



CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS.

**MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN
MATEMÁTICAS APLICADAS.**

**ANÁLISIS DE LA APLICABILIDAD DE DIM_S A
CONJUNTOS FRACTALES.**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

CON ESPECIALIDAD EN
MATEMÁTICAS APLICADAS

P R E S E N T A:

HÉCTOR ALONSO MONTES LAMAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO JAVIER SOLÍS LOZANO.

Guanajuato, Gto. México.

Noviembre 2012

“La geometría fractal te hará ver todo de manera diferente... Te arriesgas a perder tu visión infantil de las nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, torrentes de agua, alfombras, ladrillos, y mucho más. Tu interpretación de estas cosas nunca volverá a ser exactamente la misma.”

“Fractal geometry will make you see everything differently... You risk the loss of your childhood vision of clouds, forests, galaxies, leaves, feathers, flowers, rocks, mountains, torrents of water, carpets, bricks, and much else besides. Never again will your interpretation of these things be quite the same.”

[Michael Barnsley, *Fractals Everywhere*, 1988]

Dedicatoria

A Soledad e Isaías.

Agradecimientos

A mi asesor, el Dr. Franciso Solís, por su paciencia y apoyo.

Al Dr. Rafael Herrera por su consejo y guía.

A mis profesores.

A mi familia.

Resumen

Se ha probado en [6] que los eigenvalores del operador asociado a las bases adaptivas de Galerkin están relacionados con la dimensión topológica local de una variedad suave que es atractora de un sistema dinámico. Con base en esos resultados, se ha propuesto en [5] un concepto de dimensión local, llamada \dim_S la cual se define a continuación.

Sea w un punto arbitrario sobre la variedad atractora de un sistema dinámico, la cual se supone que es suficientemente suave. La \dim_S se define por el siguiente límite (si existe)

$$\dim_S(w) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{\lambda_+ - O(\varepsilon^4)} - 2,$$

donde λ_+ es el mayor eigenvalor de cierto operador definido a partir de los puntos de un bola con radio ε y centro w . Más aún, se tiene la siguiente aproximación:

$$\dim_S(w) \approx \frac{\varepsilon^2}{\lambda_+} - 2.$$

En este trabajo se ha realizado un análisis de aplicabilidad de la \dim_S para conjuntos fractales. Dicho análisis se ha realizado de manera numérica y se ha comparado con los resultados obtenidos de su aplicación en superficies suaves. Como consecuencia de este análisis se ha proporcionado una interpretación del funcionamiento de \dim_S con la ayuda de conceptos estadísticos que se han descubierto relacionados con el procedimiento para calcularla. Además se han argumentando las razones por las que, a pesar de que está bien definida para superficies suaves, hay inconvenientes para su uso en conjuntos fractales.

Por otra parte, continuando en el interés de definir un concepto de dimen-

sión local para conjuntos fractales, se ha propuesto un concepto de medida local denominada *Weighted Boxcounting Dimension*, denotada WBD. Dicho concepto ha sido motivado por la necesidad de establecer una dimensión local para imágenes digitales con poca resolución. Este nuevo concepto de dimensión ha sido obtenido como una variación del concepto de dimensión por conteo de cajas, este último un índice global.

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vii
1. Presentación del problema	1
1.1. Objetivos	2
2. Fractales y sus dimensiones	3
2.1. Autosimilaridad	5
2.2. Escalamiento	7
2.3. Dimensión fractal	9
2.3.1. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch	9
2.3.2. Dimensión porconteo de cajas	11
2.4. Fundamento de \dim_S	12
2.4.1. Información geométrica local en \mathbb{R}^{n+k}	14
2.5. Cálculo de \dim_S	16
3. Análisis de \dim_S	19
3.1. Cálculo de \dim_S en la elipse	20

3.2.	Una curva menos simple	21
3.3.	\dim_S en curvas y conjuntos menos suaves	22
3.3.1.	La curva de Koch	23
3.3.2.	La curva <i>fudgeflake</i>	24
3.3.3.	El <i>polvo de Cantor</i>	25
3.4.	Variación de \dim_S respecto al ángulo	26
3.4.1.	Enfoque estadístico	27
4.	Medidas propuestas	33
4.1.	Introducción	33
4.2.	Weighted Boxcounting Dimension (WBD)	36
5.	Discusión y Conclusiones	43
5.1.	Discusión	43
5.2.	Conclusiones y trabajo futuro	44

Índice de figuras

2.1. Un objeto no fractal se vuelve un objeto muy simple si se magnifica lo suficiente para ser observado.	4
2.2. Al ser observado con mayor resolución un objeto <i>fractal</i> revela más detalle.	4
2.3. Autosimilaridad geométrica	5
2.4. Autosimilaridad estadística	6
2.5. Relación de escalamiento simple	8
2.6. Relación de escalamiento más general	8
2.7. La dimensión de Hausdorff.	10
2.8. Los eigenvectores de la matriz A representan los radios de la elipse y los eigenvalores el cuadrado de su longitud.	16
3.1. Convergencia de \dim_S en la elipse.	20
3.2. Convergencia de \dim_S en un segmento de elipse modificado . .	21
3.3. Gráfica de $\sin(4/x)$ y el punto de referencia.	22
3.4. Convergencia de \dim_S en el origen de la curva $\sin(4/x)$	23
3.5. La curva de Koch, la curva <i>fudgeflake</i> y el <i>polvo de Cantor</i> . . .	23
3.6. Convergencia de \dim_S en la curva de Koch.	24
3.7. Convergencia de \dim_S en la curva <i>fudgeflake</i>	25

3.8.	Convergencia de \dim_S en el <i>polvo de Cantor</i>	26
3.9.	Variación de \dim_S respecto al ángulo.	27
3.10.	Elipse. Comportamiento de eigenvalores.	29
3.11.	Segmento de elipse modificado. Comportamiento de eigenvalores.	30
3.12.	Curva $\sin(4/x)$. Comportamiento de eigenvalores.	30
3.13.	Curva de Koch. Comportamiento de eigenvalores.	31
3.14.	Curva fudgeflake. Comportamiento de eigenvalores.	31
3.15.	Polvo de Cantor. Comportamiento de eigenvalores.	32
3.16.	Comportamiento de eigenvalores.	32
4.1.	El origen en una imagen par y en una imagen impar.	34
4.2.	Cantidad de anillos en función de la escala considerada	35
4.3.	Deformación local alrededor de un punto.	38
4.4.	El triángulo de Sierpinski y el punto de referencia (centro)	39
4.5.	Cálculo de WBD para un punto en el triángulo de Sierpinski.	40
4.6.	WBD en todo el triángulo de Sierpinski.	41

Capítulo 1

Presentación del problema

Muchas formas en las estructuras naturales y fisiológicas son irregulares a tal grado que la geometría euclidea clásica no es apropiada para representarlas. Se presentan como fronteras de intercambio de sustancias o como redes ramificadas de transporte y distribución. La red vascular, la red cardiopulmonar, las estructuras en riñones y la red neuronal son ejemplos de algunas de ellas.

El estudio geométrico de tales estructuras fisiológicas no es simple. Usualmente se encuentran recubiertas por tejidos que dificultan el aislamiento requerido para realizar un análisis de ellas. Se utilizan por eso métodos indirectos de observación como las angiografías, en las cuales por medio de rayos X se plasman las imágenes de estas estructuras en archivos digitales.

Este tipo de conjuntos, complejos porque no son formas regulares de la geometría, como líneas, curvas, polígonos, pertenecen a una categoría de conjuntos denominados *fractales*, los cuales serán descritos posteriormente en este documento.

Algunas propiedades extensivas como la longitud, área, volumen, de un conjunto fractal son inútiles para describirlos adecuadamente, porque pueden tener el valor cero o infinito. Por eso es necesario un índice diferente. Para todos los conjuntos fractales existe una cantidad relacionada con ellos, de manera global, llamada *dimensión fractal* que ayuda a explicar más adecuadamente algunas de sus características.

Para algunas estructuras fisiológicas, la dimensión fractal correspondiente a un estado sano resulta alterada en caso de enfermedad. Por ejemplo, Rodríguez[8] expone cómo en enfermedad cardiovascular obstrusiva la variabilidad de la dimensión fractal entre sístole y diástole es diferente según la gravedad del caso. En otros casos se ha observado que la dimensión fractal de estructuras vasculares afectadas por enfermedades como cáncer cambia respecto a la dimensión de estructuras consideradas sanas.

En la búsqueda de una relación entre enfermedad y la variación de la dimensión fractal de tales estructuras fisiológicas se ha creído conveniente considerar un enfoque local para analizar las deformaciones y variaciones geométricas.

Para este análisis local de las estructuras se ha considerado la posibilidad de usar una cantidad, referida en este documento como dim_S , cuyo origen y justificación se explica posteriormente, que recupera con información local la dimensión topológica de conjuntos suaves[5]. Si el funcionamiento de dim_S es factible de ser extendido a conjuntos fractales, se espera que esta cantidad pueda devolver un valor no entero que podría ser interpretado como una dimensión local.

Sin embargo, dado que las estructuras fractales tienen esencialmente un tipo de geometría distinto a la geometría de los conjuntos suaves, es necesario analizar primero la aplicabilidad de dim_S a conjuntos no suaves.

En este trabajo se analiza la aplicabilidad a los conjuntos fractales de la cantidad dim_S y se muestran los resultados de los experimentos realizados con tal fin.

1.1. Objetivos

- Entender el funcionamiento de la cantidad dim_S e identificar su significado.
- Analizar su aplicabilidad a conjuntos fractales.
- Proponer una medida radial local para imágenes digitales con poca resolución.

Capítulo 2

Fractales y sus dimensiones

Algunos objetos en la naturaleza poseen estructura que es demasiado irregular en términos de la geometría usual. Esta es la observación inicial de B. Mandelbrot en la introducción de su obra *The Fractal Geometry of Nature*:

“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son círculos y el ladrido no es suave, ni el relámpago viaja en línea recta”

Esta cita señala ejemplos de este tipo de objetos: los perfiles de montañas o de costas, las estructuras ramificadas de transporte o distribución de sustancias; son ejemplos de conjuntos denominados *fractales*.

El término *fractal* etimológicamente significa *quebrado, irregular*. Se usa para describir objetos que son ordinariamente mucho más complejos que los objetos con formas regulares de la geometría usual y que no encuentran en ésta, un marco para ser representados y descritos adecuadamente. Esta dificultad se debe esencialmente a que al ser magnificados, o equivalentemente, al ser observados a mayor resolución, revelan rasgos cada vez más finos.

Para presentar el concepto de objeto fractal es útil señalar las diferencias que tiene éste con un objeto no fractal.

Un objeto no fractal, aún teniendo apariencia irregular, se vuelve un objeto muy simple si se magnifica lo suficiente para ser observado (Figura 2.1).

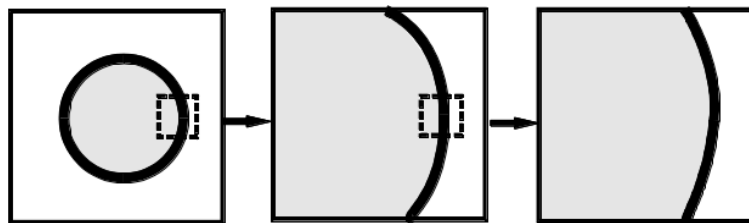


Figura 2.1: Un objeto no fractal se vuelve un objeto muy simple si se magnifica lo suficiente para ser observado.



Figura 2.2: Al ser observado con mayor resolución un objeto *fractal* revela más detalle.

