



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

**Cálculo de Frecuencias Naturales
en Vigas Elásticas,
un estudio comparativo**

Tesis

que para obtener el grado de
**Maestro en Ciencias con Especialidad en
Computación y Matemáticas Industriales**

presenta

Rogelio Salinas Gutiérrez

Asesores

**Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez
Dr. Salvador Botello Rionda**

Julio de 2003

Guanajuato, Gto. México

Prólogo

El estudio de vibraciones mecánicas de vigas y el conocimiento de sus frecuencias naturales de vibración han sido de sumo interés dentro del área de mecánica de estructuras. El comportamiento vibratorio de una viga al ser sometida a una o varias fuerzas puede modelarse por medio de una ecuación diferencial parcial (EDP) que involucra derivadas parciales tanto en la variable tiempo como en el espacio. La importancia de conocer las frecuencias naturales radica en que si una frecuencia de excitación, debida a la aplicación de una fuerza externa, coincide o llega a estar cerca de una de las frecuencias naturales de la viga, pueden resultar grandes oscilaciones de la viga con consecuencias desastrosas.

En el pasado ha sido práctica usual de la ingeniería dejar de lado los efectos de la deformación por corte y de la inercia rotacional en el cálculo de las frecuencias naturales de las vibraciones de vigas. Esta práctica puede ser justificada para vigas delgadas, al menos para los modos de vibración más importantes, dado que es bien conocido que en tales casos los efectos mencionados son pequeños. Aunque esta aproximación simplificada ha sido universalmente empleada en el pasado, en años recientes debido a las tendencias en el diseño de componentes estructurales, ha llegado a ser necesario considerar órdenes más altos de vibración así como también tomar en cuenta el efecto de corte y la inercia rotacional.

Encontrar la solución a este tipo de problemas dista de ser trivial puesto que la EDP que modela el comportamiento vibratorio de la viga es de cuarto orden y requiere del apoyo de una computadora para realizar complejos cálculos en la búsqueda de una "buena aproximación" a la solución. La aproximación más natural y exacta para calcular frecuencias de vibración [6] es modelar la viga elástica sobre los fundamentos de la Teoría de la Elasticidad. Luego calcular las frecuencias por medio de algún método numérico. El modelo de la viga es tridimensional y consecuentemente el costo computacional es alto. En las aplicaciones se prefieren los modelos unidimensionales.

La propuesta de esta tesis consiste en desarrollar un método que determine numéricamente las frecuencias de vibración de una viga elástica. Este método se basa en el Método de Propagación de Onda y sus resultados serán comparados con los obtenidos por el Método de Elemento Finito. Además se pretende que este método considere los efectos de corte y de inercia rotacional. La idea básica es trabajar el método con tres ecuaciones que modelan el comportamiento de la viga, siendo el primer modelo el más sencillo y clásico que no considera los efectos de corte y de inercia rotacional. Este modelo es conocido como Euler-Bernoulli. Los otros dos modelos consideran por separado los efectos de corte y de inercia rotacional, siendo este último el llamado modelo de Rayleigh.

Esta tesis se divide en cinco partes. En el primer capítulo veremos una muy breve y sencilla introducción a las vigas y deduciremos 3 modelos matemáticos para el problema de vibraciones de una viga elástica. El enfoque bajo el cual se desarrollan los modelos es el energético, de modo que se define la función de energía para cada modelo considerando o no los efectos de corte y de inercia rotacional.

En el capítulo dos se muestra el uso del Método de Elemento Finito (MEF) en uno de los modelos descritos anteriormente para encontrar las frecuencias de vibración de una viga. El MEF es una técnica que obtiene una aproximación numérica a la solución de una ecuación diferencial por medio de un proceso de discretización de acuerdo a una metodología unitaria y sistemática. En nuestro caso, usaremos el análisis del MEF para determinar numericamente las frecuencias naturales de vibración de vigas.

En el capítulo tercero veremos como puede ser usado el Método de Propagación de Onda para desarrollar un método asintótico capaz de encontrar las frecuencias de vibración. Se mostrará la

aplicación del método propuesto a uno de los modelos de viga para concluir finalmente con un resumen para los tres modelos considerados para este estudio.

Las frecuencias obtenidas por medio del MEF y el método asintótico para cuatro vigas de concreto con geometría transversal distinta serán tema del cuarto capítulo. El capítulo cinco trata de las conclusiones hechas a lo largo de este trabajo de investigación. Más resultados del método asintótico aplicado a vigas de acero y aluminio se incluyen en el Apéndice.

Índice General

1	Deducción de las Ecuaciones de Viga	1
1.1	Vigas	1
1.2	La Ecuación Euler-Bernoulli	2
1.3	La Ecuación de Rayleigh	5
1.4	La Ecuación de Timoshenko	6
1.5	Las Condiciones de Frontera	9
2	El Método de Elemento Finito	11
2.1	Introducción	11
2.2	El problema de autovalores	12
2.3	Aplicación del Método de Elementos Finitos	13
2.3.1	Discretización en elementos	15
2.3.2	Funciones de forma	15
2.3.3	Forma matricial del problema	17
2.3.4	Matrices de elemento y ensamblaje	18
2.3.5	Las matrices de rigidez y de masa	19
2.4	Modos Naturales de Vibración	20
2.5	Las condiciones de frontera	21
2.5.1	Empotrada-Empotrada	21
2.5.2	Empotrada-Solo Soportada	22
2.5.3	Empotrada-Giro impedido	23
2.5.4	Empotrada-Libre	24
2.5.5	Otros modelos de viga	24
3	Método Asintótico	27
3.1	Normalización de la ecuación	27
3.2	El Método de Propagación de Onda	29
3.3	El Método de Propagación de Onda corregido con Bisección	34
3.4	Otras Condiciones de Frontera	37
4	Resultados	40
4.1	Viga Elíptica	40
4.1.1	Figura y parámetros físicos	40
4.1.2	Modelo 3D	41
4.1.3	Modelo Euler-Bernoulli	41
4.1.4	Modelo Rayleigh	41

4.1.5	Modelo Cortante	43
4.2	Viga Circular	45
4.2.1	Figura y parámetros físicos	45
4.2.2	Modelo 3D	45
4.2.3	Modelo Euler-Bernoulli	45
4.2.4	Modelo Rayleigh	47
4.2.5	Modelo Cortante	47
4.3	Viga Rectangular	49
4.3.1	Figura y parámetros físicos	49
4.3.2	Modelo 3D	49
4.3.3	Modelo Euler-Bernoulli	49
4.3.4	Modelo Rayleigh	51
4.3.5	Modelo Cortante	51
4.4	Viga Cuadrada	53
4.4.1	Figura y parámetros físicos	53
4.4.2	Modelo 3D	54
4.4.3	Modelo Euler-Bernoulli	54
4.4.4	Modelo Rayleigh	54
4.4.5	Modelo Cortante	54
4.5	Comentarios	57
5	Conclusiones	59
A	Resultados para vigas de acero y aluminio	60
A.1	Vigas de Acero	60
A.1.1	Sección transversal elíptica	60
A.1.2	Sección transversal circular	61
A.1.3	Sección transversal rectangular	63
A.1.4	Sección transversal cuadrada	66
A.2	Vigas de Aluminio	66
A.2.1	Sección transversal elíptica	66
A.2.2	Sección transversal circular	68
A.2.3	Sección transversal rectangular	68
A.2.4	Sección transversal cuadrada	71

Índice de Figuras

1.1	Geometría de una viga ideal.	1
1.2	Viga flexionada.	2
1.3	Tres tipos de apoyo con distintas fuerzas aplicadas a vigas.	2
1.4	Viga convencional de Euler-Bernoulli.	3
1.5	Viga convencional de Timoshenko. Giro de la sección normal a la fibra media.	7
2.1	Partición del dominio en n elementos. Cada x_i se conoce también como <i>nodo</i>	15
2.2	Funciones de base Hermíticas cúbicas.	16
2.3	Funciones interpolantes sobre el i -ésimo elemento.	17
3.1	La función determinante para Euler-Bernoulli en línea media y la función $\cos x$ en línea delgada.	35
3.2	La función determinante para Rayleigh en línea media y la función $\cos x + \sin x$ en línea delgada.	36
3.3	La función determinante para el efecto de Cortante se describe por medio de una δ línea media y la función $\cos x + \sin x$ en línea delgada.	37
4.1	Sección transversal de una viga de concreto elíptica.	40
4.2	Sección transversal de una viga de concreto circular.	45
4.3	Sección transversal de una viga de concreto rectangular.	49
4.4	Sección transversal de una viga de concreto cuadrada.	53
A.1	Sección transversal de una viga de acero elíptica.	60
A.2	Sección transversal de una viga de acero circular.	62
A.3	Sección transversal de una viga de acero rectangular.	64
A.4	Sección transversal de una viga de acero cuadrada.	66
A.5	Sección transversal de una viga de aluminio elíptica.	67
A.6	Sección transversal de una viga de aluminio circular.	69
A.7	Sección transversal de una viga de aluminio rectangular.	70
A.8	Sección transversal de una viga de aluminio cuadrada.	72

Índice de Tablas

3.1	Frecuencias normalizadas obtenidas para una viga (E-E) por medio de MEF y el MPO.	34
4.1	Frecuencias normalizadas del modelo 3D para una viga elíptica de concreto.	41
4.2	Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga elíptica de concreto por medio del MEF.	42
4.3	Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga elíptica de concreto por medio del MA.	42
4.4	Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga elíptica de concreto por medio del MEF.	42
4.5	Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga elíptica de concreto por medio del MA.	43
4.6	Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga elíptica de concreto por medio del MEF.	43
4.7	Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga elíptica de concreto por medio del MA.	44
4.8	Errores relativos de las frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga elíptica de concreto obtenidas por MA y MEF respecto al modelo 3D.	44
4.9	Frecuencias normalizadas del modelo 3D para una viga circular de concreto.	46
4.10	Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga circular de concreto por medio del MEF.	46
4.11	Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga circular de concreto por medio del MA.	46
4.12	Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga circular de concreto por medio del MEF.	47
4.13	Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga circular de concreto por medio del MA.	47
4.14	Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga circular de concreto por medio del MEF.	48
4.15	Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga circular de concreto por medio del MA.	48
4.16	Errores relativos de las frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga circular de concreto obtenidas por MA y MEF respecto al modelo 3D.	48
4.17	Frecuencias normalizadas del modelo 3D para una viga rectangular de concreto.	50
4.18	Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga rectangular de concreto por medio del MEF.	50
4.19	Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga rectangular de concreto por medio del MA.	51

4.20	Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga rectangular de concreto por medio del MEF.	51
4.21	Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga rectangular de concreto por medio del MA.	52
4.22	Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga rectangular de concreto por medio del MEF.	52
4.23	Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga rectangular de concreto por medio del MA.	52
4.24	Errores relativos de las frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga rectangular de concreto obtenidas por MA y MEF respecto al modelo 3D.	53
4.25	Frecuencias normalizadas del modelo 3D para una viga cuadrada de concreto.	54
4.26	Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga cuadrada de concreto por medio del MEF.	55
4.27	Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga cuadrada de concreto por medio del MA.	55
4.28	Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga cuadrada de concreto por medio del MEF.	55
4.29	Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga cuadrada de concreto por medio del MA.	56
4.30	Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga cuadrada de concreto por medio del MEF.	56
4.31	Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga cuadrada de concreto por medio del MA.	57
4.32	Errores relativos de las frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga cuadrada de concreto obtenidas por MA y MEF respecto al modelo 3D.	57
A.1	Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga elíptica de acero.	61
A.2	Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga elíptica de acero.	61
A.3	Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga elíptica de acero.	62
A.4	Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga circular de acero.	63
A.5	Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga circular de acero.	63
A.6	Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga circular de acero.	64
A.7	Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga rectangular de acero.	64
A.8	Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga rectangular de acero.	65
A.9	Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga rectangular de acero.	65
A.10	Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga cuadrada de acero.	66

A.11 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga cuadrada de acero.	67
A.12 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga cuadrada de acero.	67
A.13 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga elíptica de aluminio.	68
A.14 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga elíptica de aluminio.	68
A.15 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga elíptica de aluminio.	69
A.16 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga circular de aluminio.	69
A.17 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga circular de aluminio.	70
A.18 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga circular de aluminio.	70
A.19 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga rectangular de aluminio.	71
A.20 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga rectangular de aluminio.	71
A.21 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga rectangular de aluminio.	72
A.22 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga cuadrada de aluminio.	72
A.23 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga cuadrada de aluminio.	73
A.24 Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga cuadrada de aluminio.	73

Capítulo 1

Deducción de las Ecuaciones de Viga

1.1 Vigas

La viga es un componente estructural muy común de puentes y edificios en tres dimensiones con una dimensión (longitud) mucho más larga que las otras dos (que definen la sección transversal). Son usadas para soportar cargas transversales, es decir, que las cargas aplicadas externamente son coplanares.

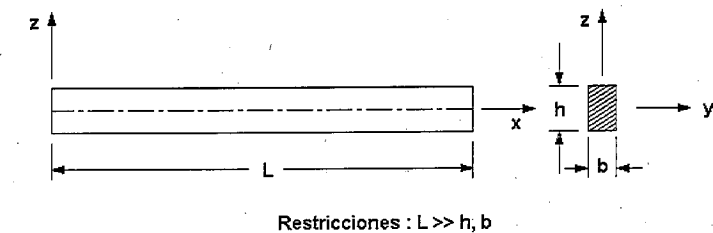


Figura 1.1: Geometría de una viga ideal.

Una viga se llama ideal si son impuestas ciertas restricciones sobre su geometría. En la Figura 1.1 se muestran estas restricciones sobre la viga.

Se supone que una viga es uniforme en su sección transversal y es de un material homogéneo¹; el eje de simetría coincide con el del eje x (Figura 1.1). Cuando la viga se encuentra sometida a fuerzas, las cuales se asumen que están en un plano que contiene el eje de simetría, ésta, debido a su elasticidad, puede distorsionarse tal como se muestra en la Figura 1.2. Estas fuerzas pueden ser debidas al peso de la viga, a cargas aplicadas externamente (las cuales pueden variar con el tiempo), o a una combinación de ambas. El eje de simetría distorsionado resultante, punteado en la Figura 1.2, se llama *eje neutro*. La determinación de este eje es de importancia en la teoría de elasticidad y será parte de las siguientes secciones el mostrar como puede obtenerse al considerar variación en el tiempo.

Existen muchas maneras de apoyar vigas. Por ejemplo, la Figura 1.3(a) muestra una viga en la cual el extremo izquierdo está rígidamente fijo, mientras que el extremo derecho se encuentra libre

¹ Esto significa que las propiedades físicas de la viga serán constantes e iguales punto a punto a lo largo de toda la viga y en el tiempo.

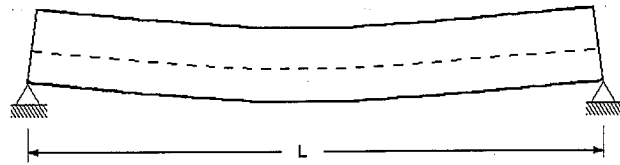


Figura 1.2: Viga flexionada.

para moverse, a esto se le llama una *viga en voladizo*. En la Figura 1.3(b) la viga está apoyada en los dos extremos, hecho que se conoce como una *viga simplemente apoyada*. En ambos casos la viga está asegurada en sus extremos de modo que aunque esté fija en estos extremos, la rotación se puede dar alrededor de ellos. La Figura 1.3(c) muestra aún otra manera de apoyar vigas.

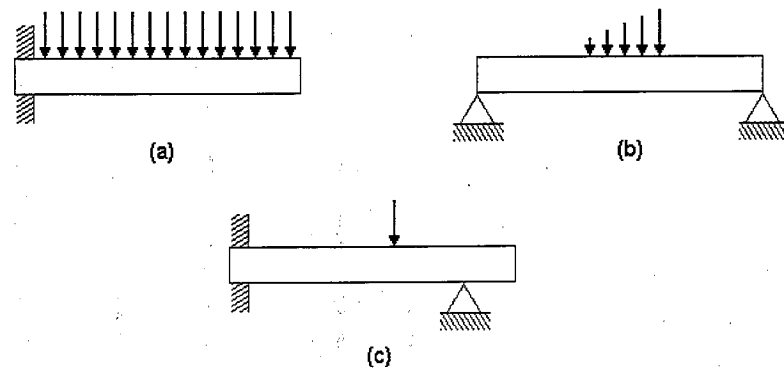


Figura 1.3: Tres tipos de apoyo con distintas fuerzas aplicadas a vigas.

Así como hay diferentes maneras de apoyar vigas, también existen diferentes formas de aplicar fuerzas de carga externa. Por ejemplo, en la Figura 1.3(a) hay una *carga uniformemente distribuida* sobre toda la viga. Puede haber una *carga variable* sobre toda la viga o sólo una parte de ella como en la Figura 1.3(b). Por otro lado puede haber una *carga concentrada* como se indica en la Figura 1.3(c).

1.2 La Ecuación Euler-Bernoulli

Antes de desarrollar el modelo de vibración de viga nos basaremos en tres hipótesis de la teoría clásica de vigas o de Euler - Bernoulli [5] y haremos referencia a la Figura 1.1:

1. Los desplazamientos verticales² de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje x de la viga.
2. El desplazamiento lateral (según el eje y de la Figura 1.1) es nulo.

²En el contexto de la ingeniería estructural suele llamarse *flecha* al desplazamiento transversal de una viga.

3. Las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación.

Basándonos en la hipótesis 1 y en la Figura 1.4 se tiene que los puntos A y B son llevados a los puntos A' y B' con un desplazamiento igual al que realiza el eje de la viga.

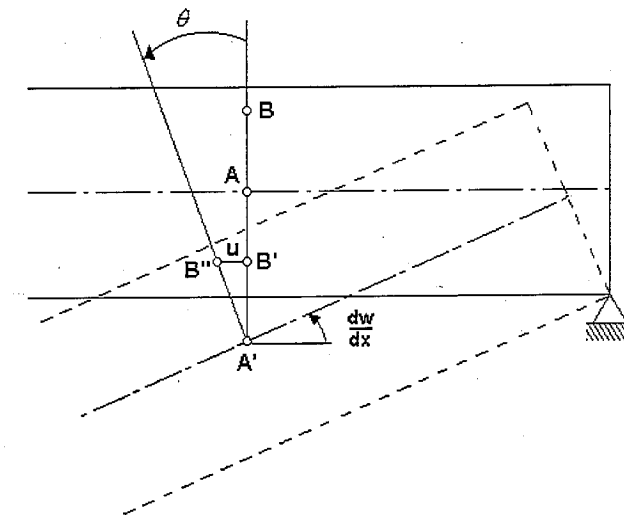


Figura 1.4: Viga convencional de Euler-Bernoulli.

Entonces la viga desplaza su eje de A a A' lo mismo que el punto B a B' , así $BB' = AA'$. De la Figura 1.4 se tiene que

$$\tan \theta = \frac{u}{-A'B'} \rightarrow u = -A'B' \tan \theta$$

pero, por la hipótesis 3 la sección transversal donde se encuentran los puntos B'' y A' es ortogonal al eje deformado de la viga, esto es, forma un ángulo recto con el eje deformado de la viga, y por lo tanto:

$$u = -A'B' \frac{dw}{dx} = -z \frac{dw}{dx}$$

Un supuesto adicional es que las oscilaciones son pequeñas y la tangente del ángulo entre la curva elástica y el eje x es muy pequeña; de forma que el ángulo de giro θ es cercano a su tangente, esto es $\theta \approx \frac{dw}{dx}$.

De acuerdo a lo anterior, el campo de desplazamientos de un punto cualquiera (x, y, z) en el tiempo t está dado por

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= -z\theta(x, t) \\ v(x, y, z, t) &= 0 \\ w(x, y, z, t) &= w(x, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

La descripción del movimiento de la viga se hará a través de su curva elástica, que denotaremos por $w(x, t)$.

El modelo de viga de Euler-Bernoulli tiene más de doscientos años. Si denotamos la densidad de masa, por unidad de longitud de la viga, por $\rho(x)$, $0 \leq x \leq L$, y el segundo momento del módulo de elasticidad alrededor del eje elástico³ por $EI(x)$, el modelo de Euler-Bernoulli está basado en el supuesto de que la energía

$$E = E \left(w, \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

puede ser adecuadamente descrita por la integral

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (1.2)$$

donde $\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2$ es el diferencial de área de la energía cinética y $EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2$ representa al diferencial de área de la energía potencial. Se han suprimido los argumentos por simplicidad de la presentación. Suponiendo una función de desplazamiento suave $w(x, t)$, $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$, y diferenciando con respecto a t a la ecuación (1.2)

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \left[\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) \right] dx$$

integrando por partes dos veces el segundo término

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) dx &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) dx \\ &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \Big|_0^L - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \Big|_0^L \\ &\quad + \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) dx \end{aligned}$$

así, la derivada de la energía con respecto a t es

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^L \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \right] dx + EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \Big|_0^L \\ &\quad - EI \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \Big|_0^L \end{aligned}$$

³ También conocido como *rigidez flexural*

donde los términos en los extremos de la viga se anulan debido a las condiciones de frontera de la viga. Por ejemplo para una viga empotrada en sus extremos las condiciones son $w(0) = \frac{\partial w}{\partial x}(0) = 0$ y $w(L) = \frac{\partial w}{\partial x}(L) = 0$.

Bajo el supuesto de que no se realiza trabajo, es decir, que no hay energía perdida o ganada internamente a lo largo de la viga, entonces el término de la integral multiplicado por $\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)$ debe ser cero, es decir

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (1.3)$$

que es la ecuación de Euler-Bernoulli de una viga. Este modelo es de gran importancia en ingeniería estructural debido a que máquinas, puentes y edificios muchas veces tienen componentes que pueden ser sencillamente modelados como vigas.

1.3 La Ecuación de Rayleigh

El modelo de viga de Rayleigh es una ligera modificación del modelo de Euler-Bernoulli, y tiene alrededor de cien años. Para obtenerlo, el elemento de viga de ancho δ centrado en x supone adicionalmente tener momento de masa de inercia alrededor del eje elástico, igual a $\delta I_\rho(x)$, resultando en la expresión de energía

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_\rho \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (1.4)$$

donde I_ρ es proporcional a la inercia rotatoria y se define como $I_\rho = \rho I/A$. Al igual que en el modelo anterior, supondremos que $w(x, t)$ es una función de desplazamiento suave en $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$, y diferenciando a la ecuación (1.4) con respecto a t

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \left[\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + I_\rho \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \right) + EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) \right] dx$$

integrando por partes el segundo término

$$\int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \right) dx = \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \right) dx$$

e integrando dos veces por partes el tercer término

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) dx &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) dx \\ &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \Big|_0^L - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \Big|_0^L \\ &\quad + \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) dx \end{aligned}$$

así, la derivada de la energía con respecto a t es

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^L \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_\rho \left(\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \right] dx + \\ &\quad I_\rho \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \Big|_0^L + EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \Big|_0^L - EI \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \Big|_0^L \end{aligned}$$

donde los términos en los extremos de la viga se anulan debido a las condiciones de frontera de la viga. Por ejemplo para una viga empotrada en sus extremos las condiciones son $w(0) = \frac{\partial w}{\partial x}(0) = 0$ y $w(L) = \frac{\partial w}{\partial x}(L) = 0$.

Bajo el supuesto de que no hay energía perdida o ganada internamente a lo largo de la viga entonces el término de la integral multiplicado por $\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)$ debe ser cero, es decir

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_\rho \left(\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0} \quad (1.5)$$

que es la ecuación de Rayleigh.

1.4 La Ecuación de Timoshenko

De acuerdo a [5], la teoría de vigas de Timoshenko comparte las hipótesis 1 y 2 de la teoría de vigas clásica de la sección 1.2. Por otra parte, la nueva hipótesis 3 establece que "las secciones planas normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas pero no necesariamente normales al eje después de la deformación" (Figura 1.5).

