo de mercado con respecto a los movimientos brownianos Z, B . Definamos

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= \lambda \sqrt{v_t} \\ \gamma_2(t) &:= \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} - \lambda \rho \sqrt{v_t} \right), \end{aligned}$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo. Por ahora supongamos que este cambio de medida existe. Entonces, por el Teorema de Girsanov tenemos que los procesos $B^{\mathbb{Q}}, Z^{\mathbb{Q}}$ definidos por

$$\begin{aligned} dB_t^{\mathbb{Q}} &= dB_t + \gamma_1(t) dt = dB_t + \lambda \sqrt{v_t} dt \\ dZ_t^{\mathbb{Q}} &= dZ_t + \gamma_2(t) dt = dZ_t + \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} - \lambda \rho \sqrt{v_t} \right) dt \end{aligned}$$

son \mathbb{Q} -movimientos brownianos independientes. Obtenemos así la dinámica del precio S bajo \mathbb{P} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sqrt{v_t} (\rho dB_t + \bar{\rho} dZ_t) \\ &= \mu dt + \sqrt{v_t} \left(\rho (dB_t^{\mathbb{Q}} - \lambda \sqrt{v_t} dt) + \bar{\rho} \left(dZ_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} - \lambda \rho \sqrt{v_t} \right) dt \right) \right) \\ &= \mu dt + \sqrt{v_t} (\rho dB_t^{\mathbb{Q}} + \bar{\rho} dZ_t^{\mathbb{Q}}) + \sqrt{v_t} \left(\rho \lambda \sqrt{v_t} - \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} - \lambda \rho \sqrt{v_t} \right) dt. \end{aligned}$$

Sea $W^{\mathbb{Q}}$ el \mathbb{Q} -movimiento browniano definido por $dW_t^{\mathbb{Q}} = \rho dB_t^{\mathbb{Q}} + \bar{\rho} dZ_t^{\mathbb{Q}}$. Se sigue

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{Q}} - (\mu - r) dt \\ &= r dt + \sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Con esto podemos asegurar que el proceso de precios descontado es una \mathbb{Q} -martingala. Ahora obtenemos la dinámica de la volatilidad bajo \mathbb{Q}

$$\begin{aligned} dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t}dB_t \\ &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t}(dB_t^{\mathbb{Q}} - \lambda\sqrt{v_t}dt) \\ &= \kappa\theta dt - (\kappa + \lambda\sigma) dt + \sigma\sqrt{v_t}dB_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

Haciendo $\kappa^* = \kappa + \lambda\sigma$ y $\theta^* = \kappa\theta / (\kappa + \lambda\sigma)$ se tiene que

$$dv_t = \kappa^*(\theta^* - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t}dB_t^{\mathbb{Q}}.$$

Ahora vamos a encontrar condiciones sobre λ para que este procedimiento nos defina un cambio de medida. Notemos que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ es una martingala local, por ser una exponencial de Doléans-Dade, por lo que nos interesa mostrar que es una martingala y que $E\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 1$. Debido a que W es independiente de V , tomando esperanza condicional sobre $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ se tiene que

$$E\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = E\left[\exp\left\{-\int_0^T \gamma_1(u)dB_u - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_1^2(u)du\right\}\right]$$

entonces basta probar

$$E\left[\exp\left\{-\int_0^T \gamma_1(u)dB_u - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_1^2(u)du\right\}\right] = 1$$

Para esto nos apoyamos en el siguiente lema, el cual no se demostrará ya que excede los alcances de esta tesis.

Lema 2.3. *Para $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq -\kappa^2/2\sigma^2$ se tiene*

$$E\left[e^{-\alpha v_t - \beta \int_0^t v_u du}\right] < \infty.$$

En particular, notemos que este resultado es válido para $\beta > 0$. Ahora, tomando $|\lambda| \leq \kappa/\sigma$, se tiene que $\lambda^2/2 \geq -\kappa^2/2\sigma^2$, y haciendo $\alpha = 0$ en el Lema anterior se sigue

$$E\left[e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2 v_u du}\right] < \infty$$

Por la condición de Novikov, el proceso $\left(\exp\left\{-\int_0^t \lambda\sqrt{v_u}dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2 v_u du\right\}\right)_{0 \leq t \leq T}$ es una \mathbb{P} -martingala con esperanza igual a 1. Más aún, consideremos $\lambda > 0$, haciendo $\beta = \lambda^2/2$ y $\alpha = 0$ se tiene otra vez por el Lema 2.3 y la Condición de Novikov el mismo resultado. Concluimos que el intervalo $-\kappa^2/2\sigma^2 \leq \lambda < \infty$ nos define una medida martingala para el modelo de Heston.

Podemos hacer un planteamiento más general sobre la existencia y la forma de las medidas martingala en modelos de volatilidad estocástica de la siguiente manera, consideramos las siguientes dinámicas bajo la medida objetiva \mathbb{P}

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= V_t(\alpha(t, V_t) dt + dW_t) \\ dV_t &= a(t, V_t) dt + b(t, V_t) dB_t, \end{aligned}$$

donde B, W son movimientos brownianos con coeficiente de correlación constante ρ , de tal manera que si definimos $\bar{\rho} = \sqrt{1 - \rho^2}$ podemos escribir $dB_t = \rho dW_t + \bar{\rho} dZ_t$, donde Z es un movimiento browniano independiente de W . Sea Q el conjunto de las medidas martingala, siguiendo el enfoque de Frey (1997), decimos que $\mathbb{Q} \in Q$ para el proceso de precios S en \mathcal{F}_T si

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = M_T,$$

donde M_T es el valor terminal de la martingala $M = (M_t)_{0 \leq t \leq T}$, de la forma

$$M_t = e^{-\int_0^t [\alpha(s, V_s) dW_s + \frac{1}{2} \alpha^2(s, V_s) ds + \lambda_s dZ_s + \frac{1}{2} \lambda_s^2 ds]},$$

para algún proceso medible $\lambda = (\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$, tal que $\int_0^T \lambda_s^2 ds < \infty$, $\mathbb{P} - c.s.$ Por el teorema de Girsanov se tiene que los procesos $Z^{\mathbb{Q}}$ y $W^{\mathbb{Q}}$ definidos por

$$dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t + \alpha(t, V_t) dt, \quad dZ_t^{\mathbb{Q}} = dZ_t + \lambda_t dt, \quad (2.3.2)$$

son \mathbb{Q} -movimientos brownianos independientes. Sustituyendo (2.3.2) podemos encontrar la dinámica del precio S y la volatilidad V bajo la medida \mathbb{Q}

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= V_t (\alpha(t, V_t) dt + dW_t) \\ &= V_t dW_t^{\mathbb{Q}} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned} dV_t &= a(t, V_t) dt + b(t, V_t) dB_t \\ &= a(t, V_t) dt + b(t, V_t) (\rho dW_t + \bar{\rho} dZ_t) \\ &= a(t, V_t) dt + b(t, V_t) (\rho (dW_t^{\mathbb{Q}} - \alpha(t, V_t) dt) + \bar{\rho} (dZ_t^{\mathbb{Q}} - \lambda_t dt)) \\ &= a(t, V_t) dt - b(t, V_t) (\rho \alpha(t, V_t) dt + \bar{\rho} \lambda_t dt) + b(t, V_t) (\rho dW_t^{\mathbb{Q}} + \bar{\rho} dZ_t^{\mathbb{Q}}) \end{aligned}$$

Ahora, sea $B^{\mathbb{Q}}$ el \mathbb{Q} -movimiento browniano definido por $dB_t^{\mathbb{Q}} = \rho dW_t^{\mathbb{Q}} + \bar{\rho} dZ_t^{\mathbb{Q}}$. Entonces,

$$dV_t = [a(t, V_t) - b(t, V_t) (\rho \alpha(t, V_t) + \bar{\rho} \lambda_t)] dt + b(t, V_t) dB_t^{\mathbb{Q}} \quad (2.3.4)$$

y definiendo $\eta(t, V_t) = a(t, V_t) - b(t, V_t) (\rho \alpha(t, V_t) + \bar{\rho} \lambda_t)$, podemos reescribir

$$dV_t = \eta(t, V_t) dt + b(t, V_t) dB_t^{\mathbb{Q}}.$$

Hasta ahora no podemos aplicar este planteamiento al modelo de Heston, sin embargo definiendo $u_t = \sqrt{v_t}$ y usando la fórmula de Ito podemos expresar el modelo como sigue

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + u_t dW_t = u_t \left(\frac{\mu}{u_t} dt + dW_t \right) \\ du_t &= \frac{\kappa}{2} \left(\frac{m}{u_t} - u_t \right) dt + \frac{\sigma}{2} dB_t, \quad m = \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa}. \end{aligned}$$

Haciendo $\alpha(t, u_t) = \mu/u_t$, $a(t, u_t) = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{m}{u_t} - u_t \right)$, $b(t, u_t) = \frac{\sigma}{2}$ podemos hacer el cambio de medida. Siguiendo la idea de Heston (1993), definimos el proceso $\lambda_t = \lambda u_t / \bar{\rho} \sigma$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$, el cual nos produce un cambio en la deriva de la volatilidad. Sustituyendo en (2.3.3) y (2.3.4) se tienen las siguientes dinámicas bajo \mathbb{Q}

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= V_t dW_t^{\mathbb{Q}} \\ du_t &= \kappa^* \left(\frac{m^*}{u_t} - u_t \right) dt + \frac{\sigma^2}{2} dB_t^{\mathbb{Q}}, \end{aligned}$$

donde $\kappa^* = (\kappa + \lambda) / 2$ y $m^* = (\kappa m - \sigma^2 \mu) / (\kappa + \lambda)$.

Con estos elementos tenemos condiciones necesarias y suficientes para definir un cambio de medida en el modelo de Heston, lo que nos permite encontrar medidas martingala bajo este esquema. Aún así, no hemos especificado con qué criterios se podría decir que una medida martingala es mejor que otra. Este es un tema amplio que ha provocado intensa investigación en la última década, sin embargo no vamos a ahondar en el mismo por la limitada extensión de este trabajo, en el Capítulo 5 ilustraremos una posible solución para este problema.

2.4. Modelos de riesgo de crédito

El estudio del riesgo de crédito se ha popularizado en las últimas décadas, las aplicaciones se han enfocado a la administración de riesgos de bancos y entidades que comercian con derivados “over the counter”. En particular los modelos de riesgo de crédito son ampliamente usados en la valuación de derivados de crédito, por lo que nos ayudará mucho tener una perspectiva general de los modelos usados en la actualidad. La idea principal es el modelar el tiempo en que un agente financiero puede caer en incumplimiento (default) de sus obligaciones crediticias, ya sea una persona, un banco o el gobierno de un país por citar algunos ejemplos, esto con el objetivo de obtener probabilidades de incumplimiento y simular el tiempo de la misma variable.

Vamos a denotar por τ el primer tiempo en el que un agente financiero cae en incumplimiento, y por $p(t)$ la probabilidad de que al tiempo t , el agente no haya incurrido en incumplimiento, es decir $p(t) = P[\tau > t]$, a la cual llamaremos probabilidad de sobrevivencia al tiempo t . En riesgo de crédito es muy recurrente el uso de la probabilidad de incumplimiento condicional a la sobrevivencia en un tiempo determinado; ésta se denomina probabilidad de incumplimiento forward. Primero obtengamos la probabilidad condicional de sobrevivencia

$$p(s | t) := P[\tau > s | \tau > t] = \frac{P[\tau > s, \tau > t]}{P[\tau > t]} = \frac{P[\tau > s]}{P[\tau > t]} = \frac{p(s)}{p(t)}, \quad (2.4.1)$$

donde $0 \leq t < s < \infty$. Entonces, la probabilidad de incumplimiento forward es $1 - p(s | t) = P[t < \tau \leq s | \tau > t]$.

Supongamos que tenemos un bono con tiempo de maduración T y con valor de redención D . El primer modelo que mostraremos es el modelo Black & Scholes, el cual es bastante popular. Se asume que el proceso de precios del agente deudor es $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ y tiene la siguiente dinámica

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\mu - \gamma) dt + \sigma dW_t,$$

donde:

- $\mu \in \mathbb{R}$ es la tasa de rendimiento promedio;
- $\gamma \geq 0$ es la tasa de dividendos promedio;
- $\sigma > 0$ es la volatilidad del activo X ;
- $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano estándar;

En este modelo se asume incumplimiento cuando $\{X_t \leq D\}$, por lo que es útil definir la distancia de incumplimiento como sigue

$$d_t := \frac{\log X_t - \log D}{\sigma},$$

con esto se puede demostrar que la probabilidad de incumplimiento está dada por

$$P[d_T \leq 0 \mid d_t] = \Phi\left(\frac{X_t + m(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right),$$

tal que $m = (\mu - \gamma - \sigma^2/2)/\sigma$ es la deriva del proceso X . En este enfoque consideramos como incumplimiento únicamente el evento de que el precio en la fecha de redención pase por debajo de un nivel fijo. Existen modelos que asumen incumplimiento cuando el precio de las acciones del deudor pasan por debajo de un nivel de confianza aún cuando esto suceda antes de la fecha de redención, los cuales son mejor conocidos como modelos del primer paso. Bajo un modelo de primer paso denotamos por $p(t, T)$ a la probabilidad de sobrevivencia en el intervalo $(t, T]$, es decir

$$p(t, T) := P[X_s > 0, t < s \leq T \mid X_t] = H(X_t, T-t).$$

Black y Cox (1976) obtuvieron de manera explícita la probabilidad de incumplimiento con un umbral D , en este sentido, el umbral no es necesariamente el valor de redención del bono, más bien algún valor que refleje la cercanía del incumplimiento; con la notación del modelo anterior se tiene

$$p(t, T) = H(X_t, T-t),$$

$$H(x, s) = \Phi\left(\frac{x + ms}{\sqrt{s}}\right) - e^{-2mx} \Phi\left(\frac{-x + ms}{\sqrt{s}}\right).$$

El enfoque del primer paso tiene una desventaja en el hecho de que es correcto considerar que el umbral de confianza varía a lo largo del tiempo, sin embargo este supuesto puede generar muchos problemas con los cálculos bajo este modelo.