Las propiedades de un objeto *no fractal*, al ser examinadas a una mayor resolución no muestran más detalle. Se dice entonces que tales objetos tienen *una escala característica*: la magnitud del menor valor de la propiedad que está siendo medida o examinada (longitud, área, volumen por ejemplo). Cuando se mide tal propiedad usando una unidad de medida que es menor que su escala característica, todos los detalles que esa propiedad posee están siendo considerados, y por tanto las mediciones a esta resolución determinan los valores correctos de la propiedad (longitud, área, volumen).

Por otra parte, los valores de las propiedades de un objeto *fractal* no tienen una escala característica; cuando se miden los valores de una propiedad de un fractal con un instrumento más y más sensible, es decir, con mayor resolución, se incluyen más de sus rasgos finos, reconociéndose así cada vez más información, lo cual se traduce en el registro de correcciones al valor medido a escalas más burdas, menos finas. Se dice entonces que el objeto tiene detalle en múltiples escalas de magnitud (Figura 2.2). Esto significa que al magnificar una y otra vez una parte del objeto, algunos detalles que antes no podían ser observados se vuelven visibles, y por tanto aportan información que contribuye al valor de la propiedad que está siendo medida.

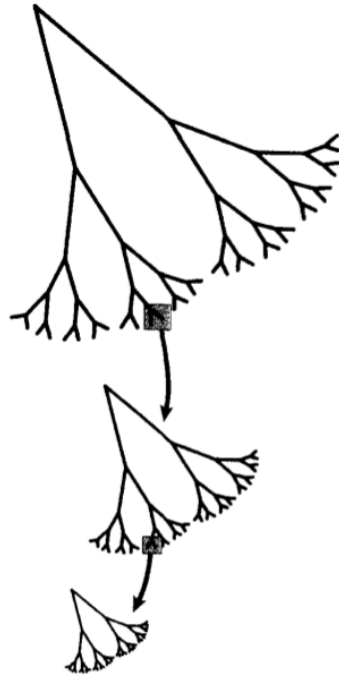


Figura 2.3: Autosimilaridad geométrica

Tener detalle a lo largo de múltiples escalas de magnitud distingue a un objeto fractal de uno que no lo es. Ser autosimilar y poseer escalamiento son otras propiedades distintivas de la fractalidad de un objeto, todas ellas relacionadas.

2.1. Autosimilaridad

Autosimilaridad es el término utilizado para indicar que las partes de un objeto se parecen al objeto mismo y éstas a su vez tienen subpartes que se parecen a ellas. Cuando las subpartes son idénticas al objeto original, pero más pequeñas en tamaño, se dice que las partes pequeñas son *geométricamente similares* al objeto, o equivalentemente, que el objeto posee autosimilaridad geométrica (Figura 2.3).

En la naturaleza usualmente no se presentan copias exactas de un objeto. En cambio, muchas formas son estructuras cuyas subpartes son *del mismo*

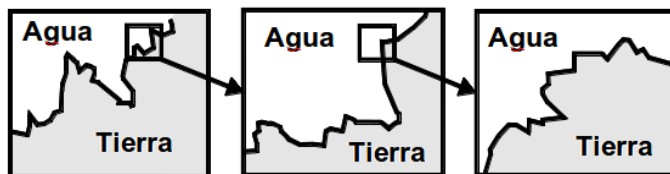


Figura 2.4: Autosimilaridad estadística

tipo que las partes mayores, con propiedades estadísticas geoméricamente similares, es decir proporcionales, a las propiedades estadísticas de las partes pequeñas (Figura 2.4).

Los fractales encontrados en la naturaleza difieren de los fractales matemáticos en dos maneras importantes:

- i) La autosimilaridad es aproximada o estadística, pues muchos procesos son los que dan forma o esculpen a un fractal estadístico, mientras que los fractales matemáticos son generados por un solo proceso.
- ii) Debido a que las fuerzas responsables para generar una estructura fractal son efectivas solamente en cierto rango de distancias, la autosimilaridad se extiende solamente sobre un rango limitado de escalas. En palabras de West[7]:

“En un fractal matemático, la estructura proliferante procede desde la escala de referencia de uno mismo en varias direcciones sin límite. En un fractal natural, uno invariablemente encuentra las escalas menores y mayores porque el mecanismo que controla el sistema cambia en los extremos, en los límites de lo muy pequeño y lo muy grande. Si el concepto de fractal va a ser útil, debe haber un dominio sustancial que es libre de escala y es sobre esta región que el fractal natural imita al fractal matemático.”

Formalmente, un objeto presenta autosimilaridad, respecto a una propiedad Q , si el valor $Q(r)$ de la propiedad medido a resolución r es proporcional al valor de $Q(ar)$ medido a resolución ar , es decir, si

$$Q(r) = kQ(ar), \quad \text{donde } k \text{ es una constante} \quad (2.1)$$

y el objeto tiene autosimilaridad estadística si la propiedad Q es una propiedad estadística.

Las propiedades de un objeto están descritas por el número de piezas de cada tamaño que conforman al objeto. La función que dice cuántas piezas de cada tamaño conforman el objeto es llamada *función de densidad de probabilidad (pdf)*. Formalmente, existe autosimilaridad estadística si la pdf medida a resolución r es geoméricamente similar, es decir, tiene la misma forma, que la pdf medida a resolución ar .

En la literatura la expresión más corta “autosimilaridad” se usa para denotar la autosimilaridad estadística de objetos biológicos en el espacio o de procesos en el tiempo, y se reserva el término “autosimilaridad geométrica” para los objetos matemáticos.

2.2. Escalamiento

La propiedad de autosimilaridad implica que existe una relación entre rasgos considerados usando una resolución espacial y los rasgos considerados usando otras resoluciones. Las mediciones a mayor resolución incluyen más de las piezas pequeñas de un fractal, de aquí que el valor medido de una propiedad dependa de la resolución usada al hacer la medición.

La manera en que el valor de una propiedad depende de la resolución se llama *relación de escalamiento*. La forma matemática de autosimilaridad dada por la expresión (2.1) determina la forma de la relación de escalamiento, que puede tener una de dos formas posibles: la expresión

$$Q(r) = Cr^d, \quad (2.2)$$

donde C y d son constantes, es la forma más simple de la relación de escalamiento y es llamada una *ley de potencias*. Esta relación es característica de las propiedades fractales. La relación entre las cantidades $\log Q$ y $\log r$ es lineal (Figura 2.5).

Una forma más general que la relación 2.2 está dada por la expresión

$$Q(r) = Cr^d f\left(\frac{\log r}{\log a}\right), \quad (2.3)$$

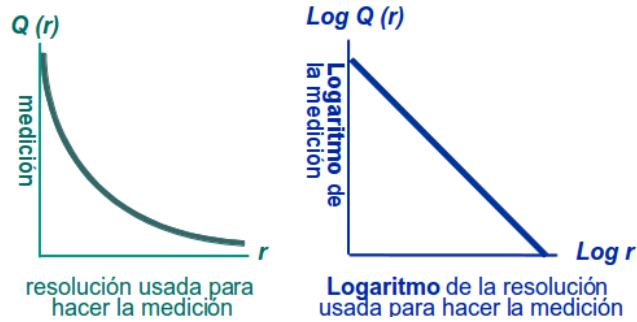


Figura 2.5: Relación de escalamiento simple

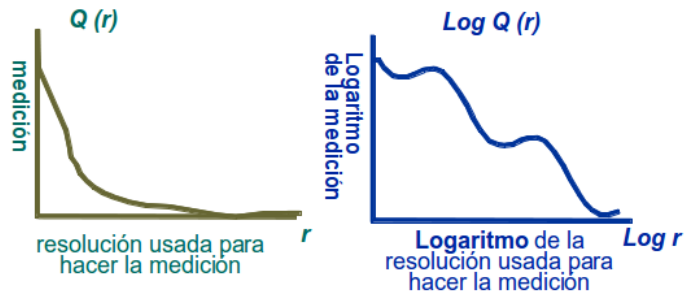


Figura 2.6: Relación de escalamiento más general

donde f es una función periódica tal que $f(1+x) = f(x)$, y C, d son constantes (Figura 2.6).

Debido a esta dependencia entre un valor medido y la resolución usada, una sola medición resulta insuficiente para caracterizar a los objetos o procesos fractales. Si realmente se desea ser específico, es necesario indicar la relación de escalamiento en lugar de indicar únicamente un solo valor. Además, también es necesario indicar el rango de escalas dentro del cual esa relación de escalamiento se cumple.

En este sentido, se requiere un indicador apropiado para describir conjuntos fractales. Puesto que propiedades extensivas del conjunto como longitud y área de un fractal pueden ser cero o infinito, no son apropiadas para describirlos o caracterizarlos. Un indicador más adecuado es la dimensión fractal, que se define enseguida. Formalmente la dimensión define a un fractal:

Definición 2.1 (Fractal). Un conjunto F se dice fractal si su dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica.

Se da a continuación el concepto de dimensión fractal.

2.3. Dimensión fractal

La dimensión fractal, una generalización de la dimensión euclideana usual cuyos valores son enteros, es un índice fraccionario, que es cuantitativo de las propiedades de autosimilaridad y escalamiento de un fractal. *Indica cuántas piezas nuevas se vuelven visibles cuando son observadas a una resolución más fina.*

De entre muchos conceptos de dimensión fractal, uno de los más utilizados por su simplicidad de cálculo es la dimensión obtenida mediante el método de conteo de cajas (the box counting dimension) y la *similarity dimension* para fractales matemáticos con autosimilaridad geométrica. Estas son dos de una multitud de variaciones de la noción de dimensión. A diferencia de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, más adecuada para el análisis matemático, la dimensión por conteo de cajas resulta ser en la práctica más fácilmente estimable.

El escalamiento está representado de cierta manera por la dimensión fractal, denotada en este documento con el símbolo D , la cual *es interpretada como un índice de la eficiencia con la que el fractal llena el espacio en el que se encuentra incrustado.*

2.3.1. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

La *medida de Hausdorff s-dimensional* generaliza las ideas familiares de longitud, área y volumen. Se define $\{U_i\}$ una δ -cubierta de un conjunto F como una colección (contable) de conjuntos de diámetro a lo más δ que cubre a F . Se define

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \text{donde } \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F \right\} \quad (2.4)$$

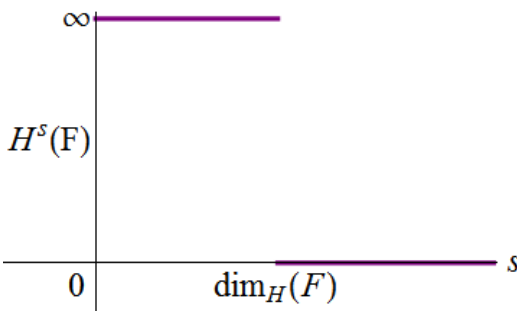


Figura 2.7: La dimensión de Hausdorff.

y donde el ínfimo se toma entre todas las δ -cubiertas de F . Entonces la *medida s -dimensional de Hausdorff* queda establecida como

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F). \quad (2.5)$$

La medida s -dimensional de Hausdorff es en efecto una medida en el sentido matemático.

Definición 2.2. A partir de la medida s -dimensional, la *dimensión de Hausdorff-Besicovitch del conjunto F* es

$$\dim_H(F) := \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}, \quad (2.6)$$

y por lo tanto,

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & s < \dim_H(F) \\ 0, & s > \dim_H(F) \end{cases}$$

Para $s = n$ entero, la medida s -dimensional de Hausdorff coincide con el volumen n -dimensional usual, i.e. la medida n -dimensional de Lebesgue.

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch es señalada como la *dimensión fractal*. Esta definición es la más conveniente para propósitos del análisis matemático, aunque es difícil de estimar. En la práctica se utiliza la dimensión por conteo de cajas, la cual es computacionalmente más simple y coincide con la dimensión de Hausdorff-Besicovitch para cierta categoría de objetos.