Esta hipótesis representa una mayor aproximación a la deformación real de la sección transversal en vigas de gran canto. A medida que la relación longitud/canto disminuye, las secciones transversales dejan de conservarse planas después de la deformación. Vemos en la Figura 1.5 que la hipótesis de Timoshenko supone tomar un giro medio para la sección, de manera que a efectos prácticos puede seguir considerándose plana.

El modelo de viga de Timoshenko tiene mas de 50 años y representa un cambio más importante del modelo Euler-Bernoulli que la hecha por la ecuación de Rayleigh. En el modelo de Timoshenko los elementos de viga experimentan no solo movimientos rígidos como en los dos casos previos sino

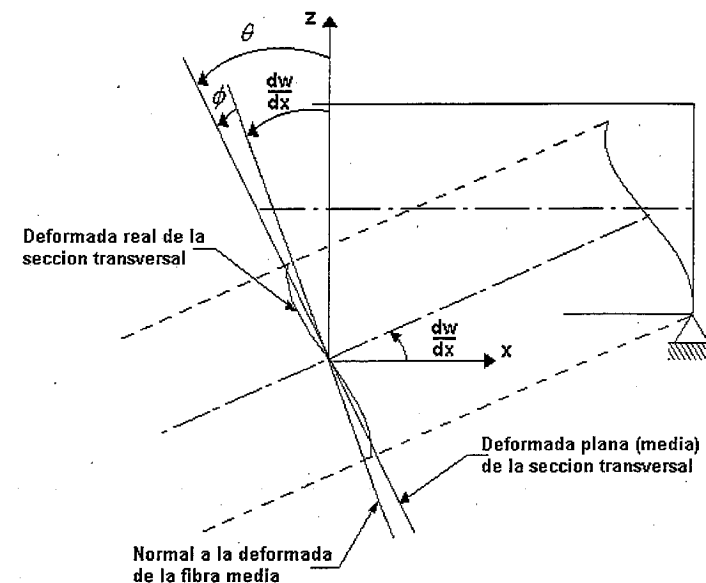


Figura 1.5: Viga convencional de Timoshenko. Giro de la sección normal a la fibra media.

que, en adición, experimenta un movimiento debido al efecto de corte. El ángulo total de rotación del elemento es así

$$\theta = \frac{dw}{dx} + \phi$$

donde $\frac{dw}{dx}$ es la pendiente de la deformada del eje de la viga y ϕ un giro adicional debido a la deformación por cortante. Así

$$\phi = \theta - \frac{dw}{dx}$$

La expresión de energía es

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 + EI \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (1.6)$$

donde $\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2$ es el diferencial de área de la energía cinética y $GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 + EI \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2$ representa al diferencial de área de la energía potencial.

Diferenciando con respecto a t a la ecuación (1.6)

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \left[\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + I_\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + EI \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial x} \right) \right] dx$$

pero

$$\int_0^L \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial x} \right) dx = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx$$

y

$$\int_0^L GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) dx = GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \right) dx$$

así

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \int_0^L \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \left[\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \right) \right] \right. \\ & + \frac{\partial \theta}{\partial t} \left[I_\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) - EI \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right] \left. \right\} dx \\ & - GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \Big|_0^L + EI \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \Big|_0^L \end{aligned}$$

donde los términos en los extremos de la viga se anulan debido a las condiciones de frontera de la viga. Por ejemplo para una viga empotrada en sus extremos las condiciones de frontera son $w(0) = \frac{\partial w}{\partial x}(0) = 0$ y $w(L) = \frac{\partial w}{\partial x}(L) = 0$. La expresión anterior conduce a las ecuaciones de Timoshenko al suponer que no hay energía perdida o ganada internamente a lo largo de la viga

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \right) &= 0 \\ I_\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) - EI \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Para una viga delgada I_ρ y EI son pequeños en comparación con GA . Si las funciones son suaves, la primera ecuación puede ser diferenciada con respecto a x , resuelta para $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ y sustituir en la segunda ecuación para obtener

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_\rho \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho}{GA} \left(I_\rho \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \right) = 0 \quad (1.8)$$

que es la ecuación de Timoshenko y que puede ser vista como una perturbación singular de la ecuación de Rayleigh, ya que para vigas delgadas I_ρ y EI son pequeños en comparación con GA .

1.5 Las Condiciones de Frontera

Dado que las ecuaciones (1.3), (1.5) y (1.8) son de cuarto orden, su solución general involucrará cuatro constantes arbitrarias que serán determinadas para casos particulares por la aplicación de condiciones de frontera apropiadas.

Para cualquier caso particular, será usualmente posible especificar, en cualquiera de los extremos de la viga, una o más de las siguientes cantidades: desplazamiento, pendiente (o giro), momento flector y fuerza cortante. Dado que queremos resolver problemas bien planteados, es necesario tener dos combinaciones de las cantidades anteriores por cada uno de los extremos.

A continuación mostramos las expresiones para el desplazamiento, pendiente, momento flector y fuerza cortante para los tres modelos desarrollados en este Capítulo.

Para la ecuación de Euler-Bernoulli (1.3) las cantidades se expresan como

Desplazamiento cero	$w = 0$	$t \geq 0$	(1.9)
Giro total cero	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$t \geq 0$	
Momento cero	$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$	$t \geq 0$	
Cortante cero	$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$	$t \geq 0$	

Para la ecuación de Rayleigh (1.5)

Desplazamiento cero	$w = 0$	$t \geq 0$	(1.10)
Giro total cero	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$t \geq 0$	
Momento cero	$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$	$t \geq 0$	
Cortante cero	$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \rho \frac{I}{A} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} = 0$	$t \geq 0$	

La ecuación de Timoshenko (1.8) tiene las siguientes cantidades

$$\begin{aligned}
 \text{Desplazamiento cero} & \quad w = 0 & t \geq 0 \\
 \text{Giro total cero} & \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 & t \geq 0 \\
 \text{Momento cero} & \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho \frac{EI}{GA} w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 & t \geq 0 \\
 \text{Cortante cero} & \quad EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \rho \left(\frac{I}{A} + \frac{EI}{GA} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} = 0 & t \geq 0
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Las expresiones del modelo de Rayleigh y del modelo de Timoshenko consideran la derivada parcial $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ que corresponde a la aceleración de la viga debida a la aplicación de alguna fuerza. Puede verse que el desplazamiento y el giro tienen las mismas expresiones sin importar el modelo. Esto no sucede así con el momento flector y la fuerza cortante para los modelos de Rayleigh y de Timoshenko que al considerar los efectos de inercia y de corte, incluyen expresiones más complejas que las del modelo de Euler-Bernoulli.

De manera general las condiciones de frontera para una viga en sus extremos pueden ser cualquiera de las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{Empotrada (E):} & \quad \text{desplazamiento y giro impedidos} \\
 \text{Solo Soportada (S):} & \quad \text{desplazamiento impedido y momento flector nulo} \\
 \text{Giro Impedido (G):} & \quad \text{giro nulo y fuerza cortante nula} \\
 \text{Libre (L):} & \quad \text{momento nulo y fuerza cortante nula}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

De esta manera las condiciones de frontera estarán dadas por combinaciones de (E-S-G-L) en los extremos de la viga. Por ejemplo, podemos hablar de una viga empotrada en sus extremos usando las condiciones (E-E) o bien de una viga en voladizo por medio de las condiciones (E-L).

Capítulo 2

El Método de Elemento Finito

2.1 Introducción

El Método de Elemento Finito (MEF, o FEM por sus siglas en inglés) es un método computacional ampliamente usado en ingeniería para resolver una variedad de problemas en análisis estructural, transferencia de calor, mecánica de fluidos y algunas otras áreas. Los métodos de elementos finitos fueron introducidos a finales de los 50's y principios de los 60's para resolver problemas de análisis de estructuras en la industria aeroespacial. Y dado que el método ha crecido en popularidad y poder, en la actualidad casi toda industria importante involucrada con el diseño de ingeniería mecánica lo usa en todos sus diseños y análisis.

Las ideas básicas de MEF tuvieron su origen en los avances del análisis estructural de las aeronaves. En 1941, Hrenikoff presentó una solución para problemas de elasticidad usando el "frame work method" o método de armadura. El artículo de Courant, que usa interpolación polinomial por pedazos sobre subregiones triangulares para modelar problemas de torsión, apareció en 1943. Turner et al. obtuvo las matrices de rigidez para barras, vigas y otros elementos y presentó sus resultados en 1956. El término *elemento finito* fue inventado y usado por Clough en el año de 1960.

A principios de los años 1960's, los ingenieros usaron el método para aproximar la solución de problemas en el análisis de esfuerzos, flujo de fluidos, transferencia de calor y otras áreas. En 1955 un libro de Argyris sobre teoremas de energía y métodos matriciales presentó una base para desarrollos adicionales en estudios de elementos finitos. El primer libro sobre elementos finitos por Zienkiewicz y Chung fue publicado en 1967. A finales de los años 1960's e inicios de la década 1970, el análisis de elementos finitos fue aplicado a problemas no lineales y deformaciones grandes. El libro de Oden sobre continuos no lineales apareció en 1972.

Las bases y fundamentos matemáticos fueron presentados en la década de 1970. Nuevo desarrollo de elementos, convergencia y otras áreas relacionadas se ubican en esta categoría.

Al día de hoy, los desarrollos en computadoras *mainframe*¹ y la disponibilidad de poderosas microcomputadoras han traído este método al alcance de estudiantes e ingenieros trabajando incluso en pequeñas industrias.

Detrás de todas las aplicaciones de MEF está la noción de 'discretización' y, en particular, discretización geométrica. La idea es simple: en lugar de tratar con la geometría de un aparato mecánico como un todo, se subdivide el todo en piezas mas pequeñas de geometría regular, tales como triángulos, cuadriláteros, o paralelepípedos. Cada uno de estos es llamado un *elemento*.

¹ Traducido también como *supercomputadora*.

El MEF es un método de aproximación al comportamiento verdadero del sistema mecánico. La suposición de que el comportamiento puede ser modelado por una EDP que es muy difícil de resolver exactamente hace del MEF una herramienta particularmente útil para este problema. El MEF simplemente provee una aproximación a la solución de la ecuación. Ecuaciones de vigas, placas y estructuras con superficies curvas, y ecuaciones de elasticidad son típicas ecuaciones diferenciales resueltas por MEF.

En nuestro caso, usaremos el análisis de MEF para determinar numéricamente las frecuencias naturales de vibración del comportamiento vibratorio de vigas. Nos restringimos de esta forma a resolver solamente el problema de frecuencias de vigas pues no es nuestro objetivo el resolver la ecuación considerando variación en el tiempo.

2.2 El problema de autovalores

Enfocaremos la aplicación de MEF a uno de los modelos de viga. Sin pérdida de generalidad usaremos el modelo de Rayleigh (Ec. 1.5) donde las condiciones en los extremos, debido a (1.10) y (1.12), pueden ser cualquiera de las siguientes

$$\begin{array}{ll}
 \text{empotrada (E)} & w(a, t) = w_x(a, t) = 0, \quad t \geq 0 \\
 \text{solo soportada (S)} & w(a, t) = w_{xx}(a, t) = 0, \quad t \geq 0 \\
 \text{giro impedido (G)} & w_x(a, t) = 0 \\
 & EIw_{xxx}(a, t) - \rho \frac{I}{A} w_{ttx}(a, t) = 0, \quad t \geq 0 \\
 \text{libre (L)} & w_{xx}(a, t) = 0 \\
 & EIw_{xxx}(a, t) - \rho \frac{I}{A} w_{ttx}(a, t) = 0, \quad t \geq 0
 \end{array} \quad (2.1)$$

donde a puede ser el extremo izquierdo $a = 0$ o el extremo derecho $a = L$ y el subíndice en la función w denota derivadas parciales con respecto a cualquiera de las dos variables x y t . De esta manera las condiciones de frontera estarán dadas por (2.1) en distintas combinaciones para los dos extremos de la viga.

Proponemos una solución a la ecuación de Rayleigh (1.5) de la forma

$$w(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.2)$$

donde X es una función de la variable espacial x y T es una función que depende del tiempo t y se asume es del tipo armónico, es decir, $T(t) = e^{-i\omega t}$. Para el lector interesado en el método de separación de variables puede consultar [1], [3] o [2]. Debido a la expresión (2.2) la ecuación (1.5) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria en x

$$EIX^{(4)} + \omega^2 (I_\rho X^{(2)} - \rho X) = 0 \quad (2.3)$$

en donde el superíndice entre paréntesis indica el orden de derivación.

Para el caso en que la viga este empotrada en ambos extremos (E-E) se requiere que

$$\begin{array}{ll}
 w(0, t) = X(0)T(t) = 0, & w(L, t) = X(L)T(t) = 0 \\
 w_x(0, t) = X^{(1)}(0)T(t) = 0, & w_x(L, t) = X^{(1)}(L)T(t) = 0
 \end{array}$$

es decir que $X(0) = X(L) = X^{(1)}(0) = X^{(1)}(L) = 0$ si $T(t)$ es una función no trivial. De aquí que $X(x)$ debe satisfacer el problema de autovalores

$$EIX^{(4)} + \omega^2 (I_\rho X^{(2)} - \rho X) = 0 \quad (2.4)$$

junto con las condiciones

$$\begin{array}{l}
 X(0) = X^{(1)}(0) = 0 \\
 X(L) = X^{(1)}(L) = 0
 \end{array} \quad (2.5)$$

si la viga tiene por condiciones a (E-E).

Hasta aquí solo se ha presentado las condiciones de contorno para una viga empotrada en sus extremos para la función X . Un desarrollo similar puede realizarse con otras condiciones de frontera. Para tomar en cuenta las otras condiciones mostradas en (1.12) se considera de aquí en adelante que la viga está empotrada (E) del extremo izquierdo y en el extremo derecho puede ocurrir que este solo soportada (S), con giro impedido (G) o libre (L). Se muestran enseguida las condiciones de contorno (E-S), (E-G) y (E-L) para X

$$\begin{array}{ll}
 \text{(E-S)} & X(0) = X^{(1)}(0) = 0 \\
 & X(L) = EIX^{(2)}(L) = 0 \\
 \text{(E-G)} & X(0) = X^{(1)}(0) = 0 \\
 & X^{(1)}(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 \rho \frac{I}{A} X^{(1)} = 0 \\
 \text{(E-L)} & X(0) = X^{(1)}(0) = 0 \\
 & EIX^{(2)}(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 \rho \frac{I}{A} X^{(1)} = 0
 \end{array}$$

2.3 Aplicación del Método de Elementos Finitos

En esta sección la metodología fundamental del análisis del elemento finito será introducida. Los correspondientes elementos finitos serán obtenidos para una dimensión y consecuentemente serán válidos solo para una dimensión. Sin embargo, los aspectos pertinentes del análisis del elemento finito serán definidos e ilustrados de una manera sencilla. Pueden revisarse algunas de las referencias dadas al final de esta tesis para consultar acerca del Método del Elemento Finito, por ejemplo [5], [8], [7], [16] y [24] entre otros.

Para resolver la ecuación (2.4) multiplicamos por una *función de prueba*² Υ e integramos sobre el intervalo $[0, L]$, de tal forma que

$$\int_0^L [EIX^{(4)}\Upsilon + \omega^2 (I_\rho X^{(2)} - \rho X)\Upsilon] dx = 0 \quad (2.6)$$

represente ahora el problema a resolver para cualquier función de prueba Υ que tenga la misma base de funciones que X .

Al integrar el primer término de la ecuación (2.6) dos veces por partes se obtiene

²Se le conoce también como *función de peso*

$$\begin{aligned} \int_0^L EIX^{(4)}\Upsilon dx &= EI \left[X^{(3)}\Upsilon \Big|_0^L - \int_0^L X^{(3)}\Upsilon^{(1)} dx \right] \\ &= EI \left[X^{(3)}\Upsilon \Big|_0^L - X^{(2)}\Upsilon^{(1)} \Big|_0^L + \int_0^L X^{(2)}\Upsilon^{(2)} dx \right] \end{aligned}$$

también podemos hacer lo mismo para el segundo término de la ecuación (2.6) al usar integración por partes

$$\int_0^L \omega^2 I_\rho X^{(2)}\Upsilon dx = \omega^2 I_\rho \left[X^{(1)}\Upsilon \Big|_0^L - \int_0^L X^{(1)}\Upsilon^{(1)} dx \right]$$

Al imponer condiciones de frontera $\Upsilon(0) = \Upsilon(L) = \Upsilon^{(1)}(0) = \Upsilon^{(1)}(L) = 0$ sobre la función de prueba Υ la ecuación (2.6) se puede escribir como

$$EI \int_0^L X^{(2)}\Upsilon^{(2)} dx - \omega^2 \int_0^L (I_\rho X^{(1)}\Upsilon^{(1)} + \rho X\Upsilon) dx = 0$$

De lo anterior obtenemos

$$EI \int_0^L X^{(2)}\Upsilon^{(2)} dx = \omega^2 \int_0^L (I_\rho X^{(1)}\Upsilon^{(1)} + \rho X\Upsilon) dx \quad (2.7)$$

que es la formulación débil del problema (2.4). Cabe mencionar que esta formulación es llamada débil porque busca resolver un problema más fácil; también contiene solamente la segunda derivada de X y puede cubrir casos en que una solución clásica $X \in C^4[0, L]$ de (2.4) no exista aunque el problema físico está bien definido.

El espacio de prueba estará formado por todas las funciones v que son continuamente diferenciables y cuya segunda derivada es continua por pedazos. De esta forma el espacio de prueba estará dado por:

$$V = \left\{ v \in C^1[0, L] : v^{(2)} \text{ existe, excepto en número finito de puntos, y } \int |v^{(2)}|^2 < \infty \right\}$$

Se utiliza este espacio porque las integrales deben ser finitas.

Una vez que ha sido definido el espacio de prueba V , la formulación débil del problema (2.4) consiste entonces en encontrar $\omega \in \mathbf{R}_+$ y $X \in V$ tales que (2.7) se cumpla y las condiciones de frontera (2.5) sean satisfechas.

2.3.1 Discretización en elementos

La idea del MEF es dividir el dominio del problema en un número finito de elementos y aproximar a $X(x)$ por una función continua que este formada por un polinomio sobre cada elemento. Al utilizar este método es necesario sustituir el continuo analizado por un número finito de subdominios interconectados entre sí en un número finito de puntos denominados *nodos*. En la Figura 2.1 se dibuja la viga discretizada.

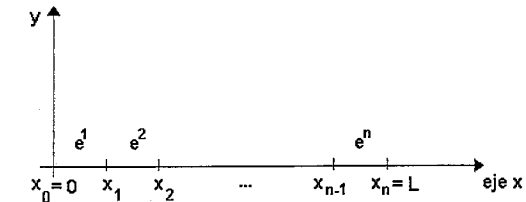


Figura 2.1: Partición del dominio en n elementos. Cada x_i se conoce también como *nodo*.

La viga, al ser dividida en elementos, tiene asociado en cada nodo dos *grados de libertad*³. El primer grado de libertad se refiere al desplazamiento transversal y el segundo a la *pendiente*⁴. De esta forma, será un vector el que represente los desplazamientos globales de un nodo. Esto significa que para cada nodo utilizado en la discretización de elementos se tiene que el vector

$$\begin{bmatrix} w_i \\ w'_i \end{bmatrix}$$

representará a sus desplazamientos globales, el de la flecha y el giro respectivamente.

El elemento más sencillo de viga que utilizaremos es el unidimensional de dos nodos. Por consiguiente, el número total de variables nodales del elemento es 4 (w_i y $(\frac{dw}{dx})_i$ por nodo).

La exactitud de la solución depende del número de elementos empleados en la discretización, así como del tipo de funciones de interpolación utilizadas.

2.3.2 Funciones de forma

Basándonos en la formulación débil (2.7) y en la discretización de la viga hecha en el apartado anterior, el Método de Galerkin consiste en utilizar un subespacio de V de dimensión finita que aproxime de la mejor manera a X . La elección de este subespacio se hará en base a las características o condiciones físicas del problema a resolver.

Sabemos que dw/dx coincide con la pendiente de la deformada del eje de la viga. Por tanto, dicha derivada debe ser continua para garantizar que la deformada del eje describa una curva suave. Las funciones de forma deben ser entonces de clase C_1 , es decir, deben ser las funciones de forma *Hermíticas*⁵. La continuidad de las primeras derivadas obliga a tomar el giro $\frac{dw}{dx}$ como variable.

³Los grados de libertad se refieren a la cantidad de desplazamientos permitidos por nodo. Estos desplazamientos pueden ser en direcciones ortogonales, o bien, en giros de ángulos.

⁴También se le conoce como *giro*.

⁵Se denominan Hermíticas por coincidir las funciones de forma con los polinomios de Hermite.

Por consiguiente, como el número total de variables nodales del elemento es 4, dichas variables definen perfectamente una variación cúbica de la flecha.

Las funciones Hermíticas tienen las propiedades:

$$\begin{aligned} N_i(x_j) &= \delta_{ij} & \bar{N}_i(x_j) &= 0 \\ N_i^{(1)}(x_j) &= 0 & \bar{N}_i^{(1)}(x_j) &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

De esta forma, una aproximación a la solución $X(x)$ por medio de una combinación lineal de funciones polinomiales por pedazos estará dada como

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{i \in \Omega} w_i N_i(x) + w'_i \bar{N}_i(x) \\ &= \sum_{i \in \Omega} \mathbf{N}_i \mathbf{w}_i \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde el conjunto Ω consiste de los índices nodales, $\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ w'_i \end{bmatrix}$ es el vector de los desplazamientos y $\mathbf{N}_i = [N_i(x) \quad \bar{N}_i(x)]$ es el vector de las funciones de forma de la Figura 2.2.

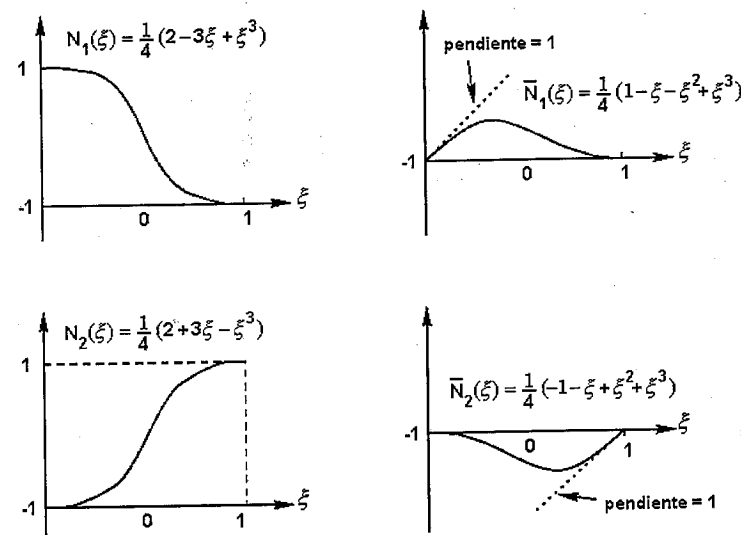


Figura 2.2: Funciones de base Hermíticas cúbicas.

Como puede verse en la Figura 2.3, la elección hecha por MEF del subespacio fue aquella que permite usar interpolación polinomial por pedazos, en este caso, sobre cada elemento se aproxima a X mediante cuatro funciones que permiten la continuidad de los desplazamientos y giros entre elementos adyacentes.