Ahora supongamos que la probabilidad de sobrevivencia es derivable. Entonces definimos la intensidad de incumplimiento como sigue

$$f(t) := -\frac{\frac{\partial}{\partial t} p(t)}{p(t)}.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se tiene

$$p(t) = e^{-\int_0^t f(u) du}$$

$$p(s | t) = e^{-\int_t^s f(u)du}.$$

Donde $p(s | t)$ está dada por 2.4.1. Existe toda una familia de modelos de riesgo de crédito basados en la intensidad de incumplimiento. El modelo más sencillo es el que asume una intensidad constante $f(t) = \lambda$, en cuyo caso τ se vuelve una variable aleatoria exponencial y tenemos

$$p(t) = e^{-\lambda t}, \quad E[\tau] = 1/\lambda.$$

Consideremos por ahora el caso discreto, en el que $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e intensidad constante a lo largo de cada periodo; si suponemos independencia periodo a periodo se tiene

$$p(t) = e^{-\sum_{i=1}^t \lambda_i}.$$

Hagamos $t = 2$ y consideremos el caso en que conocemos λ_1 pero se tienen dos escenarios al final del primer año (H, L), tales que $P[H] = q$ y $P[L] = 1 - q$. Bajo el escenario H se tendrá una intensidad $\lambda_{2,H}$ durante el segundo año mientras que bajo el segundo escenario se tendrá una intensidad $\lambda_{2,L}$. La ley de la probabilidad total nos permite hacer el siguiente cálculo

$$p(2) = P[\tau \geq 2] = P[\tau \geq 2 | H] P[H] + P[\tau \geq 2 | L] P[L].$$

Como las intensidades son constantes por cada periodo se sigue

$$p(t) = e^{-\lambda_1} (e^{-\lambda_{2,H}} p + e^{-\lambda_{2,L}} (1 - p))$$

De una manera más general, podemos plantear que si a su vez $\{\lambda_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso estocástico continuo se tiene

$$\begin{aligned} p(t) &= E \left[P[\tau > t | \{\lambda_s\}_{0 \leq s \leq t}] \right] \\ &= E \left[e^{-\int_0^t \lambda_u du} \right]. \end{aligned}$$

Con este planteamiento también podemos demostrar

$$p(t, s) = E \left[e^{-\int_t^s \lambda_u du} | \{\lambda_s\}_{0 \leq s \leq t} \right].$$

Existen varios modelos para explicar la dinámica de $\{\lambda_t\}$. Dos de los principales son los siguientes

$$d\lambda_t = \kappa (\theta - \lambda_t) dt + \sigma^2 \sqrt{\lambda_t} dW_t \quad (2.4.2)$$

$$d\lambda_t = \kappa (\theta - \lambda_t) dt + dZ_t. \quad (2.4.3)$$

Aquí, $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano estándar, mientras que en (2.4.3) $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de salto puro. En ambos casos se trata de un proceso que es atraído hacia el parámetro θ y la velocidad de retorno está en función de κ . El primer proceso es mejor conocido en el medio financiero como proceso CIR y es el mismo que hemos venido estudiando con anterioridad. La siguiente gráfica ilustra el posible comportamiento de la trayectoria de $\{\lambda_t\}$ bajo (2.4.3).

Otra familia importante de modelos de riesgo de crédito son los propuestos por Heat, Jarrow & Merton, los cuales se basan en que las probabilidades de incumplimiento son gobernadas

por una tasa de incumplimiento “forward”. En este sentido, se asume que la probabilidad de incumplimiento forward puede ser expresada de la siguiente manera

$$p(t, s) = e^{-\int_t^s f(t, u) du},$$

donde f tiene la dinámica

$$df(t, s) = \mu(t, s) ds + \sigma(t, s) dW_t.$$

Hasta ahora solo hemos propuesto modelos basados en la intensidad de incumplimiento, sin embargo esta intensidad puede variar de acuerdo a la calificación de cada agente económico y, más aún, la calificación de crédito suele cambiar a lo largo del tiempo para un mismo deudor. En este sentido es común modelar la calificación como una cadena de Markov. Definiendo el proceso $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$ como la calificación de crédito de un deudor a lo largo del tiempo y sea $K = \{1, 2, \dots, n\}$ el espacio de estados, en el cual cada estado representa una calificación crediticia distinta, entonces Y es una cadena de Markov con intensidad de transición $q(i, j), \{i, j\} \subset K, i \neq j$.

Existen diversas extensiones sobre los modelos de riesgo de crédito presentados aquí, sin embargo para los efectos de esta tesis es suficiente dar un panorama general de los más usados y que nos ayudarán a valorar instrumentos financieros en capítulos posteriores, particularmente centraremos nuestra atención en la aplicación de modelos de intensidad.

Capítulo 3

Principios de simulación Monte Carlo

En este capítulo daremos una introducción a las técnicas de integración por métodos Monte Carlo. Comenzamos mostrando algunos de los métodos existentes para simular los procesos subyacentes, específicamente el modelo de Heston y el proceso CIR, lo cuales son ampliamente usados en precios y tasas de interés. Adicionalmente, consideramos simulaciones de tiempos de incumplimiento en riesgo de crédito, con el objetivo de aplicarlo a la valuación de derivados de crédito. Posteriormente, entraremos de lleno al tema de integración por Monte Carlo; daremos una introducción breve y seguiremos con las técnicas de reducción de varianza, dichas técnicas nos ayudan a mejorar la eficiencia de los estimadores. Es importante mencionarlas en el trabajo, ya que uno de nuestros objetivos será evaluar su desempeño con ejemplos reales.

3.1. Simulación del modelo de Heston.

El objetivo de esta sección es mostrar los resultados y algoritmos que nos permiten simular trayectorias del modelo de Heston con su distribución exacta, como lo definimos en las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.3), adicionalmente mostraremos un método de discretización. Para comenzar recordemos que el modelo de Heston propone una deriva constante y una volatilidad que sigue un proceso CIR; asimismo el proceso CIR puede ser parametrizado en función de un proceso cuadrático de Bessel. Estas propiedades nos permiten hacer un planteamiento constructivo, comenzando por la simulación del proceso más básico y usarla para llegar a los modelos que nos interesan.

Simulación exacta del proceso cuadrático de Bessel

Estudiaremos los algoritmos existentes para simular el proceso cuadrático de Bessel con parámetros (ν, λ) ; ver Sección 1.1. Para esto, definamos una variable aleatoria importante en nuestro estudio. Sean $Z \sim Poisson(\gamma)$ y $Y \sim Gamma(Z + \alpha + 1, \beta)$; la variable Y es llamada gamma aleatorizada del primer tipo, notemos que su densidad puede expresarse como una mezcla infinita de densidades gamma

$$f_Y(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n e^{-\gamma}}{n!} \frac{\beta^{\alpha+n+1}}{\Gamma(\alpha+n+1)} y^{\alpha+n} e^{-\beta y}, \quad y > 0,$$

donde Γ es la función gamma. Simplificando, se tiene la expresión

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= e^{-\gamma-\beta y} y^\alpha \beta^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n \beta^n y^n}{n! \Gamma(\alpha + n + 1)} \\ &= e^{-\gamma-\beta y} \beta \left(\frac{\beta y}{\gamma} \right)^{\frac{\alpha}{2}} (\gamma \beta y)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\gamma \beta y})^{2n}}{n! \Gamma(\alpha + n + 1)} \\ &= \beta y^{\alpha/2} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\gamma-\beta y} I_\alpha \left(\sqrt{4\gamma \beta y} \right). \end{aligned}$$

Haciendo $\gamma = \frac{2x}{\nu^2 t}$, $\beta = \frac{2}{\nu^2 t}$ y $\alpha = \eta$, se tiene la ecuación (2.1.2), se sigue que la densidad del proceso cuadrático de Bessel es una variable gamma aleatorizada. En general, podemos obtener la densidad del proceso en un tiempo $t \geq u$, dado $X_u = x$, como sigue

$$p^B(u, t; x, y) := \frac{\mathbb{P}(X_t \in dy \mid X_u = x)}{dy} = \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{\eta}{2}} \frac{e^{-2(x+y)/\nu^2(t-u)}}{\nu^2(t-u)/2} I_\eta \left(\frac{4\sqrt{xy}}{\nu^2(t-u)} \right), \quad t > u.$$

Nuevamente, haciendo $\gamma = \frac{2x}{\nu^2(t-u)}$, $\beta = \frac{2}{\nu^2(t-u)}$ y $\alpha = \eta$ se obtiene una distribución gamma aleatorizada del primer tipo; estos elementos nos permiten construir el siguiente algoritmo para simular trayectorias del proceso de Bessel

Algoritmo (3.1.1)

1. Definir $X_0 = x_0$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$, $\nu > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Para $i = 1, 2, \dots, n$, hacer 3-4.
3. Generar $Y \sim \text{Poisson} \left(\frac{2x_{i-1}}{\nu^2(t_i - t_{i-1})} \right)$.
4. Generar $x_i \sim \text{Gamma} \left(Y + \eta + 1, \frac{2}{\nu^2(t_i - t_{i-1})} \right)$; recordemos que $\eta = 2\lambda/\nu^2 - 1$.
5. x_0, x_1, \dots, x_n representa una trayectoria del proceso cuadrático de Bessel con parámetros (λ, ν) , tal que $X_{t_i} = x_i$.

Otro posible enfoque consiste en aprovechar la similitud con la densidad χ^2 - no central, para esto se tiene que si $Z \sim \chi_d^2(\Lambda)$, donde d son los grados de libertad, representa el parámetro de forma y Λ es el parámetro de no-centralidad, entonces Z tiene la densidad

$$f_Z(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(z+\Lambda)}}{2^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{d/2+n-1} \Lambda^n}{n! \Gamma(d/2 + n) 2^{2n}}, \quad z > 0.$$

Simplificando esta última expresión se tiene

$$f_Z(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(z+\Lambda)}}{2} \left(\sqrt{\frac{z}{\Lambda}} \right)^{\frac{d}{2}-1} I_{\frac{d}{2}-1} \left(\sqrt{z\Lambda} \right),$$

y definiendo $\frac{d}{2} - 1 = \eta$, $\Lambda = \frac{4x}{\nu^2 t}$ y $z = \frac{4y}{\nu^2 t}$ se obtiene la ecuación (2.1.2), de donde

$$\{X_t \mid X_0 = x\} \stackrel{d}{=} \frac{\nu^2 t}{4} Z, \quad Z \sim \chi_d^2 \left(\frac{4x}{\nu^2 t} \right),$$

con $d = 2(\eta + 1) = \frac{4\lambda}{\nu^2}$.

En esta ocasión no mencionaremos ningún algoritmo que involucre a la distribución χ^2 por que de hecho una manera de obtener muestras de esta distribución es utilizar una gamma aleatorizada como la del caso anterior, sin embargo es importante resaltar que podemos hacer uso de esta propiedad si el lenguaje de programación usado nos lo permite. Mediante estos dos enfoque podemos simular el proceso de Bessel de manera secuencial, es decir, generar el siguiente punto de la trayectoria a partir del anterior. Existe un tercer método, en el cual hacemos uso de la densidad del puente de Bessel, consiste en generar primero un punto final y los puntos intermedios se obtienen a partir de este.

Para construir el algoritmo puente tomemos las constantes $\{a, b, \beta\} \subset R^+$ y sean $Z \sim \text{Poisson} \left(\frac{a+b}{4\beta} \right)$ y $X \sim \text{Bessel} \left(\theta, \frac{\sqrt{ab}}{2\beta} \right)$. Decimos que Y tiene una distribución gamma aleatoria de segundo tipo si $Y \sim \text{Gamma} (Z + 2X + \theta + 1, \beta)$. La densidad Y tiene la siguiente forma

$$f_Y(y) = \frac{\beta e^{-\frac{a+b}{4\beta} - \beta y}}{I_\theta \left(\sqrt{ab}/2\beta \right)} I_\theta \left(\sqrt{ay} \right) I_\theta \left(\sqrt{by} \right), \quad y > 0.$$

Haciendo $a = \frac{16x}{\nu^4 t^2}$, $b = \frac{16z}{\nu^4 (T-t)^2}$, $\theta = \eta$ y $\beta = \frac{2T}{\nu^2 t(T-t)}$, $0 < t < T$, se obtiene la ecuación (2.1.3) del Capítulo 2, más aún, haciendo $0 < t_1 < t < t_2$, $\{x, z, y\} \subset R^+$, y $a = \frac{16x}{\nu^4 (t-t_1)^2}$, $b = \frac{16z}{\nu^4 (t_2-t)^2}$, $\beta = \frac{2(t_2-t_1)}{\nu^2 (t_2-t)(t-t_1)}$ obtenemos la densidad del puente Bessel

$$b^B(t_1, t_2, t; x, z, y) = \frac{(t_2 - t_1)}{\nu^2 (t_2 - t) (t - t_1)} e^{-\frac{2}{\nu^2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3)} \frac{I_\eta \left(\frac{4\sqrt{xy}}{\nu^2(t-t_1)} \right) I_\eta \left(\frac{4\sqrt{yz}}{\nu^2(t_2-t)} \right)}{I_\eta \left(\frac{4\sqrt{xz}}{\nu^2(t_2-t_1)} \right)}, \quad (3.1.2)$$

aquí $\bar{x}_1 = \frac{x+y}{t-t_1}$, $\bar{x}_2 = \frac{y+z}{t_2-t}$ y $\bar{x}_3 = \frac{x+z}{t_1-t_2}$. Resumimos estos resultados en el siguiente algoritmo puente:

Algoritmo (3.1.3)

1. Definir $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$, $X_0 = x_0$, $\nu > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. Generar $X_T = x_T$, por medio de una χ^2 no central o de una gamma aleatorizada del primer tipo;

3. Para $i = 1, 2, \dots, n$ hacer 4-6;
4. Generar $\mathbb{S} \sim \text{Poisson} \left(\frac{2x_{i-1}(T-t_i)}{\nu^2(t_i-t_{i-1})(T-t_{i-1})} + \frac{2x_T(t_i-t_{i-1})}{\nu^2(T-t_{i-1})(T-t_i)} \right)$;
5. Generar $\mathbb{B} \sim \text{Bessel} \left(\eta, \frac{4\sqrt{x_{i-1}x_T}}{\nu^2(T-t_{i-1})} \right)$;
6. Generar $x_i \sim \text{Gamma} \left(\mathbb{S} + 2\mathbb{B} + \eta + 1, \frac{2(T-t_{i-1})}{\nu^2(T-t_i)(t_i-t_{i-1})} \right)$;
7. $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_T$ representa una trayectoria del proceso de Bessel con parámetros (λ, ν) , tal que $X_{t_i} = x_i, X_T = x_T$.

Este algoritmo tiene una dificultad adicional, ya que en algunos lenguajes de programación no se encuentra disponible ninguna función que nos permita simular variables aleatorias de tipo Bessel. Daremos una idea general de cómo se pueden simular muestras de esta distribución. Decimos que una variable aleatoria discreta X tiene distribución Bessel con parámetros (v, a) si

$$p_n := P[X = n] = \frac{(a/2)^{2n+v}}{I_\nu(a) n! \Gamma(n+v+1)}, \quad n \geq 0,$$

donde $v > -1$ y $a > 0$. La distribución Bessel es unimodal o tiene dos modas localizadas en dos enteros consecutivos, uno de los que definimos

$$m := \left\lfloor \frac{\sqrt{a^2 + v^2} - v}{2} \right\rfloor;$$

por otro lado, tiene la propiedad de ser log-cóncava, lo que significa que p_{n+1}/p_n es decreciente en n , esto nos asegura que

$$p_n \leq p_m \min(1, e^{1-p_m|n-m|}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Con estos elementos podemos usar el método de rechazo para generar variables aleatorias de tipo Bessel, lo cual resumimos en el siguiente

$$\text{Algoritmo} \tag{3.1.4}$$

1. Definir $g(x) = p_m \min(1, e^{1-p_m|x-1/2|})$, $K = \int_0^\infty g(t) dt$;
2. Generar $X \sim g(x)/K$, $Y = \lfloor X \rfloor$;
3. Generar $U \sim \text{Unif}(0, 1)$;
4. Si $Ug(Y) \leq p_{m+X}$, $m + X$ es una realización de una v.a. Bessel;
5. Si $Ug(Y) > p_{m+X}$ regresar al paso 2.

Notemos que podemos reducir la desigualdad del paso 4 a $U \min(1, e^{1-p_m|x-1/2|}) \leq p_{m+X}/p_m$, con lo que se ahorra el cálculo de la función $I_\nu(a)$; el cual solo se realiza una vez para calcular p_m . Existen extensiones de este algoritmo que pueden evitar el cálculo de p_m , sin embargo se ha observado un buen desempeño con el algoritmo original sin un costo computacional tan alto.