2.3.2. Dimensión por conteo de cajas

La dimensión fractal obtenida por este método es llamada *box counting dimension* o también *capacity dimension*. El procedimiento consiste en medir la propiedad *número de cajas* $N(l)$ (cubos en el caso tridimensional) de lado l necesarias para cubrir al conjunto u objeto de interés, digamos F . Si esta cantidad de cajas obedece una ley de potencias de la forma

$$N(l) \sim C(l)^{-D}, \quad (2.7)$$

entonces,

$$\log N(l) \sim \log C + D \log(1/l).$$

Definición 2.3 (Dimensión por conteo de cajas). Si el límite en la expresión anterior existe, la *dimensión por conteo de cajas* del conjunto F se define

$$D = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log N(l) - \log C}{\log(1/l)}. \quad (2.8)$$

Es decir, está representada por la pendiente de la gráfica $\log(1/l)$ vs $\log N(l)$.

En la práctica, para los distintos valores de l se obtiene $N(l)$ y se aplica un ajuste de mínimos cuadrados a los datos representados en una gráfica doble logarítmica (Figura 2.5).

Las cajas representan el instrumento de medición, el tamaño de ellas representa la resolución con la que se mide, y la propiedad siendo medida está representada geoméricamente por el área (o volumen) del conjunto.

Cuando se dice que un conjunto en el plano posee una dimensión de 1.3, por ejemplo, significa que sus propiedades están “entre” las propiedades de una curva que tiene dimensión 1, y una superficie de dimensión 2. El número de cubos de lado l que interseca a un conjunto es una indicación de qué tal irregular es el conjunto o cuán esparcido está cuando se examina a una escala l . En palabras de Falconer[2], *la dimensión refleja qué tan rápido se desarrollan las irregularidades cuando l tiende a cero.*

El término “dimensión” tiene muchas conceptualizaciones distintas que lo hacen frecuentemente sobreutilizado con significados no equivalentes. En general no existe una definición que incluya de manera adecuada a todas

ellas. Todas estas conceptualizaciones están basadas en última instancia en la idea de dimensión de un espacio euclídeo: un punto es 0-dimensional, una línea es 1-dimensional, una superficie es 2-dimensional, etc.

2.4. Fundamento de \dim_S

La teoría que fundamenta a la cantidad \dim_S es expuesta en esta sección, mientras que el procedimiento para calcularla es explicado en la siguiente. En lo sucesivo se usarán los siguientes conceptos.

Definición 2.4 (Variedad). Una *variedad* es un espacio topológico que es localmente euclideo, es decir, que alrededor de cada punto hay una vecindad que es topológicamente igual que la bola unitaria en \mathbb{R}^n .

Definición 2.5 (Espacio fase). Un espacio en donde están representados todos los estados posibles de un sistema, con cada estado posible asignado a un único punto en el espacio.

En el estudio del comportamiento asintótico de órbitas se observa que muchos sistemas dinámicos exhiben, después de un comportamiento transiente, un movimiento asintótico que cae sobre un conjunto que es atractor, subconjunto del espacio fase, y que además está contenido en una variedad de dimensión finita.

Al analizar estos conjuntos atractores, dos propiedades básicas son consideradas: su dimensión local, y su forma geométrica local. Para el estudio de ellas se considera encajar el conjunto atractor, que se asume es una variedad suave, en un conjunto de parches, y en cada uno de ellos se encuentra un sistema coordinado, que se considera óptimo en el sentido que minimiza el error de la proyección de las órbitas en este sistema.

Definición 2.6 (Medida invariante). Si (X, \mathcal{A}) es un espacio medible y f es una función medible de $f : X \rightarrow X$. Una medida μ en este espacio se dice *invariante bajo f* si, para cada conjunto medible $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A). \quad (2.9)$$

Para lo que sigue, considérese un sistema dinámico que actúa en un espacio separable de Hilbert H y que cuenta con un atractor X que a su vez tiene una medida invariante μ , y además, que X es una variedad con $\text{supp } \mu = X$.

Sea cualquier base ortonormal $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$. Para cada $h \in H$ defínase el error resultante de proyectar la órbita de h en los primeros k elementos de la base, de la siguiente manera:

$$e_k(h, t) \equiv \phi(h, t) - \sum_{i=1}^k \langle \phi(h, t), b_i \rangle b_i \quad (2.10)$$

Se pretende encontrar una base que tal que

$$e_k(h) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T \|e_k(h, t)\|^2 dt \quad (2.11)$$

sea mínimo en todas las bases, para todo $k \geq 1$ y todos los puntos h . Si se asume ergodicidad, el tiempo promedio es igual casi en todas partes al promedio espacial. Intercambiando entonces las integrales bajo esta asunción, la solución buscada está dada por los eigenvalores del operador acotado y autoadjunto $\gamma : H \rightarrow H$, definido

$$\gamma(b) = \int_X \langle h, b \rangle h d\mu. \quad (2.12)$$

Si se asume compacidad se obtiene una base de eigenvectores, conocida como *base de Galerkin adaptable*. Esta base es global.

Por ejemplo, si el atractor consiste en una elipsoide, su base de Galerkin consiste en las direcciones de los ejes principales del elipsoide. Si se requiere información local, dicha base no es la adecuada ya que es la misma para todos los puntos del atractor.

Para obtener una base local se considera una vecindad de un punto w en la variedad, una bola de radio ε con centro en w y se define una medida $\mu_{w,\varepsilon}$

$$\mu_{w,\varepsilon}(A) \equiv \frac{\mu(w + A)}{\mu(B_\varepsilon(w))}.$$

y como en el caso global, la base local, conocida como *base de Galerkin local*, serán los eigenvectores del operador

$$\Gamma^\varepsilon(b) = \int_X \langle h, b \rangle h \chi_\varepsilon(h) d\mu_{w,\varepsilon},$$

donde χ_ε es la función característica de $B_\varepsilon(w)$.

De manera específica se tomará un caso particular de lo anterior. A decir, considérese que H es de dimensión finita con una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{x_1, \dots, x_n\}$ su sistema coordenado. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que x_0 es el origen. Si se considera enfocarse solamente en aquellos sistemas dinámicos cuya medida invariante restringida al atractor es la medida de Lebesgue invariante, entonces el operador Γ^ε es una matriz real simétrica semipositiva Γ_{ij}^ε dada por

$$\Gamma_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{\lambda(B_\varepsilon(0))} \int_{B_\varepsilon(0)} x_i x_j \lambda x. \quad (2.13)$$

Para el ejemplo cuando el atractor consiste en una elipsoide, su base local de Galerkin consiste en los elementos de la base de Frenet (vectores tangentes y normales).

2.4.1. Información geométrica local en \mathbb{R}^{n+k} de variedades inmersas en espacios euclidianos de dimensión finita

Sea M una variedad regular de dimensión k incrustado en \mathbb{R}^{n+k} . Puesto que el interés está en el comportamiento local, se puede asumir que la variedad está cubierto por una simple función $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$.

Si x_1, x_2, \dots, x_k son coordenadas locales en M y y_1, y_2, \dots, y_{n+k} son coordenadas en \mathbb{R}^{n+k} , X podría estar dado por un conjunto de ecuaciones $y_i = y_i(x_1, \dots, x_k)$, $i = 1, \dots, n+k$. Por regularidad los vectores $\partial X / \partial x_i$ forman una base del espacio tangente TX en el punto $X(x)$.

Para poder calcular los eigenvalores de Γ^ε escogemos coordenadas de tal manera que

$$\begin{aligned} y_i &= x_i, & i &= 1, \dots, k \\ y_j &= f_j(x_1, \dots, x_k), & j &= k+1, \dots, n+k \end{aligned}$$

con $\nabla f_j(0, \dots, 0) = \mathbf{0}$ y $f_j(0, \dots, 0) = 0$, esto es, escogemos el espacio tangente como espacio parámetro con el espacio tangente horizontal. Dado que $\nabla f_j =$

$\mathbf{0}$, la parte principal (los primeros términos en la expansión de Taylor) de f_j es al menos cuadrático.

Así, si ε es suficientemente pequeño, es posible aproximar la variedad por su espacio tangente. Entonces la región de integración se convierte en

$$B_\varepsilon(0) \equiv \{(x_1, \dots, x_k) | x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq \varepsilon^2\}.$$

Para este caso, la matriz simétrica Γ^ε es una matriz $(n+k) \times (n+k)$ con entradas

$$\Gamma_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon(0))} \int_{B_\varepsilon(0)} y_i y_j d\mu. \quad (2.14)$$

Lema 2.7. La matriz simétrica Γ^ε puede escribirse como

$$\Gamma^\varepsilon = \varepsilon^2 \Gamma_2 + \varepsilon^4 \Gamma_4 + \dots$$

donde Γ_2 es una matriz diagonal. Más aún

$$\Gamma^\varepsilon = \begin{bmatrix} I_{k \times k} & 0_{k \times n} \\ 0_{n \times k} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \left(\frac{\varepsilon^2}{k+2} \right) + R_\varepsilon \quad (2.15)$$

donde R_ε es al menos de orden ε^4 .

A partir de este resultado los primeros k son evidentes:

$$\lambda_1^\varepsilon = \lambda_2^\varepsilon = \dots = \lambda_k^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{k+2} + O(\varepsilon^4), \quad (2.16)$$

y los eigenvectores $V_i^\varepsilon, i = 1, \dots, k$ están dados por

$$V_i^\varepsilon \equiv (c_1^i, c_2^i, \dots, c_k^i, 0, \dots, 0) + O(\varepsilon)$$

donde $V_i^o V_j^o = \delta_{ij}$. Se obtienen algunas conclusiones inmediatas:

1. La base límite $V_1^o, V_2^o, \dots, V_k^o$, genera el espacio tangente en el origen. Los elementos de la base no están determinados de manera única.
2. Hay una propiedad muy interesante. Los eigenvalores que escalan como ε^2 tiene un término principal que depende solamente de la dimensión de la variedad. Esto es un resultado útil porque para conocer la dimensión de la variedad no tenemos que contar todos esos eigenvalores, sino que es necesario calcular solamente un eigenvalor.

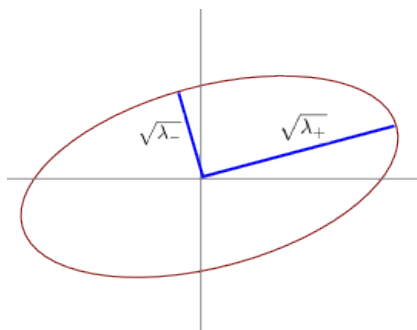


Figura 2.8: Los eigenvectores de la matriz A representan los radios de la elipse y los eigenvalores el cuadrado de su longitud.

2.5. Cálculo de \dim_S

De acuerdo a los conceptos anteriores (Ec. (2.16)) y los resultados numéricos en [5], para estimar localmente la dimensión topológica de una superficie en un punto w , considérese una vecindad V de radio ε centrada en w y selecciónese una muestra con los puntos dentro esa vecindad.

Con esa muestra, digamos de tamaño m , de puntos recolectados $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^m$ constrúyase la matriz M de la siguiente manera

$$M = [X, Y], \text{ con las columnas } X = (x_i), Y = (y_i) \quad (2.17)$$

y entonces fórmese la matriz A como

$$A = \frac{1}{m} M^T M \quad (2.18)$$

la cual resulta ser la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \|X\|^2 & X^T Y \\ Y^T X & \|Y\|^2 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Se observa que la matriz A es simétrica, por lo que existe un conjunto linealmente independiente de eigenvectores ortonormales con eigenvalores reales que la diagonalizan. En un sistema coordenado que tenga como base estos eigenvectores la matriz A representa una transformación de escalamiento en dos direcciones perpendiculares.

Mientras que los eigenvectores de la matriz A representan a los radios de una elipse en la Figura 2.8, los eigenvalores, dados por la expresión,

$$\lambda_{\pm} \equiv \lambda_{\pm}(\varepsilon, x) = \frac{(a + d) \pm \sqrt{4b^2 + (a - d)^2}}{2} \quad (2.20)$$

representan el cuadrado de las longitudes de esos vectores.