El conjunto Ω está determinado por la cantidad de nodos que definen a un elemento, en este caso 2 nodos por elemento, así $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$. De igual forma que en la expresión (2.8) se propone a $\Upsilon(x)$ como

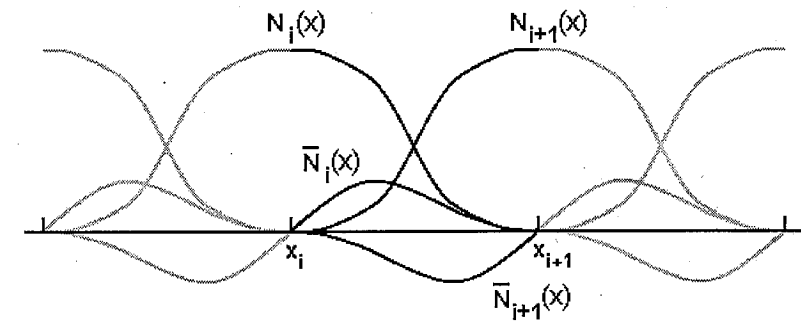


Figura 2.3: Funciones interpolantes sobre el i -ésimo elemento.

$$\Upsilon(x) = \sum_{i \in \Omega} \mathbf{N}_i \alpha_i \quad (2.9)$$

donde $\alpha_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha'_i \end{bmatrix}$ es un vector de constantes arbitrarias, que deben cumplir con las condiciones de frontera de \bar{X} . El que Υ tenga la misma base que X tiene que ver con simplificaciones que podrán verse mas adelante.

2.3.3 Forma matricial del problema

Dado que el dominio continuo ha sido discretizado en elementos finitos, la expresión (2.7) se convierte en

$$EI \sum_e \int_e X^{(2)} \Upsilon^{(2)} dx = \omega^2 \sum_e \int_e (I_\rho X^{(1)} \Upsilon^{(1)} + \rho X \Upsilon) dx \quad (2.10)$$

donde la suma es sobre los elementos e del dominio. Podemos usar las expresiones (2.8) y (2.9) en la ecuación (2.10) y así tener

$$\begin{aligned} EI \sum_e \int_e \left[\sum_{j \in \Omega} \mathbf{N}_j^{(2)} \mathbf{w}_j \sum_{i \in \Omega} \mathbf{N}_i^{(2)} \alpha_i \right] dx &= \omega^2 I_\rho \sum_e \int_e \left[\sum_{j \in \Omega} \mathbf{N}_j^{(1)} \mathbf{w}_j \sum_{i \in \Omega} \mathbf{N}_i^{(1)} \alpha_i \right] dx \\ &+ \omega^2 \rho \sum_e \int_e \left[\sum_{j \in \Omega} \mathbf{N}_j \mathbf{w}_j \sum_{i \in \Omega} \mathbf{N}_i \alpha_i \right] dx \end{aligned}$$

que puede escribirse como

$$EI \sum_e \alpha^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{w} = \omega^2 \sum_e \alpha^T (I_\rho \mathbf{L}^{(e)} + \rho \mathbf{M}^{(e)}) \mathbf{w} \quad (2.11)$$

donde se definen las matrices

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_e [\mathbf{N}_i^{(2)}]^T \mathbf{N}_j^{(2)} dx \quad \mathbf{L}_{ij}^{(e)} = \int_e [\mathbf{N}_i^{(1)}]^T \mathbf{N}_j^{(1)} dx$$

$$\mathbf{M}_{ij}^{(e)} = \int_e [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{N}_j dx \quad \text{con } i, j \in \Omega$$

y los vectores columna

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_0 \quad \alpha'_0 \quad \dots \quad \alpha_i \quad \alpha'_i \quad \dots \quad \alpha_n \quad \alpha'_n]^T$$

$$\mathbf{w} = [w_0 \quad w'_0 \quad \dots \quad w_i \quad w'_i \quad \dots \quad w_n \quad w'_n]^T$$

Para simplificar la notación en la expresión (2.11) podemos definir la matriz de rigidez \mathbf{K} y las matrices de masa \mathbf{L} y \mathbf{M} como

$$\mathbf{K} = EI \sum_e \mathbf{K}^{(e)} \quad \mathbf{L} = I_\rho \sum_e \mathbf{L}^{(e)} \quad \mathbf{M} = \rho \sum_e \mathbf{M}^{(e)} \quad (2.12)$$

y de esta forma (2.11) puede verse como

$$\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{K} \mathbf{w} = \omega^2 \boldsymbol{\alpha}^T (\mathbf{L} + \mathbf{M}) \mathbf{w} \quad (2.13)$$

que representa en forma matricial a la ecuación (2.7) al haber hecho uso de los elementos finitos. Note que ahora las matrices de rigidez y de masa \mathbf{K} , \mathbf{L} y \mathbf{M} son de dimensiones $(|\Omega| \times 2) \times (|\Omega| \times 2)$ debido a los dos grados de libertad que hay por nodo.

2.3.4 Matrices de elemento y ensamblaje

Las matrices $\mathbf{K}^{(e)}$, $\mathbf{L}^{(e)}$ y $\mathbf{M}^{(e)}$ son de tamaño $(|\Omega| \times 2) \times (|\Omega| \times 2)$ (donde $|\Omega|$ es el número de nodos) y puede verse que son cero en casi todos sus componentes excepto en donde la integral tiene sentido. Esto es

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \begin{cases} \int_e [\mathbf{N}_i^{(2)}]^T \mathbf{N}_j^{(2)} dx & \text{si los nodos } x_i, x_j \text{ pertenecen al elemento } e \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mathbf{L}_{ij}^{(e)} = \begin{cases} \int_e [\mathbf{N}_i^{(1)}]^T \mathbf{N}_j^{(1)} dx & \text{si los nodos } x_i, x_j \text{ pertenecen al elemento } e \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mathbf{M}_{ij}^{(e)} = \begin{cases} \int_e [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{N}_j dx & \text{si los nodos } x_i, x_j \text{ pertenecen al elemento } e \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si tomamos en cuenta la información de conectividad de cada elemento en una tabla podemos definir las matrices $\mathbf{k}^{(e)}$, $\mathbf{l}^{(e)}$ y $\mathbf{m}^{(e)}$ únicamente sobre cada elemento y utilizar la tabla de conectividad para determinar a las matrices \mathbf{K} , \mathbf{L} y \mathbf{M} . Esto significa que en lugar de hacer las sumas en la expresión (2.12), los elementos de $\mathbf{k}^{(e)}$ serán colocados o "ensamblados" en los lugares adecuados de la matriz global \mathbf{K} , basándonos en la conectividad de cada elemento; los elementos que se traslapen simplemente serán sumados. Lo mismo se hará para las matrices \mathbf{L} y \mathbf{M} . Esto se conoce como el *ensamblaje* de las matrices de rigidez y de masa. El ensamblaje debe realizarse teniendo en cuenta que cada nodo tiene asociado dos grados de libertad, lo que significa que los empalmes sucederán en submatrices de 2×2 .

De esta forma las matrices $\mathbf{k}^{(e)}$, $\mathbf{l}^{(e)}$ y $\mathbf{m}^{(e)}$ de cada elemento estarán dadas por

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_{ij}^{(e)} &= \int_e [\mathbf{N}_i^{(2)}]^T \mathbf{N}_j^{(2)} dx & \text{con } i, j \in \Omega^{(e)} \\ \mathbf{l}_{ij}^{(e)} &= \int_e [\mathbf{N}_i^{(1)}]^T \mathbf{N}_j^{(1)} dx & \text{con } i, j \in \Omega^{(e)} \\ \mathbf{m}_{ij}^{(e)} &= \int_e [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{N}_j dx & \text{con } i, j \in \Omega^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Aquí $\Omega^{(e)}$ representa a los índices de las funciones de forma para cada elemento, en este caso el conjunto de índices es $\Omega^{(e)} = \{1, 2\}$.

Normalmente MEF realiza las integrales de la expresión (2.14) sobre un espacio normalizado de la variable ξ . Cada elemento tiene un cambio de variable de la manera siguiente:

$$\xi(x) = \frac{2}{l^{(e)}} \left(x - \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right)$$

que convierte a la expresión (2.14) en

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_{ij}^{(e)} &= \int_e [\mathbf{N}_i^{(2)}]^T \mathbf{N}_j^{(2)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi & \text{con } i, j \in \Omega^{(e)} \\ \mathbf{l}_{ij}^{(e)} &= \int_e [\mathbf{N}_i^{(1)}]^T \mathbf{N}_j^{(1)} \frac{l^{(e)}}{2} d\xi & \text{con } i, j \in \Omega^{(e)} \\ \mathbf{m}_{ij}^{(e)} &= \int_e [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{N}_j \frac{l^{(e)}}{2} d\xi & \text{con } i, j \in \Omega^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Puede observarse que las matrices de la expresión (2.15) son simétricas pues el intercambiar los índices i y j solo significa hacer un cambio en el producto del integrando. Más aún, esta simetría estará presente en las matrices ensambladas \mathbf{K} , \mathbf{L} y \mathbf{M} y como podrá darse cuenta también serán *matrices bandadas*.

2.3.5 Las matrices de rigidez y de masa

Sin entrar a detalle en las operaciones, puede verificarse que la matriz de rigidez de un elemento está dada por

$$\mathbf{k}^{(e)} = \left(\frac{1}{l^{(e)}}\right)^3 \begin{bmatrix} 12 & 6l^{(e)} & -12 & 6l^{(e)} \\ 6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 & -6l^{(e)} & 2(l^{(e)})^2 \\ -12 & -6l^{(e)} & 12 & -6l^{(e)} \\ 6l^{(e)} & 2(l^{(e)})^2 & -6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 \end{bmatrix}$$

y las matrices de masa son

$$\mathbf{l}^{(e)} = \frac{1}{5l^{(e)}} \begin{bmatrix} 6 & \frac{l^{(e)}}{2} & -6 & \frac{l^{(e)}}{2} \\ \frac{l^{(e)}}{2} & \frac{8}{3}\left(\frac{l^{(e)}}{2}\right)^2 & -\frac{l^{(e)}}{2} & -\frac{2}{3}\left(\frac{l^{(e)}}{2}\right)^2 \\ -6 & -\frac{l^{(e)}}{2} & 6 & -\frac{l^{(e)}}{2} \\ \frac{l^{(e)}}{2} & -\frac{2}{3}\left(\frac{l^{(e)}}{2}\right)^2 & -\frac{l^{(e)}}{2} & \frac{8}{3}\left(\frac{l^{(e)}}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}^{(e)} = \frac{l^{(e)}}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l^{(e)} & 54 & -13l^{(e)} \\ 22l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 & 13l^{(e)} & -3(l^{(e)})^2 \\ 54 & 13l^{(e)} & 156 & -22l^{(e)} \\ -13l^{(e)} & -3(l^{(e)})^2 & -22l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 \end{bmatrix}$$

Cabe mencionar que el modelo que considera solo el efecto de corte tiene las mismas matrices de rigidez y masa, salvo que en lugar de multiplicar a la matriz \mathbf{L} por I_ρ lo hace por $\rho \frac{EI}{GA}$. Para el modelo clásico de Euler-Bernoulli solo se tienen las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} .

2.4 Modos Naturales de Vibración

Después de realizar el ensamble de las matrices (2.15) y haber considerado las condiciones de frontera obtenemos las matrices de rigidez y de masa reducidas que son usadas en la ecuación

$$\alpha^T \mathbf{K} \mathbf{w} = \omega^2 \alpha^T (\mathbf{L} + \mathbf{M}) \mathbf{w} \quad (2.16)$$

Como el vector α^T tiene asociado constantes arbitrarias, se deduce de la anterior ecuación (2.16) el problema de autovalores generalizados

$$\mathbf{K} \mathbf{w} = \omega^2 (\mathbf{L} + \mathbf{M}) \mathbf{w} \quad (2.17)$$

en donde el vector \mathbf{w} contiene las amplitudes de la vibración y representa el modo natural de vibración correspondiente a la frecuencia de vibración ω de la viga.

El sistema (2.17) tiene soluciones \mathbf{w} distintas de la trivial (lo cual físicamente significa que la viga vibra) solamente si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero

$$|\mathbf{K} \mathbf{w} - \omega^2 (\mathbf{L} + \mathbf{M})| = 0$$

En el caso del cálculo de estructuras, la matriz de rigidez \mathbf{K} y la de masa $\mathbf{L} + \mathbf{M}$ son reales, simétricas y en el caso de \mathbf{K} definida positiva. La matriz $\mathbf{L} + \mathbf{M}$ es semidefinida positiva como mínimo. Para el caso en que $\mathbf{L} + \mathbf{M}$ sea definida positiva, se obtienen n soluciones positivas ω_i^2 y en consecuencia n valores ω_i . Si la matriz $\mathbf{L} + \mathbf{M}$ es solamente semidefinida positiva, el número de soluciones finitas ω_i^2 es menor. Los n autovalores ω_i son las frecuencias propias de la viga con dos grados de libertad. El vector amplitud \mathbf{w}_i correspondiente a la frecuencia ω_i satisface idénticamente las ecuaciones (2.17). De esta forma el vector \mathbf{w}_i , denominado *autovector*, puede obtenerse como autovector normalizado φ_i al resolver el problema de autovalores mediante técnicas numéricas. Los autovalores φ_i no expresan el valor de las amplitudes de la vibración, la cual permanece indeterminada; con lo visto hasta ahora, representan únicamente las formas del sistema durante la vibración en cada una de sus autofrecuencias. Por ello, en el análisis estructural, los autovectores reciben el nombre de *formas naturales de vibración* o *formas modales*. Un autovalor ω_i con su autovector correspondiente φ_i constituye el modo natural de vibración i .

Existen varios métodos para aproximar la solución del problema (2.17), entre los usados para esta tesis están el del Método de la Potencia Directa y el Método de la Potencia Inversa en dos modalidades distintas. Para el lector interesado en el tema puede consultar [9], por ejemplo.

2.5 Las condiciones de frontera

Puede mostrarse que las matriz global de rigidez \mathbf{K} es singular [5]. Esto afecta e impide el uso de los métodos de la potencia para resolver el problema (2.17). Para corregir este hecho, es necesario tomar en cuenta las condiciones de frontera. Veremos enseguida como las distintas condiciones de frontera son usadas para resolver el problema de autovalores.

2.5.1 Empotrada-Empotrada

Recordemos que hasta el momento solo hemos considerado el caso de una viga empotrada en ambos extremos, lo que significa que sus extremos están fijos y sus giros impedidos y bajo nuestro enfoque matricial que el primero, segundo, penúltimo y último componentes del vector de desplazamientos \mathbf{w} son cero, esto es

$$\mathbf{w} = [0 \ 0 \ \dots \ w_i \ w_i' \ \dots \ 0 \ 0]^T$$

Un procedimiento que toma en cuenta las condiciones de frontera en el sistema (2.17) consiste en eliminar las filas y columnas correspondientes a el nodo cuyo valor se conoce. En este caso la eliminación es sobre las dos primeras filas y columnas así como las últimas dos filas y columnas. Esto nos lleva a las matrices reducidas $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{L}}$ y $\tilde{\mathbf{M}}$ de \mathbf{K} , \mathbf{L} y \mathbf{M} respectivamente. Luego puede resolverse el problema

$$\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{w}} = \omega^2 (\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{M}}) \tilde{\mathbf{w}} \quad (2.18)$$

donde $\tilde{\mathbf{w}}$ es el vector reducido de \mathbf{w} .

Al resolver el problema de autovalores (2.18) podemos regresarnos al problema inicial (2.17) sólo agregando 2 componentes 0 al inicio de $\tilde{\mathbf{w}}$ y otros 2 componentes 0 al final del mismo vector. Esto tiene la única finalidad de contar con el vector de desplazamiento a lo largo de todos los nodos del dominio, incluyendo claro, a los nodos extremos.

2.5.2 Empotrada-Solo Soportada

Para el caso en que la viga este empotrada en el extremo izquierdo y solo soportada en el derecho (E-S), de acuerdo con (1.10) y (1.12), se requiere que

$$\begin{aligned} w(0, t) &= X(0)T(t) = 0, & w(L, t) &= X(L)T(t) = 0 \\ w_x(0, t) &= X^{(1)}(0)T(t) = 0, & w_{xx}(L, t) &= X^{(2)}(L)T(t) = 0 \end{aligned}$$

es decir que $X(0) = X(L) = X^{(1)}(0) = X^{(2)}(L) = 0$ si $T(t)$ es una función no trivial. De aquí que $X(x)$ debe satisfacer el problema de autovalores (2.4) junto con las condiciones $X(0) = X(L) = X^{(1)}(0) = X^{(2)}(L) = 0$

Recordemos que para el modelo de Rayleigh el problema que nos interesa resolver para ω está dado por la ecuación (2.6):

$$\int_0^L \left[EIX^{(4)}\Upsilon + \omega^2 (I_\rho X^{(2)} - \rho X) \Upsilon \right] dx = 0$$

que al hacer las integraciones por partes puede equivalentemente escribirse como

$$\int_0^L X^{(2)}\Upsilon^{(2)} dx = \omega^2 \int_0^L (I_\rho X^{(1)}\Upsilon^{(1)} + \rho X\Upsilon) dx - EI X^{(3)}\Upsilon \Big|_0^L + EI X^{(2)}\Upsilon^{(1)} \Big|_0^L - \omega^2 I_\rho X^{(1)}\Upsilon \Big|_0^L \quad (2.19)$$

donde la función de prueba Υ debe considerarse como la función de forma $N_i(x)$ o $\bar{N}_i(x)$. Como solo nos interesa ver que sucede con los términos evaluados en $x = 0$ y $x = L$ vemos que en el extremo izquierdo de la viga la expresión

$$-EIX^{(3)}(0)\Upsilon(0) + EIX^{(2)}(0)\Upsilon^{(1)}(0) - \omega^2 I_\rho X^{(1)}(0)\Upsilon(0)$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned} &-EI (w_0 N_0^{(3)}(0) + w_0' \bar{N}_0^{(3)}(0)) \Upsilon(0) + EI (w_0 N_0^{(2)}(0) + w_0' \bar{N}_0^{(2)}(0)) \Upsilon^{(1)}(0) \\ &- \omega^2 I_\rho (w_0 N_0^{(1)}(0) + w_0' \bar{N}_0^{(1)}(0)) \Upsilon(0) \end{aligned}$$

pero al estar empotrada la viga $w_0 = X(0)T(t) = 0$ y $w_0' = X^{(1)}(0)T(t) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} &-EI (w_0 N_0^{(3)}(0) + w_0' \bar{N}_0^{(3)}(0)) \Upsilon(0) + EI (w_0 N_0^{(2)}(0) + w_0' \bar{N}_0^{(2)}(0)) \Upsilon^{(1)}(0) \\ &- \omega^2 I_\rho (w_0 N_0^{(1)}(0) + w_0' \bar{N}_0^{(1)}(0)) \Upsilon(0) = 0 \end{aligned}$$

Como sucedió en el caso (E-E), eliminamos las dos primeras filas y columnas de las matrices \mathbf{K} , \mathbf{L} y \mathbf{M} pues se conocen los valores de w_0 y w_0' .

Para el extremo derecho, cuando $x = L$, se tiene que

$$-EIX^{(3)}(L)\Upsilon(L) + EIX^{(2)}(L)\Upsilon^{(1)}(L) - \omega^2 I_\rho X^{(1)}(L)\Upsilon(L)$$

y puede escribirse como

$$-EI (w_n' \bar{N}_n^{(3)}(L)) \Upsilon(L) - \omega^2 I_\rho (w_n' \bar{N}_n^{(1)}(L)) \Upsilon(L)$$

pues $w_n = X(L)T(t) = 0$. Debido a esto último debe eliminarse la fila y columna penúltimas de las matrices \mathbf{K} , \mathbf{L} y \mathbf{M} que corresponden al valor w_n . La fila y columna últimas deben permanecer sin cambio pues queda sin conocerse el valor de w_n' .

2.5.3 Empotrada-Giro impedido

Para el caso en que la viga este empotrada en el extremo izquierdo y tenga el giro impedido en el derecho (E-G), de acuerdo con (1.10) y (1.12), se requiere que

$$\begin{aligned} w(0, t) &= X(0)T(t) = 0, & w_x(L, t) &= X^{(1)}(L)T(t) = 0 \\ w_x(0, t) &= X^{(1)}(0)T(t) = 0, & EI w_{xxx}(L, t) + \omega^2 \rho \frac{I}{A} w_x(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

es decir que $X(0) = X^{(1)}(0) = X^{(1)}(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 I_\rho X^{(1)}(L) = 0$ si $T(t)$ es una función no trivial. De aquí que $X(x)$ debe satisfacer el problema de autovalores (2.4) junto con las condiciones $X(0) = X^{(1)}(0) = X^{(1)}(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 I_\rho X^{(1)}(L) = 0$.

Tal y como se hizo en el caso (E-S) solo es necesario considerar los valores de los términos evaluados en $x = 0$ y $x = L$ de la ecuación (2.19). Como puede verse, también para este caso deberán eliminarse las dos primeras filas y columnas de las matrices \mathbf{K} , \mathbf{L} y \mathbf{M} pues se sabe que los valores de w_0 y w_0' son cero.

Para el extremo derecho, cuando $x = L$, se tiene que

$$-EIX^{(3)}(L)\Upsilon(L) + EIX^{(2)}(L)\Upsilon^{(1)}(L) - \omega^2 I_\rho X^{(1)}(L)\Upsilon(L)$$

y puede escribirse como

$$EI (w_n N_n^{(2)}(L)) \Upsilon^{(1)}(L)$$

pues $w_n' = X^{(1)}(L)T(t) = 0$ y $-EIX^{(3)}(L) = \omega^2 I_\rho X^{(1)}(L)$. Debido a esto debe eliminarse la fila y columna últimas de las matrices \mathbf{K} , \mathbf{L} y \mathbf{M} que corresponden al valor w_n' . La fila y columna penúltimas deben permanecer iguales pues queda sin conocerse el valor de w_n .

2.5.4 Empotrada-Libre

Para el caso en que la viga este empotrada en el extremo izquierdo y este libre en el derecho (E-L), de acuerdo con (1.10) y (1.12), se requiere que

$$\begin{aligned} w(0, t) &= X(0)T(t) = 0, & w_{xx}(L, t) &= X^{(2)}(L)T(t) = 0 \\ w_x(0, t) &= X^{(1)}(0)T(t) = 0, & EIw_{xxx}(L, t) + \omega^2 \rho \frac{I}{A} w_x(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

es decir que $X(0) = X^{(1)}(0) = X^{(2)}(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 I_\rho X^{(1)} = 0$ si $T(t)$ es una función no trivial. De aquí que $X(x)$ debe satisfacer el problema de autovalores (2.4) junto con las condiciones $X(0) = X^{(1)}(0) = X^{(2)}(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 I_\rho X^{(1)} = 0$.

Como ha sucedido en los casos (E-E, E-S y E-G) es necesario eliminar las dos primeras filas y columnas de las matrices **K**, **L** y **M** pues se sabe que los valores de w_0 y w'_0 son cero.

Considerando el extremo derecho se tiene

$$-EIX^{(3)}(L)\Upsilon(L) + EIX^{(2)}(L)\Upsilon^{(1)}(L) - \omega^2 I_\rho X^{(1)}(L)\Upsilon(L)$$

y al sustituir las condiciones impuestas para X puede verse que

$$\omega^2 I_\rho X^{(1)}\Upsilon(L) - \omega^2 I_\rho X^{(1)}(L)\Upsilon(L) = 0$$

Dado que desconocemos los valores de w_n y w'_n debemos dejar inalteradas las dos filas y columnas últimas de las matrices **K**, **L** y **M** que corresponden a los valores w_n y w'_n .

2.5.5 Otros modelos de viga

Para el modelo de Euler-Bernoulli las condiciones de frontera pueden ser vistas como un caso particular de las que hemos visto para el modelo de Rayleigh, veanse las expresiones (1.9) y (1.12), y las consideraciones sobre que fila y columnas eliminar serán las mismas que las de Rayleigh.

Para un modelo que considere sólo el efecto de cortante, que puede ser visto como una simplificación del modelo de Timoshenko al quitar el efecto de la inercia rotatoria, las filas y columnas se eliminarán de las matrices **K**, **L** y **M** en el mismo orden que para el modelo de Rayleigh solo para las condiciones de frontera (E-E), (E-S) y (E-L). Para las condiciones de frontera (E-L) deben quitarse las dos primeras filas y columnas, pero en la submatriz del último elemento deberá restarse la cantidad $\rho \frac{EI}{GA}$ en el componente de la última fila y penúltima columna. Esto puede verse por medio de un análisis similar al presentado en esta sección como se muestra a continuación.