Simulación exacta del proceso CIR

Sean $X = (X_t)_{t \geq 0}$, el proceso cuadrático de Bessel con parámetros (ν, λ) y $V = (V_t)_{t \geq 0}$ el proceso CIR con parámetros (κ, θ, σ) , ambos definidos en las ecuaciones (2.1.1) y (2.2.3), respectivamente. Recordemos que la densidad de transición de V es de la forma

$$p(t; x, y) = C_t e^{\kappa t} \left(\frac{y e^{\kappa t}}{x} \right)^{\frac{\eta}{2}} e^{-C_t (y e^{\kappa t} + x)} I_{\eta} \left(2C_t \sqrt{xy e^{\kappa t}} \right),$$

donde $C_t = \frac{2\kappa}{\sigma^2(e^{\kappa t} - 1)}$. Definiendo

- $\lambda = \theta\kappa$,
- $\nu^2 = \sigma^2$,
- $\eta = 2\kappa\theta/\sigma^2 - 1 = 2\lambda/\nu^2 - 1$,
- $t^* = \frac{e^{\kappa t} - 1}{\kappa}$ y
- $y^* = y e^{\kappa t}$,

llegamos a la densidad de transición del proceso de Bessel (ν, λ) ,

$$p^B(t^*; x, y^*) = \left(\frac{y^*}{x} \right)^{\frac{\eta}{2}} \frac{e^{-2(x+y^*)/\nu^2 t^*}}{\nu^2 t^*/2} I_{\eta} \left(\frac{4\sqrt{xy^*}}{\nu^2 t^*} \right),$$

lo cual nos permite realizar simulaciones del proceso CIR haciendo uso de los algoritmos encontrados para X . Por ejemplo, desarrollamos de manera directa el siguiente

Algoritmo (3.1.5)

1. Definir $V_0 = v_0$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$, $\{\kappa, \theta, \sigma\} \subset \mathbb{R}^+$, tales que $\sigma^2 \leq 2\kappa\theta$;
2. Definir el vector $t_i^* = \frac{e^{\kappa t_i} - 1}{\kappa}$ y $y_0 = v_0 e^{\kappa t_0}$;
3. Para $i = 1, 2, \dots, n$, hacer 4-6;
4. Generar $Y \sim \text{Poisson} \left(\frac{2y_{i-1}}{(t_i^* - t_{i-1}^*)\sigma^2} \right)$;
5. Generar $y_i \sim \text{Gamma} \left(Y + \eta + 1, \frac{2}{(t_i^* - t_{i-1}^*)\sigma^2} \right)$, tal que $\eta = 2\kappa\theta/\sigma^2 - 1$;
6. Hacer $v_i = y_i e^{-\kappa t_i}$;
7. v_0, v_1, \dots, v_n representa una trayectoria del proceso CIR (κ, θ, σ) , tal que $V_{t_i} = v_i$.

De manera automática encontramos también la relación de la densidad de transición del proceso CIR con una variable χ^2 - no central como sigue

$$\{V_t | V_u = v\} \stackrel{d}{=} \frac{\sigma^2 (1 - e^{\kappa(t-u)})}{4\kappa} Z, \quad Z \sim \chi_d^2 \left(\frac{4\kappa e^{-\kappa(t-u)}}{\sigma^2 (1 - e^{-\kappa(t-u)})} v \right),$$

aquí $t > u$ y $d = 4\theta\kappa/\sigma^2$. Análogamente, podemos escribir un algoritmo puente para el modelo de Heston, el cual no especificaremos ya que para efectos prácticos podemos trabajar con los enfoques mencionados anteriormente considerando que obtenemos muestras de la distribución exacta del proceso.

Hasta ahora hemos presentado algunos métodos para simular el proceso CIR con su distribución exacta, esto nos permite tener una mejora en la convergencia con respecto a los métodos de discretización. Estos métodos representan también un gran avance en la simulación de tasas de interés, así como tiempos de incumplimiento cuando trabajamos con modelos de intensidad. Para poder completar la simulación del modelo de Heston es necesario completar algunos pasos subsecuentes como veremos a continuación.

Simulación casi exacta del Modelo de Heston

Para comenzar notemos que, dado S_0 , el modelo de Heston admite la representación

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \mu t - \frac{1}{2} \int_0^t v_s ds + \rho \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s + \bar{\rho} \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s^\perp \right\}, \quad (3.1.6)$$

$$v_t = v_0 + \kappa\theta t - \kappa \int_0^t v_s ds + \sigma \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s, \quad (3.1.7)$$

donde $\bar{\rho} = \sqrt{1 - \rho}$, $W = (W_t)_{t \geq 0}$ y $W^\perp = (W_t^\perp)_{t \geq 0}$ son dos movimientos brownianos independientes. Se observa de la ecuación (3.1.6) que por la independencia de W y W^\perp , y dados los valores de $\int_0^t v_s ds$ y $\int_0^t \sqrt{v_s} dW_s$ se tiene

$$\log \left(\frac{S_t}{S_0} \right) \sim N \left(\mu t - \frac{1}{2} \int_0^t v_s ds + \rho \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s, (1 - \rho) \int_0^t v_s ds \right). \quad (3.1.8)$$

Por otro lado, de la ecuación (3.1.7) notemos que, dados $v_0, v_t, \int_0^t v_s ds$ podemos obtener $\int_0^t \sqrt{v_s} dW_s$ como sigue

$$\int_0^t \sqrt{v_s} dW_s = \frac{1}{\sigma} \left(v_t - v_0 - \kappa\theta t + \kappa \int_0^t v_s ds \right). \quad (3.1.9)$$

Basándose en estos resultados, Broadie & Kaya (2004) desarrollaron el siguiente algoritmo para simular trayectorias del proceso de Heston

$$\text{Algoritmo} \quad (3.1.10)$$

1. Dados los parámetros del modelo, simular $v_t \mid v_0$;
2. Simular $\int_0^t v_s ds \mid v_t, v_0$;
3. Obtener $\int_0^t \sqrt{v_s} dW_s$ por medio de la ecuación (3.1.9);
4. Simular $S_t \mid \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s, \int_0^t v_s ds$ con una variable aleatoria normal, como se muestra en (3.1.8).

El paso más complicado sobre este algoritmo es el paso 2, ya que poco se sabe sobre la distribución exacta de $\int_0^t v_s ds$, sin embargo existen dos enfoques para simular esta variable. El primero desarrollado por Broadie & Kaya (2004), el cual se basa en inversión numérica de la función característica de $\int_0^t v_s ds \mid v_t, v_0$; en el segundo enfoque, propuesto por Glasserman & Kim (2011), se hace una representación de la variable $\int_0^t v_s ds \mid v_t, v_0$ en términos de mezclas de variables gamma. Por el momento no haremos uso de ninguno de estos dos métodos ya que exceden los alcances de esta tesis, sin embargo es importante saber que existen y así poder implementarlos en trabajos subsecuentes, trataremos este paso con la siguiente discretización de Euler

$$\int_t^{t+h} v_s ds \approx h \frac{v_t + v_{t+h}}{2},$$

con h pequeño. Para aumentar la convergencia de este algoritmo podemos hacer refinamientos, disminuyendo el valor de h .

Un método de discretización para difusiones

Consideremos un proceso $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ cuya dinámica está determinada por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = \alpha(Y_t) dt + \beta(Y_t) dW_t, \quad (3.1.11)$$

donde α, β son funciones cuadrado-integrables y W es un movimiento browniano. Tomamos Δt , como un incremento infinitesimal en el tiempo y reescribimos la ecuación (3.1.11) con la siguiente aproximación

$$Y_{t+\Delta t} - Y_t \approx \alpha(Y_t) \Delta t + \beta(Y_t) (W_{t+\Delta t} - W_t).$$

Así podemos obtener una trayectoria aproximada del proceso Y en un intervalo $[0, T]$, tomemos $y_0 = Y_0$ y $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$

$$y_{i+1} = y_i + \alpha(y_i) (t_{i+1} - t_i) + \beta(y_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde $(Z_i)_{i=1,2,\dots,n}$ son v.a.i.i.d. que siguen una distribución normal estándar. Si los incrementos en el tiempo son constantes, es decir, $t_i = ih$ escribimos

$$y_{i+1} = y_i + \alpha(y_i) h + \beta(y_i) \sqrt{h} Z_{i+1}.$$

Este método es mejor conocido como discretización de Euler, existen varias extensiones que hacen refinamientos sobre esta discretización, y existen mas métodos de discretización. Sin embargo por la extensión de esta tesis nos quedaremos con esta aproximación por el momento.

Con estos elementos podemos implementar simulaciones del modelo de Heston, particularmente nos interesa aplicarlo a los precios de activos con riesgo que podamos encontrar en el mercado, como precios de acciones e índices bursátiles. Por otra parte el proceso CIR lo podemos aplicar a tasas de interés y a simulaciones de incumplimiento con modelos de intensidad.

3.2. Simulación de modelos de riesgo de crédito

En esta sección nos enfocaremos en mostrar algunos métodos para simular el tiempo de incumplimiento en un proceso de riesgo de crédito, para esto haremos uso de los modelos de intensidad, descritos en la última sección del Capítulo 2. Bajo este esquema, tenemos la probabilidad de sobrevivencia al tiempo t ,

$$P[\tau > t] = p(t) = E \left[e^{-\int_0^t \lambda_u du} \right],$$

donde τ es el tiempo de incumplimiento y $\{\lambda_t\}_{t \geq 0}$ es llamado proceso de intensidad, el cual generalmente es un proceso de difusión.

Una forma de simular el tiempo de incumplimiento es

$$\textit{Algoritmo} \tag{3.2.1}$$

1. Generar una trayectoria de $\{\lambda_t\}_{t \geq 0}$;
2. Dada la trayectoria $\{\lambda_t\}_{t \geq 0}$, obtener el proceso $\left(\int_0^t \lambda_u du \right)_{t \geq 0}$;
3. Generar $\xi \sim \exp(1)$;
4. Encontrar $\tau = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \lambda_u du = \xi \right\}$.

La justificación del último algoritmo es la siguiente. Dado $A_t := \int_0^t \lambda_u du$, y la sigma álgebra $\mathcal{F} := \sigma \{ \{\lambda_t\}_{0 \leq t} \}$ se tiene

$$P_{\mathcal{F}}[\tau > t] = p_{\mathcal{F}}(t) = e^{-A_t}, \quad \forall t \geq 0,$$

por otro lado tenemos que si $Z \sim \exp(1)$, $P[Z > A_t] = e^{-A_t}$, $\forall t \geq 0$. Por lo tanto, dado $\{\lambda_t\}_{0 \leq t}$ podemos asumir $P_{\mathcal{F}}[\tau > t] = P[Z > A_t]$.

En el algoritmo (3.2.1) el paso 1 es muy importante, ya que la forma de λ influye de manera directa en la probabilidad de incumplimiento. En el Capítulo 2 mencionamos los modelos de intensidad

$$\begin{aligned} d\lambda_t &= \kappa(\theta - \lambda_t) dt + \sigma \sqrt{\lambda_t} dW_t, \\ d\lambda_t &= \kappa(\theta - \lambda_t) dt + dZ_t, \end{aligned}$$

donde W es un movimiento browniano y Z es un proceso de saltos. El primer modelo lo hemos tratado ampliamente, mientras que en el segundo modelo la única incógnita es la simulación del proceso Z . Sin pérdida de generalidad asumiremos que Z es un proceso Poisson con parámetro γ y usando las propiedades de dicho proceso proponemos el siguiente

Algoritmo (3.2.2)

1. Definir $\lambda_0, \gamma, \eta, \kappa, \theta, T$ constantes positivas
2. Generar $N \sim Pois(\gamma T)$
3. Generar $t_i \sim Unif(0, T)$, para $i = 1, 2, \dots, N$, esto representa los tiempos de salto.
4. Generar $x_i \sim exp(\eta)$ independientes de N y $(t_j)_{j=1,2,\dots,N}$ para $i = 1, 2, \dots, N$, los cuales son los tamaños de salto. Hacer conjuntamente 5-6.
5. Usar $\lambda_t = \theta + e^{-\kappa(t-u)}(\lambda_u - \theta)$ para determinar los puntos de la trayectoria entre saltos.
6. Usar $\lambda_{t_i+\Delta t_i} = \lambda_{t_i} + \Delta Z_{t_i}$, tal que $\Delta Z_{t_i} = x_i$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ para determinar los puntos de la trayectoria en los tiempos t_1, t_2, \dots, t_N .

Otro posible camino para simular el tiempo de incumplimiento es usar la función de distribución inversa generalizada cuando se conoce explícitamente, es decir,

$$p(t) = 1 - F_T(t) = 1 - P[\tau \leq t]$$

y F es una función de distribución, un ejemplo de este caso sería cuando la intensidad de incumplimiento es constante y τ tiene distribución exponencial.

A veces será necesario modelar y simular tiempos de incumplimiento de varios deudores, para esto supongamos que tenemos un total de n deudores y sean (λ_i, τ_i) la intensidad y el tiempo de incumplimiento del i -ésimo deudor. Recordando el algoritmo (3.2.1) es necesario encontrar

$$\tau_i = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \lambda_{i,u} du = \xi_i \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde $\xi_i \sim exp(1)$. Podemos incluir correlación entre los distintos deudores haciendo las variables ξ_i correlacionadas. Usando la función de distribución inversa de la exponencial tenemos

$$\xi_i = -\log(U_i), \quad U_i \sim Unif(0, 1).$$

De esta manera correlacionando las variables $(U_i)_{i=1,2,\dots,n}$ también generamos tiempo de incumplimiento dependientes.

3.3. Fundamentos de integración por Monte Carlo

Planteemos el problema de encontrar el valor de la siguiente integral

$$\mu = \int_0^1 h(x) dx,$$

donde $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Notemos que podemos ver esta integral como $\mu = E[h(U)]$, tal que $U \sim Unif(0, 1)$. Supongamos que tenemos un mecanismo para simular una muestra de tamaño n de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) $(u_i)_{i=1,2,\dots,n}$ que tienen la misma distribución uniforme. La ley fuerte de los grandes números nos dice que si $\mu < \infty$, entonces

$$\hat{\mu}_h := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(u_i) \rightarrow \mu, \text{ c.s.}$$

Por otro lado, si la función h tiene segundo momento, es decir

$$\sigma_h^2 = \int_0^1 (h(x) - \mu)^2 dx < \infty,$$

el teorema del límite central nos asegura

$$\frac{\sum_{i=1}^n h(u_i) - \mu}{\sigma_h \sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1),$$

con $N(0, 1)$ la distribución normal estándar. Típicamente, si μ es desconocida también lo es σ_h^2 , sin embargo se puede aproximar por medio de la varianza muestral

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h(u_i) - \hat{\mu}_n)^2.$$

Entonces, podemos hacer aproximaciones de μ y una medida de eficiencia sería el error $\hat{\mu}_n - \mu$, el cual se distribuye $N(0, \sigma_h/\sqrt{n})$, con n el tamaño de muestra; notemos que la tasa de convergencia de $\hat{\mu}_n$ es $O(\sqrt{n})$. Cabe mencionar que existen aproximaciones más exactas sobre integrales en un conjunto compacto, las cuales usan métodos numéricos y arrojan una tasa de convergencia más rápida, sin embargo la utilidad de los métodos Monte Carlo radica en que si la integral está definida sobre dimensiones altas la tasa de convergencia sigue siendo $O(\sqrt{n})$, lo cual no se sostiene en los métodos numéricos tradicionales. En particular, en las aplicaciones que nos interesan se requiere evaluar esperanzas sobre trayectorias de procesos estocásticos, tales como tasas de interés o precios de activos financieros, por citar algunos ejemplos. Dichas trayectorias constituyen familias de variables aleatorias que producen altas dimensiones y limitan las formas explícitas de valuación.