Según los resultados en los fundamentos de dim_S ,

$$\lambda_+(\varepsilon, w) = \frac{\varepsilon^2}{D + 2} + O(\varepsilon^4) \quad (2.21)$$

donde D es la dimensión topológica de la superficie suave cerca del punto w .

Dado que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_+(\varepsilon, x)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{D + 2}, \quad (2.22)$$

a partir de estas expresiones se desea definir una dimensión local en w . Si se denota a esta nueva dimensión local en el punto w como $\text{dim}_S(w)$, entonces

$$\text{dim}_S(w) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{\lambda_+ - O(\varepsilon^4)} - 2. \quad (2.23)$$

Dentro de una bola de radio ε la aproximación correspondiente para estimar dim_S es

$$\text{dim}_S(w) \approx \frac{\varepsilon^2}{\lambda_+} - 2. \quad (2.24)$$

Según los fundamentos anteriores, para conjuntos suaves dim_S puede recuperar localmente el valor de la dimensión topológica alrededor de w . Recordando que la dimensión topológica tiene valor entero, y que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch coincide con ella para conjuntos no fractales, se imagina que al calcular dim_S en conjuntos fractales, sería posible obtener un valor numérico fraccionario, que podría interpretarse como una dimensión fractal local.

El siguiente capítulo expone resultados numéricos obtenidos al realizar experimentos numéricos para comprobarlo.

Capítulo 3

Análisis de \dim_S

De acuerdo con lo expuesto anteriormente la cantidad \dim_S recupera de manera local la dimensión topológica *en superficies suaves*, sin embargo los conjuntos fractales no son conjuntos suaves, sino todo lo contrario. Las curvas fractales poseen derivadas en ninguna parte.

Con el objetivo de dilucidar el funcionamiento de esta cantidad \dim_S e indagar cuáles son los aspectos que mide, se han realizado algunos experimentos numéricos en algunos conjuntos de puntos, algunas curvas suaves y en otras no suaves. El procedimiento llevado a cabo es aquél descrito en la Sección 2.5, tomando al origen como punto de referencia en todos los casos:

- i) En la curva o conjunto se fija un punto de referencia (el origen).
- ii) Para cada ε se determinan todos los puntos que se encuentran dentro de una ε -vecindad centrada en el origen.
- iii) Con ellos se forma la matriz M y la matriz $A = (1/m)M^T M$ cuyo mayor eigenvalor λ_+ permitirá estimar la cantidad \dim_S mediante la relación

$$\dim_S \approx \frac{\varepsilon^2}{\lambda_+} - 2. \quad (3.1)$$

Enseguida se exponen los resultados numéricos y gráficos que han sido obtenidos en la implementación de estos experimentos.

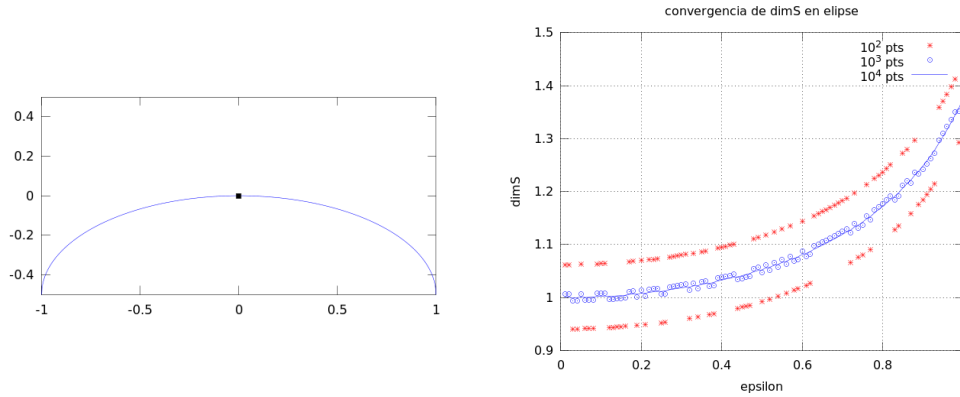


Figura 3.1: Izq: El punto de referencia y el segmento de elipse considerado. Der: Convergencia de dim_S respecto al radio de la vecindad (epsilon) en la elipse.

3.1. Cálculo de dim_S en la elipse

Se considera un segmento de elipse como se muestra en la Figura 3.1 y el origen como punto de referencia, recolectando en cada vecindad de radio ε una muestra de puntos y calculando con ellos la cantidad dim_S según el procedimiento antes mencionado.

La implementación se ha realizado de tal manera que el tamaño de la muestra sea constante en cada ε , es decir, aunque el radio de la vecindad disminuya, el número de puntos seleccionados en cada epsilon-vecindad es el mismo.

La Figura 3.1 muestra que la convergencia de dim_S respecto a epsilon se verifica. Se observa una clara tendencia a converger hacia el valor de la dimensión topológica de la curva. Nótese que esta estimación tiene mayor exactitud cuando es mayor la cantidad de puntos en la muestra. La dimensión local estimada es 1, lo cual era esperado según [5], porque el conjunto considerado es un segmento de una curva suave.

Modificando el segmento de elipse anterior se obtiene el conjunto de la Figura 3.2, para el cual se observa un comportamiento convergente semejante al observado en la elipse. Estos dos conjuntos son evidentemente curvas suaves. Enseguida se toma en cuenta un conjunto que ya no es, desde el punto de vista de suavidad, tan simple como los dos anteriores pues es suave

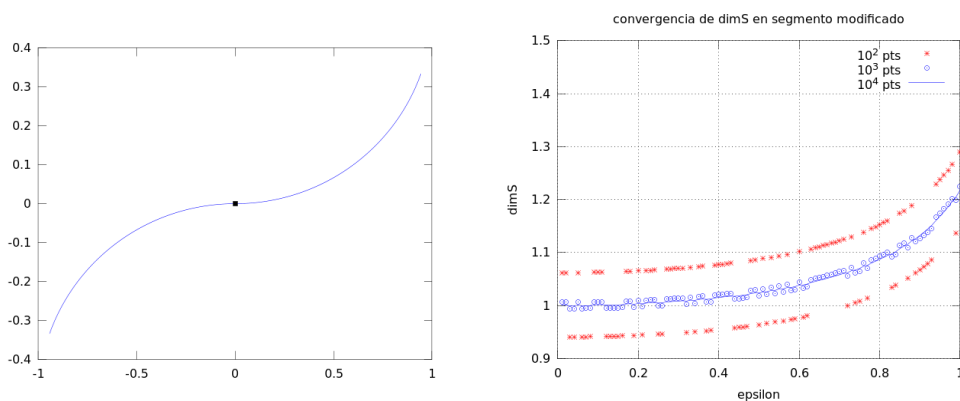


Figura 3.2: Izq: El punto de referencia y el segmento de elipse modificado. Der: Convergencia de \dim_S respecto al radio de la vecindad (epsilon) en este segmento.

en todas partes, excepto en el origen, donde tiene una singularidad.

3.2. Una curva menos simple

Considérese la siguiente curva con una singularidad en el origen y suave en todos los demás lados; el conjunto es la gráfica de la función $f(x) = \sin(4/x)$ (Figura 3.3). La gráfica de esta curva oscila con mayor frecuencia conforme está más cercana al origen.

Para los puntos de la curva que no son el origen, el valor de la dimensión local se estima en 1 usando vecindades suficientemente pequeñas. Sin embargo, en el origen la suavidad de la curva es esencialmente distinta.

En cada ε y cada intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ con una cantidad grande de puntos en la gráfica, fueron seleccionados aquellos que estaban dentro de la ε -vecindad centrada en el origen, tomando con ellos la muestra para la matriz M . Alrededor del origen siempre hay un intervalo en el cual *todas* las cajas de tamaño ε intersecan la curva. Esta observación sugiere que la dimensión fractal por conteo de cajas alrededor del origen debe tener el valor 2.

Mientras que para la elipse la convergencia de \dim_S respecto a epsilon es monótona, para la curva $\sin(4/x)$ no lo es. En la elipse las muestras de puntos fueron tomadas de tamaño constante en cada epsilon-vecindad, pero para esta

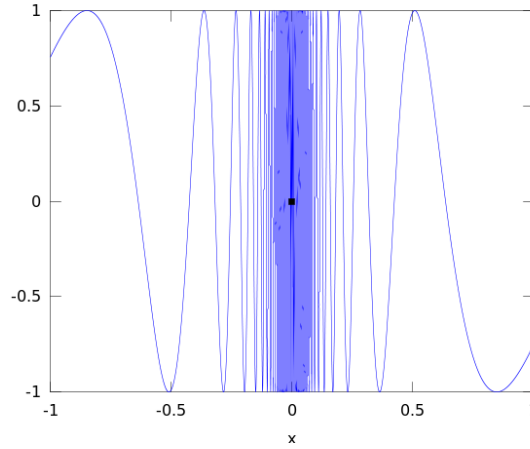


Figura 3.3: Gráfica de $\sin(4/x)$ y el punto de referencia.

curva, con la finalidad de obtener un código más simple de programar, ya no ha sido requerido que el tamaño de muestra sea constante (Figura 3.4 der). En dos implementaciones numéricas se lanzaron 10^4 y 10^6 puntos para formar la curva. De tal cantidad de puntos, aquellos seleccionados por una epsilon-vecindad constituyen el *tamaño de muestra efectivo*. Al disminuir el radio de la vecindad alrededor del origen, cada vez menos puntos son seleccionados, se dispone de menos información, y la tendencia a converger se destruye (Figura 3.4 izq). No obstante que el tamaño de muestra disminuye con epsilon, en la implementación con la mayor cantidad de puntos se puede apreciar una aparente convergencia al valor esperado 2.

La importancia de analizar la cantidad dim_S en puntos donde una curva no es suave se debe a que los fractales no son suaves. De ahí la necesidad de aplicarlo en puntos singulares de una curva. Enseguida se describen resultados obtenidos cuando se calcula dim_S en curvas y conjuntos fractales.

3.3. dim_S en curvas y conjuntos menos suaves

Tres conjuntos fractales *de igual dimensión fractal* han sido considerados: la *curva de Koch*, la *curva fudgeflake* y el conjunto denominado *polvo de Cantor*. Todos ellos tienen dimensión fractal $D = 1.26$ y se muestran en la

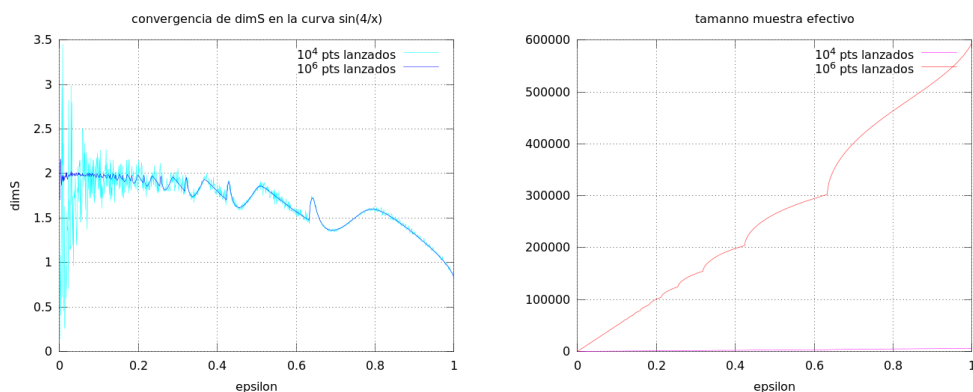


Figura 3.4: Izq: Convergencia de \dim_S en la curva $\sin(4/x)$. Der: El número de puntos en cada vecindad.