Para el caso de una viga empotrada en el extremo izquierdo y libre en el extremo derecho (E-L) modelada por una versión simplificada de la ecuación de Timoshenko que no tome en cuenta el término de inercia rotatoria, de acuerdo con (1.11) y (1.12), se requiere que

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0, & w_{xx}(L, t) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} w(L, t) &= 0 \\ w_x(0, t) &= 0, & EIw_{xxx}(L, t) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} w_x(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

es decir que $X(0) = X^{(1)}(0) = EIX^{(2)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L) = 0$ si $T(t)$ es una función no trivial. De aquí que $X(x)$ debe satisfacer el problema de autovalores

$$EIX^{(4)} + \omega^2 \left(\frac{EI}{GA} X^{(2)} - \rho X \right) = 0$$

junto con las condiciones $X(0) = X^{(1)}(0) = EIX^{(2)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L) = 0$.

Considerando el extremo derecho se tiene que

$$-EIX^{(3)}(L)\Upsilon(L) + EIX^{(2)}(L)\Upsilon^{(1)}(L) - \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L)\Upsilon(L)$$

pero como el extremo derecho está libre

$$EIX^{(2)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L) = 0$$

$$EIX^{(3)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L) = 0$$

implica que

$$EIX^{(2)}(L) = -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L)$$

$$EIX^{(3)}(L) = -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L)$$

luego podemos escribir

$$\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L)\Upsilon(L) - \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L)\Upsilon^{(1)}(L) - \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L)\Upsilon(L)$$

esto es

$$-\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L)\Upsilon^{(1)}(L)$$

Si $\Upsilon = N_n(x)$ entonces se tiene $\Upsilon^{(1)}(L) = N_n^{(1)}(L) = 0$, por lo que

$$-\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L)\Upsilon^{(1)}(L) = 0$$

Si $\Upsilon = \bar{N}_n(x)$ entonces se tiene $\Upsilon^{(1)}(L) = \bar{N}_n^{(1)}(L) = 1$, por lo que

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L)\Upsilon^{(1)}(L) &= -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} (w_n N_n(L) + w'_n \bar{N}_n(L)) \\ &= -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} (w_n(1) + w'_n(0)) \\ &= -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} w_n \end{aligned}$$

2.5.4 Empotrada-Libre

Para el caso en que la viga este empotrada en el extremo izquierdo y este libre en el derecho (E-L), de acuerdo con (1.10) y (1.12), se requiere que

$$\begin{aligned} w(0, t) &= X(0)T(t) = 0, & w_{xx}(L, t) &= X^{(2)}(L)T(t) = 0 \\ w_x(0, t) &= X^{(1)}(0)T(t) = 0, & EIw_{xxx}(L, t) + \omega^2 \rho \frac{I}{A} w_x(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

es decir que $X(0) = X^{(1)}(0) = X^{(2)}(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 I_\rho X^{(1)} = 0$ si $T(t)$ es una función no trivial. De aquí que $X(x)$ debe satisfacer el problema de autovalores (2.4) junto con las condiciones $X(0) = X^{(1)}(0) = X^{(2)}(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 I_\rho X^{(1)} = 0$.

Como ha sucedido en los casos (E-E, E-S y E-G) es necesario eliminar las dos primeras filas y columnas de las matrices \mathbf{K} , \mathbf{L} y \mathbf{M} pues se sabe que los valores de w_0 y w'_0 son cero.

Considerando el extremo derecho se tiene

$$-EIX^{(3)}(L)\Upsilon(L) + EIX^{(2)}(L)\Upsilon^{(1)}(L) - \omega^2 I_\rho X^{(1)}(L)\Upsilon(L)$$

y al sustituir las condiciones impuestas para X puede verse que

$$\omega^2 I_\rho X^{(1)}(L)\Upsilon(L) - \omega^2 I_\rho X^{(1)}(L)\Upsilon(L) = 0$$

Dado que desconocemos los valores de w_n y w'_n debemos dejar inalteradas las dos filas y columnas últimas de las matrices \mathbf{K} , \mathbf{L} y \mathbf{M} que corresponden a los valores w_n y w'_n .

2.5.5 Otros modelos de viga

Para el modelo de Euler-Bernoulli las condiciones de frontera pueden ser vistas como un caso particular de las que hemos visto para el modelo de Rayleigh, veanse las expresiones (1.9) y (1.12), y las consideraciones sobre que fila y columnas eliminar serán las mismas que las de Rayleigh.

Para un modelo que considere sólo el efecto de cortante, que puede ser visto como una simplificación del modelo de Timoshenko al quitar el efecto de la inercia rotatoria, las filas y columnas se eliminarán de las matrices \mathbf{K} , \mathbf{L} y \mathbf{M} en el mismo orden que para el modelo de Rayleigh solo para las condiciones de frontera (E-E), (E-S) y (E-L). Para las condiciones de frontera (E-L) deben quitarse las dos primeras filas y columnas, pero en la submatriz del último elemento deberá restarse la cantidad $\rho \frac{EI}{GA}$ en el componente de la última fila y penúltima columna. Esto puede verse por medio de un análisis similar al presentado en esta sección como se muestra a continuación.

Para el caso de una viga empotrada en el extremo izquierdo y libre en el extremo derecho (E-L) modelada por una versión simplificada de la ecuación de Timoshenko que no tome en cuenta el término de inercia rotatoria, de acuerdo con (1.11) y (1.12), se requiere que

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0, & w_{xx}(L, t) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} w(L, t) &= 0 \\ w_x(0, t) &= 0, & EIw_{xxx}(L, t) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} w_x(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

es decir que $X(0) = X^{(1)}(0) = EIX^{(2)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L) = 0$ si $T(t)$ es una función no trivial. De aquí que $X(x)$ debe satisfacer el problema de autovalores

$$EIX^{(4)} + \omega^2 \left(\rho \frac{EI}{GA} X^{(2)} - \rho X \right) = 0$$

junto con las condiciones $X(0) = X^{(1)}(0) = EIX^{(2)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L) = EIX^{(3)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L) = 0$.

Considerando el extremo derecho se tiene que

$$-EIX^{(3)}(L)\Upsilon(L) + EIX^{(2)}(L)\Upsilon^{(1)}(L) - \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L)\Upsilon(L)$$

pero como el extremo derecho está libre

$$\begin{aligned} EIX^{(2)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L) &= 0 \\ EIX^{(3)}(L) + \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L) &= 0 \end{aligned}$$

implica que

$$\begin{aligned} EIX^{(2)}(L) &= -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L) \\ EIX^{(3)}(L) &= -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L) \end{aligned}$$

luego podemos escribir

$$\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L)\Upsilon(L) - \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L)\Upsilon^{(1)}(L) - \omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X^{(1)}(L)\Upsilon(L)$$

esto es

$$-\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L)\Upsilon^{(1)}(L)$$

Si $\Upsilon = N_n(x)$ entonces se tiene $\Upsilon^{(1)}(L) = N_n^{(1)}(L) = 0$, por lo que

$$-\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L)\Upsilon^{(1)}(L) = 0$$

Si $\Upsilon = \bar{N}_n(x)$ entonces se tiene $\Upsilon^{(1)}(L) = \bar{N}_n^{(1)}(L) = 1$, por lo que

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} X(L)\Upsilon^{(1)}(L) &= -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} (w_n N_n(L) + w'_n \bar{N}_n(L)) \\ &= -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} (w_n(1) + w'_n(0)) \\ &= -\omega^2 \rho \frac{EI}{GA} w_n \end{aligned}$$

y esto significa que la submatriz de masa del último nodo debe restar la constante $\rho \frac{EI}{GA}$ en la última fila y penúltima columna, rompiendo de esta forma la simetría en la matriz global de masa.

Matricialmente tendríamos que agregar al último elemento la submatriz

$$\mathbf{n}^{(e)} = \rho \frac{EI}{GA} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{n}^{(e)}$ representa las condiciones de frontera para una viga (E-L) bajo el modelo de efecto de Cortante.

Capítulo 3

Método Asintótico

3.1 Normalización de la ecuación

Recordemos que la ecuación de Timoshenko está dada por

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{\rho EI}{GA} + I_\rho \right) \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \rho \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{I_\rho}{GA} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \right) = 0 \quad (3.1)$$

con $0 < x < L$ y $t > 0$.

Iniciamos proponiendo una solución de la ecuación (3.1) de la forma $w(x, t) = X(x)T(t)$ donde la función que depende del tiempo se asume es del tipo armónico, es decir, $T(t) = e^{-i\omega t}$. Debido a esto la ecuación (3.1) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria en x

$$EIX^{(4)} + \omega^2 \left(\frac{\rho EI}{GA} + I_\rho \right) X^{(2)} - \rho \omega^2 \left(1 - \frac{I_\rho}{GA} \omega^2 \right) X = 0 \quad (3.2)$$

Es conveniente llevar la ecuación (3.2) a una forma adimensional. Lo que haremos es definir los siguientes cambios de variable

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x/L \\ \eta &= X/L \\ \phi^2 &= \rho \omega^2 L^4 / EI \\ \alpha &= EI / GAL^2 \\ \beta &= I / AL^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

La ecuación (3.2) tiene ahora la forma

$$\eta^{(4)} + \phi^2 (\alpha + \beta) \eta^{(2)} - \phi^2 (1 - \phi^2 \alpha \beta) \eta = 0 \quad (3.4)$$

En esta ecuación ϕ es proporcional a la frecuencia de vibración ; α es inversamente proporcional a la rigidez de corte y β es proporcional a la inercia rotatoria.

Con α cero, (3.4) corresponde a la ecuación de Rayleigh (1.5); con α y β cero el modelo corresponde al de Euler-Bernoulli (1.3) y con β cero tendremos un modelo que considera la deformación por efecto de corte.

Bajo este esquema, las condiciones en los extremos pueden ser cualquiera de los siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{Desplazamiento cero} & \eta = 0 \\ \text{Giro total cero} & \eta^{(1)} = 0 \\ \text{Momento cero} & \eta^{(2)} + \phi^2 \alpha \eta = 0 \\ \text{Cortante cero} & \eta^{(3)} + \phi^2 (\alpha + \beta) \eta^{(1)} = 0 \end{array}$$

en donde el subíndice ξ denota el orden de derivación de la función η . Dado que la ecuación (3.4) es de cuarto orden, requerimos de cuatro de estas condiciones en los extremos de la viga, dos en cada extremo.

Consideraremos de aquí en adelante que la viga está empotrada en el extremo izquierdo:

$$\eta(0) = \eta^{(1)}(0) = 0 \quad (3.5)$$

En el extremo derecho $\xi = 1$, uno de cuatro tipos de condiciones puede ocurrir:

Caso	Ecuaciones
Empotramiento (E)	$\eta(1) = \eta^{(1)}(1) = 0$
Simplemente soportada (S)	$\eta(1) = \eta^{(2)}(1) + \phi^2 \alpha \eta(1) = 0$
Giro impedido (G)	$\eta^{(1)}(1) = 0$ $\eta^{(3)}(1) + \phi^2 (\alpha + \beta) \eta^{(1)}(1) = 0$
Libre (L)	$\eta^{(2)}(1) + \phi^2 \alpha \eta(1) = 0$ $\eta^{(3)}(1) + \phi^2 (\alpha + \beta) \eta^{(1)}(1) = 0$

Por lo indicado en las ecuaciones (3.5) y (3.6), las condiciones de frontera para η consiste de uno de los siguientes cuatro conjuntos:

$$\begin{array}{ll} \text{(E-E)} & \eta(0) = \eta^{(1)}(0) = \eta(1) = \eta^{(1)}(1) = 0 \\ \text{(E-S)} & \eta(0) = \eta^{(1)}(0) = \eta(1) = \eta^{(2)}(1) + \phi^2 \alpha \eta(1) = 0 \\ \text{(E-G)} & \eta(0) = \eta^{(1)}(0) = 0 \\ & \eta^{(1)}(1) = \eta^{(3)}(1) + \phi^2 (\alpha + \beta) \eta^{(1)}(1) = 0 \\ \text{(E-L)} & \eta(0) = \eta^{(1)}(0) = 0 \\ & \eta^{(2)}(1) + \phi^2 \alpha \eta(1) = \eta^{(3)}(1) + \phi^2 (\alpha + \beta) \eta^{(1)}(1) = 0 \end{array} \quad (3.7)$$

El problema de autovalores consiste en determinar todos los valores de ϕ^2 que satisfacen la ecuación (3.4) sujeta a un conjunto apropiado de condiciones en los extremos.

3.2 El Método de Propagación de Onda

Recordemos la aproximación estándar y directa que proporciona el uso del polinomio característico sobre la ecuación (3.4) para determinar ϕ , escribimos

$$r^4 + \phi^2 (\alpha + \beta) r^2 - \phi^2 (1 - \phi^2 \alpha \beta) = 0 \quad (3.8)$$

cuyas raíces son

$$r = \pm \left(\frac{-\phi^2 (\alpha + \beta) \pm \sqrt{\phi^4 (\alpha - \beta)^2 + 4\phi^2}}{2} \right)^{1/2}$$

Podemos definir

$$p = \left(\frac{\phi^2 (\alpha + \beta) + \sqrt{\phi^4 (\alpha - \beta)^2 + 4\phi^2}}{2} \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

$$q = \left(\frac{-\phi^2 (\alpha + \beta) + \sqrt{\phi^4 (\alpha - \beta)^2 + 4\phi^2}}{2} \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

y las raíces de la ecuación (3.8) pueden escribirse como

$$r_1 = -ip \quad r_2 = ip \quad r_3 = -q \quad r_4 = q$$

Ahora escribimos

$$\eta(\xi) = Ae^{-ip\xi} + Be^{ip\xi} + Ce^{-q\xi} + De^{q\xi} \quad (3.11)$$

y sustituyendo la función (3.11) en, digamos, el conjunto (E-E) de (3.7) obtenemos

$$\begin{array}{l} \eta(0) = A + B + C + D = 0 \\ \eta^{(1)}(0) = -iAp + iBp - Cq + Dq = 0 \\ \eta(1) = Ae^{-ip} + Be^{ip} + Ce^{-q} + De^q = 0 \\ \eta^{(1)}(1) = -iApe^{-ip} + iBpe^{ip} - Cqe^{-q} + Dqe^q = 0 \end{array} \quad (3.12)$$

que puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ip & ip & -q & q \\ e^{-ip} & e^{ip} & e^{-q} & e^q \\ -ipe^{-ip} & ipe^{ip} & -qe^{-q} & qe^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tiene solución no trivial cuando

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ip & ip & -q & q \\ e^{-ip} & e^{ip} & e^{-q} & e^q \\ -ipe^{-ip} & ipe^{ip} & -qe^{-q} & qe^q \end{vmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

y dado que el determinante depende linealmente sobre sus renglones podemos simplificar la ecuación (3.13) y ver que p y q satisfacen la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ip/q & ip/q & -1 & 1 \\ e^{-ip} & e^{ip} & e^{-q} & e^q \\ -i(p/q)e^{-ip} & i(p/q)e^{ip} & -e^{-q} & e^q \end{vmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

La estimación de p y q por medio de la ecuación (3.14) es más que tedioso, porque la expansión del determinante en la ecuación (3.14) tiene 24 términos, cada uno de los cuales debe ser cuidadosamente analizado antes de ser descartado a fin de hacer el análisis asintótico.

Tradicionalmente los ingenieros han usado los métodos de Ritz y/o Galerkin de elementos finitos (MEF) para calcular tales autovalores. Aunque los datos calculados tienen más precisión cuando más y más funciones de base (o de forma) son usados, tales eigenvalores son de bajo orden. Uno no obtiene comprensión analítica del MEF como pasa en el rango de alta frecuencia, dado que MEF es puramente numérico por naturaleza. Para obtener una comprensión analítica, uno necesita recurrir a un sutil y diferente camino: el método de propagación de onda (MPO, o WPM, por sus siglas en inglés).

Escribimos la solución de η de la ecuación (3.4) como la combinación lineal de cuatro ondas:

$$\eta(\xi) = \underbrace{A \cos(p\xi)}_{\text{Onda I}} + \underbrace{B \sin(p\xi)}_{\text{Onda II}} + \underbrace{C e^{-q\xi}}_{\text{Onda III}} + \underbrace{D e^{q(\xi-1)}}_{\text{Onda IV}} \quad (3.15)$$

donde p y q son positivos. Cada una de estas ondas es dispersiva. La Onda I viaja hacia la izquierda y la Onda II viaja hacia la derecha, mientras que las Ondas III y IV son, respectivamente, *ondas evanescentes* cerca del punto izquierdo $\xi = 0$ y el punto derecho $\xi = 1$.

La función (3.15) y las condiciones de frontera (3.7) serán nuestro punto de partida para encontrar las frecuencias de vibración ϕ de la ecuación (3.4). Aunque esta frecuencia proviene de una ecuación normalizada y adimensional, recordemos de (3.3) que

$$\phi^2 = \rho \omega^2 L^4 / EI$$

por lo que la frecuencia natural de vibración podrá determinarse por medio de

$$\omega = F \phi$$

donde $F = \frac{\sqrt{EI/\rho}}{L^2}$ es un factor de escala que está determinado por constantes físicas de la viga.

En lo que sigue necesitaremos usar las siguientes relaciones que pueden ser obtenidas de las expresiones (3.9) y (3.10):

$$\phi^4 \alpha \beta - \phi^2 (p^2 (\alpha + \beta) + 1) + p^4 = 0 \quad (3.16)$$

$$qp = \phi (1 - \phi^2 \alpha \beta)^{1/2} \quad (3.17)$$

$$p^2 + q^2 = \phi \left((\alpha - \beta)^2 \phi^2 + 4 \right)^{1/2} \quad (3.18)$$

$$p^2 - q^2 = (\alpha + \beta) \phi^2 \quad (3.19)$$

que dependiendo del modelo de viga que se considere, pueden verse también como:

- Euler-Bernoulli

$$\begin{aligned} \phi &= p^2 \\ q &= p \\ p^2 + q^2 &= 2p^2 \\ p^2 - q^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

- Rayleigh

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{p^2}{(\beta p^2 + 1)^{1/2}} \\ q &= \frac{p}{(\beta p^2 + 1)^{1/2}} \\ p^2 + q^2 &= \frac{p^2}{\beta p^2 + 1} (\beta p^2 + 2) \\ p^2 - q^2 &= \frac{\beta p^4}{\beta p^2 + 1} = \beta \phi^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

- Cortante

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{p^2}{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}} \\ q &= \frac{p}{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}} \\ p^2 + q^2 &= \frac{p^2}{\alpha p^2 + 1} (\alpha p^2 + 2) \\ p^2 - q^2 &= \frac{\alpha p^4}{\alpha p^2 + 1} = \alpha \phi^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ilustraremos, sin pérdida de generalidad, la aplicación del MPO en una viga que está empotrada en sus dos extremos.

Veamos cuales son las ecuaciones que surgen al considerar el caso (E-E):

$$\eta(0) = A + C + De^{-q} = 0$$

$$\eta^{(1)}(0) = Bp - Cq + Dqe^{-q} = 0$$

$$\eta(1) = A \cos p + B \sin p + Ce^{-q} + D = 0$$

$$\eta^{(1)}(1) = -A(\sin p)p + B(\cos p)p - Cqe^{-q} + Dq = 0$$

que matricialmente forman el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & e^{-q} \\ 0 & p & -q & qe^{-q} \\ \cos p & \sin p & e^{-q} & 1 \\ -p \sin p & p \cos p & -qe^{-q} & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y de manera equivalente puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & e^{-q} \\ 0 & p/q & -1 & e^{-q} \\ \cos p & \sin p & e^{-q} & 1 \\ (p/q) \sin p & (-p/q) \cos p & e^{-q} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

La solución al sistema (3.23) es no trivial cuando el determinante de la matriz es igual a cero

$$Det_{EE} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & e^{-q} \\ 0 & p/q & -1 & e^{-q} \\ \cos p & \sin p & e^{-q} & 1 \\ (p/q) \sin p & (-p/q) \cos p & e^{-q} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Puede obtenerse una expresión analítica de Det_{EE} y después de algunas manipulaciones algebraicas la función del determinante es:

$$Det_{EE} = \frac{2pq(\cos p)(1 + e^{-2q}) + (p^2 - q^2)(\sin p)(1 - e^{-2q}) - 4qpe^{-q}}{q^2} \quad (3.24)$$

Aunque la función (3.24) no tiene en apariencia relación con los valores α , β , y ϕ de la ecuación (3.4), recordemos que las expresiones (3.20), (3.21) y (3.22) relacionan los valores p , q con α , β , y ϕ . De esta forma, la función (3.24) depende también de los parámetros α y β . En particular

conviene expresar la función (3.24) en términos de una sola variable p , dejando fijos los valores de α o β según sea el caso.

De la función (3.24) obtendremos tres casos dependiendo del modelo de viga que se escoja, para la ecuación de Euler-Bernoulli $\alpha = \beta = 0$, para la ecuación de Rayleigh $\alpha = 0$ y para la ecuación que considera el efecto de cortante $\beta = 0$.

Para ilustrar la aplicación del MPO consideraremos el modelo de Euler-Bernoulli para una viga empotrada en los extremos izquierdo y derecho. Bajo esta consideración y por medio de (3.20), la función (3.24) para Euler-Bernoulli puede escribirse como

$$Det^{E-B} = \frac{2p^2(\cos p)(1 + e^{-2p}) - 4p^2e^{-q}}{p^2} = 2(\cos p) - 4e^{-q}$$

Si consideramos que el valor de e^{-q} es despreciable tal y como lo hace el MPO, la función anterior puede escribirse como

$$Det^{E-B} = 2(\cos p) \quad (3.25)$$

donde los ceros de esta función ocurren en

$$p = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = \text{un entero positivo,}$$

y el problema de autovalores

$$\eta^{(4)} - \phi^2 \eta = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad \eta(0) = \eta^{(1)}(0) = \eta(1) = \eta^{(1)}(1) = 0 \quad (3.26)$$

tiene soluciones no triviales η cuando

$$\phi = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2} \right]^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

De esta forma, por medio del MPO, los ceros de la función (3.25) proporcionan una estimación de las frecuencias normalizadas tal y como se muestra en tabla siguiente

donde se muestran las diez primeras frecuencias normalizadas por medio del MEF (usando 150 elementos) y los valores obtenidos por medio del MPO. Puede verse de la tabla que el MPO proporciona una alta precisión para los autovalores ϕ de la ecuación (3.26) para las frecuencias medias en adelante. Para las frecuencias más pequeñas, la imprecisión de las frecuencias es notoria. Esto resulta de usar un método asintótico tal como el MPO. Desde el punto de vista de las aplicaciones, las frecuencias más pequeñas son las más importantes, debido a que son las que se manifiestan prominentemente en la vibración de una viga. En la siguiente sección se muestra un método que puede estimar la precisión de las frecuencias más pequeñas a cualquier precisión deseada.

Frec.	MEF	MPO
1	22.373285	22.206610
2	61.672823	61.685028
3	120.903394	120.902654
4	199.859459	199.859489
5	298.555572	298.555533
6	416.990885	416.990786
7	555.165482	555.165248
8	713.079415	713.078918
9	890.732766	890.731797
10	1088.125650	1088.123885

Tabla 3.1: Frecuencias normalizadas obtenidas para una viga (E-E) por medio de MEF y el MPO.

3.3 El Método de Propagación de Onda corregido con Bisección

Antes de iniciar con cada modelo puede observarse que el valor de e^{-q} decrece conforme el valor de p crece. Además, por ser q positiva el valor de e^{-q} nunca es mayor que uno. Esto es importante considerarlo porque será muy útil en la determinación de intervalos donde puedan estar las raíces de la función (3.24).