A lo largo de este manuscrito vamos a suponer que existe un mecanismo que genera variables aleatorias de la mayoría de las distribuciones, y si es necesario especificaremos los algoritmos

usados para simular variables aleatorias de las distribuciones que se requieran. Enseguida, se generaliza el problema que nos planteamos al principio de ésta sección para encontrar

$$\alpha = E[h(X)], \quad X \sim f.$$

Si $\mu < \infty$, el estimador Monte Carlo generalizado será

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i),$$

donde $(x_i)_{i=1,2,\dots,n}$ es una muestra aleatoria de la distribución f . Vamos a plantear un ejemplo ilustrativo sobre cómo implementar este método de estimación. Consideremos el activo X y una cuenta de banco B y sus procesos de precios $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ y $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ respectivamente, cuyas dinámicas están dadas por el modelo Black & Scholes

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt, \\ \frac{dX_t}{X_t} &= \mu dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

donde W es un movimiento browniano estándar. Se pretende valuar un call europeo con precio de ejercicio K , tiempo de maduración T y precio inicial $X_0 = x$, $h(X_T) = (X_T - K)^+$. Sabemos que bajo la medida martingala \mathbb{Q} el precio de X tiene la siguiente dinámica

$$\frac{dX_t}{X_t} = r dt + \sigma dW_t,$$

o bien, aplicando la fórmula de Ito

$$X_T = X_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T}.$$

Como W es un movimiento browniano se tiene que $W_T \sim N(0, T)$, y entonces

$$X_T = X_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \sqrt{T} Z}$$

donde $Z \sim N(0, 1)$. Volviendo al planteamiento del problema, nos interesa estimar el precio libre de arbitraje $\alpha = E_{\mathbb{Q}}[h(X_T)]$; un posible camino es el siguiente

Algoritmo (3.3.1)

1. Generar una muestra (z_1, z_2, \dots, z_n) de la variable Z ;
2. Evaluar $X_i = x e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \sqrt{T} z_i}$;
3. Evaluar $h(X_i) = (X_i - K)^+$;
4. Obtener el estimador $\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i)$.

Este ejemplo es sumamente sencillo y podría no tener sentido usar simulaciones ya que existen fórmulas cerradas de valuación bajo los supuestos citados, sin embargo nos sirve para ilustrar una posible aplicación, y en la siguiente sección volveremos a usarlo.

3.4. Técnicas de reducción de varianza

En esta sección mostraremos distintos enfoques que nos ayudan a reducir la varianza del estimador y por lo tanto aumentar la eficiencia del mismo. Consideraremos las técnicas de variables de control, emparejamiento de variables, muestreo estratificado e hipercubo latino. La técnica de cambio de medida, mejor conocida como “muestreo por importancia”, será tratada en una sección por aparte, debido a su complejidad. Al final de nuestra discusión ejemplificaremos los métodos aquí presentados con un caso sencillo que nos ayudará a comprender la implementación y apreciar el mejoramiento de la eficiencia.

Se tomará como una medida de eficiencia la varianza del estimador $Var[\hat{\alpha}_n]$. En el caso mas general de los estimadores Monte Carlo se tiene

$$Var[\hat{\alpha}_n] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(x_i)\right] = \frac{1}{n}Var[h(X)],$$

pues $(x_i)_{i=1,2,\dots,n}$ son v.a.i.i.d.

Variables de Control

Supongamos que queremos estimar la esperanza desconocida $\mu_Y = E[Y]$ y que podemos simular una muestra $(Y_i)_{i=1,2,\dots,n}$ de dicha variable. El estimador Monte Carlo usual es $\hat{\mu}_Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$. Consideremos ahora que tenemos otra variable X con esperanza conocida $\mu_X = E[X]$ y que podemos simular una muestra $(Y_i, X_i)_{i=1,2,\dots,n}$, donde los pares (Y_i, X_i) son independientes entre sí. Ahora definamos el siguiente estimador

$$\hat{\mu}_Y(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta(X_i - E[X])).$$

Lo primero que podemos notar es que es insesgado, pues

$$\begin{aligned} E[\hat{\mu}_Y(\beta)] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i\right] - \beta E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - E[X])\right] \\ &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i\right] = E[Y]. \end{aligned}$$

También es un estimador consistente, ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta(X_i - E[X])) = E[Y - \beta(X - E[X])] = E[Y], \text{ c.s.}$$

Por la forma del estimador, el error $(X_i - E[X])$ actúa como una especie de control sobre la estimación de $E[Y]$; la pregunta a responder es cómo podemos elegir X y β de manera que nos ayuden a reducir la varianza. Para responder esto, calculemos la varianza del estimador controlado

$$Var(Y_i - \beta(X_i - E[X])) = \sigma_Y^2 - 2\beta\sigma_Y\sigma_X\rho_{XY} + \beta^2\sigma_X^2, \quad (3.4.1)$$

donde $\sigma_Y^2 = Var [Y]$, $\sigma_X^2 = Var [X]$ y $\rho_{XY} = Corr(X, Y)$; note que $Cov(X, Y) = \sigma_Y \sigma_X \rho_{XY}$. Para encontrar al β óptimo tomamos la ecuación (3.4.1) como una función de β , y derivando e igualando con cero se tiene

$$\beta^* = \frac{\sigma_Y \rho_{XY}}{\sigma_X} = \frac{Cov(X, Y)}{Var[X]}.$$

Para deducir cómo podemos reducir la varianza calculamos el cociente

$$\frac{Var[\hat{\mu}_Y(\beta)]}{Var[\hat{\mu}_Y]} = \frac{\sigma_Y^2 - 2\beta^* \sigma_Y \sigma_X \rho_{XY} + (\beta^*)^2 \sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1 - \rho_{XY}^2. \quad (3.4.2)$$

Tenemos que la mejor elección para la variable de control es una X que esté altamente relacionada con Y . El principal problema con este planteamiento es que al no poder calcular μ_Y , tenemos que es menos posible aún conocer σ_Y^2 y ρ_{XY} , por lo que no podemos usar el valor real de β^* ; en su lugar podemos estimarlo de la siguiente manera

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_X)(Y_i - \hat{\mu}_Y)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_X)^2}.$$

Multiplicando y dividiendo por n ésta última expresión y haciendo $n \rightarrow \infty$, por la ley fuerte de los grandes números se tiene $\hat{\beta}_n \rightarrow \beta^*$ *c.s.* La limitante en este caso es que tenemos un número finito de muestras de (X, Y) , por lo que usar $\hat{\beta}_n$ para estimar produce un sesgo

$$E[\hat{\mu}_Y(\beta)] - \mu_Y = -E\left[\hat{\beta}_n(\hat{\mu}_X - \mu_X)\right].$$

En general, los estimadores de variables de control producen resultados eficientes y no es difícil de implementar; para un tratamiento más amplio del sesgo producido por la estimación con variables de control se puede consultar Glasserman (2000). En las aplicaciones financieras un excelente candidato para variable de control son los valores de los bienes subyacentes (precios, tasas de interés, etc.), ya que bajo la medida martingala se sabe que estos precios son martingalas, por lo que su esperanza es conocida.

El método de variables de control se puede extender para usar varios controles en lugar de uno, por ejemplo en la valuación de opciones americanas se puede usar el total de la trayectoria simulada como variables de control. En nuestro planteamiento se usa un control de manera lineal, sin embargo esta relación no es limitante. En general, podemos usar cualquier función $g(\hat{\mu}_X, \hat{\mu}_Y)$ tal que $g(EX, y) = y, \forall y$. Algunos ejemplos de funciones de este tipo son

- $g(\hat{\mu}_X, \hat{\mu}_Y) = \hat{\mu}_Y \frac{EX}{\hat{\mu}_X}$
- $g(\hat{\mu}_X, \hat{\mu}_Y) = \hat{\mu}_Y e^{(\hat{\mu}_X - EX)}$
- $g(\hat{\mu}_X, \hat{\mu}_Y) = \hat{\mu}_Y^{EX/\hat{\mu}_X}$.

En este caso la diferencia entre el estimador $\hat{\mu}_Y$ y un estimador controlado $g(\hat{\mu}_X, \hat{\mu}_Y)$ dependerá de la discrepancia entre $\hat{\mu}_X$ y EX . En esta tesis usaremos únicamente controles lineales, sin embargo es importante saber que existen otros enfoques. Más adelante podremos usar las variables de control en un ejemplo real.

Emparejamiento de variables

En el contexto financiero tenemos que bajo la medida de riesgo neutral el proceso de precios descontados es una martingala, entonces para un activo X se tiene que $E_{\mathbb{Q}}[e^{-rt}X_t] = X_0, \forall t > 0$. Debido a que tenemos una cantidad finita de variables simuladas, en general se tiene que

$$e^{-rt}\bar{X}_t \neq X_0, \text{ con } \bar{X}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{t,i},$$

para corregir este error podemos usar la variable modificada

$$\tilde{X}_{t,i} = X_{t,i} \frac{E[X_t]}{\bar{X}_t} = X_{t,i} \frac{e^{rt}X_0}{\bar{X}_t},$$

o bien

$$\tilde{X}_{t,i} = X_{t,i} + E[X_t] - \bar{X}_t,$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. De esta manera estamos forzando la igualdad

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_{t,i} = E[X_t].$$

Es decir, hacemos coincidir el primer momento muestral con el primer momento poblacional. Podemos extender este método para hacer coincidir el segundo momento si lo conocemos y de hecho podemos usar otras variables involucradas en la simulación, siempre que conozcamos sus momentos. Particularmente en los procesos de difusión, es natural pensar en normalizar las variables normales simuladas que se usan para generar trayectorias de un movimiento browniano, más adelante en esta sección ejemplificaremos esta idea.

Otra manera de hacer coincidir el primer momento es asignar un peso entre cero y uno a cada observación generada, de tal manera que la suma de las variables ponderadas sea igual a la esperanza, a este método se le conoce como Monte Carlo ponderado. Regresando al ejemplo del precio X , elegimos las ponderaciones w_1, w_2, \dots, w_n tales que

$$\sum_{i=1}^n w_i X_{t,i} = e^{rt} X_0,$$

para $t > 0$. Así, el estimador de Monte Carlo ponderado para el precio libre de arbitraje de algún activo contingente h , $E_{\mathbb{Q}}[h(X_t)]$, será

$$\sum_{i=1}^n w_i h(X_{t,i}), \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Existen varias maneras de elegir los pesos $(w_i)_{i=1,2,\dots,n}$, para una discusión más detallada sobre este método se puede consultar Glasserman (2000).

Cuando trabajamos con procesos estocásticos en lugar de variables aleatoria en \mathbb{R} , es necesario hacer algunos cambios a esta metodología. Como hemos descrito, bajo la medida de riesgo

neutral los precios descontados son una martingala, por lo que haciendo uso de este hecho definimos el siguiente sistema para implementar el emparejamiento de variables a lo largo de la trayectoria de precios. Sea $\{S_{t_i,j}\}_{i=0,1,2,\dots,m;j=1,2,\dots,n}$ el conjunto de n trayectorias generadas del proceso de precios S , entonces usamos

$$\begin{aligned} S_{t_i,j}^* &= S_0 \frac{Z_i(t_j, n)}{Z_0(t_j, n)}, \\ Z_i(t_j, n) &= S_{t_{i-1},j}^* \frac{S_{t_i,j}}{S_{t_{i-1},j}}, \\ Z_0(t_j, n) &= \frac{e^{-rt_j}}{n} \sum_{i=1}^n Z_i(t_j, n), \end{aligned}$$

Es fácil ver que esta transformación es equivalente a

$$S_{t_i,j}^* = S_{t_i,j} \frac{S_0 e^{rt_j}}{S_{t_i}},$$

donde $S_{t_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i,j}$. De esta manera nos aseguramos que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i,j}^* = S_0 e^{rt_j}$, $\forall j$. Esta transformación es conocida en el entorno financiero como simulación martingala empírica.

Más adelante, en este capítulo, ejemplificaremos el emparejamiento de variables y en el último capítulo emplearemos la simulación martingala empírica.

Muestreo Estratificado

La idea principal del muestreo estratificado es hacer una partición conveniente del espacio, con la intención de que todos los posibles eventos sean considerados de manera proporcional a la probabilidad real de que ocurran. Matemáticamente, consideremos una variable aleatoria X y una partición de su soporte $\{E_1, E_2, \dots, E_K\}$ tal que $P[X \in \bigcup_{i=1}^K E_i] = 1$, $E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neq j$. Entonces, podemos escribir su esperanza como sigue

$$\mu_X = E[X] = \sum_{i=1}^K E[X | X \in E_i] P[X \in E_i].$$

Un estimador insesgado de $E[X | X \in E_i]$ es $\bar{X}_i := (X_{i,1} + X_{i,2} + \dots + X_{i,n_i}) / n_i$ donde $(X_{i,j})_{j=1,2,\dots,n_i}$ son realizaciones de la variable aleatoria $X | X \in E_i$. Así, el estimador de la esperanza es

$$\hat{\mu}_X = \sum_{i=1}^K P[X \in E_i] \bar{X}_i = \sum_{i=1}^K P[X \in E_i] \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j}.$$

Definiendo $n = n_1 + n_2 + \dots + n_K$, $q_i = n_i/n$ y $p_i = P[X \in E_i]$, se tiene el estimador Monte Carlo estratificado

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{q_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j}.$$

Más aún, si $Y = h(X)$ se puede estimar $\mu_Y = E[Y]$ como sigue

$$\hat{\mu}_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{q_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j},$$

donde $Y_{i,j} = h(X_{i,j})$.

Ahora vamos a analizar los efectos que ocasiona usar muestreo estratificado sobre la varianza del estimador $\hat{\mu}_Y$. Para esto definamos

$$\mu_i = E[Y | X \in E_i], \quad \sigma_i^2 = Var[Y | X \in E_i]$$

y notemos que podemos escribir

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^K P[X \in E_i] E[Y | X \in E_i] = \sum_{i=1}^K p_i \mu_i,$$

$$E[Y^2] = \sum_{i=1}^K P[X \in E_i] E[Y^2 | X \in E_i] = \sum_{i=1}^K p_i (\sigma_i^2 + \mu_i^2).$$

Se sigue que la varianza de Y se puede expresar de la siguiente manera

$$Var[Y] = E[Y^2] - \mu_Y^2 = \sum_{i=1}^K p_i (\sigma_i^2 + \mu_i^2) - \left(\sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2. \quad (3.4.3)$$

Por otro lado, la varianza del estimador Monte Carlo estratificado es

$$Var[\hat{\mu}_Y] = Var \left[\sum_{i=1}^K \frac{p_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j} \right] = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2}{n_i} \sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2}{q_i} \sigma_i^2.$$

Haciendo $n_i = n * p_i$ se sigue que $q_i = p_i$ y por lo tanto

$$Var[\hat{\mu}_Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2. \quad (3.4.4)$$

Ahora recordemos que la varianza del estimador Monte Carlo generalizado es $Var[Y]/n$ y que por la desigualdad de Jensen se tiene

$$\sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2.$$

Entonces, al comparar (3.4.3) con (3.4.4) tenemos que haciendo $q_i = p_i$ produce siempre una reducción de varianza de $\hat{\mu}_Y$ con respecto del estimador Monte Carlo generalizado. La siguiente incógnita es resolver cómo debemos escoger los estratos $\{E_i\}_{i=1,2,\dots,K}$, y en este sentido no

existe una respuesta universalmente aceptada, sin embargo, en general se recomienda que sean conjuntos con la misma probabilidad.