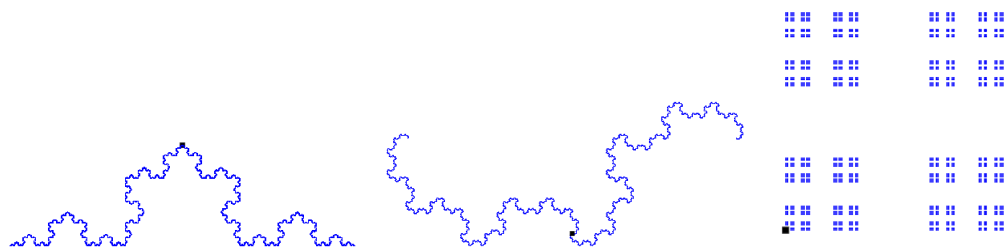


Figura 3.5: La curva de Koch, la curva denominada *fudgeflake* y el conjunto *polvo de Cantor*. El origen está representado por un cuadrado pequeño.

Figura 3.5

3.3.1. La curva de Koch

La curva de Koch (Figura 3.5) es una curva fractal geoméricamente autosimilar, continua pero en ninguna parte diferenciable, y en este caso también simétrica respecto al eje vertical. Además, su longitud es infinita.

No se espera que los resultados sean similares a aquellos observados en las elipses, pues a medida que se recorre la curva a través de sus puntos, éstos se alejan y se acercan intermitentemente del punto de referencia, a la vez que se modifica el ángulo respecto al origen.

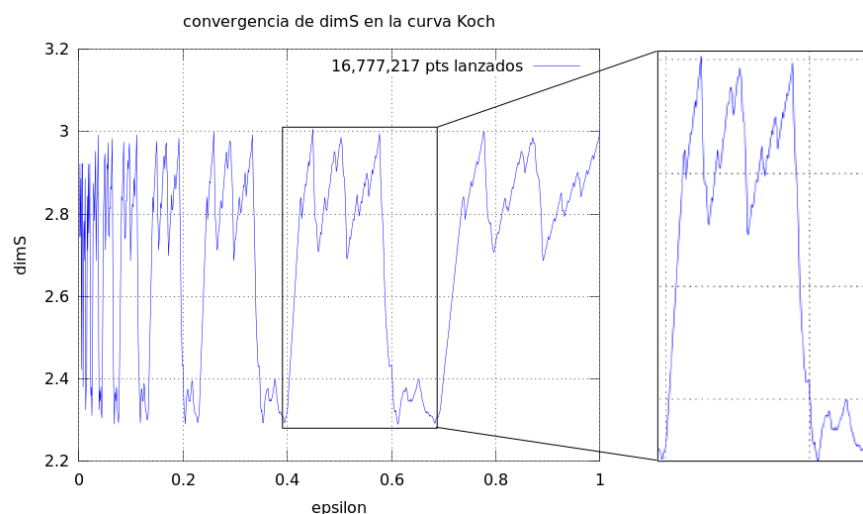


Figura 3.6: Proceso de convergencia de dim_S en la curva de Koch y el perfil repetido delineado con el proceso.

Para la conformación de la curva se eligió una cantidad grande de puntos con el fin de asegurar que todas las vecindades, incluso las muy pequeñas, incluyeran una cantidad suficiente de ellos.

Con el procedimiento especificado al inicio de este capítulo, se han obtenido los resultados que se muestran en la Figura 3.6. Ahí se muestra cómo varía dim_S respecto al radio ε de cada vecindad. Aunque no se aprecia convergencia, se puede reconocer un perfil delineado por dim_S que se repite a escalas más y más pequeñas.

3.3.2. La curva *fudgeflake*

La curva *fudgeflake*, tiene la misma dimensión fractal que la curva de Koch y es autosimilar aunque no es simétrica respecto al eje vertical. También se genera mediante un proceso iterativo parecido al proceso generador de la curva de Koch. En este caso tampoco se observa convergencia de dim_S , pero sí se observa un perfil delineado por este proceso de cambio respecto a ε (Figura 3.7). El perfil es periódico debido a la autosimilaridad geométrica del fractal.

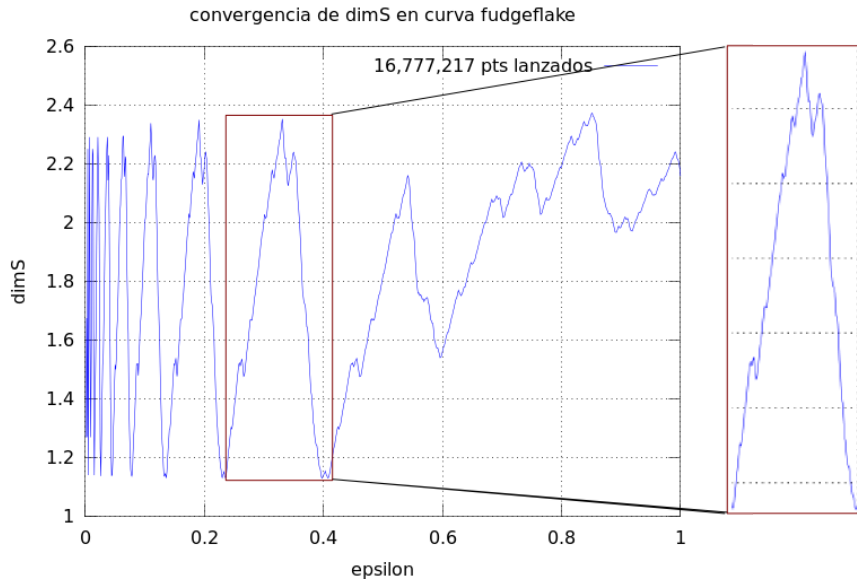


Figura 3.7: Convergencia de \dim_S en la curva *fudgeflake* y el perfil repetido delineado por el proceso.

3.3.3. El polvo de Cantor

El procedimiento aplicado a los dos conjuntos anteriores se aplica enseguida al conjunto autosimilar denominado *polvo de Cantor*. Como en los casos anteriores no se aprecia convergencia de \dim_S respecto a ϵ , aunque también se observa que se define un perfil que se repite en escalas menores. Esto se muestra en la Figura 3.8.

Como consecuencia del tipo de autosimilaridad geométrica que cada uno de los tres conjuntos fractales anteriores posee, es irrelevante cuál sea el punto de referencia elegido.

Los resultados que se aprecian en los tres casos anteriores, donde los conjuntos son fractales geoméricamente autosimilares, sugieren que *no hay convergencia para la cantidad \dim_S* en este tipo de conjuntos. En cuanto a convergencia, se espera menos en conjuntos fractales con autosimilaridad estadística.

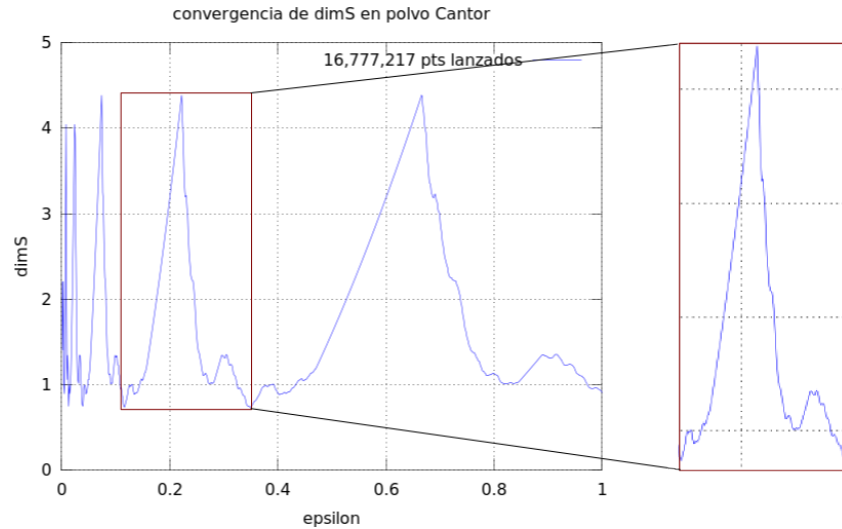


Figura 3.8: Proceso de convergencia de dim_S en el conjunto *polvo de Cantor* y el perfil repetido delineado con el proceso.

3.4. Variación de dim_S respecto al ángulo

Dadas las observaciones anteriores, se propone analizar de manera más elemental el comportamiento de dim_S . En lugar de conjuntos fractales, considérese el siguiente conjunto aparentemente más simple (Figura 3.9). Nótese que es un conjunto suave en todas partes excepto en el origen, donde se intersecan las rectas. Con el origen como punto de referencia se calcula dim_S para distintos ángulos de la recta oblicua.

Sorprendentemente la cantidad dim_S cambia respecto al ángulo. Cuando la recta oblicua se sobrepone a la horizontal a los 0 y 180 grados dim_S toma el valor 1. Sin embargo toma un valor máximo cuando la oblicua está a 90 grados respecto a la horizontal.

La forma de la gráfica y esta variación respecto al ángulo sugieren que es necesario investigar en el aspecto estadístico. De alguna manera dim_S está parafraseando el ángulo para este conjunto. Esto parece un obstáculo importante para que esta cantidad, dim_S pueda ser aplicada, al menos directamente, como indicador de una dimensión local.

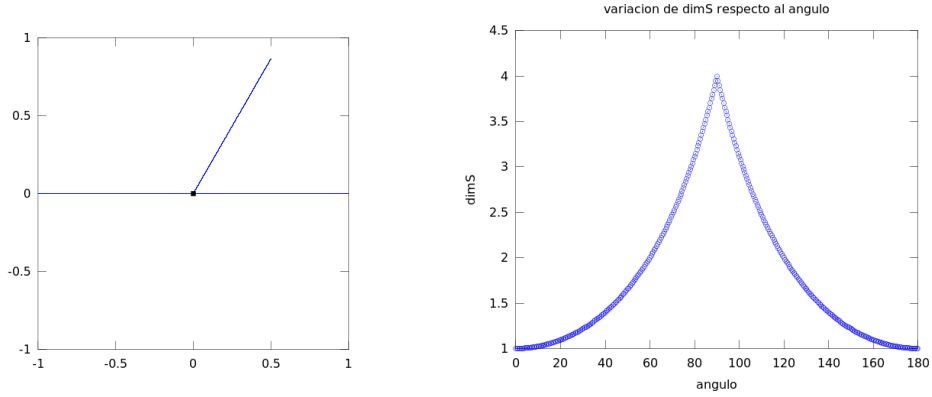


Figura 3.9: Conjunto considerado y la variación de dim_S respecto al ángulo.

3.4.1. Enfoque estadístico

El comportamiento de dim_S observado en el conjunto de la Figura 3.9 no es definitivamente el que se habría deseado en un principio.

La búsqueda de información en la literatura ha permitido conocer que la matriz A mencionada en el algoritmo de la Sección 2.5 es una *matriz de covarianza*, también llamada *matriz de dispersión*. Esta matriz es considerada una generalización de la varianza en dimensiones múltiples. Se usa en el Análisis de Componentes Principales dentro del Análisis Multivariado para disminuir la dimensionalidad de un conjunto de datos, es decir, para reducir el número de variables que pueden describir al conjunto en aspectos esenciales.

La covarianza provee una medida de la intensidad de correlación entre dos o más conjuntos de variables aleatorias. La matriz de covarianzas se define como

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)] & E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ E[(Y - \mu_Y)(X - \mu_X)] & E[(Y - \mu_Y)(Y - \mu_Y)] \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

El procedimiento de las componentes principales difiere del método de la sección 2.5 en que resta de los datos la media de los mismos. Es decir, la matriz M contiene las desviaciones de las coordenadas de los puntos de la muestra respecto a las coordenadas de su centroide (μ_X, μ_Y) .