Ahora mostraremos la aplicación del Método Asintótico con el Modelo de Euler-Bernoulli. De la función (3.25) puede verse que los ceros ocurren en los intervalos donde hay cambio de signo para el $\cos p$ como lo son los intervalos:

$$[n, n+1] \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Estos intervalos nos servirán para "encerrar" las raíces de (3.24) para el modelo Euler-Bernoulli, es decir, los ceros de la función

$$\begin{aligned} Det_{EE} &= \frac{2p^2 (\cos p) (1 + e^{-2q}) + (0) (\sin p) (1 - e^{-2q}) - 4p^2 e^{-q}}{p^2} \\ &= 2 [(\cos p) (1 + e^{-2q}) - 2e^{-q}] \end{aligned}$$

Dado que solo nos interesan los ceros de la función, podemos escribir

$$Det_{EE} = (\cos p) (1 + e^{-2q}) - 2e^{-q}$$

y se puede mostrar que los intervalos en donde se buscarán las raíces son

$$[n, n+1] \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Los ceros pueden aproximarse por métodos numéricos diseñados para ello. En particular, para este trabajo de tesis, el método usado es el de Bisección, que utiliza la información de los extremos de los intervalos en que está ubicada la raíz de la función.

La gráfica de Det_{EE} junto a la de $\cos x$ se muestra en la Figura 3.1

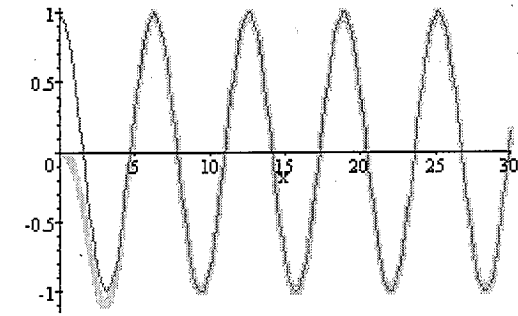


Figura 3.1: La función determinante para Euler-Bernoulli en línea media y la función $\cos x$ en línea delgada.

Ahora mostraremos la aplicación del Método Asintótico con el Modelo de Rayleigh.

Si utilizamos las relaciones (3.21) y consideramos que el valor de e^{-q} es despreciable, la función (3.24) puede escribirse como

$$\frac{2p \frac{p}{(\beta p^2 + 1)^{1/2}} (\cos p) + \frac{\beta p^4}{\beta p^2 + 1} \sin p}{\left(\frac{p}{(\beta p^2 + 1)^{1/2}}\right)^2} = 2 (\beta p^2 + 1)^{1/2} (\cos p) + \beta p^2 (\sin p)$$

y dado que las cantidades $(\beta p^2 + 1)^{1/2}$ y βp^2 son positivas los ceros de la función ocurren en los intervalos donde hay cambio de signo para el $\cos p$ y el $\sin p$ como son los intervalos:

$$\left[\frac{1}{2} + n, 1 + n\right] \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Estos intervalos nos servirán para encontrar las raíces de (3.24) para el modelo de Rayleigh, es decir, los ceros de la función

$$\begin{aligned} Det_{EE} &= \frac{2 \frac{p^2}{(\beta p^2 + 1)^{1/2}} (\cos p) (1 + e^{-2q}) + \frac{\beta p^4}{\beta p^2 + 1} (\sin p) (1 - e^{-2q}) - 4 \frac{p^2}{(\beta p^2 + 1)^{1/2}} e^{-q}}{\frac{p^2}{(\beta p^2 + 1)}} \\ &= 2 (\beta p^2 + 1)^{1/2} (\cos p) (1 + e^{-2q}) + \beta p^2 (\sin p) (1 - e^{-2q}) - 4 (\beta p^2 + 1)^{1/2} e^{-q} \\ &= \beta p^2 \left[2 \frac{(\beta p^2 + 1)^{1/2}}{\beta p^2} (\cos p) (1 + e^{-2q}) + (\sin p) (1 - e^{-2q}) - 4 \frac{(\beta p^2 + 1)^{1/2}}{\beta p^2} e^{-q} \right] \end{aligned}$$

Dado que solo interesan los ceros de la función, podemos escribir la función anterior como

$$Det_{EE} = 2 \frac{(\beta p^2 + 1)^{1/2}}{\beta p^2} (\cos p) (1 + e^{-2q}) + (\sin p) (1 - e^{-2q}) - 4 \frac{(\beta p^2 + 1)^{1/2}}{\beta p^2} e^{-q}$$

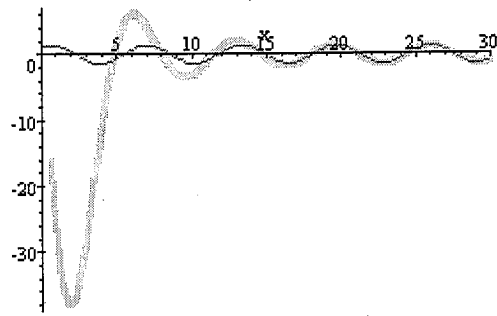


Figura 3.2: La función determinante para Rayleigh en línea media y la función $\cos x + \sin x$ en línea delgada.

y se puede mostrar que los intervalos en donde se buscarán las raíces son

$$\left[\frac{1}{2} + n, 1 + n \right] \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Si consideramos una viga con los parámetros físicos

Longitud	300 cm
Alto	100 cm
Ancho	100 cm
Módulo de Elasticidad	200,000 kgf/cm ²
Módulo de Rigidez	83,333.33 kgf/cm ²
Peso Volumétrico	0.0024 kgf/cm ³
Momento de Inercia	8,333,333.33 cm ⁴

proporciona un valor de $\beta = 0.009259$ y la gráfica de Det_{EE} junto a la de $\cos x + \sin x$ se muestran enseguida en la Figura 3.2

Ahora mostraremos la aplicación del Método Asintótico en el Modelo con efecto de Cortante.

Al utilizar las relaciones (3.22) y considerando despreciable el valor de e^{-q} , la función (3.24) puede escribirse como

$$\frac{2 \frac{p^2}{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}} (\cos p) + \frac{\alpha p^4}{\alpha p^2 + 1} \sin p}{\frac{p^2}{(\alpha p^2 + 1)}} = 2 (\alpha p^2 + 1)^{1/2} (\cos p) + \alpha p^2 \sin p$$

y dado que las cantidades $(\alpha p^2 + 1)^{1/2}$ y αp^2 son positivas los ceros de la función ocurren en los intervalos donde hay cambio de signo para el $\cos p$ y el $\sin p$ como son los intervalos:

$$\left[\frac{1}{2} + n, 1 + n \right] \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

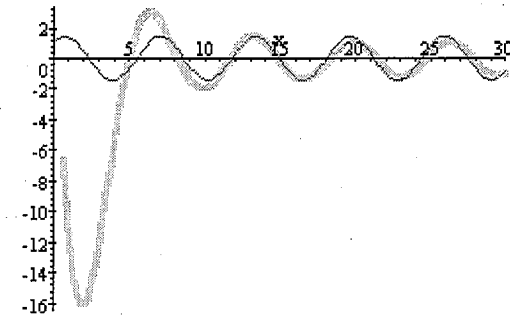


Figura 3.3: La función determinante para el efecto de Cortante se describe por medio de una línea media y la función $\cos x + \sin x$ en línea delgada.

Estos intervalos nos servirán para encontrar las raíces de (3.24) para el modelo que considera el efecto de Cortante, es decir, los ceros de la función

$$\begin{aligned} Det_{EE} &= \frac{2 \frac{p^2}{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}} (\cos p) (1 + e^{-2q}) + \frac{\alpha p^4}{\alpha p^2 + 1} (\sin p) (1 - e^{-2q}) - 4 \frac{p^2}{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}} e^{-q}}{\frac{p^2}{(\alpha p^2 + 1)}} \\ &= 2 (\alpha p^2 + 1)^{1/2} (\cos p) (1 + e^{-2q}) + \alpha p^2 (\sin p) (1 - e^{-2q}) - 4 (\alpha p^2 + 1)^{1/2} e^{-q} \\ &= \alpha p^2 \left[2 \frac{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}}{\alpha p^2} (\cos p) (1 + e^{-2q}) + (\sin p) (1 - e^{-2q}) - 4 \frac{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}}{\alpha p^2} e^{-q} \right] \end{aligned}$$

Como solo son importantes los ceros de la función, podemos escribir la función anterior como

$$Det_{EE} = 2 \frac{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}}{\alpha p^2} (\cos p) (1 + e^{-2q}) + (\sin p) (1 - e^{-2q}) - 4 \frac{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}}{\alpha p^2} e^{-q}$$

y se puede mostrar que los intervalos en donde se buscarán las raíces son

$$\left[\frac{1}{2} + n, 1 + n \right] \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Si consideramos una viga con los mismos parámetros físicos que la usada en el Modelo de Rayleigh se obtiene un valor de $\alpha = 0.022222$ y la gráfica de Det_{EE} junto a la de $\cos x + \sin x$ se muestran enseguida en la Figura 3.3

3.4 Otras Condiciones de Frontera

Un desarrollo similar al hecho en la sección 3.3 puede hacerse para las condiciones de frontera (E-S), (E-G) y (E-L) para deducir las funciones del determinante para cada modelo y dar los intervalos donde se encuentran las raíces.

A manera de resumen, presentamos las funciones determinante para los modelos Euler-Bernoulli, Rayleigh y el efecto de Cortante junto con los intervalos donde pueden encontrarse sus raíces. Los subíndices en las funciones determinan a que condiciones de frontera hace referencia el modelo.

Modelo Euler-Bernoulli

Con las condiciones de frontera (E-E)

$$Det_{EE} = (\cos p) (1 + e^{-2q}) - 2e^{-q}$$

con $[n, 1 + n] \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Con las condiciones de frontera (E-S)

$$Det_{ES} = -(\cos p) (1 - e^{-2q}) + (\sin p) (1 + e^{-2q})$$

con $[n, \frac{1}{2} + n] \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Con las condiciones de frontera (E-G)

$$Det_{EG} = (\cos p) (1 - e^{-2q}) + (\sin p) (1 + e^{-2q})$$

con $[\frac{1}{2} + n, 1 + n] \pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Con las condiciones de frontera (E-L)

$$Det_{EL} = (\cos p) (1 + e^{-2q}) + 2e^{-q}$$

con $[n, 1 + n] \pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Modelo Rayleigh

Con las condiciones de frontera (E-E)

$$Det_{EE} = 2 \frac{(\beta p^2 + 1)^{1/2}}{\beta p^2} (\cos p) (1 + e^{-2q}) + (\sin p) (1 - e^{-2q}) - 4 \frac{(\beta p^2 + 1)^{1/2}}{\beta p^2} e^{-q}$$

con $[\frac{1}{2} + n, 1 + n] \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Con las condiciones de frontera (E-S)

$$Det_{ES} = -(\cos p) (1 - e^{-2q}) + \frac{(\sin p) (1 + e^{-2q})}{(\beta p^2 + 1)^{1/2}}$$

con $[n, \frac{1}{2} + n] \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Con las condiciones de frontera (E-G)

$$Det_{EG} = \frac{(\cos p) (1 - e^{-2q})}{(\beta p^2 + 1)^{1/2}} + (\sin p) (1 + e^{-2q})$$

con $[\frac{1}{2} + n, 1 + n] \pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Con las condiciones de frontera (E-L)

$$Det_{EL} = -(\cos p) (1 + e^{2(-q)}) + \frac{(\beta p^2 + 1)^{1/2} \beta p^2}{(\beta p^2 + 1)^2 + 1} (\sin p) (1 - e^{2(-q)}) - \frac{4(\beta p^2 + 1)}{(\beta p^2 + 1)^2 + 1} e^{-q}$$

con $[\frac{1}{2}\pi, \pi] \cup [n, \frac{1}{2} + n] \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Modelo con Efecto de Cortante

Con las condiciones de frontera (E-E)

$$Det_{EE} = 2 \frac{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}}{\alpha p^2} (\cos p) (1 + e^{-2q}) + (\sin p) (1 - e^{-2q}) - 4 \frac{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}}{\alpha p^2} e^{-q}$$

con $[\frac{1}{2} + n, 1 + n] \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Con las condiciones de frontera (E-S)

$$Det_{ES} = -(\cos p) (1 - e^{-2q}) + \frac{(\sin p) (1 + e^{-2q})}{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}}$$

con $[n, \frac{1}{2} + n] \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Con las condiciones de frontera (E-G)

$$Det_{EG} = \frac{(\cos p) (1 - e^{-2q})}{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}} + (\sin p) (1 + e^{-2q})$$

con $[\frac{1}{2} + n, 1 + n] \pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Con las condiciones de frontera (E-L)

$$Det_{EL} = -\frac{2}{(\alpha p^2 + 1)^{1/2}} (\cos p) (1 + e^{2(-q)}) - \frac{\alpha p^2}{(\alpha p^2 + 1)} (\sin p) (1 - e^{2(-q)}) - 2 \frac{(1 + (\alpha p^2 + 1)^2)}{(\alpha p^2 + 1)^{3/2}} e^{-q}$$

con $[\frac{1}{2} + n, 1 + n] \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo presentamos las frecuencias de vibración obtenidas para cuatro vigas de concreto con distinta sección transversal por medio del MEF y el Método Asintótico. Los modelos considerados son Euler-Bernoulli, Rayleigh y efecto de Cortante. Para comparar nuestros resultados usaremos aquellos que se obtienen al considerar un modelo 3D-MEF de la viga por medio de [12]. Las vigas tienen secciones elíptica, circular, rectangular y cuadrada. Se muestran las diez primeras frecuencias normalizadas para el modelo 3D y los modelos 1D considerando los cuatro conjuntos de condiciones en los extremos dados por la expresión (3.7).

4.1 Viga Elíptica

4.1.1 Figura y parámetros físicos

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura siguiente:

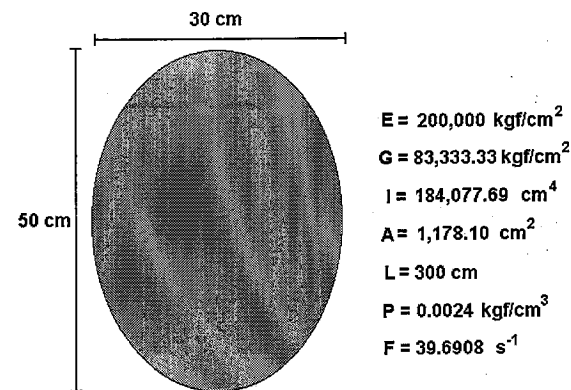


Figura 4.1: Sección transversal de una viga de concreto elíptica.

Las dimensiones y constantes físicas de la viga son:

Longitud	300 cm
Alto	50 cm
Ancho	30 cm
Módulo de Elasticidad	200,000 kgf/cm ²
Módulo de Rigidez	83,333.33 kgf/cm ²
Peso Volumétrico	0.0024 kgf/cm ³
Momento de Inercia	184,077.69 cm ⁴

Recordemos que el factor F fue definido en la sección 3.2 y representa el valor por el cual deba multiplicarse la frecuencia normalizada para obtener la frecuencia natural de vibración de la viga. El factor de escala F para la viga es 39.6908 s^{-1} , por lo que la frecuencia natural será la que se obtenga de multiplicar la frecuencia normalizada por este valor.

4.1.2 Modelo 3D

Las frecuencias normalizadas obtenidas al usar un modelo 3D-MEF por medio de [12] se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.37329	15.41821	5.59332	3.51602
2	61.67282	49.96486	30.22585	22.03449
3	120.90339	104.24770	74.63888	61.69721
4	199.85946	178.26974	138.79132	120.90192
5	298.55557	272.03100	222.68296	199.85954
6	416.99089	385.53150	326.31384	298.55557
7	555.16548	518.77127	449.68398	416.99089
8	713.07941	671.75037	592.79340	555.16548
9	890.73277	844.46885	755.64218	713.07941
10	1088.12565	1036.92684	938.23040	890.73277

Tabla 4.1: Frecuencias normalizadas del modelo 3D para una viga elíptica de concreto.

4.1.3 Modelo Euler-Bernoulli

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Euler-Bernoulli se muestran en la siguiente tabla.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Euler-Bernoulli se muestran en la siguiente tabla.

4.1.4 Modelo Rayleigh

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Rayleigh se muestran en la siguiente tabla.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Rayleigh se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.37329	15.41821	5.59332	3.51602
2	61.67282	49.96486	30.22585	22.03449
3	120.90339	104.24770	74.63888	61.69721
4	199.85946	178.26974	138.79132	120.90192
5	298.55557	272.03100	222.68296	199.85954
6	416.99089	385.53150	326.31384	298.55557
7	555.16548	518.77127	449.68398	416.99089
8	713.07941	671.75037	592.79340	555.16548
9	890.73277	844.46885	755.64218	713.07941
10	1088.12565	1036.92684	938.23040	890.73277

Tabla 4.2: Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga elíptica de concreto por medio del MEF.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.37329	15.41821	5.59332	3.51602
2	61.67282	49.96486	30.22585	22.03449
3	120.90339	104.24770	74.63888	61.69721
4	199.85945	178.26973	138.79131	120.90192
5	298.55554	272.03097	222.68295	199.85953
6	416.99079	385.53142	326.31380	298.55553
7	555.16525	518.77108	449.68385	416.99079
8	713.07892	671.74995	592.79311	555.16525
9	890.73180	844.46803	755.64159	713.07892
10	1088.12389	1036.92531	938.22927	890.73180

Tabla 4.3: Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga elíptica de concreto por medio del MA.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.13799	15.26634	5.57845	3.50191
2	59.34316	48.20185	29.59711	21.43851
3	111.68744	96.65498	70.69768	57.93404
4	175.42053	157.18221	125.62897	108.23806
5	247.22241	226.41152	190.90194	169.24298
6	324.34533	301.50694	263.37657	237.92964
7	404.74447	380.31532	340.55556	311.89962
8	486.99824	461.31454	420.61498	389.35449
9	570.16771	543.48261	502.30069	469.00213
10	653.65760	626.16020	584.78807	549.94050

Tabla 4.4: Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga elíptica de concreto por medio del MEF.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.13799	15.26634	5.57845	3.50191
2	59.34318	48.20186	29.59712	21.43851
3	111.68748	96.65501	70.69769	57.93405
4	175.42061	157.18228	125.62902	108.23810
5	247.22255	226.41164	190.90204	169.24305
6	324.34553	301.50713	263.37673	237.92977
7	404.74469	380.31554	340.55576	311.89981
8	486.99844	461.31475	420.61521	389.35472
9	570.16776	543.48272	502.30087	469.00234
10	653.65735	626.16007	584.78809	549.94062

Tabla 4.5: Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga elíptica de concreto por medio del MA.

4.1.5 Modelo Cortante

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Cortante se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	21.82034	15.06092	5.55781	3.52234
2	56.47727	46.01964	28.77897	21.44429
3	101.72590	88.36322	66.09965	56.52111
4	152.60922	137.25738	112.23842	101.71867
5	206.07411	189.35951	163.05561	152.61104
6	260.40868	242.74438	215.96970	206.07345
7	314.77833	296.42419	269.58489	260.40899
8	368.81533	349.93769	323.21789	314.77815
9	422.38748	403.09512	376.56653	368.81545
10	475.47190	455.83922	429.51949	422.38739

Tabla 4.6: Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga elíptica de concreto por medio del MEF.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Cortante se muestran en la siguiente tabla.

Como puede ser observado, las frecuencias obtenidas para el Modelo de Cortante son más cercanas a las del Modelo 3D que los Modelos Euler-Bernoulli y Rayleigh. A manera de comparación mostraremos los errores relativos del Método Asintótico y del MEF con respecto al Modelo 3D sólo para el Modelo de Cortante, pues como ya se dijo anteriormente, son las frecuencias obtenidas bajo este modelo las "más cercanas" al Modelo 3D. Los errores relativos para las 10 primeras frecuencias se muestran enseguida.

En la columna de la izquierda se indican las frecuencias para la viga ordenadas de menor a mayor magnitud. Los encabezados E-E, E-S, E-G y E-L hacen referencia a las condiciones de frontera utilizadas y las columnas MA y MEF se refieren al error relativo para la frecuencia normalizada respecto al Modelo 3D usando el Método Asintótico y el Método de los Elementos Finitos respectivamente. Así por ejemplo, la quinta frecuencia por Método Asintótico para las condiciones de frontera E-L tiene un relativo de 13.4868% respecto a la frecuencia del Modelo 3D mientras que la misma frecuencia para el MEF tiene un error relativo del 13.4871% respecto a la

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	21.82033	15.06091	5.55781	3.52233
2	56.47721	46.01960	28.77895	21.44427
3	101.72572	88.36307	66.09956	56.52104
4	152.60885	137.25707	112.23820	101.71849
5	206.07348	189.35897	163.05519	152.61066
6	260.40775	242.74355	215.96902	206.07283
7	314.77704	296.42302	269.58390	260.40806
8	368.81361	349.93613	323.21653	314.77686
9	422.38524	403.09308	376.56474	368.81373
10	475.46903	455.83660	429.51717	422.38515

Tabla 4.7: Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga elíptica de concreto por medio del MA.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	21.82033	15.06091	5.55781	3.52233
2	56.47721	46.01960	28.77895	21.44427
3	101.72572	88.36307	66.09956	56.52104
4	152.60885	137.25707	112.23820	101.71849
5	206.07348	189.35897	163.05519	152.61066
6	260.40775	242.74355	215.96902	206.07283
7	314.77704	296.42302	269.58390	260.40806
8	368.81361	349.93613	323.21653	314.77686
9	422.38524	403.09308	376.56474	368.81373
10	475.46903	455.83660	429.51717	422.38515

Tabla 4.8: Errores relativos de las frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga elíptica de concreto obtenidas por MA y MEF respecto al modelo 3D.

frecuencia del Modelo 3D.

4.2 Viga Circular

4.2.1 Figura y parámetros físicos

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura siguiente:

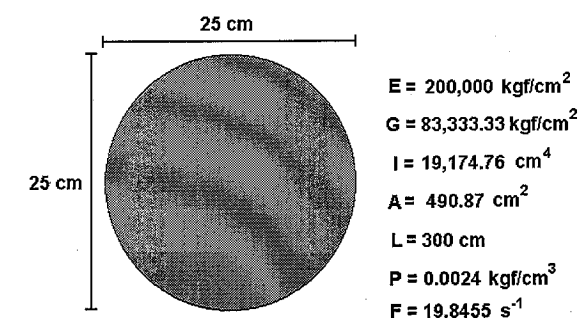


Figura 4.2: Sección transversal de una viga de concreto circular.

Las dimensiones y constantes físicas de la viga son:

Longitud	300 cm
Alto	25 cm
Ancho	25 cm
Módulo de Elasticidad	200,000 kgf/cm ²
Módulo de Rigidez	83,333.33 kgf/cm ²
Peso Volumétrico	0.0024 kgf/cm ³
Momento de Inercia	19,174.76 cm ⁴

El factor de escala F para la viga es 19.8455 s^{-1} , por lo que la frecuencia natural será la que se obtenga de multiplicar la frecuencia normalizada por este valor.

4.2.2 Modelo 3D

Las frecuencias normalizadas obtenidas al usar un modelo 3D-MEF por medio de [12] se muestran en la siguiente tabla.

4.2.3 Modelo Euler-Bernoulli

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Euler-Bernoulli se muestran en la siguiente tabla.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Euler-Bernoulli se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.85432	15.95270	5.84632	3.69113
2	60.58961	50.09921	30.81372	22.61412
3	113.28675	100.22634	73.32198	61.20083
4	177.37539	162.88141	130.06387	114.67296
5	250.23783	235.36139	198.50061	179.93517
6	329.80304	314.98859	274.22414	254.18381
7	414.23738	400.32741	357.21785	335.34284
8	502.20602	488.96673	444.02350	421.22184
9	592.16000	580.16735	535.05380	510.84678
10	685.83876	675.52407	628.71744	602.27817

Tabla 4.9: Frecuencias normalizadas del modelo 3D para una viga circular de concreto.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.37329	15.41821	5.59332	3.51601
2	61.67282	49.96486	30.22585	22.03449
3	120.90339	104.24770	74.63888	61.69721
4	199.85946	178.26974	138.79132	120.90192
5	298.55557	272.03100	222.68296	199.85954
6	416.99089	385.53150	326.31384	298.55557
7	555.16548	518.77127	449.68398	416.99089
8	713.07941	671.75037	592.79340	555.16548
9	890.73277	844.46885	755.64218	713.07941
10	1088.12565	1036.92684	938.23040	890.73277

Tabla 4.10: Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga circular de concreto por medio del MEF.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.37329	15.41821	5.59332	3.51602
2	61.67282	49.96486	30.22585	22.03449
3	120.90339	104.24770	74.63888	61.69721
4	199.85945	178.26973	138.79131	120.90192
5	298.55554	272.03097	222.68295	199.85953
6	416.99079	385.53142	326.31380	298.55553
7	555.16525	518.77108	449.68385	416.99079
8	713.07892	671.74995	592.79311	555.16525
9	890.73180	844.46803	755.64159	713.07892
10	1088.12389	1036.92531	938.22927	890.73180

Tabla 4.11: Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga circular de concreto por medio del MA.