La forma más fácil de ilustrar el muestreo estratificado es con la distribución uniforme, en este sentido se toma una partición del intervalo $(0, 1)$ de la siguiente manera

$$E_1 = \left(0, \frac{1}{K}\right], E_2 = \left(\frac{1}{K}, \frac{2}{K}\right], \dots, E_K = \left(\frac{K-1}{K}, 1\right).$$

Supongamos que queremos generar una muestra estratificada de tamaño K de la variable $U \sim Unif(0, 1)$ y que contamos con una muestra $(u_i)_{i=1,2,\dots,K}$ de la misma distribución; entonces la variable

$$V_i = \frac{i-1}{K} + \frac{u_i}{K}$$

se distribuye uniforme en el intervalo $\left(\frac{i-1}{K}, \frac{i}{K}\right]$, es decir, es una realización de $U \mid U \in E_i$. Ahora planteamos el problema de encontrar $E[Y]$ tal que $Y = h(U)$. El estimador Monte Carlo estratificado es definido como

$$\hat{\mu}_Y = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K h(V_i).$$

En general, podemos usar esta misma estratificación para generar estratos de cualquier distribución real valuada por medio de la función inversa generalizada. Si $X \sim F$, donde F es una función de distribución, el algoritmo para generar simulaciones estratificadas de X es el siguiente

Algoritmo (3.4.5)

1. Sea K el número de estratos, para $i = 1, 2, \dots, K$ realizar 2 – 3.
2. Generar $U \sim Unif(0, 1)$.
3. $X_i \leftarrow F^{-1}[(i-1 + U)/K]$.

En la siguiente gráfica se ilustra este método con una distribución normal estándar, podemos observar que se formaron 10 intervalos del mismo tamaño en $(0, 1)$ y ésto formó 10 estratos de la misma probabilidad en el soporte de la distribución normal, usando la función inversa generalizada.

El poder aplicar el muestreo estratificado a la distribución normal nos permite generar trayectorias de movimiento browniano estratificadas por medio de una estratificación terminal y haciendo uso de la distribución del puente browniano, sin embargo bajo este procedimiento no podemos asegurar que la estratificación se mantenga en toda la trayectoria. Para esto necesitamos extender el método a múltiples dimensiones; esta extensión será tratada en la siguiente técnica de reducción de varianza.

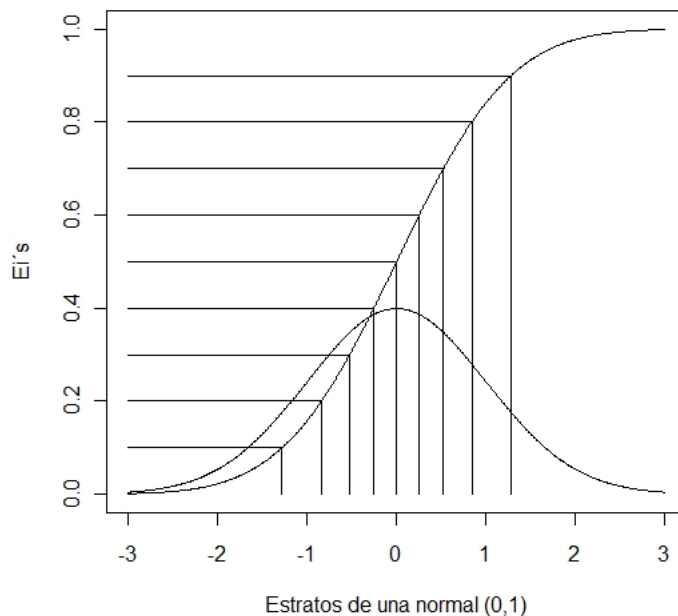


Figura 3.4.1: Estratificación de la distribución normal estándar

Muestreo por hipercubo latino

El muestreo por hipercubo latino es una extensión del muestreo estratificado a múltiples dimensiones. Como hemos visto anteriormente es suficiente estratificar el intervalo $(0, 1)$ y usar la función inversa generalizada para estratificar cualquier distribución univariada. Análogamente, en el caso d -dimensional es suficiente estratificar el hipercubo unitario $[0, 1)^d$. Ahora supongamos que queremos particionar cada uno de las coordenadas en M estratos del mismo tamaño. Usando el muestreo estratificado tratado anteriormente obtendríamos un total de M^d estratos, cada uno sería un hipercubo de la forma $[i^{(1)}/M, (i^{(1)} + 1)/M) \times [i^{(2)}/M, (i^{(2)} + 1)/M) \times \dots \times [i^{(d)}/M, (i^{(d)} + 1)/M)$. Conforme aumentan las dimensiones o el número de estratos el tamaño de muestra aumenta exponencialmente, el esfuerzo computacional crece de la misma manera, lo que resulta ser poco práctico e incluso puede llegar a ser limitante. El objetivo del muestreo por hipercubo latino es evitar el crecimiento exponencial del tamaño de muestra mientras se conserva la estratificación en cada coordenada. La idea es estratificar cada uno de los d intervalos $(0, 1)$ de manera independiente y luego formar vectores de tamaño d en los que cada entrada será una muestra aleatoria de cada intervalo estratificado.

Formalmente lo planteamos de la siguiente manera, supongamos que queremos generar una muestra del hipercubo $[0, 1)^d$, de tal manera que estratifiquemos cada coordenada en M estratos del mismo tamaño; para esto generamos d muestras estratificadas del intervalo $[0, 1)$. Denotemos a estas muestras por $(V_i^{(1)}, V_i^{(2)}, \dots, V_i^{(M)})_{i=1,2,\dots,d}$, podemos ver esta formación como una matriz. Posteriormente, hacemos permutaciones aleatorias en cada uno de los d vectores

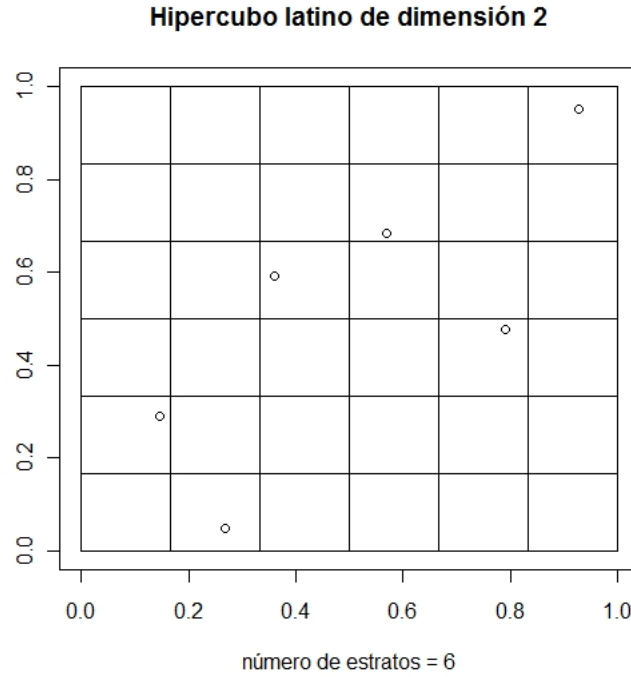


Figura 3.4.2:

y obtenemos $(V_i^{\pi(1)}, V_i^{\pi(2)}, \dots, V_i^{\pi(M)})_{i=1,2,\dots,d}$, ahora reordenamos la última matriz formando los vectores $(V_1^{\pi(j)}, V_2^{\pi(j)}, \dots, V_d^{\pi(j)})_{j=1,2,\dots,M}$. Cada vector es un punto uniformemente distribuido en $[0, 1]^d$ y tenemos una muestra de tamaño M . La siguiente figura ejemplifica el hipercubo latino de dimensión $d = 2$ y tamaño $M = 6$.

Podemos extender este método a variables no uniformes usando la función inversa generalizada. Resumimos todos los pasos a seguir en el siguiente algoritmo, haciendo los pasos 1-3 obtenemos un hipercubo latino en $[0, 1]^d$ y el paso 4 ilustra como obtener una muestra de alguna distribución F .

Algoritmo (3.4.6)

1. Generar una muestra independiente de variables uniformes en $(0, 1)$, $(U_j^{(i)})_{j=1,2,\dots,d}^{i=1,2,\dots,K}$.
2. Generar d permutaciones aleatorias de la forma $\pi_j = (\pi_j(1), \pi_j(2), \dots, \pi_j(K))$ donde $j = 1, 2, \dots, d$.
3. Obtener

$$V_j^{(i)} = \frac{\pi_j(i) - 1 + U_j^{(i)}}{K},$$

donde $i = 1, 2, \dots, K$ y $j = 1, 2, \dots, d$. La muestra uniforme en $[0, 1]^d$ queda determinada por los puntos de la forma $V^{(i)} = (V_1^{(i)}, V_2^{(i)}, \dots, V_d^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, K$.

4. Si $X \sim F$, y F es función de distribución podemos obtener una muestra de K puntos de dimensión d haciendo

$$X_j^{(i)} = F^{-1} \left(V_j^{(i)} \right),$$

la muestra queda determinada por los vectores de la forma $X^{(i)} = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_d^{(i)})$, para $i = 1, 2, \dots, K$, $j = 1, 2, \dots, d$.

En esta sección no mostraremos propiedades sobre la reducción de varianza empleando el muestreo por hipercubo latino ya que los principales resultados obtenidos por Owen (1997) y Stein (1987), por citar algunos, son referentes a funciones definidas en el hipercubo unitario $[0, 1]^d$, sin embargo evaluaremos su desempeño en los siguientes ejemplos.

Ejemplos de reducción de varianza

En esta parte ilustraremos tanto la simulación del modelo de Heston, como las técnicas de reducción de varianza. Los ejemplos que aquí presentamos son de carácter ilustrativo, por lo que no haremos ninguna comparación con otros modelos o parametrizaciones ni ningún análisis formal sobre la convergencia de los estimadores, otra observación importante es que se vale usar más de una técnica de reducción de varianza al mismo tiempo con el objetivo de mejorar aún más la eficiencia, sin embargo por el momento ejemplificaremos una técnica a la vez.

Consideremos un call europeo ($C := (S_T - K)^+$) tal que S es el futuro del IPC. Tomamos los datos de este derivado cotizado en el MEXDER el día 26 de octubre del 2011 y con fecha de redención el día 16 de diciembre del 2011, y cuenta con los siguientes parámetros

- Precio actual del activo: \$35,604.84
- Precio de ejercicio: $K = \$36,000.00$ pesos mexicanos.
- Tiempo de maduración: $T = 51$ días.
- Volatilidad implícita: 0.062001
- Tasa de interés libre de riesgo: 4.230633 %, de acuerdo al Cete 28 del día 26 de octubre del 2011.

Por el Capítulo 2, bajo la medida de riesgo neutral el precio S y la volatilidad v tienen las siguientes dinámicas bajo el modelo de Heston

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{v_t}dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad (3.4.7)$$

$$dv_t = \kappa^* (\theta^* - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t}dB_t^{\mathbb{Q}}. \quad (3.4.8)$$

Para efectos didácticos asumiremos que $\theta^* = 0,062001$, es decir, que la volatilidad local oscila alrededor de la volatilidad implícita a lo largo de $[0, T]$. De manera arbitraria asignamos los valores $\sigma = 0,1$, $\kappa^* = 0,15$ y $\rho = 0$, es decir, $W^{\mathbb{Q}}$ y $B^{\mathbb{Q}}$ son \mathbb{Q} -movimientos brownianos independientes, mientras que r será igual a la tasa libre de riesgo.

Usamos el algoritmo (3.1.5) para simular trayectorias $(v_{t_i})_{i=0,1,\dots,n}$, tal que $t_i = hi$, $h = T/n$, de las cuales hacemos una integración aproximada de la siguiente manera

$$\alpha_t := \int_0^t v_s ds \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (v_{t_i} + v_{t_{i-1}}) (h).$$

Supongamos que simulamos N trayectorias, es decir, $(v_i^j)_{i=0,1,\dots,n}^{j=1,2,\dots,N}$ y definamos

$$\Lambda_j := \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (v_{t_i}^j + v_{t_{i-1}}^j) (h);$$

considere el siguiente estimador de la integral

$$E \left[\int_0^t v_s ds \right] \approx \hat{\alpha}_t := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Lambda_i.$$

Ahora bien, como hemos mencionado anteriormente, dados los valores $\{S_0, v_0, v_t, \hat{\alpha}_t\}$, se tiene

$$\log \left(\frac{S_t}{S_0} \right) \sim N \left(rt - \frac{1}{2} \int_0^t v_s ds, \int_0^t v_s ds \right).$$

Nuestra estimación se basará en simular N muestras de S_T , tales que

$$\log \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \sim N \left(rT - \frac{1}{2} \hat{\alpha}_t, \hat{\alpha}_t \right),$$

de donde se obtiene $(S_T^i)_{i=1,2,\dots,N}$, posteriormente evaluar $C_i := e^{-rt} (S_T^i - K)^+$ y encontrar el estimador Monte Carlo

$$\hat{C} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i.$$

Otro posible camino para hacer esto sería tomar un número k_i de simulaciones de S_T respectivas a la i -ésima trayectoria de v_t , y usar el estimador

$$\tilde{C} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^{k_i} (S_T^j - K)^+.$$

Sin embargo, por el momento solo usaremos el primer camino ya que el objetivo principal es mostrar el uso de las técnicas de reducción de varianza.

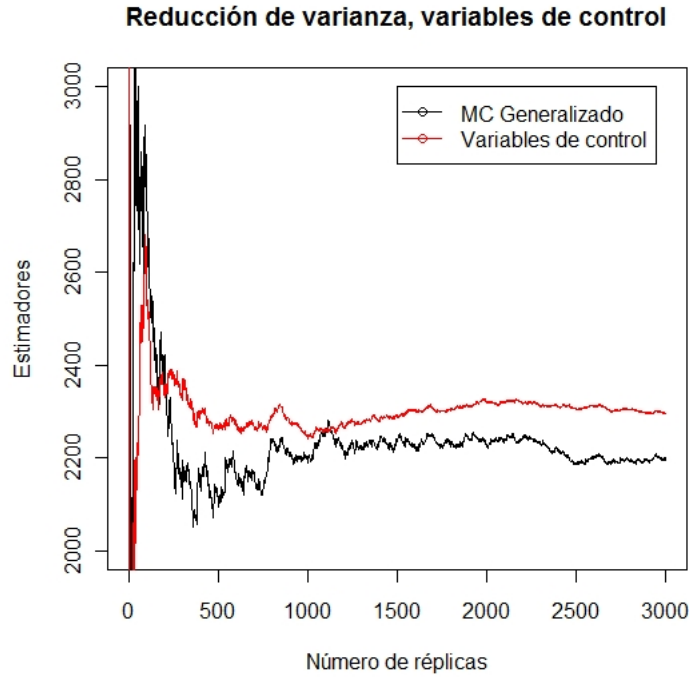


Figura 3.4.3:

Para el primer ejemplo usamos el precio terminal S_T como variable de control. Entonces, nuestro estimador controlado será

$$\tilde{C}_{\hat{\beta}} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i - \hat{\beta} (S_T^i - e^{rt} S_0),$$

donde

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N (S_T^{*i} - \bar{S}_T^*) (C_i^* - \bar{C}^*)}{\sum_{i=1}^N (S_T^{*i} - \bar{S}_T^*)^2}, \quad C_i^* = (S_T^{*i} - K)^+,$$

y $(S_T^{*i})_{i=1,2,\dots,N}$ es una muestra de S_T , independiente de $(S_T^i)_{i=1,2,\dots,N}$. En este ejemplo usamos $N = 1, 2, \dots, 3000$ y los estimadores respectivos se muestran en la siguiente gráfica.