Si $\mu_X = \text{media}(X)$ y $\mu_Y = \text{media}(Y)$, entonces para formar la matriz M

según el análisis de componentes principales $X = (x_i - \mu_X)$, $Y = (y_i - \mu_Y)$ y

$$M = [X, Y]. \quad (3.3)$$

El resto del procedimiento es como en la sección 2.5.

Una vez notado esto se reconoce que el método de componentes principales traslada el centroide de cada muestra al origen, obteniendo de esta manera las desviaciones de los datos. Es con estas desviaciones que el método realiza sus cálculos.

Por otra parte, el método evaluado en ese documento no traslada el centroide de los datos al origen. Como no se ha observado convergencia nuevas implementaciones han sido llevadas a cabo utilizando ahora el método de las componentes principales para calcular los eigenvalores que estimen dim_S de acuerdo con la expresión (2.24). Las gráficas en las siguientes figuras muestran, además del comportamiento de dim_S calculada con el método de componentes principales, el comportamiento de los eigenvalores calculados con el método original evaluado en este documento, ie. el método de la Sección 2.5.

Las gráficas de eigenvalores muestran tres comportamientos: el de ε^2 como referencia, y los comportamientos de los dos eigenvalores. El eje horizontal representa ahora los valores de ε^2 con la finalidad de que la gráfica de ε^2 sea una línea recta con pendiente 1.

Las implementaciones en la elipse coinciden en ambas implementaciones mostrando convergencia de dim_S , sin importar que las coordenadas del centroide se resten o no. El *buen* comportamiento en las curvas suaves se debe a que el eigenvalor λ_+ tiende a cero de la manera como lo hace ε^2 , que según los fundamentos de dim_S es algo esperado. Como consecuencia dim_S tiene el comportamiento esperado sin muchas variaciones.

Nótese para el caso de la curva $\sin(4/x)$, que las gráficas del comportamiento de los eigenvalores muestran una tendencia a cero suave en algunos tramos, con algunos saltos abruptos pero que se repiten a escalas menores. Para valores muy pequeños de ε^2 los eigenvalores *parecen* tener un orden similar al de ε^2 . Como consecuencia dim_S obtiene el valor 2 para la dimensión de este conjunto.

En el caso de los conjuntos fractales, sin embargo, las gráficas de los eigenvalores son muy irregulares. Si se toma en cuenta que los eigenvalores

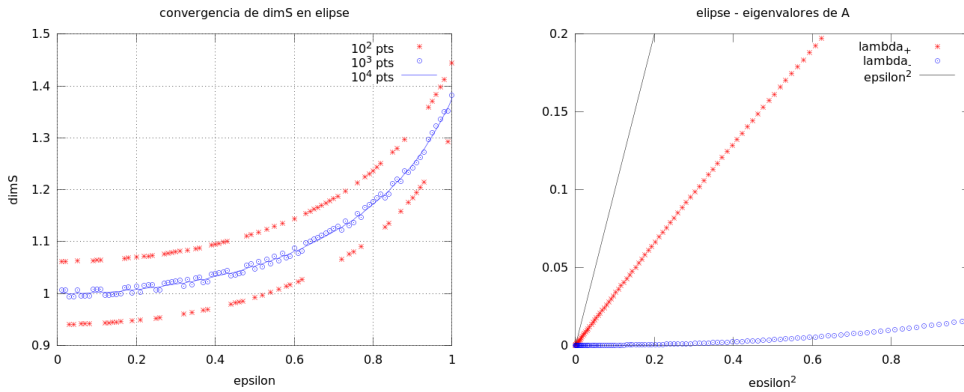


Figura 3.10: Elipse. Izq: El cálculo de la expresión (2.24), usando la matriz de covarianza. Der: El comportamiento de la convergencia ε^2 y de los eigenvalores respecto a ε^2 usando el primer procedimiento.

representan variación, entonces es posible explicar porqué no hay convergencia de la cantidad dim_S en los conjuntos fractales considerados: aunque los eigenvalores también tienden a cero, lo hacen con muchas fluctuaciones que se repiten en escalas más pequeñas y que afectan a dim_S desde el denominador en la expresión (2.24), por lo que no puede alcanzar un límite.

Ya con la interpretación estadística de λ_+ como una varianza, se concluye que dim_S no se aproximará a un límite en conjuntos que presentan variaciones que se repiten en nuevas escalas, es decir, no puede aplicarse a los conjuntos fractales.

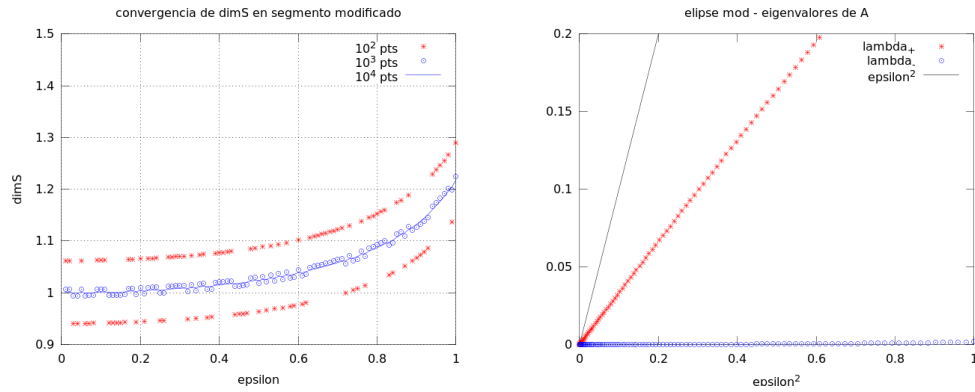


Figura 3.11: Segmento de elipse modificado. Izq: El cálculo de la expresión (2.24), usando la matriz de covarianza. Der: El comportamiento de la convergencia ε^2 y de los eigenvalores respecto a ε^2 usando el primer procedimiento.

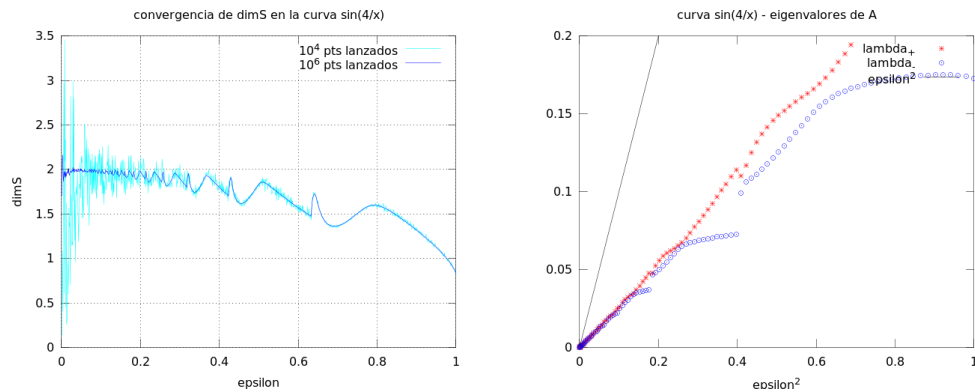


Figura 3.12: Curva $\sin(x/4)$. Izq: El cálculo de la expresión (2.24), usando la matriz de covarianza. Der: El comportamiento de la convergencia ε^2 y de los eigenvalores respecto a ε^2 usando el primer procedimiento.

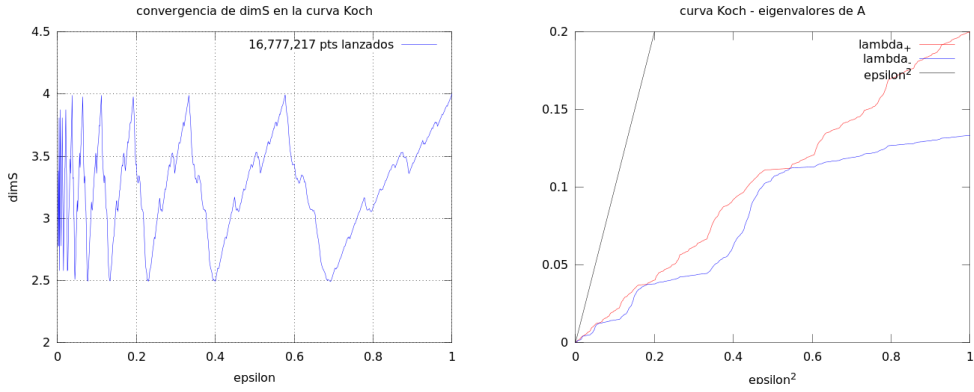


Figura 3.13: Curva de Koch. Izq: El cálculo de la expresión (2.24), usando la matriz de covarianza. Der: El comportamiento de la convergencia ε^2 y de los eigenvalores respecto a ε^2 usando el primer procedimiento.

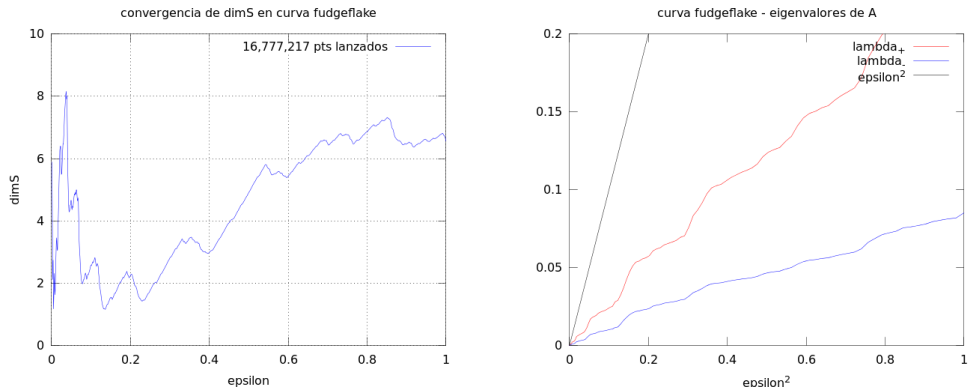


Figura 3.14: Curva fudgeflake. Izq: El cálculo de la expresión (2.24), usando la matriz de covarianza. Der: El comportamiento de la convergencia ε^2 y de los eigenvalores respecto a ε^2 usando el primer procedimiento.

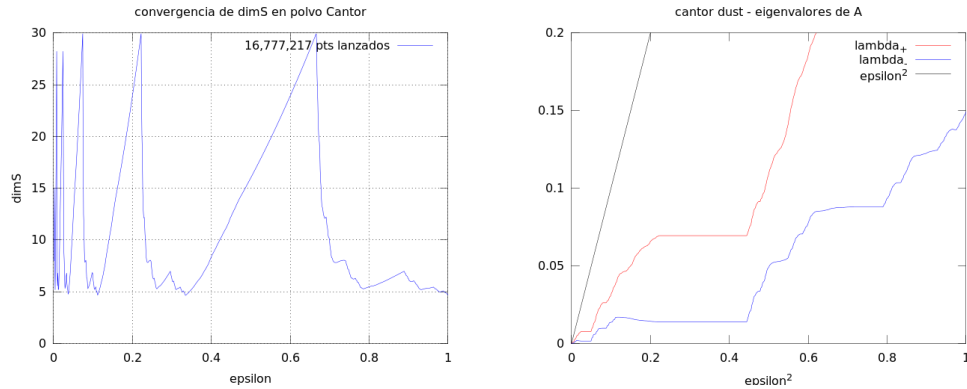


Figura 3.15: Polvo de Cantor. Izq: El cálculo de la expresión (2.24), usando la matriz de covarianza. Der: El comportamiento de la convergencia ε^2 y de los eigenvalores respecto a ε^2 usando el primer procedimiento.