4.2.4 Modelo Rayleigh

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Rayleigh se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.31378	15.37983	5.58959	3.51247
2	61.06537	49.50610	30.06494	21.88103
3	118.38843	102.18313	73.59221	60.68753
4	192.80736	172.21256	135.11685	117.31833
5	282.79059	258.09413	213.27422	190.64545
6	386.61972	358.14051	306.45643	279.07133
7	502.51561	470.58594	412.92407	380.89127
8	628.72854	593.68001	530.90856	494.37518
9	763.60752	725.75996	658.69575	617.84951
10	905.64604	865.29976	794.68653	749.75411

Tabla 4.12: Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga circular de concreto por medio del MEF.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Rayleigh se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.31378	15.37983	5.58959	3.51247
2	61.06537	49.50610	30.06494	21.88103
3	118.38843	102.18314	73.59222	60.68754
4	192.80737	172.21256	135.11685	117.31834
5	282.79060	258.09414	213.27423	190.64546
6	386.61971	358.14051	306.45644	279.07134
7	502.51553	470.58588	412.92404	380.89126
8	628.72830	593.67982	530.90845	494.37512
9	763.60697	725.75952	658.69546	617.84930
10	905.64495	865.29884	794.68588	749.75362

Tabla 4.13: Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga circular de concreto por medio del MA.

4.2.5 Modelo Cortante

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Cortante se muestran en la siguiente tabla.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Cortante se muestran en la siguiente tabla.

Para comparar las frecuencias obtenidas por el Modelo de Cortante para el Método Asintótico y del MEF con respecto al Modelo 3D mostraremos los errores relativos para las 10 primeras frecuencias en la siguiente tabla

Como puede verse en la tabla anterior, los errores relativos para los métodos MA y MEF respecto al Modelo 3D son muy similares. También puede observarse que los errores relativos muestran un

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.23124	15.32656	5.58438	3.51759
2	60.24365	48.88447	29.84390	21.88321
3	115.11583	99.48828	72.19803	60.27234
4	184.07844	164.68381	130.43041	115.11344
5	264.39833	241.75207	201.90388	184.07867
6	353.45243	328.05478	283.90391	264.39830
7	448.95306	421.25603	373.92383	353.45244
8	549.02876	519.42193	469.82288	448.95306
9	652.22157	621.02977	569.87568	549.02876
10	757.43724	724.92547	672.75107	652.22157

Tabla 4.14: Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga circular de concreto por medio del MEF.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.23124	15.32656	5.58438	3.51759
2	60.24361	48.88444	29.84388	21.88321
3	115.11567	99.48816	72.19797	60.27230
4	184.07804	164.68349	130.43020	115.11328
5	264.39753	241.75140	201.90340	184.07828
6	353.45104	328.05357	283.90299	264.39750
7	448.95086	421.25408	373.92228	353.45105
8	549.02552	519.41902	469.82047	448.95086
9	652.21701	621.02564	569.87218	549.02552
10	757.43107	724.91982	672.74621	652.21701

Tabla 4.15: Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga circular de concreto por medio del MA.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	MEF	MA	MEF	MA	MEF	MA	MEF
1	2.7263	2.7263	3.9250	3.9250	4.4804	4.4804	4.7015	4.7014
2	0.5711	0.5710	2.4247	2.4247	3.1474	3.1474	3.2321	3.2321
3	1.6144	1.6146	0.7365	0.7364	1.5330	1.5329	1.5172	1.5171
4	3.7788	3.7790	1.1064	1.1066	0.2817	0.2818	0.3840	0.3841
5	5.6585	5.6588	2.7150	2.7153	1.7142	1.7145	2.3026	2.3028
6	7.1703	7.1708	4.1478	4.1481	3.5295	3.5299	4.0182	4.0185
7	8.3801	8.3806	5.2274	5.2279	4.6763	4.6767	5.3999	5.4003
8	9.3228	9.3234	6.2279	6.2285	5.8098	5.8104	6.5830	6.5835
9	10.1420	10.1428	7.0425	7.0432	6.5075	6.5081	7.4736	7.4743
10	10.4387	10.4396	7.3122	7.3130	7.0030	7.0037	8.2917	8.2924

Tabla 4.16: Errores relativos de las frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga circular de concreto obtenidas por MA y MEF respecto al modelo 3D.

comportamiento creciente de acuerdo al orden de la frecuencia aunque, por ejemplo, para la cuarta frecuencia este error disminuye respecto a las anteriores para las condiciones de frontera E-G y E-L.

4.3 Viga Rectangular

4.3.1 Figura y parámetros físicos

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura siguiente:

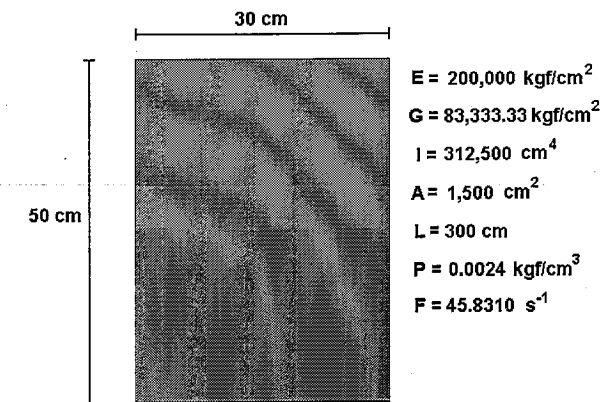


Figura 4.3: Sección transversal de una viga de concreto rectangular.

Las dimensiones y constantes físicas de la viga son:

Longitud	300 cm
Alto	30 cm
Ancho	50 cm
Módulo de Elasticidad	200,000 kgf/cm ²
Módulo de Rigidez	83,333.33 kgf/cm ²
Peso Volumétrico	0.0024 kgf/cm ³
Momento de Inercia	312,500 cm ⁴

El factor de escala F para la viga es 45.8310 s^{-1} , por lo que la frecuencia natural será la que se obtenga de multiplicar la frecuencia normalizada por este valor.

4.3.2 Modelo 3D

Las frecuencias normalizadas obtenidas al usar un modelo 3D-MEF por medio de [12] se muestran en la siguiente tabla.

4.3.3 Modelo Euler-Bernoulli

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Euler-Bernoulli se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	19.69999	15.90387	5.58203	3.58775
2	46.99243	38.52807	26.98479	20.18918
3	80.32272	72.43548	58.29701	49.78029
4	116.85956	107.90252	94.82622	85.10354
5	155.12908	133.77257	134.02720	123.44048
6	195.08304	209.85165	174.68484	163.24149
7	235.34946	248.82288	216.17270	203.25044
8	277.23160	281.04779	263.90001	241.17958
9	319.05264	291.90726	290.49118	290.24463
10	362.03229	299.40873	301.38338	297.95993

Tabla 4.17: Frecuencias normalizadas del modelo 3D para una viga rectangular de concreto.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.37329	15.41821	5.59332	3.51602
2	61.67282	49.96486	30.22585	22.03449
3	120.90339	104.24770	74.63888	61.69721
4	199.85946	178.26974	138.79132	120.90192
5	298.55557	272.03100	222.68296	199.85954
6	416.99089	385.53150	326.31384	298.55557
7	555.16548	518.77127	449.68398	416.99089
8	713.07941	671.75037	592.79340	555.16548
9	890.73277	844.46885	755.64218	713.07941
10	1088.12565	1036.92684	938.23040	890.73277

Tabla 4.18: Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga rectangular de concreto por medio del MEF.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Euler-Bernoulli se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.37329	15.41821	5.59332	3.51602
2	61.67282	49.96486	30.22585	22.03449
3	120.90339	104.24770	74.63888	61.69721
4	199.85945	178.26973	138.79131	120.90192
5	298.55554	272.03097	222.68295	199.85953
6	416.99079	385.53142	326.31380	298.55553
7	555.16525	518.77108	449.68385	416.99079
8	713.07892	671.74995	592.79311	555.16525
9	890.73180	844.46803	755.64159	713.07892
10	1088.12389	1036.92531	938.22927	890.73180

Tabla 4.19: Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga rectangular de concreto por medio del MA.

4.3.4 Modelo Rayleigh

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Rayleigh se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.06114	15.21669	5.57351	3.49724
2	58.62219	47.65427	29.39604	21.25000
3	109.05234	94.47018	69.51628	56.82697
4	169.06964	151.65809	122.00903	104.84225
5	235.21574	215.64319	182.99205	161.85442
6	304.91939	283.71612	249.30247	224.82880
7	376.47177	354.03106	318.67969	291.56370
8	448.81373	425.41884	389.64344	360.53486
9	521.32510	497.17789	461.28247	430.72791
10	593.66234	568.90731	533.06310	501.48885

Tabla 4.20: Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga rectangular de concreto por medio del MEF.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Rayleigh se muestran en la siguiente tabla.

4.3.5 Modelo Cortante

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Cortante se muestran en la siguiente tabla.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Cortante se muestran en la siguiente tabla.

Para comparar las frecuencias obtenidas por el Modelo de Cortante para el Método Asintótico y del MEF con respecto al Modelo 3D mostraremos los errores relativos para las 10 primeras frecuencias en la tabla siguiente:

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.06115	15.21669	5.57351	3.49724
2	58.62221	47.65428	29.39604	21.25000
3	109.05242	94.47024	69.51631	56.82699
4	169.06981	151.65822	122.00913	104.84232
5	235.21602	215.64344	182.99224	161.85457
6	304.91980	283.71649	249.30278	224.82907
7	376.47229	354.03155	318.68012	291.56409
8	448.81430	425.41940	389.64397	360.53536
9	521.32563	497.17845	461.28304	430.72849
10	593.66268	568.90774	533.06361	501.48942

Tabla 4.21: Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga rectangular de concreto por medio del MA.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	21.64467	14.94711	5.54612	3.52449
2	55.01211	44.89828	28.34073	21.25603
3	97.10848	84.48973	63.84428	55.06374
4	143.00976	128.80515	106.28172	97.09792
5	190.19451	174.95328	151.76359	143.01314
6	237.47703	221.53176	198.23854	190.19298
7	284.40157	267.94565	244.77829	237.47792
8	330.82757	313.98114	291.01602	284.40096
9	376.75102	359.59058	336.83879	330.82804
10	422.21466	404.79329	382.24037	376.75063

Tabla 4.22: Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga rectangular de concreto por medio del MEF.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	21.64466	14.94710	5.54612	3.52445
2	55.01206	44.89824	28.34072	21.25601
3	97.10832	84.48961	63.84420	55.06368
4	143.00945	128.80489	106.28153	97.09776
5	190.19400	174.95284	151.76324	143.01282
6	237.47630	221.53111	198.23800	190.19247
7	284.40057	267.94474	244.77751	237.47718
8	330.82626	313.97994	291.01498	284.39996
9	376.74931	359.58903	336.83743	330.82672
10	422.21245	404.79128	382.23861	376.74892

Tabla 4.23: Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga rectangular de concreto por medio del MA.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	MEF	MA	MEF	MA	MEF	MA	MEF
1	9.8714	9.8715	6.0159	6.0159	0.6433	0.6433	1.7642	1.7632
2	17.0658	17.0659	16.5338	16.5339	5.0248	5.0248	5.2842	5.2843
3	20.8977	20.8979	16.6412	16.6414	9.5154	9.5155	10.6134	10.6136
4	22.3772	22.3775	19.3715	19.3718	12.0803	12.0805	14.0937	14.0939
5	22.6037	22.6040	30.7838	30.7841	13.2332	13.2334	15.8557	15.8560
6	21.7309	21.7313	5.5656	5.5659	13.4832	13.4835	16.5099	16.5102
7	20.8418	20.8422	7.6849	7.6853	13.2324	13.2327	16.8397	16.8400
8	19.3321	19.3326	11.7176	11.7181	10.2747	10.2751	17.9204	17.9208
9	18.0837	18.0843	23.1861	23.1866	15.9544	15.9549	13.9820	13.9825
10	16.6229	16.6235	35.1969	35.1976	26.8280	26.8286	26.4428	26.4434

Tabla 4.24: Errores relativos de las frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga rectangular de concreto obtenidas por MA y MEF respecto al modelo 3D.

La tabla muestra errores relativos muy altos respecto a las dos vigas anteriores de secciones elíptica y circular. Puede verse nuevamente una tendencia en el incremento del error relativo según el orden de la frecuencia.

4.4 Viga Cuadrada

4.4.1 Figura y parámetros físicos

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura siguiente:

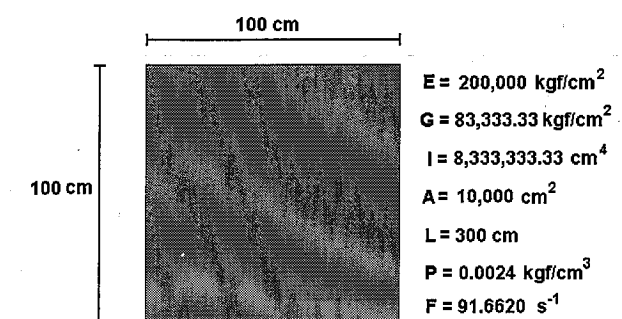


Figura 4.4: Sección transversal de una viga de concreto cuadrada.

Las dimensiones y constantes físicas de la viga son:

Longitud	300 cm
Alto	100 cm
Ancho	100 cm
Módulo de Elasticidad	200,000 kgf/cm ²
Módulo de Rigidez	83,333.33 kgf/cm ²
Peso Volumétrico	0.0024 kgf/cm ³
Momento de Inercia	8,333,333.33 cm ⁴

El factor de escala F para la viga es $91.6620 s^{-1}$, por lo que la frecuencia natural será la que se obtenga de multiplicar la frecuencia normalizada por este valor.

4.4.2 Modelo 3D

Las frecuencias normalizadas obtenidas al usar un modelo 3D-MEF por medio de [12] se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	15.10463	11.74620	4.99880	3.38777
2	31.55736	38.21584	20.36515	15.59032
3	50.65098	50.59207	39.39757	34.30451
4	70.63593	71.74981	59.63792	52.66545
5	80.73805	73.21104	80.81564	71.46114
6	91.45787	89.35809	84.08807	79.77516
7	104.44166	94.56919	100.26697	92.70080
8	114.10618	110.28235	106.42972	100.95253
9	128.95531	117.63327	125.34858	116.11356
10	137.93286	136.96735	129.56734	123.98945

Tabla 4.25: Frecuencias normalizadas del modelo 3D para una viga cuadrada de concreto.

4.4.3 Modelo Euler-Bernoulli

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Euler-Bernoulli se muestran en la siguiente tabla.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Euler-Bernoulli se muestran en la siguiente tabla.

4.4.4 Modelo Rayleigh

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Rayleigh se muestran en la siguiente tabla.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Rayleigh se muestran en la siguiente tabla.

4.4.5 Modelo Cortante

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de MEF al usar 150 elementos y considerando el modelo de Cortante se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.37329	15.41821	5.59332	3.51601
2	61.67282	49.96486	30.22585	22.03449
3	120.90339	104.24770	74.63888	61.69721
4	199.85946	178.26974	138.79132	120.90192
5	298.55557	272.03100	222.68298	199.85954
6	416.99089	385.53150	326.31384	298.55557
7	555.16548	518.77127	449.68398	416.99089
8	713.07941	671.75037	592.79340	555.16548
9	890.73277	844.46885	755.64218	713.07941
10	1088.12565	1036.92684	938.23040	890.73277

Tabla 4.26: Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga cuadrada de concreto por medio del MEF.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	22.37329	15.41821	5.59332	3.51602
2	61.67282	49.96486	30.22585	22.03449
3	120.90339	104.24770	74.63888	61.69721
4	199.85945	178.26973	138.79131	120.90192
5	298.55554	272.03097	222.68295	199.85953
6	416.99079	385.53142	326.31380	298.55553
7	555.16525	518.77108	449.68385	416.99079
8	713.07892	671.74995	592.79311	555.16525
9	890.73180	844.46803	755.64159	713.07892
10	1088.12389	1036.92531	938.22927	890.73180

Tabla 4.27: Frecuencias normalizadas del modelo Euler-Bernoulli para una viga cuadrada de concreto por medio del MA.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	21.19563	14.65555	5.51529	3.44251
2	51.59434	42.26741	27.26308	19.31314
3	87.33697	76.22983	58.80393	47.23904
4	124.27742	112.20335	94.11790	79.90064
5	161.09746	148.41534	130.33113	114.67715
6	197.38796	184.30102	166.41186	150.04523
7	233.13449	219.74175	202.07704	185.39979
8	268.39262	254.76205	237.30090	220.50243
9	303.25276	289.42280	272.13333	255.30668
10	337.78313	323.78638	306.63813	289.82299

Tabla 4.28: Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga cuadrada de concreto por medio del MEF.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	21.19562	14.65554	5.51529	3.44251
2	51.59430	42.26738	27.26307	19.31314
3	87.33686	76.22974	58.80387	47.23900
4	124.27723	112.20319	94.11778	79.90055
5	161.09717	148.41509	130.33093	114.67699
6	197.38756	184.30066	166.41156	150.04497
7	233.13394	219.74126	202.07662	185.39942
8	268.39189	254.76139	237.30033	220.50194
9	303.25179	289.42193	272.13257	255.30602
10	337.78184	323.78523	306.63713	289.82212

Tabla 4.29: Frecuencias normalizadas del modelo Rayleigh para una viga cuadrada de concreto por medio del MA.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	19.81472	13.75303	5.41117	3.55047
2	43.24564	35.75244	24.27712	19.27051
3	67.69060	59.36924	47.54862	43.43297
4	91.33296	82.70683	71.10036	67.57600
5	114.45333	105.55349	94.18765	91.42626
6	137.04053	127.99754	116.81880	114.36646
7	159.34786	150.14421	139.10242	137.12688
8	181.37039	172.07379	161.13213	159.25923
9	203.25184	193.84297	182.97563	181.46294
10	224.96679	215.49144	204.68032	203.15450

Tabla 4.30: Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga cuadrada de concreto por medio del MEF.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio de Método Asintótico con un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Cortante se muestran en la siguiente tabla.

Frec.	E-E	E-S	E-G	E-L
1	19.81475	13.75305	5.41117	3.55046
2	43.24577	35.75254	24.27717	19.27055
3	67.69086	59.36945	47.54877	43.43311
4	91.33334	82.70716	71.10063	67.57625
5	114.45382	105.55393	94.18804	91.42664
6	137.04111	127.99808	116.81930	114.36695
7	159.34852	150.14484	139.10301	137.12747
8	181.37110	172.07448	161.13280	159.25990
9	203.25256	193.84369	182.97635	181.46365
10	224.96745	215.49213	204.68104	203.15521

Tabla 4.31: Frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga cuadrada de concreto por medio del MA.

Las frecuencias obtenidas por medio del Modelo de Cortante para el Método Asintótico y para el MEF son comparadas con el Modelo 3D por medio de los errores relativos. La tabla siguiente muestra los errores relativos para las 10 primeras frecuencias:

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	MEF	MA	MEF	MA	MEF	MA	MEF
1	31.1834	31.1831	17.0851	17.0849	8.2494	8.2493	4.8020	4.8025
2	37.0386	37.0382	6.4458	6.4460	19.2094	19.2092	23.6058	23.6056
3	33.6417	33.6412	17.3493	17.3489	20.6896	20.6892	26.6105	26.6101
4	29.3015	29.3010	15.2716	15.2712	19.2205	19.2201	28.3123	28.3118
5	41.7595	41.7589	44.1776	44.1770	16.8359	16.8355	27.9390	27.9384
6	49.8407	49.8401	43.2417	43.2411	38.9249	38.9243	43.3616	43.3610
7	52.5718	52.5712	58.7672	58.7665	38.7326	38.7320	47.9248	47.9242
8	58.9494	58.9488	56.0308	56.0302	51.3983	51.3977	57.7572	57.7566
9	57.6147	57.6142	64.7864	64.7858	45.9740	45.9734	56.2812	56.2806
10	63.0993	63.0988	57.3310	57.3305	57.9727	57.9722	63.8488	63.8482

Tabla 4.32: Errores relativos de las frecuencias normalizadas del modelo de Cortante para una viga cuadrada de concreto obtenidas por MA y MEF respecto al modelo 3D.

Similarmente a la viga rectangular, los errores relativos mostrados en la tabla revelan un alto error relativo entre las frecuencias de los modelos unidimensionales respecto a las del Modelo 3D.

4.5 Comentarios

Como puede verse en las tablas de MEF y el Método Asintótico las frecuencias coinciden casi exactamente. Dado que el MEF es un método muy usado en este tipo de problemas, tenemos garantía que para nuestros modelos en 1D los resultados obtenidos con el Método Asintótico son los adecuados.

Las frecuencias normalizadas para el Modelo de Euler-Bernoulli son las mismas para las cuatro viga de concreto mostradas en este capítulo. El factor de escala F que depende de los parámetros

físicos de la viga se encarga de proporcionar la frecuencia natural para cada una de estas vigas y por ende las frecuencias naturales serán distintas, no así las normalizadas. Las frecuencias normalizadas para el Modelo de Rayleigh de una viga con cierta sección transversal son las mismas, pues el Modelo de Rayleigh considera el uso del parámetro β y como fue visto en el capítulo 3, el valor de β depende solo del área, el momento de inercia y la longitud de la viga. Como las vigas vistas en este capítulo tienen la misma longitud, sucede que las frecuencias normalizadas del Modelo de Rayleigh son las mismas para determinada sección transversal.

Los resultados del modelo 3D-MEF fueron calculados con el programa CALSEF [12] desarrollado en el CIMAT. Estas frecuencias representan de una manera más completa el comportamiento vibratorio de la viga, pero el costo computacional es alto.

Con respecto al tiempo de procesamiento para los modelos 1D en una computadora DELL con 120 MB de RAM y un procesador pentium III el tiempo de procesamiento es en promedio de 13.983 segundos para obtener 10 frecuencias por MEF y de 0.003 segundos para obtener las mismas frecuencias por medio del Método Asintótico. Esto proporciona una ventaja importante del Método Asintótico sobre MEF en tiempo de procesamiento.

Capítulo 5

Conclusiones

La principal motivación para este trabajo fue desarrollar una nueva técnica que permitiera determinar las frecuencias de vibración de una viga sobre un espectro muy amplio. La problemática con métodos de aproximación como el MEF hacen que la búsqueda de frecuencias sea sobre un espectro de frecuencias reducido que dependen del número de elementos usados en la discretización.

La manera más precisa de calcular frecuencias de vibración es modelar el comportamiento vibratorio de la viga elástica por medio de la Teoría de la Elasticidad y luego calcular las frecuencias por medio del MEF sobre un modelo tridimensional. Esto tiene como consecuencia un costo computacional muy alto. El método Asintótico tiene como principal ventaja sobre MEF que proporciona una comprensión analítica en el rango de alta frecuencia y permite calcular frecuencias de cualquier orden virtualmente sin costo.

El análisis hecho en una dimensión, a juzgar por los resultados, proporciona valores de frecuencia muy aceptables en comparación a los obtenidos por un modelo tridimensional.

Se ha presentado un método alternativo para determinar frecuencias de vibración de vigas basado en las ideas del MPO. El método nos permite no solo encontrar las frecuencias de orden muy alto, sino también considera los efectos de corte e inercia rotacional en la determinación de las frecuencias.