Más aún, usando la fórmula (3.4.2), calculamos la desviación estándar de ambas sucesiones de estimadores, las cuales mostramos a continuación de manera gráfica.

Para ilustrar el emparejamiento de variables notemos que dado $\hat{\alpha}_t$ se tiene

$$S_T^i = S_0 \exp \left\{ rt - \frac{1}{2} \hat{\alpha}_t + Z_i \left(\sqrt{\hat{\alpha}_t} \right) \right\}, \quad Z_i \sim N(0, 1).$$

Entonces, definimos

$$Z'_i = \frac{Z_i - \bar{Z}}{s_Z}, \quad s_Z = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Z_i - \bar{Z})^2}$$

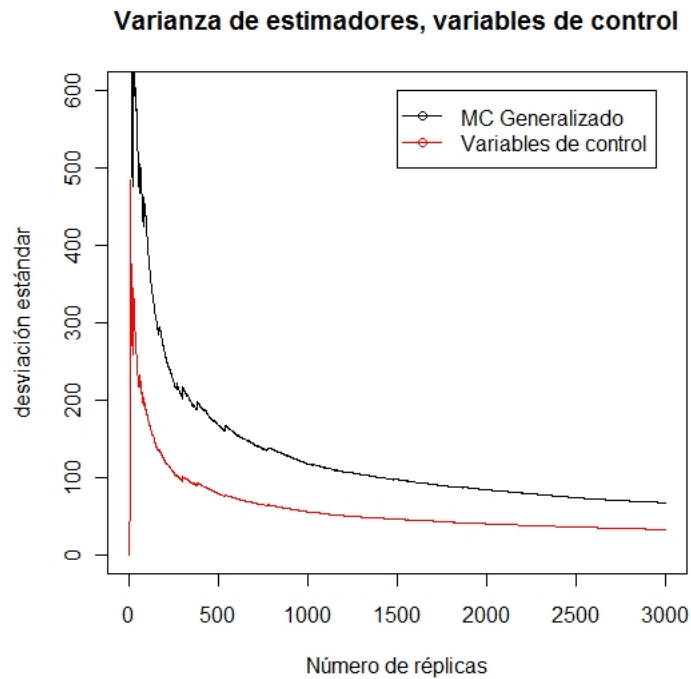


Figura 3.4.4:

y

$$S'^i_T = S_0 \exp \left\{ rt - \frac{1}{2} \hat{\alpha}_t + Z'_i \left(\sqrt{\hat{\alpha}_t} \right) \right\}.$$

El estimador Monte Carlo usando emparejamiento de variables es

$$\hat{C}' := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S'^i_T - K)^+$$

Análogamente al ejemplo anterior, para $N = 1, 2, \dots, 2000$ se muestran los estimadores encontrados en la imagen siguiente

Finalmente, en la implementación del muestreo estratificado hacemos

$$F(x) = \Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

la función de distribución de la normal estándar, en el algoritmo (3.4.5) y hacemos el número de estratos $N = 1, 2, \dots, 2000$ para los cuales obtenemos estimadores. En la gráfica siguiente se muestra una comparación entre estos últimos estimadores contra estimadores Monte Carlo generalizados

En todos los casos podemos observar una clara aceleración en la convergencia de los estimadores, a pesar de utilizar un tamaño de muestra relativamente pequeño. Como hemos mencionado

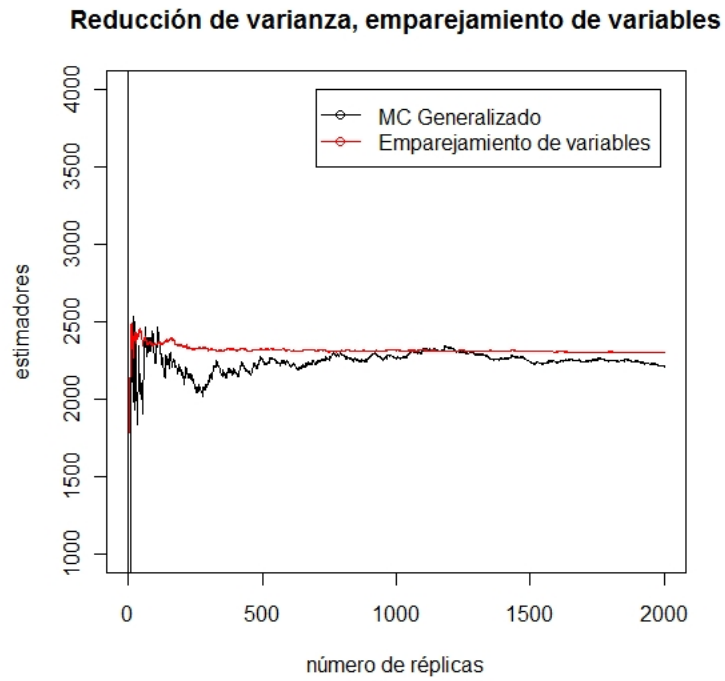


Figura 3.4.5:

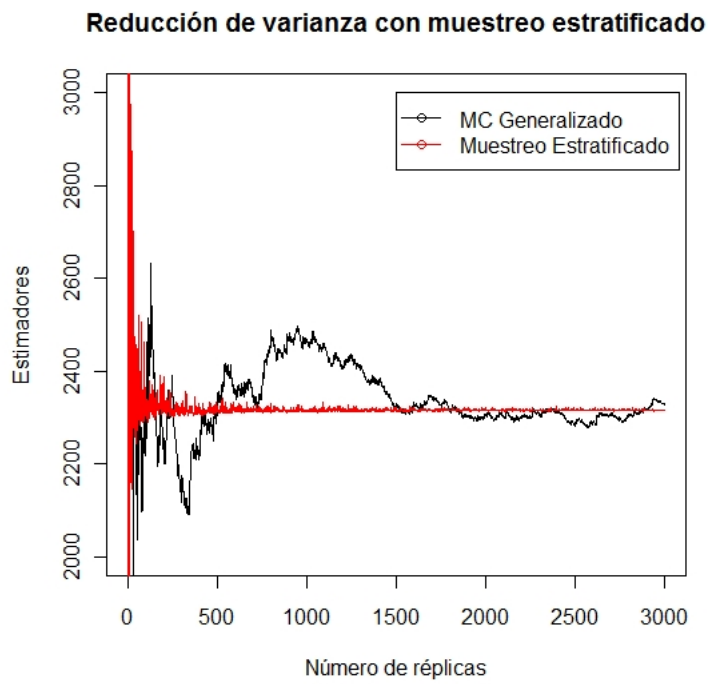


Figura 3.4.6:

estos ejemplos son meramente ilustrativos y en capítulos posteriores podremos analizar y comparar a detalle todos los métodos presentados en contextos de productos estructurados. Por el momento podemos darnos una idea de la potencia de las técnicas de reducción de varianza y se pueden observar los detalles de la implementación en el apéndice de programas en R.

3.5. Muestreo por importancia

Consideremos una densidad f y el problema de estimar la siguiente esperanza,

$$\alpha = E_f [h(X)] := \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx,$$

donde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. El estimador Monte Carlo generalizado es

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i);$$

aquí $(x_i)_{i=1,2,\dots,n}$ son v.a.i.i.d. tales que $x_i \sim f$. Tomemos otra densidad g tal que $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. El teorema de Radon-Nikodym nos asegura que si $\alpha < \infty$, se cumple

$$\alpha = E_g \left[h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right].$$

Así encontramos otra forma de estimar α , con

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i) \frac{f(x_i)}{g(x_i)},$$

en donde $(x_i)_{i=1,2,\dots,n}$ es una muestra aleatoria de g , independiente.

Podemos extender este planteamiento a cualquier medida de probabilidad e incluso vectores aleatorios, en este sentido tomamos $X \in \mathbb{R}^d$ bajo \mathbb{P} , $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ y hacemos

$$\alpha = E_{\mathbb{P}} [h(X)] = E_{\mathbb{Q}} \left[h(X) \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right],$$

donde $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ es la derivada de Radon-Nikodym, la cual es también llamada razón de verosimilitud. Para implementar esta idea, consideremos el proceso discreto de precios $S = (S_{t_i})_{i=0,1,2,\dots,m}$, y supongamos que es un proceso de Markov, además que la distribución condicional de S_{t_i} dado $S_{t_{i-1}} = s$ tiene densidad $f_i(\cdot, s)$. Para aplicar el muestreo por importancia con densidades de transición g_i se tiene el radio de verosimilitud

$$\prod_{i=1}^m \frac{f_i(S_{t_i}, S_{t_{i-1}})}{g_i(S_{t_i}, S_{t_{i-1}})};$$

más aún, podemos considerar a S como función de variables más básicas, como sucede frecuentemente cuando S es una difusión que depende del movimiento browniano. Por el momento

digamos que $S_{t_i} = G(S_{t_{i-1}}, Z_i)$, es decir, que generamos el proceso de precios por medio de una función que depende del precio anterior y de una variable aleatoria independiente. Si $(Z_i)_{i=1,2,\dots,m}$ son v.a.i.i.d., entonces el radio de verosimilitud tiene la forma

$$\prod_{i=1}^m \frac{f(Z_i)}{g(Z_i)},$$

y el cambio de medida queda determinado por

$$E_f[h(S)] = E_g \left[h(S) \prod_{i=1}^m \frac{f(Z_i)}{g(Z_i)} \right].$$

Para determinar los efectos de este cambio de medida sobre la varianza en el caso univariado, notemos que bajo f se tiene

$$\sigma_f^2 = E_f [(h(X) - \alpha)^2] = \int_{\mathbb{R}} (h(x) - \alpha)^2 f(x) dx, \quad (3.5.1)$$

mientras que bajo g ,

$$\sigma_g^2 = E_g \left[\left(h(X) \frac{f(X)}{g(X)} - \alpha \right)^2 \right] = \int_{\mathbb{R}} \left(h(x) \frac{f(x)}{g(x)} - \alpha \right)^2 g(x) dx. \quad (3.5.2)$$

Para construir un estimador $\tilde{\alpha}$, más eficiente que $\hat{\alpha}$, es necesario determinar cuándo se cumple $\sigma_g^2 < \sigma_f^2$. Primero notemos que h y f son fijos, por lo que sólo tenemos libertad de construir g , para esto se tiene que

$$g(x) \propto h(x) f(x) \Rightarrow \sigma_g^2 = 0. \quad (3.5.3)$$

En general, $h(\cdot) f(\cdot)$ no es una densidad y al tratar de normalizar tendríamos que encontrar antes α , por lo que es imposible construir g que cumpla (3.5.3); sin embargo podemos hacer aproximaciones y usar criterios que nos acerquen a esta condición.

Existen varias maneras de encontrar cambios de medida, sin embargo debido a la extensión de este trabajo no podremos estudiar todos los casos, por el momento vamos a tratar el muestreo por importancia cuando $Z \sim N(0, I_d)$ y queremos estimar $E[h(Z)]$. Buscamos $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d)$, tal que $Z \sim N(\mu, I_d)$ bajo una medida \mathbb{Q}_μ y nos ayude a reducir la varianza de los estimadores. Primero notemos que el radio de verosimilitud está dado por

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}_\mu} = e^{-\mu'Z + \frac{1}{2}\mu'\mu}.$$

Ahora, si h es una función positiva se tiene $h(Z) = e^{G(Z)}$, para alguna función G . En general, esta condición es restrictiva, sin embargo en aplicaciones financieras siempre se cumple ya que lo que estamos calculando son esperanzas de pérdidas futuras. Bajo estos supuestos, la condición (3.5.3) se reduce a $g(Z) \propto e^{G(Z)} e^{-\frac{1}{2}Z'Z}$, ya que $e^{-\frac{1}{2}Z'Z}$ es proporcional a la normal estándar de dimensión d . Normalizando la función $e^{G(Z)} e^{-\frac{1}{2}Z'Z}$ podríamos encontrar una densidad g que

cumpla la condición de manera exacta. Es claro que esto no es posible, por lo que nos limitamos a encontrar μ que lo aproxime. Un posible razonamiento es hacer coincidir μ con la moda de la densidad g , se sigue que elegimos μ que resuelva

$$\mu^* = \arg \max_z \left\{ G(z) - \frac{1}{2} z' z \right\}.$$

Derivando e igualando con cero se tiene la siguiente condición

$$\nabla G(\mu^*) = \mu^{*'} . \quad (3.5.4)$$

Otro posible enfoque es el siguiente. Denotando por $E_\mu[\cdot]$ la esperanza bajo \mathbb{Q}_μ , se tiene que

$$\begin{aligned} E[h(Z)] &= E_\mu \left[h(Z) e^{-\mu' Z + \frac{1}{2} \mu' \mu} \right] \\ &= E \left[h(Z + \mu) e^{-\mu' (Z + \mu) + \frac{1}{2} \mu' \mu} \right] \\ &= E \left[h(Z + \mu) e^{-\mu' Z - \frac{1}{2} \mu' \mu} \right], \end{aligned}$$

ya que si $Z \sim N(\mu, I_d) \Rightarrow Z = \mu + Y$, tal que $Y \sim N(0, I_d)$. Reescribiendo h tenemos

$$E[h(Z)] = E \left[e^{G(Z + \mu) - \mu' Z - \frac{1}{2} \mu' \mu} \right],$$

aquí hay que notar que $e^{G(Z + \mu) - \mu' Z - \frac{1}{2} \mu' \mu}$, $Z \sim N(0, I_d)$ es un estimador insesgado de $E[h(Z)]$, $\forall \mu \in \mathbb{R}^d$. Haciendo una expansión de Taylor de primer orden de G se tiene la siguiente aproximación

$$e^{G(Z + \mu) - \mu' Z - \frac{1}{2} \mu' \mu} \approx e^{G(\mu) + \nabla G(\mu) Z - \mu' Z - \frac{1}{2} \mu' \mu}.$$

Notamos que haciendo $\nabla G(\mu) = \mu'$ el estimador aproximado se hace una constante que no depende de Z , por lo que su varianza es cero, cabe mencionar que esta aproximación puede estar sesgada, sin embargo se observa que llegamos a la misma condición (3.5.4). Glasserman, Heidelberger & Shahabuddin (1999) desarrollaron un método para encontrar la solución de este sistema, la idea es la siguiente: primero notamos que la condición (3.5.4) es equivalente a

$$\nabla G(\mu) = \frac{\nabla h(\mu)}{h(\mu)} = \mu'.$$

El método es iterativo, en la i -ésima iteración aproximamos $\nabla h(\mu) \approx \nabla h(\mu_i)$ y $h(\mu) \approx h(\mu_i) + \nabla h(\mu_i)(\mu - \mu_i)$. Definimos μ_{i+1} como el vector que satisface

$$\mu_{i+1} = \frac{\nabla h(\mu_i)}{h(\mu_i) + \nabla h(\mu_i)(\mu_{i+1} - \mu_i)}. \quad (3.5.5)$$

Para encontrar la solución de esta ecuación definimos

$$\varphi_i = \frac{1}{h(\mu_i) + \nabla h(\mu_i)(\mu_{i+1} - \mu_i)},$$

de tal manera que se tiene $\mu_{i+1} = \varphi_i \nabla h(\mu_i)$, sustituyendo esto en (3.5.5) se sigue la siguiente ecuación cuadrática para φ_i

$$\|\nabla h(\mu_i)\|^2 \varphi_i^2 + (h(\mu_i) - \nabla h(\mu_i) \mu_i) \varphi_i - 1 = 0.$$

Resolviendo tomamos la raíz positiva ya que φ_i aproxima a $1/h(\mu)$, de manera directa podemos obtener μ_{i+1} .