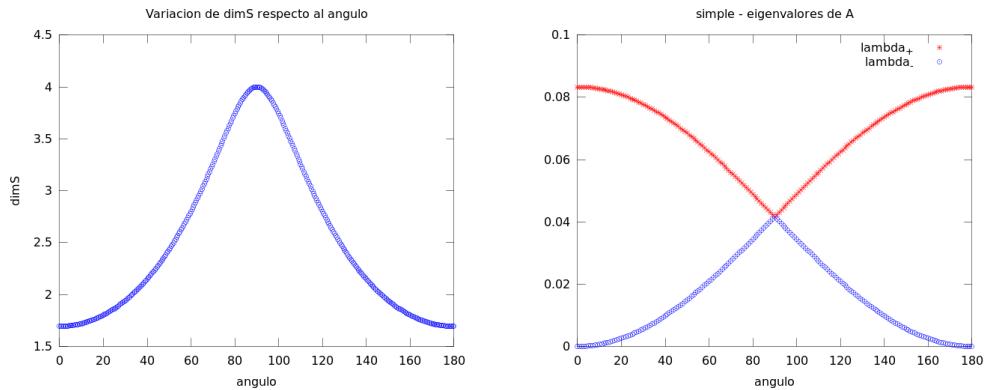


Figura 3.16: Izq: El cálculo de la expresión (2.24), usando la matriz de covarianza. Der: El comportamiento de la convergencia ε^2 y de los eigenvalores respecto a ε^2 usando el primer procedimiento.

Capítulo 4

Medidas propuestas

4.1. Introducción

En esta sección se propone una medida local relacionada con la dimensión fractal por conteo de cajas.

La decisión de proponer una medida se originó cuando fue necesario hacer un análisis de una imagen fractal usando una imagen digital con poca resolución. El análisis buscaba extraer de alguna manera información *local* de la imagen y el carácter local de la estimación hacía que la información disponible no fuera suficiente para hacer estimaciones.

La exposición está basada en un espacio discreto, como el de una imagen digital por ejemplo, donde existen unidades mínimas de información análogas a los píxeles. Éstos son la menor unidad de información en una imagen digital. En el espacio discreto en cuestión los puntos serán referidos indistintamente como *puntos* o *píxeles*.

Para el establecimiento de las ideas son necesarias algunas definiciones. Debido a que estas ideas se originaron durante el procesamiento de imágenes digitales, la terminología enseguida expuesta está influenciada por palabras como *píxeles* y *vecindades cuadradas*, términos naturales para describir las imágenes.

Con el objetivo de obtener simetría se supondrá que las imágenes consid-

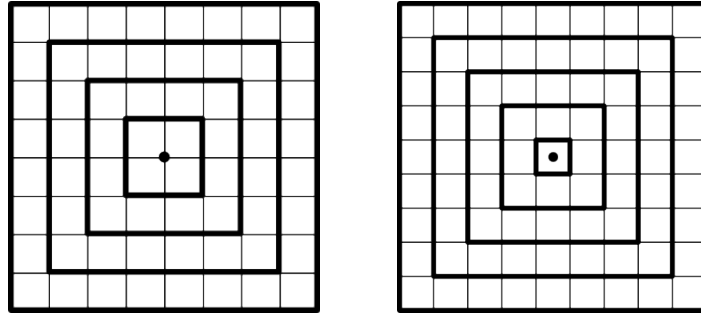


Figura 4.1: El origen en una imagen par y en una imagen impar.

eradas son cuadradas, ya sea con un número par o impar de píxeles en cada lado. Para referirse a ellas se usará el término *imagen par* o *imagen impar* respectivamente. El origen quedará establecido en la imagen según ésta sea una imagen par o impar.

Definición 4.1 (Origen de una subimagen). El origen es el centro geométrico de la imagen. Para una imagen par, el origen coincide con el vértice común a los cuatro píxeles en el centro de la imagen (Figura 4.1), mientras que para una imagen impar el origen coincide con el centro del píxel en el centro de la imagen.

Definición 4.2 (Anillos). Las cajas adyacentes al origen constituyen *el anillo 1*. Las cajas que rodean al anillo 1 constituyen el anillo 2. En general, las cajas que rodean al k -ésimo anillo forman el anillo $(k+1)$ -ésimo. (Figura 4.1)

Nótese que el k -ésimo anillo está formado por $4(2k-1)$ cajas en una imagen par, mientras que el k -ésimo anillo está formado por $4(2k)$ píxeles en una imagen impar.

Cuando las cajas tienen lado l , el espacio llenado por el conjunto fractal se *estima* contando las cajas que cubren al conjunto. Esto se interpreta como una medición con instrumentos calibrados para medir con resolución l , ie. la unidad mínima que alcanzan a medir correctamente tiene lado l . Al disminuir el tamaño de las cajas, digamos en un factor de 2, a $l/2$, se obtiene un instrumento de medición para medir con resolución $l/2$, las cajas necesarias para cubrir al conjunto serán más pequeñas y por tanto se requerirán más de ellas.

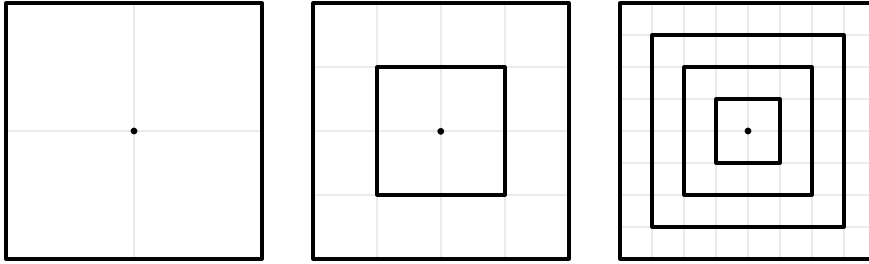


Figura 4.2: Cantidad de anillos en función de la escala considerada. Izq: para $l = l_0/2$ se forma un anillo. Centro: para $l = l_0/2^2$ se forman dos anillos. Der: si $l = l_0/2^3$ se forman cuatro anillos.

La variable $l \equiv l(n) = l_0/2^n$ representa el tamaño de las cajas, y la variable n indica la cantidad de escalas visitadas hacia abajo (más finas) desde la escala de referencia de uno mismo l_0 (el lado inicial de la subimagen). Por simplicidad, en esta exposición l toma valores a través de múltiplos enteros negativos de 2, aunque podría recorrerse a través de producto de inversos de primos, con el fin de obtener siempre una cantidad entera de anillos.

Así, una medición a resolución l consiste en contar la cantidad $N(l)$ de cajas de lado l que cubren al conjunto de interés. El área cubierta es estimada por tanto por

$$N(l)f(l)A_0 = \sum_{i=1}^{N_T(l)} \chi_i(l)f_i(l)A_0 \quad (4.1)$$

donde, A_0 es la cantidad de área de toda la imagen en el archivo digital, $\chi_i(l)$ vale 1 si la i -ésima caja cubre al conjunto de interés y vale 0 si la caja no lo cubre, y $N_T(l)$ es el total de cajas de lado l . Además

$$f(l) = 1/N_T(l) \quad (4.2)$$

es la fracción del área total de la imagen representada por cada caja, y puesto que todas las cajas representan la misma cantidad de área, $f_i(l) = f(l)$.

Si los valores de $N(l)$ crecen de acuerdo a una ley de potencias, entonces la gráfica log-log será aproximadamente una línea recta, cuya pendiente estimará la dimensión fractal del conjunto, de acuerdo con la Figura 2.5.

4.2. Weighted Boxcounting Dimension (WBD)

Las cajas en el método de conteo de cajas son los instrumentos de medición que geoméricamente van tomando en cuenta las unidades de área de la imagen que representa al conjunto fractal. Esta interpretación natural en términos de la cantidad de espacio que va llenando el conjunto permite un análisis desde otra perspectiva: Una caja en un anillo más alejado del punto de referencia no debería tener la misma importancia local que una caja que está cerca.

Considérese un tamaño de cajas fijo l y llámense l -cajas, o simplemente *cajas* a aquellas de lado l . En la escala correspondiente a esta l se forma un conjunto de anillos alrededor del punto de referencia.

Enseguida se repetirá el procedimiento anterior, que corresponde al método de conteo de cajas usual, *con dos variantes*:

- i) Se contabilizarán primero las cajas que forman un primer anillo alrededor del origen, y enseguida las cajas que forman un segundo anillo, y así sucesivamente.
- ii) Además, se tendrá en cuenta que las cajas cercanas al punto de referencia de cierta manera tienen más importancia que las alejadas.

Este orden diferente de contabilizar las cajas resulta en la siguiente expresión para el área cubierta por el conjunto de interés (no todo el archivo digital)

$$A_0 F(l) = N(l) f(l) A_0 = \sum_k^{R(l)} n(l, k) f(l, k) A_0 \quad (4.3)$$

donde $n(l, k)$ contabiliza las l -cajas dentro del k -ésimo anillo que cubren al conjunto de interés y $f(l, k)$ representa la fracción, del área total de la imagen, contribuida por cada l -caja en el k -ésimo anillo. De esta manera, si $f(l, k)$ es el valor de $f(l)$ en el k -ésimo anillo¹, entonces la fracción total cubierta por

¹Nótese que la cantidad de anillos $R \equiv R(l) = 2^{(n-1)}$, $l \equiv l(n)$, depende de la escala considerada para medir el área.

el conjunto de interés

$$F(l) = \sum_k^{R(l)} n(l, k) f(l, k). \quad (4.4)$$

Dado que $f(l) = 1/(2R)^2$, de la primera igualdad en (4.3) se tiene

$$N(l) = \frac{F(l)}{f(l)} = (2R)^2 F(l). \quad (4.5)$$

Por otra parte, la contribución de una unidad de área al valor de una medida local decrece conforme se aleja del punto de referencia: una unidad de área que se encuentra cerca del punto es más significativa que una unidad que se encuentra lejos, lo cual sugiere que la ponderación las l -cajas debería decrecer con k .

Puesto que en el k -ésimo anillo hay $4(2k - 1)$ l -cajas, la fracción con la que el k -ésimo anillo contribuye es

$$a(l, k) = 4(2k - 1) f(l, k) \quad (4.6)$$

Además, el hecho de que $a(l, k)$ sea una fracción del área total implica que

$$\sum_k^{R(l)} a(l, k) = 1. \quad (4.7)$$

Nótese en (4.6) que si $f(l, k)$ es constante en k , los anillos exteriores contribuyen con una mayor fracción de área que los interiores pues contienen más l -cajas.

Considérese ahora, al contrario de esta última afirmación, que cada anillo contribuye con la misma fracción del área total. Se tendría entonces, por la relación (4.7), que

$$a(l, k) = \frac{1}{R(l)}, \text{ para cada } k, \quad (4.8)$$

Esta consideración es equivalente a realizar una deformación como se muestra en la Figura 4.3, de donde se sigue que el valor de cada l -caja decrece con el valor de k , es decir, las l -cajas de anillos exteriores contribuyen en menor

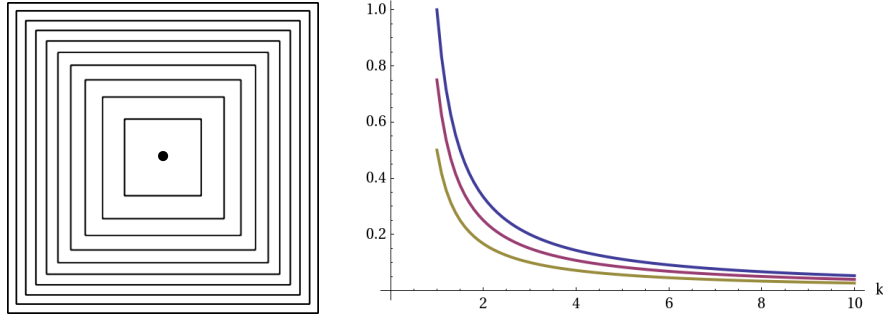


Figura 4.3: Izq: Deformación de las l -cajas para que todos los anillos tengan la misma área. Der: Cómo cambia el valor de una l -caja en el k -ésimo anillo; cada curva corresponde a un valor de l distinto.

grado al valor medido. De esta manera, las expresiones (4.6) y (4.8) implican que

$$f(l, k) = \frac{1}{4(2k-1)R(l)}. \quad (4.9)$$

y por tanto, sustituyendo en (4.3) se tiene

$$F(l) = \frac{1}{R(l)} \sum_k^{R(l)} \frac{n(l, k)}{4(2k-1)}, \quad (4.10)$$

que es un promedio de las fracciones llenas en cada anillo. Además de la primera igualdad de (4.3)

$$N(l) = R(l) \sum_k^{R(l)} \frac{n(l, k)}{(2k-1)}. \quad (4.11)$$

Así $f(l, k)$ no es constante ni en l ni en k , y se está considerando entonces un método de conteo de cajas con mayor concentración de área cerca del origen. Si para cada l , la importancia de $f(l, k)$ es constante respecto a k , entonces se recupera el método de conteo de cajas usual.