Por medio de una notación adimensional y normalizada, nuestro método permite caracterizar las frecuencias de vibración de una viga por medio de los parámetros α o β . Hemos mostrado que por medio de un factor de escala, la frecuencia natural puede ser obtenida.

Se crea además un criterio para determinar que tan "buena" es nuestra aproximación por medio de la función determinante, de acuerdo a cierto tipo de condición en la frontera de la viga. En particular, al utilizar el método de la Potencia los errores numéricos se incrementan al determinar las frecuencias de vibración de orden más alto, esto debido a un proceso de ortonormalización realizado numéricamente y es posible por medio del Método Asintótico acotar estos errores tanto como sea posible.

Se ha mostrado que el método es exitoso al ser aplicado a vigas con distinta geometría en su sección transversal. El método es aplicable también a vigas de distinto material.

Como trabajo futuro, para completar nuestro análisis, necesitamos considerar los efectos de corte y de inercia rotacional activados. Esto significa considerar para la ecuación de Timoshenko los parámetros α y β distintos de cero. Usar MEF bajo estas consideraciones lleva a un problema de eigenvalores cuadrático y la pregunta natural es si es posible usar una metodología similar a la presentada en esta tesis.

Apéndice A

Resultados para vigas de acero y aluminio

Incluimos en este apéndice los resultados obtenidos por el método asintótico para vigas de acero y aluminio. Las vigas para cada uno de los materiales tienen geometría elíptica, circular, rectangular y cuadrada en su sección transversal.

A.1 Vigas de Acero

A.1.1 Sección transversal elíptica

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura A.1.

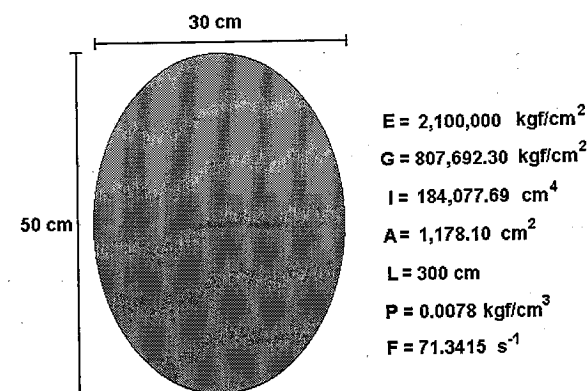


Figura A.1: Sección transversal de una viga de acero elíptica.

En la Figura A.1 se indican las dimensiones y parámetros físicos de la viga siendo E el módulo de elasticidad, G el módulo de rigidez transversal, I el momento de inercia, A el área de la sección transversal, L la longitud de viga, P el peso volumétrico y F el factor de escala definido en la sección 3.2 y que será utilizado para determinar la frecuencia natural de vibración ω . Las unidades utilizadas son centímetros (cm), kilogramos-fuerza (kgf) y segundos (s).

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio del Método Asintótico al usar un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando el modelo de Euler-Bernoulli se muestran en la Tabla A.1.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.37329	6.26E-08	15.41821	2.56E-07	5.59332	1.10E-06	3.51602	1.83E-06
2	61.67282	5.05E-07	49.96486	3.24E-07	30.22585	9.32E-08	22.03449	1.53E-08
3	120.90339	2.00E-06	104.24770	1.49E-06	74.63888	7.54E-07	61.69721	5.06E-07
4	199.85945	5.48E-06	178.26973	4.36E-06	138.79131	2.64E-06	120.90192	2.00E-06
5	298.55554	1.22E-05	272.03097	1.01E-05	222.68295	6.80E-06	199.85953	5.48E-06
6	416.99079	2.38E-05	385.53142	2.04E-05	326.31380	1.46E-05	298.55553	1.22E-05
7	555.16525	4.23E-05	518.77108	3.69E-05	449.68385	2.77E-05	416.99079	2.38E-05
8	713.07892	6.97E-05	671.74995	6.18E-05	592.79311	4.82E-05	555.16525	4.22E-05
9	890.73180	1.09E-04	844.46803	9.77E-05	755.64159	7.83E-05	713.07892	6.97E-05
10	1088.12389	1.62E-04	1036.92531	1.47E-04	938.22927	1.21E-04	890.73180	1.09E-04

Tabla A.1: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga elíptica de acero.

En la columna de la izquierda se indican las 10 primeras frecuencias para la viga ordenadas de menor a mayor magnitud. Los encabezados **E-E**, **E-S**, **E-G** y **E-L** hacen referencia a las condiciones de frontera utilizadas. Las columnas **MA** se refieren al valor de frecuencia normalizada de la viga usando el Método Asintótico. Las columnas **Error** indican el valor del error relativo para la frecuencia normalizada respecto a la obtenida por medio del MEF aplicado a los modelos unidimensionales.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio del Método Asintótico al usar un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando los modelos de Rayleigh y el efecto de Cortante son respectivamente las Tablas A.2 y A.3.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.37329	2.99E-07	15.41821	7.23E-07	5.59332	3.96E-06	3.51602	7.17E-06
2	61.67282	5.54E-07	49.96486	3.76E-07	30.22585	1.30E-07	22.03449	1.10E-07
3	120.90339	2.02E-06	104.24770	1.50E-06	74.63888	7.74E-07	61.69721	5.33E-07
4	199.85945	5.48E-06	178.26973	4.36E-06	138.79131	2.65E-06	120.90192	2.01E-06
5	298.55554	1.22E-05	272.03097	1.01E-05	222.68295	6.80E-06	199.85953	5.48E-06
6	416.99079	2.38E-05	385.53142	2.04E-05	326.31380	1.46E-05	298.55553	1.22E-05
7	555.16525	4.23E-05	518.77108	3.69E-05	449.68385	2.77E-05	416.99079	2.38E-05
8	713.07892	6.97E-05	671.74995	6.18E-05	592.79311	4.82E-05	555.16525	4.22E-05
9	890.73180	1.09E-04	844.46803	9.77E-05	755.64159	7.83E-05	713.07892	6.97E-05
10	1088.12389	1.62E-04	1036.92531	1.47E-04	938.22927	1.21E-04	890.73180	1.09E-04

Tabla A.2: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga elíptica de acero.

A.1.2 Sección transversal circular

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura A.2.

Las constantes y dimensiones físicas de la viga fueron explicadas en el apartado A.1.1.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.06115	1.59E-05	15.21669	1.10E-05	5.57351	4.12E-06	3.49724	2.68E-06
2	58.62221	4.01E-05	47.65428	3.31E-05	29.39604	2.09E-05	21.25000	1.53E-05
3	109.05242	6.92E-05	94.47024	6.12E-05	69.51631	4.68E-05	56.82699	3.90E-05
4	169.06981	9.75E-05	151.65822	8.99E-05	122.00913	7.58E-05	104.84232	6.71E-05
5	235.21602	1.20E-04	215.64344	1.14E-04	182.99224	1.03E-04	161.85457	9.48E-05
6	304.91980	1.35E-04	283.71649	1.31E-04	249.30278	1.24E-04	224.82907	1.18E-04
7	376.47229	1.38E-04	354.03155	1.38E-04	318.68012	1.36E-04	291.56409	1.34E-04
8	448.81430	1.28E-04	425.41940	1.32E-04	389.64397	1.37E-04	360.53536	1.40E-04
9	521.32563	1.02E-04	497.17845	1.12E-04	461.28304	1.24E-04	430.72849	1.34E-04
10	593.66268	5.83E-05	568.90774	7.50E-05	533.08361	9.59E-05	501.48942	1.13E-04

Tabla A.3: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga elíptica de acero.

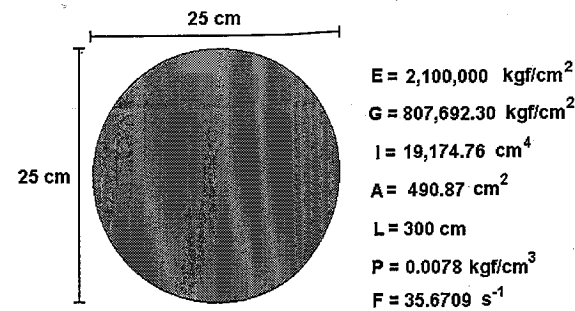


Figura A.2: Sección transversal de una viga de acero circular.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio del Método Asintótico al usar un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando los modelos de Euler-Bernoulli, Rayleigh y el efecto de Cortante se muestran respectivamente en las tres Tablas A.4, A.5 y A.6.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.37329	2.40E-08	15.41821	4.19E-07	5.59332	5.16E-06	3.51602	1.26E-05
2	61.67282	5.22E-07	49.96486	3.43E-07	30.22585	1.37E-07	22.03449	4.21E-08
3	120.90339	2.00E-06	104.24770	1.48E-06	74.63888	7.66E-07	61.69721	5.35E-07
4	199.85945	5.48E-06	178.26973	4.36E-06	138.79131	2.64E-06	120.90192	2.00E-06
5	298.55554	1.22E-05	272.03097	1.01E-05	222.68295	6.80E-06	199.85953	5.48E-06
6	416.99079	2.38E-05	385.53142	2.04E-05	326.31380	1.46E-05	298.55553	1.22E-05
7	555.16525	4.23E-05	518.77108	3.69E-05	449.68385	2.77E-05	416.99079	2.38E-05
8	713.07892	6.97E-05	671.74995	6.18E-05	592.79311	4.82E-05	555.16525	4.22E-05
9	890.73180	1.09E-04	844.46803	9.77E-05	755.64159	7.83E-05	713.07892	6.97E-05
10	1088.12389	1.62E-04	1036.92531	1.47E-04	938.22927	1.21E-04	890.73180	1.09E-04

Tabla A.4: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga circular de acero.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.37329	1.27E-09	15.41821	1.19E-07	5.59332	2.00E-06	3.51602	6.08E-06
2	61.67282	5.03E-07	49.96486	3.21E-07	30.22585	6.95E-08	22.03449	6.73E-08
3	120.90339	2.00E-06	104.24770	1.48E-06	74.63888	7.43E-07	61.69721	4.94E-07
4	199.85945	5.48E-06	178.26973	4.35E-06	138.79131	2.64E-06	120.90192	2.00E-06
5	298.55554	1.22E-05	272.03097	1.01E-05	222.68295	6.80E-06	199.85953	5.47E-06
6	416.99079	2.38E-05	385.53142	2.04E-05	326.31380	1.46E-05	298.55553	1.22E-05
7	555.16525	4.23E-05	518.77108	3.69E-05	449.68385	2.77E-05	416.99079	2.38E-05
8	713.07892	6.97E-05	671.74995	6.18E-05	592.79311	4.82E-05	555.16525	4.22E-05
9	890.73180	1.09E-04	844.46803	9.77E-05	755.64159	7.83E-05	713.07892	6.97E-05
10	1088.12389	1.62E-04	1036.92531	1.47E-04	938.22927	1.21E-04	890.73180	1.09E-04

Tabla A.5: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga circular de acero.

El significado de los encabezados para las tablas anteriores puede consultarse en el apartado A.1.1 de este apéndice.

A.1.3 Sección transversal rectangular

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura A.3.

Las constantes y dimensiones físicas de la viga fueron explicadas en el apartado A.1.1.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio del Método Asintótico al usar un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando los modelos de Euler-Bernoulli, Rayleigh y el efecto de Cortante se muestran respectivamente en las tres Tablas A.7, A.8 y A.9.

El significado de los encabezados para las tablas anteriores puede consultarse en el apartado A.1.1 de este apéndice.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	21.19562	3.92E-05	14.65554	2.79E-05	5.51529	1.11E-05	3.44251	7.37E-06
2	51.59430	8.35E-05	42.26738	7.12E-05	27.26307	4.91E-05	19.31314	3.60E-05
3	87.33686	1.22E-04	76.22974	1.11E-04	58.80387	9.23E-05	47.23900	7.79E-05
4	124.27723	1.53E-04	112.20319	1.43E-04	94.11778	1.28E-04	79.90055	1.15E-04
5	161.09717	1.79E-04	148.41509	1.70E-04	130.33093	1.57E-04	114.67699	1.45E-04
6	197.38756	2.05E-04	184.30066	1.95E-04	166.41156	1.82E-04	150.04497	1.71E-04
7	233.13394	2.34E-04	219.74126	2.23E-04	202.07662	2.08E-04	185.39942	1.95E-04
8	268.39189	2.72E-04	254.76139	2.56E-04	237.30033	2.38E-04	220.50194	2.23E-04
9	303.25179	3.20E-04	289.42193	3.00E-04	272.13257	2.77E-04	255.30602	2.56E-04
10	337.78184	3.84E-04	323.78523	3.56E-04	306.63713	3.26E-04	289.82212	3.00E-04

Tabla A.6: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga circular de acero.

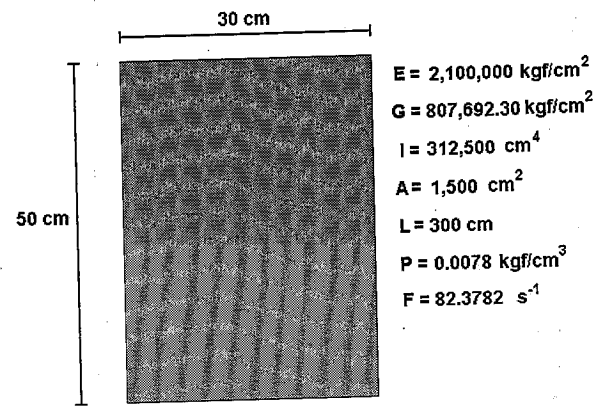


Figura A.3: Sección transversal de una viga de acero rectangular.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.37329	2.99E-07	15.41821	7.23E-07	5.59332	3.96E-06	3.51802	7.17E-06
2	61.67282	5.54E-07	49.96486	3.75E-07	30.22585	1.30E-07	22.03449	1.10E-07
3	120.90339	2.02E-06	104.24770	1.50E-06	74.63888	7.74E-07	61.69721	5.33E-07
4	199.85945	5.48E-06	178.26973	4.36E-06	138.79131	2.65E-06	120.90192	2.01E-06
5	298.55554	1.22E-05	272.03097	1.01E-05	222.68295	6.80E-06	199.85953	5.48E-06
6	416.99079	2.38E-05	385.53142	2.04E-05	326.31380	1.46E-05	298.55553	1.22E-05
7	555.16525	4.23E-05	518.77108	3.69E-05	449.68385	2.77E-05	416.99079	2.38E-05
8	713.07892	6.97E-05	671.74995	6.18E-05	592.79311	4.82E-05	555.16525	4.22E-05
9	890.73180	1.09E-04	844.46803	9.77E-05	755.64159	7.83E-05	713.07892	6.97E-05
10	1088.12389	1.62E-04	1036.92531	1.47E-04	938.22927	1.21E-04	890.73180	1.09E-04

Tabla A.7: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga rectangular de acero.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.06115	1.59E-05	15.21669	1.10E-05	5.57351	4.12E-06	3.49724	2.68E-06
2	58.62221	4.01E-05	47.65428	3.31E-05	29.39604	2.09E-05	21.25000	1.53E-05
3	109.05242	6.92E-05	94.47024	6.12E-05	69.51631	4.68E-05	56.82699	3.90E-05
4	169.06981	9.75E-05	151.65822	8.99E-05	122.00913	7.58E-05	104.84232	6.71E-05
5	235.21602	1.20E-04	215.64344	1.14E-04	182.99224	1.03E-04	161.85457	9.48E-05
6	304.91980	1.35E-04	283.71649	1.31E-04	249.30278	1.24E-04	224.82907	1.18E-04
7	376.47229	1.38E-04	354.03155	1.38E-04	318.68012	1.36E-04	291.56409	1.34E-04
8	448.81430	1.28E-04	425.41940	1.32E-04	389.64397	1.37E-04	360.53536	1.40E-04
9	521.32563	1.02E-04	497.17845	1.12E-04	461.28304	1.24E-04	430.72849	1.34E-04
10	593.66268	5.83E-05	568.90774	7.50E-05	533.06361	9.59E-05	501.48942	1.13E-04

Tabla A.8: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga rectangular de acero.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	21.58703	1.87E-05	14.90973	1.32E-05	5.54224	5.16E-06	3.52516	2.93E-04
2	54.54811	4.25E-05	44.54235	3.58E-05	28.19903	2.39E-05	21.19416	1.10E-05
3	95.70421	6.48E-05	83.30793	5.88E-05	63.14243	4.78E-05	54.60247	4.16E-05
4	140.19349	8.04E-05	126.31814	7.64E-05	104.49825	6.85E-05	95.69237	6.45E-05
5	185.67012	8.77E-05	170.83841	8.62E-05	148.49279	8.23E-05	140.19754	8.03E-05
6	231.08980	8.57E-05	215.61182	8.73E-05	193.23618	8.79E-05	185.66818	8.76E-05
7	276.08648	7.32E-05	260.13860	7.88E-05	237.92092	8.43E-05	231.09099	8.56E-05
8	320.56688	4.89E-05	304.25848	5.92E-05	282.25256	7.05E-05	276.08563	7.32E-05
9	364.55118	1.03E-05	347.95143	2.65E-05	326.15694	4.46E-05	320.56755	4.88E-05
10	408.09244	4.49E-05	391.24983	2.15E-05	369.64707	4.61E-06	364.55061	1.03E-05

Tabla A.9: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga rectangular de acero.

A.1.4 Sección transversal cuadrada

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura A.4.

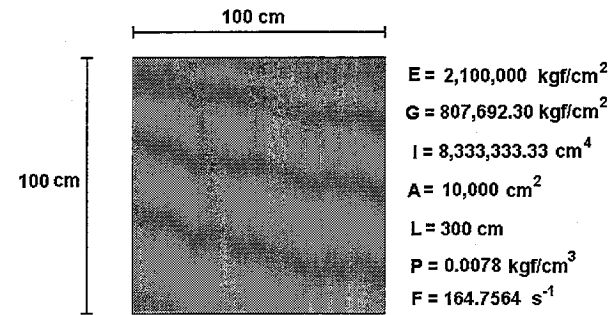


Figura A.4: Sección transversal de una viga de acero cuadrada.

Las constantes y dimensiones físicas de la viga fueron explicadas en el apartado A.1.1.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio del Método Asintótico al usar un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando los modelos de Euler-Bernoulli, Rayleigh y el efecto de Cortante se muestran respectivamente en las tres Tablas A.10, A.11 y A.12.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.37329	1.27E-09	15.41821	1.19E-07	5.59332	2.00E-06	3.51602	6.08E-06
2	61.67282	5.03E-07	49.96486	3.21E-07	30.22585	6.95E-08	22.03449	6.73E-08
3	120.90339	2.00E-06	104.24770	1.48E-06	74.63888	7.43E-07	61.69721	4.94E-07
4	199.85945	5.48E-06	178.26973	4.35E-06	138.79131	2.64E-06	120.90192	2.00E-06
5	298.55554	1.22E-05	272.03097	1.01E-05	222.68295	6.80E-06	199.85953	5.47E-06
6	416.99079	2.38E-05	385.53142	2.04E-05	326.31380	1.46E-05	298.55553	1.22E-05
7	555.16525	4.23E-05	518.77108	3.69E-05	449.68385	2.77E-05	416.99079	2.38E-05
8	713.07892	6.97E-05	671.74995	6.18E-05	592.79311	4.82E-05	555.16525	4.22E-05
9	890.73180	1.09E-04	844.46803	9.77E-05	755.64159	7.83E-05	713.07892	6.97E-05
10	1088.12389	1.62E-04	1036.92531	1.47E-04	938.22927	1.21E-04	890.73180	1.09E-04

Tabla A.10: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga cuadrada de acero.

El significado de los encabezados para las tablas anteriores puede consultarse en el apartado A.1.1 de este apéndice.

A.2 Vigas de Aluminio

A.2.1 Sección transversal elíptica

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura A.5.

Las constantes y dimensiones físicas de la viga fueron explicadas en el apartado A.1.1.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio del Método Asintótico al usar un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando los modelos de Euler-Bernoulli, Rayleigh y el efecto de Cortante

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	21.19562	3.92E-05	14.65554	2.79E-05	5.51529	1.11E-05	3.44251	7.37E-06
2	51.59430	8.35E-05	42.26738	7.12E-05	27.26307	4.91E-05	19.31314	3.60E-05
3	87.33686	1.22E-04	76.22974	1.11E-04	58.80387	9.23E-05	47.23900	7.79E-05
4	124.27723	1.53E-04	112.20319	1.43E-04	94.11778	1.28E-04	79.90055	1.15E-04
5	161.09717	1.79E-04	148.41509	1.70E-04	130.33093	1.57E-04	114.67699	1.45E-04
6	197.38756	2.05E-04	184.30066	1.95E-04	166.41156	1.82E-04	150.04497	1.71E-04
7	233.13394	2.34E-04	219.74126	2.23E-04	202.07662	2.08E-04	185.39942	1.95E-04
8	268.39189	2.72E-04	254.76139	2.56E-04	237.30033	2.38E-04	220.50194	2.23E-04
9	303.25179	3.20E-04	289.42193	3.00E-04	272.13257	2.77E-04	255.30602	2.56E-04
10	337.78184	3.84E-04	323.78523	3.56E-04	306.63713	3.26E-04	289.82212	3.00E-04

Tabla A.11: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga cuadrada de acero.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	19.63821	5.76E-05	13.63703	4.30E-05	5.39676	1.86E-05	3.55341	4.99E-03
2	42.35286	9.58E-05	35.04837	8.60E-05	23.92605	6.68E-05	19.07642	1.42E-04
3	65.84948	1.16E-04	57.77245	1.10E-04	46.41753	1.00E-04	42.55911	1.11E-04
4	88.48395	1.23E-04	80.14172	1.22E-04	69.02162	1.17E-04	65.71659	1.21E-04
5	110.62680	1.22E-04	102.02311	1.24E-04	91.13780	1.24E-04	88.59566	1.23E-04
6	132.25203	1.13E-04	123.52200	1.18E-04	112.81316	1.22E-04	110.52034	1.20E-04
7	153.62962	9.40E-05	144.74390	1.03E-04	134.16214	1.11E-04	132.35942	1.10E-04
8	174.73368	6.44E-05	165.76582	7.85E-05	155.27609	9.21E-05	153.51834	9.21E-05
9	195.71807	2.13E-05	186.64096	4.18E-05	176.21914	6.18E-05	174.85073	6.23E-05
10	216.54165	3.79E-05	207.40614	9.70E-06	197.03549	1.81E-05	195.59434	2.03E-05

Tabla A.12: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga cuadrada de acero.