Hemos expuesto un panorama general de los fundamentos y aplicación del muestreo por importancia en finanzas; en capítulos posteriores evaluaremos el desempeño de esta técnica de reducción de varianza. Más allá del trato que le hemos dado a esta última sección cabe mencionar que el presente capítulo es pequeño en relación a los resultados existentes y ejemplos posibles sobre simulación Monte Carlo.

Capítulo 4

Resultados y conclusiones

En el presente capítulo implementaremos los conceptos de los capítulos anteriores, usándolos en la valuación de instrumentos derivados. Tratamos de abarcar los productos financieros descritos en el Capítulo 1, con un ejemplo de cada sección. Comenzamos con un ejemplo sobre notas estructuradas, el cual es bastante representativo ya que la metodología de valuación se puede aplicar de manera análoga a activos subyacentes de cualquier naturaleza. En segunda instancia tomamos varios ejemplos de derivados de tasa de interés. En los todos los casos consideramos una comparación entre los resultados Monte Carlo generalizado contra las metodologías de reducción de varianza que hemos descrito en el Capítulo 3. Finalmente mostramos las conclusiones que podemos inferir de esta tesis.

4.1. Nota Referenciada a Índice

El mecanismo de este instrumento consiste en un pago inicial por parte del cliente hacia el emisor, y el retorno subsecuente de cupones que se determinan en función del rendimiento periódico del índice por parte del emisor, como se muestra en la Sección 3.4. La función de pérdida total queda determinada por

$$h(S) = \sum_{i=1}^n e^{-rt_i} K c_{t_i},$$

donde K es el valor nominal y $\{c_{t_i}\}_{i=\{1,2,\dots,n\}}$ son los cupones que se determinan por la ecuación (1.4.1), por simplicidad elegimos $K = 1$, $n = 4$ y $t_n = 1$, es decir, cupones trimestrales y fecha de maduración de un año. Cabe resaltar que este esquema se puede aplicar a distintos tipos de bien subyacente, no solo índices bursátiles y acciones. Algunos ejemplos de bienes subyacentes que pueden motivar de una nota referenciada son: tasas de interés, tipos de cambio, materias prima y precios de otros instrumentos financieros. Se elige el índice S&P 500 (originado por Standard & Poor's) como bien subyacente, el cual modelamos con el modelo de Heston. Las observaciones de varianza están determinadas por el índice VIX (volatility S&P 500). Esta es una ventaja sobre cualquier otro índice o acción. En general, la varianza nunca es observada, por lo que se opta por tomar la volatilidad implícita de algún otro derivado como una aproximación del proceso de volatilidad, como podría ser un call europeo. En el caso particular del S&P 500, se

tiene que el índice VIX se construye como una ponderación de la volatilidad implícita en varias opciones operadas en la bolsa de valores de Chicago (CBOE, por las siglas en inglés de Chicago Board Options Exchange), por lo que podemos tomar este índice como una aproximación de la volatilidad; más aún, los precios de los derivados bajo los cuales se calcula el VIX son aquellos operados en el mercado, por lo que la volatilidad implícita ya se encuentra bajo la medida martingala. Implícitamente esto nos ahorra un paso a la hora de modelar, ya que no es necesario por ahora encontrar un cambio de medida adecuado que nos determine una medida de riesgo neutral, pues el mercado contiene esa información.

En el esquema que aquí mostramos sólo falta completar un eslabón, y es el de la estimación de los parámetros del modelo de Heston. Recordemos que una de las motivaciones para elegir la simulación Monte Carlo como método de valuación es que el modelo que estudiamos no es de fácil manipulación analítica y la estimación de los parámetros es igual de difícil de calcular explícitamente. Para solucionar esto se pueden adoptar varios enfoques. Ait-Sahalia & Kimmel (2006) usan el método de máxima verosimilitud, el lector habrá de recordar que no se tienen formas cerradas sobre la verosimilitud, por lo que en ese estudio se hace una aproximación por la expansión de series de Taylor de la misma. Otro posible conjunto de herramientas para atacar este problema está representado por los métodos bayesianos, los cuales son naturalmente adecuados por que existen métodos de simulación del modelo pero es poco tratable analíticamente. En este sentido podrían usarse métodos tales como “métodos computacionales-bayesianos-aproximados” (ABC, por las siglas en inglés de Approximate Bayesian Computational methods) o “Monte Carlo Markov Chain” (MCMC), en ambos casos se necesita considerar una distribución a priori de los parámetros, lo que representa información adicional del modelo.

Recordemos que, bajo la medida martingala, la dinámica de los precios depende de la volatilidad y la tasa libre de riesgo, en el modelo de Heston esto se observa en la ecuación (2.3.1) del Capítulo 2. Haciendo uso de este hecho, vemos que basta con modelar la volatilidad para poder valorar activos contingentes. En el modelo CIR, la verosimilitud si tiene una forma cerrada, por lo que usamos los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros de la volatilidad. Los valores iniciales que usamos resultan de una aproximación discretizada. La representación discreta del proceso CIR es la siguiente

$$dv_{t+\Delta} - v_t = \kappa (\theta - v_t) \Delta + \sigma \sqrt{v_t} (W_{t+\Delta} - W_t).$$

Haciendo una regresión basada en esta ecuación podemos encontrar valores iniciales muy cercanos a los estimadores de máxima verosimilitud. Después del procedimiento de verosimilitud descrito encontramos $(\hat{\kappa} = 4,5492542, \hat{\theta} = 0,2062451, \hat{\sigma} = 0,4791739)$. Algunas pruebas empíricas cambiando los valores iniciales y comparando la log-verosimilitud con distintos valores de (κ, θ, σ) nos confirman que tenemos los estimadores adecuados. Por otro lado, debido a que no se tiene forma cerrada de la verosimilitud para los demás parámetros, particularmente ρ , lo aproximamos con la correlación entre los errores de la primera regresión y los errores de una segunda regresión de los precios, la cual se basa en una expresión discretizada de la forma diferencial:

$$S_{t+\Delta} - S_t = S_t \mu \Delta + S_t \sqrt{v_t} (W_{t+\Delta}^\rho - W_t^\rho),$$

con esto se tiene: $\hat{\rho} = 0,04707541$. Finalmente, tomamos la tasa libre de riesgo como la tasa de rendimiento de un bono del gobierno de Estados Unidos, con fecha de maduración de un año,

la cual es de $r = 1,7\%$, al día 01 de junio del 2012. Los valores iniciales para el precio del S&P 500 y del VIX son de 1,310,33 y 24,06 respectivamente, con fecha del 03 de junio del 2012.

Con estos elementos estamos listos para implementar la valuación por simulación Monte Carlo. Consideramos el método Monte Carlo estándar, así como métodos de reducción de varianza: Variables de Control, Emparejamiento de Variables y Muestreo por Importancia. Adicionalmente consideramos el método de discretización de Euler. Para implementar el emparejamiento de variables, usamos la técnica de simulación empírica martingala (SEM), la cual presentamos en la Sección 2.4, mientras que para el método de variables de control elegimos el precio terminal S_T como variable de control, podemos observar la marcada correlación que tienen estos procesos en la siguiente gráfica.

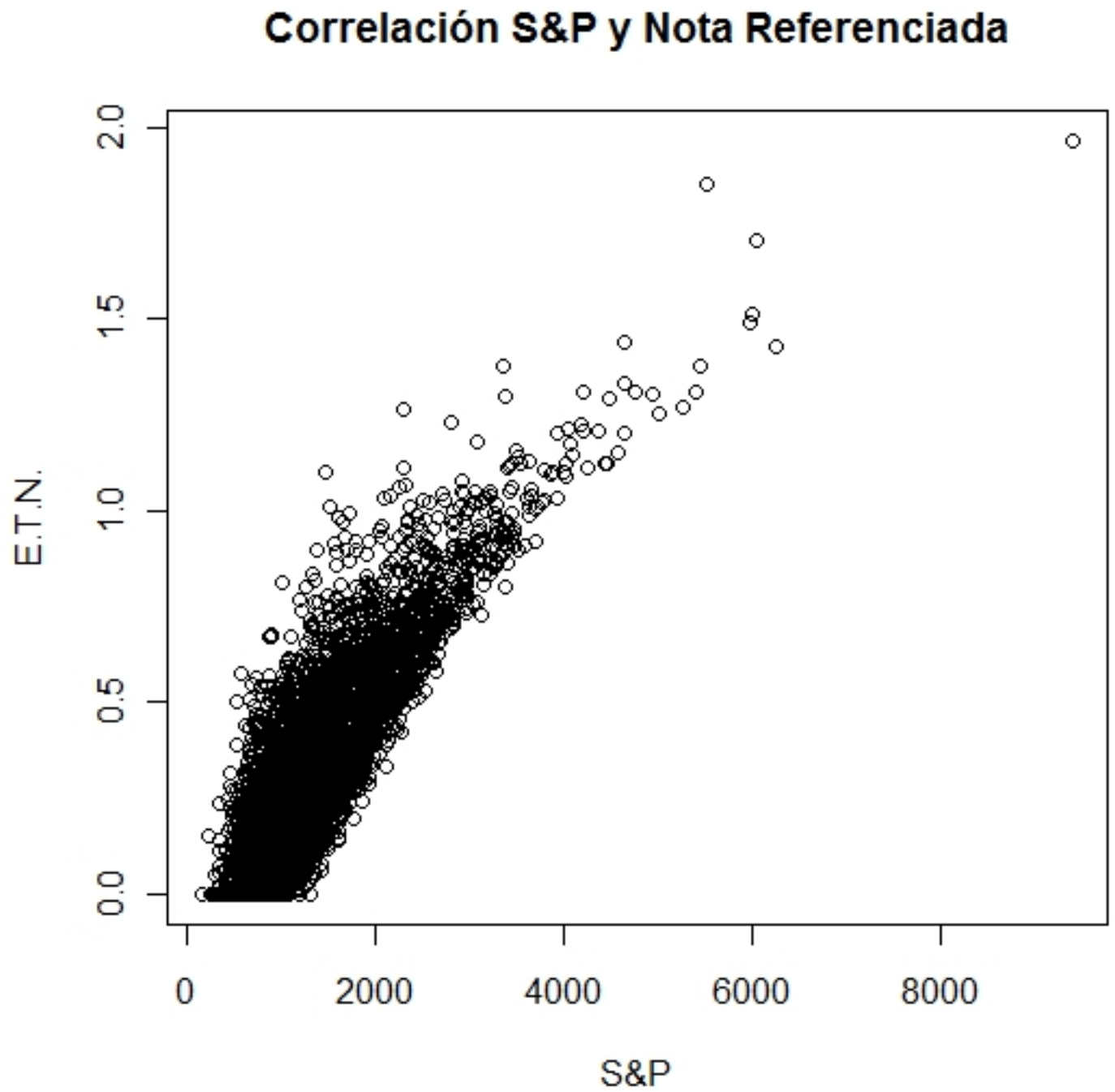
Para la implementación de muestreo por importancia, primero simulamos trayectorias de la volatilidad $\{v_{t_i}\}_{i=1,2,\dots,n}$ y para cada una de las mismas simulamos un número determinado de trayectorias del proceso de precios, recordando que dada la trayectoria de la volatilidad se tiene que la distribución del logaritmo de la trayectoria del precio es una normal multivariada, aplicamos la metodología descrita en la Sección 2.5, con la función de pérdida definida como al principio de esta sección. Finalmente la discretización de Euler se emplea como fue definida en el Capítulo 3. Los resultados se presentan a continuación para un tamaño de muestra de 1000.

	MC generalizado	Variables de Control	S E M	Discretización
Media	0.3120602	0.3196479	0.3113920	0.3517215
Desv. Est.	0.2548976	0.1272644	0.2548792	0.2680663

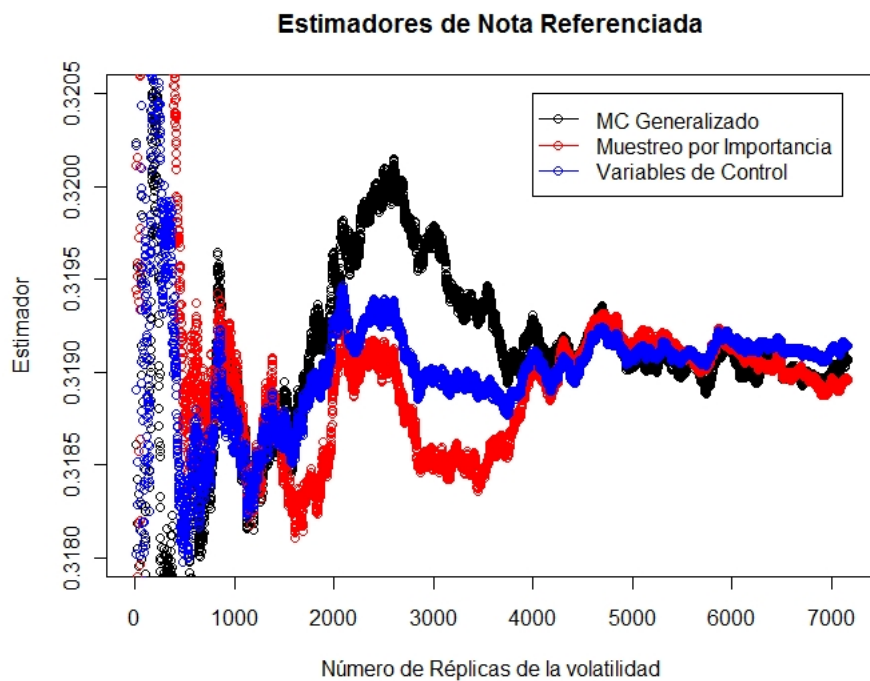
En la tabla, la desviación estándar es una estimación de la misma por muestra generada, es decir, para encontrar la varianza aproximada del estimador dividimos el valor “Desv. Est.” de la tabla entre la raíz cuadrada del número de muestras generadas, en este caso $\sqrt{1000}$. Podemos observar que el mejor desempeño lo muestra variables de control; para reducir el sesgo en este estimador generamos muestras independientes de los precios y los cupones para estimar b , y posteriormente calculamos la media y desviación estándar. Generalmente la distribución de los precios transformados en SEM no es la misma que la distribución de los precios originales, razón por la cual los estimadores suelen tener sesgo, sin embargo, nuestro derivado está en función de los rendimientos, y el rendimiento se preserva bajo las transformaciones de SEM, por lo que observamos resultados muy similares contra MC generalizado con este método. La estimación más pobre es arrojada por la discretización de Euler, en la cual también se observa un sesgo en relación a los demás estimadores. Mas aún, podemos observar la velocidad de convergencia de los estimadores de variables de control y muestreo por importancia en la siguiente gráfica.