De acuerdo con Barnsley en su libro *Fractals Everywhere*, una deformación métrica adecuada² no altera la dimensión fractal por conteo de cajas, aunque no menciona algo semejante en sentido local.

²Que los conjuntos antes y después de la deformación sean métricamente equivalentes.

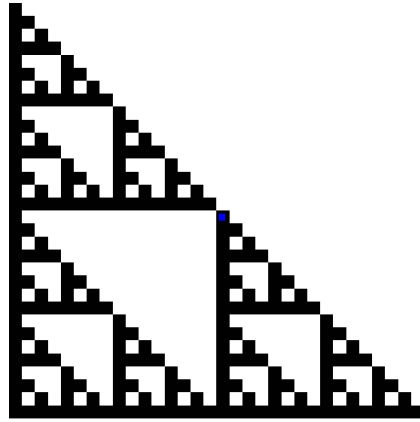


Figura 4.4: El triángulo de Sierpinski y el punto de referencia (centro)

Por la manera en que se ha derivado la expresión anterior, los valores $a(l, k)$ pueden ser tomados de manera distinta a (4.8) siempre que cumplan la expresión (4.7).

Resultados de aplicar WBD

Para cada punto del triángulo de Sierpinski (Figura 4.4) se ha calculado la WBD. Tomando a cada uno como punto de referencia, la cantidad WBD ha sido calculada como la pendiente negativa de la gráfica doble logarítmica $\log N(l)$ contra $\log(l)$, donde $N(l)$ está dada por la expresión (4.11).

Los resultados de aplicar el procedimiento descrito en Sección 4.2 se muestran visualmente en las Figuras 4.5 y 4.6, para una imagen par.

Esta forma de medir, ha asignado un valor numérico a cada pixel de una imagen. Este número depende no solamente de los pixeles adyacentes; también depende de pixeles no adyacentes que pertenecen a otros anillos, aunque la contribución de los pixeles disminuye con la distancia al pixel de referencia.

La asignación de números a cada pixel de la imagen podría ser analizada con técnicas estadísticas. Este análisis no ha sido realizado en este documento, por lo que puede ser propuesto como un trabajo futuro.

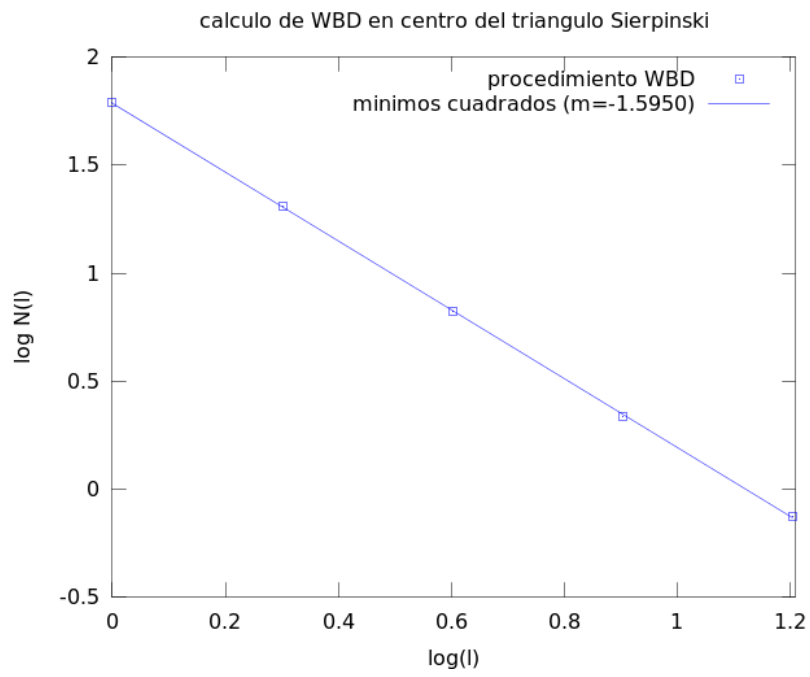


Figura 4.5: Cálculo de WBD para el punto de referencia de la Figura 4.4: la WBD de ese punto es aproximadamente 1.595.

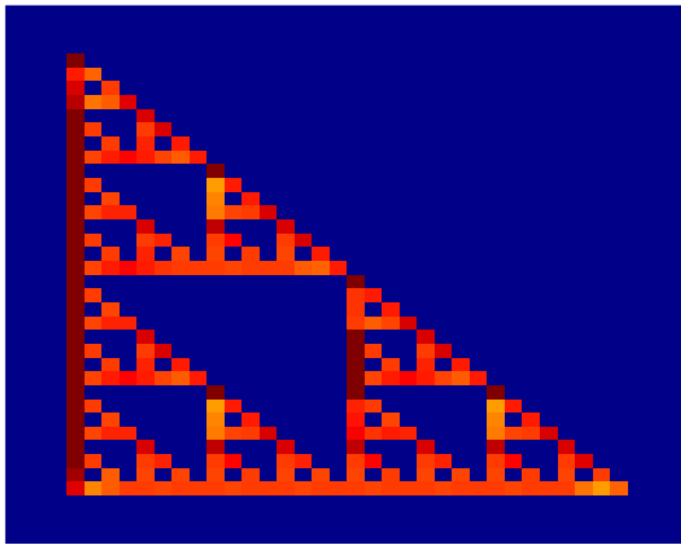


Figura 4.6: La WBD en todos los puntos del triángulo de Sierpinski; los valores más altos representados por rojo, los más bajos por azul. La asimetría en la coloración se debe a distribución asimétrica del origen de referencia en las vecindades pares.

Capítulo 5

Discusión y Conclusiones

5.1. Discusión

El hecho de que la cantidad dim_S haya tenido capacidad para recuperar localmente la dimensión topológica (entera) de conjuntos suaves aventuraba la posibilidad de su aplicación a conjuntos más complicados, como los fractales, por ejemplo. Se esperaba en ellos, que el valor de la cantidad dim_S indicara localmente, de algún modo, una dimensión fraccionaria.

La importancia de analizar la cantidad dim_S en puntos donde una curva no es suave se debe a que los fractales no son suaves. De ahí la necesidad de aplicarlo en puntos singulares de una curva.

Los experimentos numéricos realizados han mostrado que esta cantidad no puede ser aplicada, al menos directamente, para estimar la dimensión fractal por conteo de cajas, pues depende fuertemente de la variabilidad de las coordenadas de los puntos que conforman al conjunto de interés. Sin embargo, en el proceso de revisión de literatura se ha encontrado que existen algunas cantidades como la *correlation dimension*, considerada un tipo de dimensión fractal, y el *exponente de Hurst*, que provienen y son utilizadas desde el entorno estadístico y la teoría de sistemas dinámicos y caos.

Manteniendo el interés en la búsqueda de indicadores locales de dimensión se ha propuesto la cantidad WBD como una medida local de un conjunto. Es una variación de la dimensión por conteo de cajas la cual es analizada con

una perspectiva radial desde un punto de referencia y con la consideración fundamental de que puntos alejados son localmente menos importantes que los puntos cercanos.

Dada la influencia por el contexto de este documento, y debido a que la WBD es variación de la dimensión por conteo de cajas, se ha usado holgadamente la palabra “dimensión” para cualificarla, contribuyendo a la sobreutilización de este término pero sin haber justificado formalmente su uso.

La WBD ha sido calculada para cada punto de una imagen digital del triángulo de Sierpinski con poca resolución, pero sin ahondar ni en el análisis de los resultados ni en la aplicación a otros conjuntos distintos, lo cual podría ser una propuesta de trabajo futuro.

La cantidad WBD solamente considera un sentido: del punto de referencia hacia afuera. Se considera que se podrían definir direcciones para tratar de establecer una *dimensión fractal direccional* y generalizar la idea más allá de vecindades cuadradas y píxeles. Ya en el contexto general estas direcciones podrían ser utilizadas para tender redes que unan puntos a lo largo de direcciones con dimensión fractal direccional dada.

Lograr una definición formal de esta dimensión direccional, y el establecimiento de una relación entre ella y alguna dimensión fractal conocida, podría ser de ayuda para la creación de un algoritmo de seguimiento de trayectorias fractales con dimensión fractal dada.

5.2. Conclusiones y trabajo futuro

Los experimentos numéricos realizados sugieren que no existe convergencia para la cantidad \dim_S y por tanto no puede ser aplicada para definir una dimensión en conjuntos fractales. Esta imposibilidad se debe, por una parte, a que está definida como un límite y la variación de los eigenvalores en el denominador induce una variación excesiva en \dim_S a medida que se reduce el radio de las vecindades que contienen los puntos.

La cantidad \dim_S ha funcionado para las curvas suaves porque para ellas, siendo suaves, no hay una variación grande entre sus puntos cuando ε tiende a cero. Los eigenvalores, que representan la varianza, se van a cero de manera

comparable a como lo hace ε^2 .

Sin embargo, el proceso de cambio de \dim_S respecto a epsilon identifica un perfil que se repite una y otra vez en escalas menores. Esto sugiere que cada punto de un fractal puede ser asociado con una función cuya gráfica es el perfil identificado. Las propiedades de este perfil y la manera en que puede ser estudiado son tarea de trabajo posterior.

Los fundamentos de \dim_S están construidos sobre la teoría de la geometría *suave*. Sin embargo conceptos de *tangente* y *proyecciones* de un fractal están definidos, por ejemplo, en [2]. Se considera que, en lugar de aplicar conceptos de la geometría usual a fractales, es necesario reconstruir conceptos análogos y entonces aplicarlos a este tipo de conjuntos.

El análisis de la aplicabilidad de WBD como indicadora de dimensión local de conjuntos fractales es factible de realizar en el futuro. Así también su justificación formal y su generalización a espacios métricos.

Un primer acercamiento a este análisis es el estadístico, que permita recuperar información sobre la distribución de la WBD en el fractal considerado.

Bibliografía

- [1] Michael Barnsley, *Fractals everywhere*, second ed., Morgan Kaufmann.
- [2] Kenneth Falconer, *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, 2nd ed.
- [3] Benoit Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman, San Francisco, 1983.
- [4] Saupe Peitgen, Jurgens, *Chaos and fractals: New frontiers of science*, second ed.
- [5] Francisco Solís, *Local adaptive galerkin bases*, *Nonlinear Analysis* **47** (2001).
- [6] R. Solís, Francisco y Sánchez, *Attractor information for discrete dynamical systems by means of optimal discrete galerkin bases*, *Appl. Math. Comput.* **216** (2010).
- [7] Bruce West, *Where medicine went wrong: Rediscovering the path to complexity*.
- [8] Javier Rodríguez y otros, *Variabilidad de la dimensión fractal del árbol coronario izquierdo en pacientes con enfermedad arterial oclusiva severa*, *Revista Colombiana de Cardiología* **11** (2004), no. 4.