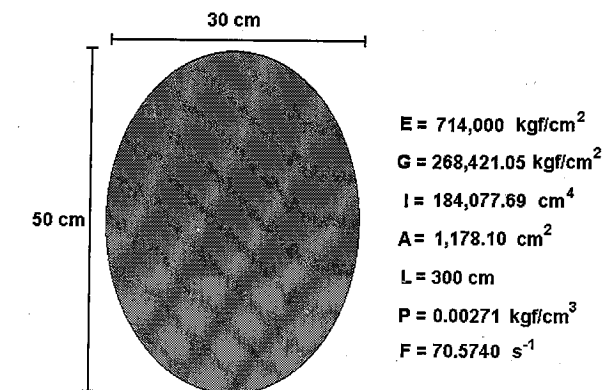


Figura A.5: Sección transversal de una viga de aluminio elíptica.

se muestran respectivamente en las Tres tablas A.13, A.14 y A.15.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.37329	3.19E-07	15.41821	6.78E-07	5.59332	6.82E-06	3.51602	1.86E-05
2	61.67282	5.55E-07	49.96486	3.85E-07	30.22585	2.65E-07	22.03449	3.98E-07
3	120.90339	2.02E-06	104.24770	1.51E-06	74.63888	7.93E-07	61.69721	5.59E-07
4	199.85945	5.48E-06	178.26973	4.36E-06	138.79131	2.65E-06	120.90192	2.02E-06
5	298.55554	1.22E-05	272.03097	1.02E-05	222.68295	6.80E-06	199.85953	5.48E-06
6	416.99079	2.38E-05	385.53142	2.04E-05	326.31380	1.46E-05	298.55553	1.22E-05
7	555.16525	4.23E-05	518.77108	3.69E-05	449.68385	2.77E-05	416.99079	2.38E-05
8	713.07892	6.97E-05	671.74995	6.18E-05	592.79311	4.82E-05	555.16525	4.22E-05
9	890.73180	1.09E-04	844.46803	9.77E-05	755.64159	7.83E-05	713.07892	6.97E-05
10	1088.12389	1.62E-04	1036.92531	1.47E-04	938.22927	1.21E-04	890.73180	1.09E-04

Tabla A.13: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga elíptica de aluminio.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.13799	7.55E-06	15.26634	5.23E-06	5.57845	1.15E-06	3.50191	1.29E-06
2	59.34318	1.92E-05	48.20186	1.59E-05	29.59712	9.97E-06	21.43851	7.29E-06
3	111.68748	3.35E-05	96.65501	2.96E-05	70.69769	2.25E-05	57.93405	1.88E-05
4	175.42061	4.72E-05	157.18228	4.37E-05	125.62902	3.68E-05	108.23810	3.27E-05
5	247.22255	5.75E-05	226.41164	5.50E-05	190.90204	4.99E-05	169.24305	4.64E-05
6	324.34553	6.14E-05	301.50713	6.08E-05	263.37673	5.88E-05	237.92977	5.71E-05
7	404.74469	5.65E-05	380.31554	5.87E-05	340.55576	6.09E-05	311.89981	6.23E-05
8	486.99844	4.01E-05	461.31475	4.62E-05	420.61521	5.39E-05	389.35472	5.97E-05
9	570.16776	9.71E-06	543.48272	2.06E-05	502.30087	3.52E-05	469.00234	4.68E-05
10	653.65735	3.77E-05	626.16007	2.07E-05	584.78809	2.11E-06	549.94062	2.10E-05

Tabla A.14: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga elíptica de aluminio.

El significado de los encabezados para las tablas anteriores puede consultarse en el apartado A.1.1 de este apéndice.

A.2.2 Sección transversal circular

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura A.6.

Las constantes y dimensiones físicas de la viga fueron explicadas en el apartado A.1.1.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio del Método Asintótico al usar un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando los modelos de Euler-Bernoulli, Rayleigh y el efecto de Cortante se muestran respectivamente en las tres Tablas A.16, A.17 y A.18.

El significado de los encabezados para las tablas anteriores puede consultarse en el apartado A.1.1 de este apéndice.

A.2.3 Sección transversal rectangular

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura A.7.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	21.76280	4.62E-05	15.02366	3.24E-05	5.55400	1.23E-05	3.52302	6.66E-04
2	55.98862	1.09E-04	45.64608	9.15E-05	28.63435	5.98E-05	21.38266	3.45E-05
3	100.15368	1.76E-04	87.04643	1.58E-04	65.34067	1.25E-04	56.03492	1.09E-04
4	149.27949	2.32E-04	134.32998	2.17E-04	110.19374	1.89E-04	100.14545	1.76E-04
5	200.48204	2.73E-04	184.29280	2.62E-04	159.11281	2.41E-04	149.28174	2.32E-04
6	252.23771	2.98E-04	235.19357	2.91E-04	209.69357	2.78E-04	200.48116	2.73E-04
7	303.85629	3.07E-04	286.19261	3.05E-04	260.71105	3.00E-04	252.23816	2.98E-04
8	355.06154	2.99E-04	336.92688	3.03E-04	311.60457	3.06E-04	303.85601	3.07E-04
9	405.77508	2.74E-04	387.26560	2.85E-04	362.14876	2.96E-04	355.06174	2.99E-04
10	456.00315	2.29E-04	437.18470	2.48E-04	412.27688	2.69E-04	405.77492	2.74E-04

Tabla A.15: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga elíptica de aluminio.

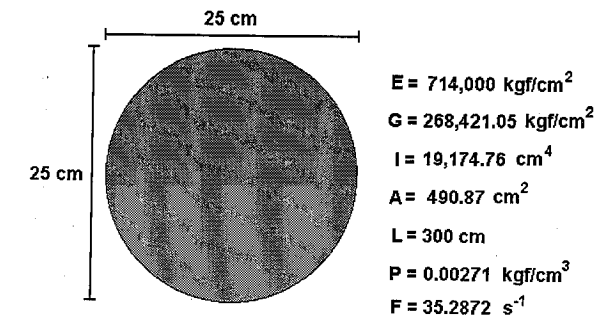


Figura A.6: Sección transversal de una viga de aluminio circular.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.37329	4.44E-08	15.41821	6.30E-08	5.59332	7.65E-07	3.51602	3.55E-06
2	61.67282	5.10E-07	49.96486	3.14E-07	30.22585	4.54E-08	22.03449	6.42E-08
3	120.90339	2.00E-06	104.24770	1.49E-06	74.63888	7.54E-07	61.69721	4.98E-07
4	199.85945	5.48E-06	178.26973	4.36E-06	138.79131	2.64E-06	120.90192	2.00E-06
5	298.55554	1.22E-05	272.03097	1.01E-05	222.68295	6.80E-06	199.85953	5.48E-06
6	416.99079	2.38E-05	385.53142	2.04E-05	326.31380	1.46E-05	298.55553	1.22E-05
7	555.16525	4.23E-05	518.77108	3.69E-05	449.68385	2.77E-05	416.99079	2.38E-05
8	713.07892	6.97E-05	671.74995	6.18E-05	592.79311	4.82E-05	555.16525	4.22E-05
9	890.73180	1.09E-04	844.46803	9.77E-05	755.64159	7.83E-05	713.07892	6.97E-05
10	1088.12389	1.62E-04	1036.92531	1.47E-04	938.22927	1.21E-04	890.73180	1.09E-04

Tabla A.16: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga circular de aluminio.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.31378	1.25E-06	15.37983	8.77E-07	5.58959	5.45E-07	3.51247	1.01E-06
2	61.06537	3.05E-06	49.50610	2.56E-06	30.06494	1.66E-06	21.88103	1.24E-06
3	118.38843	4.84E-06	102.18314	4.44E-06	73.59222	3.54E-06	60.68754	3.05E-06
4	192.80737	5.49E-06	172.21256	5.49E-06	135.11685	5.15E-06	117.31834	4.85E-06
5	282.79060	3.53E-06	258.09414	4.33E-06	213.27423	5.28E-06	190.64546	5.61E-06
6	386.61971	2.84E-06	358.14051	7.48E-07	306.45644	2.40E-06	279.07134	3.97E-06
7	502.51553	1.58E-05	470.58588	1.18E-05	412.92404	5.38E-06	380.89126	1.74E-06
8	628.72830	3.77E-05	593.67982	3.11E-05	530.90845	2.02E-05	494.37512	1.35E-05
9	763.60697	7.14E-05	725.75952	6.13E-05	658.69546	4.47E-05	617.84930	3.35E-05
10	905.64495	1.20E-04	865.29884	1.06E-04	794.68588	8.15E-05	749.75362	6.44E-05

Tabla A.17: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga circular de aluminio.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.21602	2.51E-05	15.31673	1.74E-05	5.58342	6.80E-06	3.51776	1.83E-04
2	60.09463	6.61E-05	48.77160	5.41E-05	29.80339	3.35E-05	21.86698	2.92E-05
3	114.53741	1.21E-04	99.01098	1.06E-04	71.94778	7.85E-05	60.12380	6.67E-05
4	182.58435	1.83E-04	163.39166	1.66E-04	129.81276	1.35E-04	114.53490	1.21E-04
5	261.36271	2.46E-04	239.04633	2.29E-04	199.98635	1.98E-04	182.58461	1.83E-04
6	348.18576	3.03E-04	323.26106	2.88E-04	280.24018	2.59E-04	261.36267	2.46E-04
7	440.77501	3.50E-04	413.69751	3.38E-04	367.83005	3.14E-04	348.18576	3.03E-04
8	537.32000	3.83E-04	508.47393	3.74E-04	460.64297	3.58E-04	440.77501	3.50E-04
9	636.45133	3.98E-04	606.15066	3.95E-04	557.02402	3.87E-04	537.32000	3.83E-04
10	737.17129	3.91E-04	705.66757	3.95E-04	655.73264	3.97E-04	636.45133	3.98E-04

Tabla A.18: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga circular de aluminio.

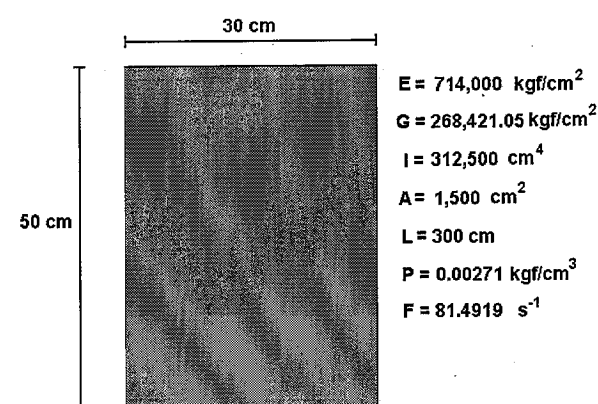


Figura A.7: Sección transversal de una viga de aluminio rectangular.

Las constantes y dimensiones físicas de la viga fueron explicadas en el apartado A.1.1. Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio del Método Asintótico al usar un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando los modelos de Euler-Bernoulli, Rayleigh y el efecto de Cortante se muestran respectivamente en las tres Tablas A.19, A.20 y A.21.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.37329	1.15E-07	15.41821	3.25E-07	5.59332	3.49E-06	3.51602	9.71E-06
2	61.67282	4.96E-07	49.96486	2.96E-07	30.22585	1.10E-08	22.03449	1.75E-07
3	120.90339	2.00E-06	104.24770	1.48E-06	74.63888	7.46E-07	61.69721	4.91E-07
4	199.85945	5.48E-06	178.26973	4.36E-06	138.79131	2.64E-06	120.90192	2.00E-06
5	298.55554	1.22E-05	272.03097	1.01E-05	222.68295	6.80E-06	199.85953	5.47E-06
6	416.99079	2.38E-05	385.53142	2.04E-05	326.31380	1.46E-05	298.55553	1.22E-05
7	555.16525	4.23E-05	518.77108	3.69E-05	449.68385	2.77E-05	416.99079	2.38E-05
8	713.07892	6.97E-05	671.74995	6.18E-05	592.79311	4.82E-05	555.16525	4.22E-05
9	890.73180	1.09E-04	844.46803	9.77E-05	755.64159	7.83E-05	713.07892	6.97E-05
10	1088.12389	1.62E-04	1036.92531	1.47E-04	938.22927	1.21E-04	890.73180	1.09E-04

Tabla A.19: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga rectangular de aluminio.

Núm. Frec.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.06115	1.59E-05	15.21669	1.10E-05	5.57351	3.86E-06	3.49724	1.85E-06
2	58.62221	4.01E-05	47.65428	3.31E-05	29.39604	2.09E-05	21.25000	1.53E-05
3	109.05242	6.92E-05	94.47024	6.12E-05	69.51631	4.67E-05	56.82699	3.90E-05
4	169.06981	9.75E-05	151.65822	8.99E-05	122.00913	7.58E-05	104.84232	6.71E-05
5	235.21602	1.20E-04	215.64344	1.14E-04	182.99224	1.03E-04	161.85457	9.48E-05
6	304.91980	1.35E-04	283.71649	1.31E-04	249.30278	1.24E-04	224.82907	1.18E-04
7	376.47229	1.38E-04	354.03155	1.38E-04	318.68012	1.36E-04	291.56409	1.34E-04
8	448.81430	1.28E-04	425.41940	1.32E-04	389.64397	1.37E-04	360.53536	1.40E-04
9	521.32563	1.02E-04	497.17845	1.12E-04	461.28304	1.24E-04	430.72849	1.34E-04
10	593.66268	5.83E-05	568.90774	7.50E-05	533.06361	9.59E-05	501.48942	1.13E-04

Tabla A.20: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga rectangular de aluminio.

El significado de los encabezados para las tablas anteriores puede consultarse en el apartado A.1.1 de este apéndice.

A.2.4 Sección transversal cuadrada

La sección transversal de viga que consideramos se muestra en la Figura A.8.

Las constantes y dimensiones físicas de la viga fueron explicadas en el apartado A.1.1.

Las frecuencias normalizadas obtenidas por medio del Método Asintótico al usar un criterio de paro de $\epsilon = 10^{-10}$ y considerando los modelos de Euler-Bernoulli, Rayleigh y el efecto de Cortante se muestran respectivamente en las tres Tablas A.22, A.23 y A.24.

El significado de los encabezados para las tablas anteriores puede consultarse en el apartado A.1.1 de este apéndice.

Núm.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	21.56982	7.46E-06	14.89857	5.27E-06	5.54107	1.93E-06	3.52537	9.74E-04
2	54.41112	1.67E-05	44.43719	1.41E-05	28.15693	9.51E-06	21.17568	2.23E-05
3	95.29467	2.45E-05	82.96294	2.25E-05	62.93633	1.86E-05	54.46632	1.22E-05
4	139.38064	2.83E-05	125.59972	2.76E-05	103.98049	2.56E-05	95.28242	2.31E-05
5	184.37489	2.65E-05	169.65960	2.77E-05	147.55213	2.84E-05	139.38491	2.77E-05
6	229.27247	1.78E-05	213.92657	2.16E-05	191.80795	2.55E-05	184.37280	2.63E-05
7	273.73150	3.76E-07	257.92666	7.55E-06	235.97376	1.56E-05	229.27375	1.76E-05
8	317.67099	2.78E-05	301.51369	1.62E-05	279.77441	2.96E-06	273.73058	2.83E-07
9	361.11720	6.92E-05	344.67462	5.20E-05	323.14577	3.24E-05	317.67173	2.79E-05
10	404.12562	1.27E-04	387.44505	1.02E-04	366.10567	7.52E-05	361.11656	6.92E-05

Tabla A.21: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga rectangular de aluminio.

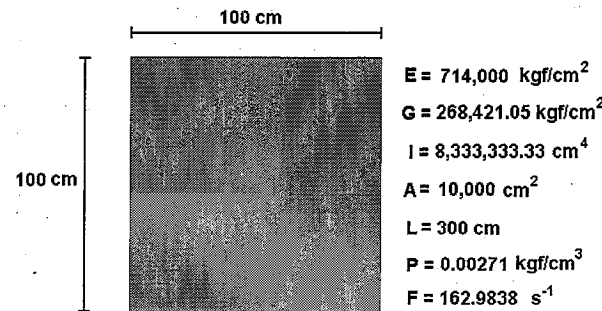


Figura A.8: Sección transversal de una viga de aluminio cuadrada.

Núm.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	22.37329	2.82E-07	15.41821	6.80E-07	5.59332	3.19E-06	3.51602	6.00E-06
2	61.67282	4.88E-07	49.96486	2.91E-07	30.22585	8.84E-09	22.03449	1.71E-07
3	120.90339	1.99E-06	104.24770	1.48E-06	74.63888	7.45E-07	61.69721	4.96E-07
4	199.85945	5.47E-06	178.26973	4.35E-06	138.79131	2.63E-06	120.90192	2.00E-06
5	298.55554	1.22E-05	272.03097	1.01E-05	222.68295	6.80E-06	199.85953	5.47E-06
6	416.99079	2.38E-05	385.53142	2.04E-05	326.31380	1.46E-05	298.55553	1.22E-05
7	555.16525	4.23E-05	518.77108	3.69E-05	449.68385	2.77E-05	416.99079	2.38E-05
8	713.07892	6.97E-05	671.74995	6.18E-05	592.79311	4.82E-05	555.16525	4.22E-05
9	890.73180	1.09E-04	844.46803	9.77E-05	755.64159	7.83E-05	713.07892	6.97E-05
10	1088.12389	1.62E-04	1036.92531	1.47E-04	938.22927	1.21E-04	890.73180	1.09E-04

Tabla A.22: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Euler-Bernoulli para una viga cuadrada de aluminio.

Núm.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	21.19562	3.92E-05	14.65554	2.79E-05	5.51529	1.08E-05	3.44251	6.40E-06
2	51.59430	8.35E-05	42.26738	7.12E-05	27.26307	4.91E-05	19.31314	3.60E-05
3	87.33686	1.22E-04	76.22974	1.11E-04	58.80387	9.23E-05	47.23900	7.79E-05
4	124.27723	1.53E-04	112.20319	1.43E-04	94.11778	1.28E-04	79.90055	1.15E-04
5	161.09717	1.79E-04	148.41509	1.70E-04	130.33093	1.57E-04	114.67699	1.45E-04
6	197.38756	2.05E-04	184.30066	1.95E-04	166.41156	1.82E-04	150.04497	1.71E-04
7	233.13394	2.34E-04	219.74126	2.23E-04	202.07662	2.08E-04	185.39942	1.95E-04
8	268.39189	2.72E-04	254.76139	2.56E-04	237.30033	2.38E-04	220.50194	2.23E-04
9	303.25179	3.20E-04	289.42193	3.00E-04	272.13257	2.77E-04	255.30602	2.56E-04
10	337.78184	3.84E-04	323.78523	3.56E-04	306.63713	3.26E-04	289.82212	3.00E-04

Tabla A.23: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Rayleigh para una viga cuadrada de aluminio.

Núm.	E-E		E-S		E-G		E-L	
	MA	Error	MA	Error	MA	Error	MA	Error
1	19.58809	2.86E-04	13.60275	2.13E-04	5.39245	9.33E-05	3.55430	5.75E-03
2	42.09529	4.74E-04	34.84500	4.25E-04	23.82358	3.30E-04	19.01901	4.39E-04
3	65.32579	5.82E-04	57.31778	5.51E-04	46.09347	4.98E-04	42.30733	4.90E-04
4	87.67960	6.43E-04	79.41722	6.23E-04	68.43244	5.92E-04	65.18720	5.80E-04
5	109.55146	6.85E-04	101.03069	6.70E-04	90.27867	6.48E-04	87.79740	6.40E-04
6	130.90999	7.19E-04	122.26758	7.05E-04	111.68898	6.88E-04	109.43874	6.82E-04
7	152.03009	7.55E-04	143.23321	7.40E-04	132.77893	7.22E-04	131.02414	7.18E-04
8	172.87953	7.96E-04	164.00357	7.77E-04	153.63910	7.58E-04	151.91150	7.54E-04
9	193.61536	8.48E-04	184.63087	8.24E-04	174.33257	7.99E-04	173.00451	7.96E-04
10	214.19172	9.13E-04	205.15114	8.82E-04	194.90262	8.51E-04	193.48308	8.46E-04

Tabla A.24: Frecuencias normalizadas obtenidas por medio del MA junto con los errores relativos respecto al MEF bajo el modelo Cortante para una viga cuadrada de aluminio.

Bibliografía

- [1] Abel Castro Figueroa. Curso Básico de Ecuaciones En Derivadas Parciales. Addison-Wesley Iberoamericana, (1997).
- [2] Richard Haberman. Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems. Prentice Hall, (1987).
- [3] C.H. Edwards, David E. Penney. Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems. Prentice Hall, (1993).
- [4] Murray R. Spiegel. Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. Prentice Hall, (1994).
- [5] Eugenio Oñate. Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis estático lineal. CIMNE, (1992).
- [6] Raymond L. Bisplinghoff, James W. Mar, Theodore H. H. Pian. Statics Of Deformable Solids. Dover Publications Inc., (1990).
- [7] Peter Hunter, Andrew Pullan. FEM/BEM Notes. The University of Auckland, New Zealand. <http://www1.esc.auckland.ac.nz/Academic/Texts/fembemnotes.pdf>, (2002).
- [8] Tirupathi R. Chandrupatla, Ashok D. Belegundu. Introduction to Finite Elements in Engineering. Prentice Hall, (1997).
- [9] Beresford N. Parlett. The Symmetric Eigenvalue Problem. SIAM, (1997).
- [10] G. Chen, M.P. Coleman. Improving Low Order Eigenfrequency Estimates Derived From The Wave Propagation Method An Euler-Bernoulli Beam. Journal of Sound and Vibration; 204(4); 696-704. (1997).
- [11] Alex H. Barbat, Juan Miquel Canet. Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas. Cálculo por ordenador. CIMNE, (1994).
- [12] S. Botello, E. Oñate CALSEF 2.1. Programa para Cálculo de Sólidos y Estructuras por el Método de los Elementos Finitos', CIMNE 83, (1996).
- [13] Lee A. Segel, G.H. Handelman. Mathematics Applied to Continuum Mechanics with Additional Material on Elasticity. Dover Publications Inc., (1987).
- [14] Ferdinand L. Singer. Resistencia de Materiales. Editorial Harla, (1971).
- [15] Biswa Nath Datta. Numerical Linear Algebra and Applications. Brooks/Cole Publishing Company, (1995).

- [16] George R. Buchanan. Finite Element Analysis. McGraw Hill, (1995).
- [17] O.C. Zienkiewicks, R.L. Taylor. El Método de los Elementos Finitos, Cuarta Edición. Volumen 2: Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y no Linealidad. McGraw Hill, (1995).
- [18] J.D. Achenbach. Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland; Amsterdam. (1993).
- [19] M. A. Moreles, S. Botello, R. Salinas. Computation of eigenfrequencies for elastic beams, a comparative approach. Internal Report 25.04.2003, I-03-09, CC/CIMAT. (2003)
- [20] D. L. Russell. Mathematical Models for the elastic beam and their control-theoretic implications, in Semigroups, Theory and Applications, Vol. II, H. Brezis, M.G. Crandall, and F. Kappel, eds., Longman, New York, (1986), 177-216.
- [21] R.W. Traill-Nash, A.R. Collar. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams, Quart. Journ. Mech. and Applied MATH., VolVI, Pt.2 (1953).
- [22] Gilbert Strang, George J. Fix. An analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, (1973).
- [23] Alan J. Davies. The Finite Element Method: A First Approach. Clarendon Press, (1980).
- [24] Young W. Kwon, Hyochoong Bang. The Finite Element Method using Matlab. CRC Press (1997).
- [25] B. Geist, J.R. McLaughlin: Asymptotic formulas for the eigenvalues of the Timoshenko beam, J. Math. Anal. Appl. 253 (2001), no. 2, 341-380.
- [26] N.G. Stephen, Considerations on second order beam theories, Int. J. Solid Structures, Vol17; pp. 325-333. (1981)
- [27] L.E Malvern, Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs New jersey, (1969)
- [28] y.C. Fung, Foundations of Solid Mechanics, Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs New jersey, (1965)
- [29] K.J. Bathe and E.L. Wilson, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs New jersey, (1977)
- [30] Hrenikoff A., Solution of problems in elasticity by the frame work method. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME 8: 169-175 (1941).
- [31] Courant R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bulletin of the American Mathematical Society 49: 1-23 (1943).
- [32] Turner M. J., R.W. Clough, H.C. Martin and L.J. Topp, Stiffness and deflection analysis of complex structures. Journal of Aeronautical Science 23(9): 805-824 (1956).
- [33] Clough R. W., The finite element method in plane stress analysis. Proceedings American Society of Civil Engineers, 2d Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, Pennsylvania, 23: 345-378 (1960).

- [34] Argyris J. H., Energy theorems and structural analysis. Aircraft Engineering, 26: Oct.-Nov.,(1954); 27: Feb.-May., (1955).
- [35] Zienkiewicz O. C., and Y.K. Cheung, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. (London: McGraw-Hill, 1967).
- [36] Oden J. T., Finite Elements of Nonlinear Continua. (New York: McGraw-Hill, 1972).

**CENTRO DE INVESTIGACION
EN MATEMATICAS, A.C.**

CONTROL DE PRESTAMO

BIBLIOTECA

019020
TE119 EJ.3
SALINAS GUTIERREZ, ROGELI
CALCULO DE FRECUENCIAS NA

FECHA	NOMBRE DEL USUARIO

TE119

Bib. CIMAT
Ej.3



019020