Comparamos también los estimadores arrojados por la discretización de Euler, después de 2700 réplicas de la volatilidad y 100 del precio por cada realización de v , contra los resultados del Monte Carlo generalizado con el mismo tamaño de muestra, los estimadores se presentan gráficamente a continuación.

	MC Generalizado	Muestreo por Importancia
Media	0.3210437	0.325748
Desv. Est.	0.2554931	0.1977551



Cuadro 4.1:



Cuadro 4.2:

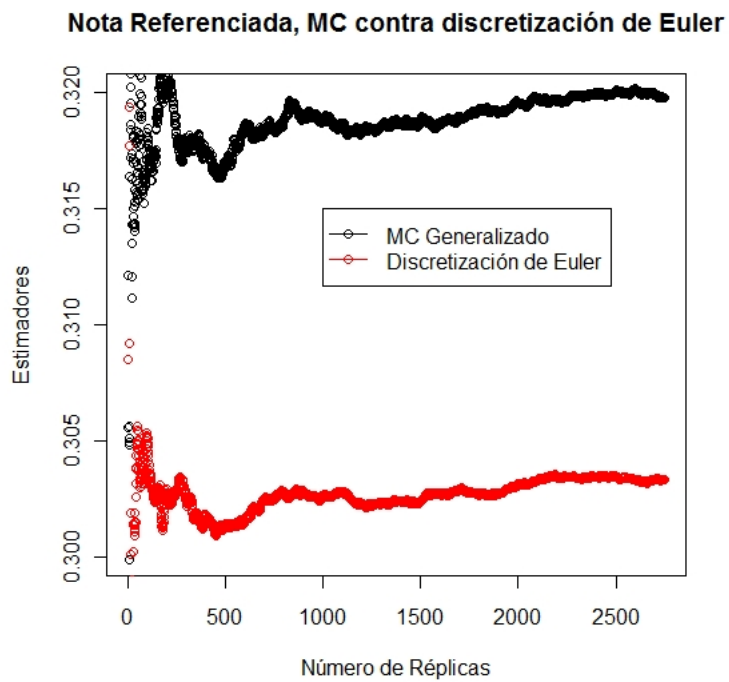


Figura 4.1.1:

Por la construcción del método de muestreo por importancia, no podemos compararlo directamente con los métodos anteriores, por lo que empleamos un esquema similar en el método Monte Carlo generalizado. Para cada caso generamos 50 trayectorias de los precios, por cada trayectoria de la volatilidad, mientras que generamos 20 trayectorias de v , haciendo un total de 1000 escenarios en el precio. Podemos observar que el desempeño del muestreo por importancia es apenas mejor que el MC generalizado, esto suele pasar con los estimadores de MI, ya que la distribución objetivo puede ser bimodal o tener una dispersión o sesgo muy diferentes a la distribución normal y no se tiene un control sobre estos elementos. Resumiendo, en ocasiones el método de muestreo por importancia puede mostrar una reducción muy acelerada en la varianza, mientras que en otras puede incluso aumentarla, adicionalmente, notemos que estamos empleando un cambio de medida en cada realización de v , debido a que hasta el día de hoy no existe un método de muestreo por importancia para el modelo de Heston, este es un problema abierto que podría ser atacado en investigaciones posteriores.

A continuación mostramos los resultados con un tamaño de muestra igual a 10000, los cuales siguen siendo congruentes con los comentarios hechos anteriormente.

	MC generalizado	VARIABLES DE CONTROL	S E M	Discretización
Media	0.3183125	0.3160844	0.3185341	0.3069077
Desv. Est.	0.2532887	0.1284078	0.2533245	0.2426282

	MC Generalizado	Muestreo por Importancia
Media	0.3169272	0.3271771
Desv. Est.	0.04606247	0.04321921

4.2. Derivados de tasa de interés

En esta sección consideramos tres ejemplos: corredor, collar y nota referenciada. El corredor y el collar son como los definidos en la Sección 3.2, mientras que la nota referenciada es de la forma descrita en la Sección 3.4. Análogamente a la sección anterior tenemos que determinar un método de estimación para los parámetros del modelo que usamos, que en este caso será el proceso CIR. Adoptamos como método de estimación la modelación martingala, la cual se basa en un principio muy básico sobre mercados de tasa de interés: la medida martingala elige el mercado. Este principio nos dicta tomar ventaja de la información disponible con fines de estimación.

Consideremos un bono con riesgo con tasa de interés estocástica, que sigue cierta dinámica; recordemos que el precio de dicho instrumento es una esperanza bajo la medida martingala. Por lo tanto, la estructura terminal del bono (el conjunto de precios para distintas fechas de maduración) contiene toda la información necesaria para determinar los parámetros del modelo, los cuales resumimos en los siguientes pasos para la estimación:

1. Definir un modelo para la tasa de interés $\{r_t\}_{t \geq 0}$, en base a un vector de parámetros θ .
2. Resolver la estructura terminal de precios, que es la función $F : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(t; r_0, \theta) := E \left[e^{-\int_0^t r_s ds} \right]$ es el precio del bono al día de hoy con un valor inicial de la tasa de interés r_0 , parámetros θ y fecha de maduración t .

3. Obtener los precios reales del bono $f(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ en el mercado.
4. Encontrar el vector de parametros θ^* , tales que bajo alguna norma $F(t_i; r_0, \theta^*)$ y $f(t_i)$ sean lo más cercanos posible.

Para emplear esta metodología tomamos los precios con maduración de 28, 91 y 182 días del CT del gobierno federal de México, los cuales fueron de 0.9966058, 0.9849138 y 0.9779468 respectivamente el día 22 de mayo del 2012. Tomamos la norma euclidiana de la distancia entre el precio teórico y el precio de mercado aprovechando que, el modelo CIR cuenta con expresiones cerradas para el precio de los bonos. Dados los parámetros (κ, θ, σ) , se tiene

$$F(t, r_0) = A_0(t)e^{-B(t)r_0},$$

donde

$$B(x) = \frac{2(e^{\gamma x} - 1)}{(\gamma + \kappa)(e^{\gamma x} - 1) + 2\gamma},$$

$$A_0(x) = \left[\frac{2\gamma e^{(\kappa+\gamma)(x/2)}}{(\gamma + \kappa)(e^{\gamma x} - 1) + 2\gamma} \right]^{2\kappa\theta/\sigma^2},$$

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}.$$

Para encontrar los puntos más cercanos en la norma, usamos la herramienta de solver de Microsoft Excel, la cual se basa en el algoritmo de Newton-Raphson, con lo que se encuentra $(\hat{\kappa} = 0,135094, \hat{\theta} = 0,05154805, \hat{\sigma} = 0,01)$.

En nuestro ejercicio consideramos un valor nominal de 1, cupones trimestrales y fecha de maduración de un año. Presentamos los resultados en la siguiente tabla, con un tamaño de muestra de 1000.

	MC generalizado	Variables de Control	Emparejamiento de Variables	
media	0.003409055	0.003162184	0.003288668	
Desv. Est.	0.004210631	0.003827606	0.00393223	

Como en el la sección anterior, el método que tiene un mejor desempeño es el de variables de control, en el cual tomamos el precio de un bono con fecha de maduración de un año como variable de control.

Adicionalmente, se probó el desempeño del método de discretización de Euler, sin embargo no tuvo resultados alentadores, ya que en algunos casos la tasa de interés tomaba valores negativos, lo que nos impedía seguir con la simulación. Este fenómeno se observa incluso cuando tratamos con un refinamiento de segundo orden del método de Euler.

Para el método de emparejamiento de variables, consideramos dos bonos con fechas de maduración t_i, t_{i+1} , con precios al día de hoy dados por

$$F(t_i, r) = E \left[e^{-\int_0^{t_i} r_s ds} \right],$$

$$F(t_{i+1}, r) = E \left[e^{-\int_0^{t_{i+1}} r_s ds} \right]$$

respectivamente. La tasa forward en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ es

$$r_i^f = \frac{\log(F(t_i, r)) - \log(F(t_{i+1}, r))}{t_i - t_{i+1}}.$$

Por otro lado, dada una muestra de tamaño n , de la trayectoria discreta de r , el estimador de esta tasa forward es

$$r_i^f = \frac{\log(\bar{F}(t_i, r)) - \log(\bar{F}(t_{i+1}, r))}{t_i - t_{i+1}},$$

donde

$$\bar{F}(t_k, r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\sum_{j=0}^{k-1} r_{t_j, i}(t_{j+1} - t_j)}.$$

De esta manera, se construye la siguiente transformación para la trayectoria de r

$$\tilde{r}_{t_j, i} = r_{t_j, i} + \frac{\log(F(t_i, r)) - \log(F(t_{i+1}, r))}{t_i - t_{i+1}} - \frac{\log(\bar{F}(t_i, r)) - \log(\bar{F}(t_{i+1}, r))}{t_i - t_{i+1}}.$$

Este método de emparejamiento es conocido como ajuste yield, debido a la similitud de la transformación con la definición de la tasa yield.

4.3. Consideraciones finales

En este ejercicio de tesis hemos tratado con el problema de la estimación de precios de productos estructurados. En principio definimos una introducción al problema, tratándolo de resaltar su importancia dentro del ámbito financiero. En este sentido podemos ver el impacto en diversos mercados, como son los mercados de acciones, divisas y capital.

Se expone el porqué se tiene la motivación de usar modelos de volatilidad estocástica, más aún se plantean ejemplos reales sobre esta aplicación. Cabe mencionar que no siempre un modelo de esta naturaleza es el más útil, sin embargo en este trabajo se cumple con resaltar su importancia y utilidad, extendiendo estas aplicaciones a precios de acciones, tasas de interés y modelos de riesgo de crédito entre otros. Asimismo, dichos modelos fueron usados para generar escenarios simulados, usándolos en el ejercicio de estimación Monte Carlo, como se describe en los capítulos 3 y 4. Con esto hemos cubierto los siguientes objetivos:

1. Exponer y estudiar el problema de la estimación de precios de productos estructurados.
2. Describir los modelos de volatilidad estocástica vigentes sobre activos subyacentes.
3. Proponer alternativas de estimación de precios por medio de algoritmos de simulación Monte Carlo.

Podemos describir esta tesis como una introducción al estado del arte sobre las aplicaciones de técnicas de simulación en finanzas. No se tiene un alcance de profundidad total sobre los temas más técnicos, sin embargo se presenta un abanico completo de herramientas potentes y

se plantean las bases necesarias para poder entender y desarrollar investigaciones e innovaciones futuras.

Como se ha expuesto ya en resultados anteriores en el presente trabajo, dentro de la teoría como la implementación de simulación en el contexto financiero se tienen diversos problemas abiertos. En particular nos enfrentamos a la limitante computacional en el algoritmo puente para simular trayectorias del modelo CIR, esta implementación y todas las usadas en esta tesis pueden ser solucutados a osuarez@cimat.mx. Se tiene también el problema abierto sobre cambio de medida en el modelos de Heston, (en general, modelos de volatilidad estocástica) ya que hasta ahora no existe una postura universalmente aceptada para comparar la eficacia entre distintos cambios de medida. En general, de manera práctica podrían usarse las técnicas expuestas aquí y algunas más que no se mencionan por la extensión y alcances de este trabajo, como herramientas de estimación en diversos productos y más aún fuera del ámbito financiero. Dichas implementaciones podrían ser también parte de extensiones y trabajos futuros.

Bibliografía

- [1] Aït-Sahalia, Y. & Kimmel, R. (2006) Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models. *Journal of Financial Economics*. Vol. 83 pp 413-452
- [2] Baldeaux, J., & Roberts D. (2012) Quasi- Monte Carlo methods for the heston model, arXiv:1202.3217v1
- [3] Björk, T. (1998) Arbitrage Theory in Continouou Time, Oxford, University Press.
- [4] Broadie, M. & Kaya, O. (2006) Exact Simulation of Stochastic Volatility and other Affine Jump Diffusion Processes. *Operations Research*. Vol. 54 No. 2 pp 217-231.
- [5] Boyle, P., Broadie, M. & Glasserman, P. (1997) Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 21 pp 1267-1321
- [6] Cox, J., Ingersoll, J. & Ross, S. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*. Vol. 53 No. 2 pp 285-408.
- [7] Devroye, L. (2002) Simulating Bessel random variables, *Statistics & Probability Letters*. Vol. 57 No. 3 pp 249-257
- [8] Duan, J. & Sinamoto. (1998) Empirical Martingale Simulation, *Management Science*. Vol. 44 No. 9 pp 1218-1233
- [9] Fabozzi, F., Davis, H. & Choudhry M. Introduction to Structured Finance (2006) Ed. Wiley.
- [10] Fiorentini, G., León, A., & Rubio G. (2001) Estimation and empirical performance of Heston's stochastic volatility model: the case of a thinly traded market, *Journal of Empirical Finance*. Vol. 9 pp 225-255
- [11] Frey, R. (1997) Derivative Asset Analysis in Models with Level-Dependent and Stochastic Volatility, Insurance: Mathematics and Economics. Vol. 21 No. 3 pp 253.
- [12] Glasserman, P. (2003) Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Ed. Springer.
- [13] Glasserman, P., Heidelberger, P., & Shahabuddin, P. (1999) Asymptotically optimal importance sampling and stratification for path dependent options, *Mathematical Finance* Vol. 9 pp 117-152

- [14] Glasserman, P., Heidelberger, P., & Shahabuddin, P. (1999) Importance Sampling in the Heath-Jarrow-Morton Framework, *The Journal of Derivatives* Vol. 7 No. 1 pp 32-50
- [15] Glasserman, P. & Kim, K. (2011) Gamma expansion of the Heston Stochastic Volatility Model. *Finance and Stochastics*. Vol. 15 No. 2 pp 267-296.
- [16] Haastrecht, A. & Pelsser, A. (2008) Efficient, almost exact simulation of the Heston stochastic volatility model, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. Vol. 31, No. 1
- [17] Henderson, V., Hobson, D., Howison & S., Kluge T. (2004) A comparison of option prices under different pricing measures in a stochastic volatility model with correlation, *Review of derivatives and research*. Vol. 8, No. 1 pp 5-25
- [18] Heston, S. (1993) A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency, *The Review of Financial Studies*. Vol. 6, No. 2 pp 327-343
- [19] Lancaster, B., Schultz, G. & Fabozzi, F. (2008) Structured Products and Related Credit Derivatives, *Ed. Wiley*
- [20] Makarov, R. & Glew, D. (2012) Exact simulation of Bessel diffusions, *Monte Carlo Methods and Applications*. Vol. 16, pp 283-306.
- [21] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt & V., Teugels, J. (1999) Stochastic processes for insurance and finance, *Ed. Wiley*.
- [22] Tavakoli, J. *Crédit Derivatives & Synthetic Structures* (2001) Ed. Wiley.
- [23] Tick, E. *Structured Finance Modeling with Object-Oriented VBA* (2007) Ed. Wiley.
- [24] Wong, B. & Heyde, C. (2006) On changes of measure in stochastic volatility models. *Journal of Applied Mathematics & Stochastic Analysis*. Vol. 2006 ID. 18130 pp 1-13.
- [25] Yuan, L. & Kalbfleisch J. (2000) On the Bessel distribution and related problems. *Annals of the institute of statistical mathematics*. Vol. 52 No. 3 pp 438-447