CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

CIMAT

# Convexidad en espacios de Banach y permanencia bajo $\psi$-sumas directas

TESIS

que para obtener el grado de Doctor en Ciencias
con Orientación en Matemáticas Básicas

PRESENTA

**Omar Muñiz Pérez**

CODIRECTORES DE TESIS

**M.C. Helga Fetter Nathansky**
**Dra. Berta Gamboa de Buen**

Guanajuato, Gto., 24 junio de 2011

# Agradecimientos

*A mis padres Rosa María y José Nicolás, que por medio de ellos Dios me trajo al mundo, les agradezco infinitamente por brindarme todo su amor y su apoyo incondicional. A mi madre por tenerme esa confianza siempre tan fiel, por su benevolencia y por creer siempre en mí. A mi padre por infundir en mí disciplina y amor al trabajo, así como valores como la sencillez, gratitud y comedimiento.*

*A mis hermanos Joel y Brenda, por todo su amor, cariño y afecto. Porque juntos crecimos, reimos, lloramos, deseamos, toleramos, suplicamos a Dios y forjamos nuestro carácter. Porque aprendimos el uno del otro.*

*A mis padres, a mis hermanos y a mi cuñada Mayra, por comprender que tuve que irme lejos de casa para poder crecer académica y personalmente, sin embargo, siempre los he tenido presentes en mi mente y en mi corazón.*

*A Noemi por más de seis años compartidos. Por su apoyo, su comprensión y su indulgencia hacia mis defectos y manías. Por la relación tan maravillosa que tuvimos y que no en vano fecundó en aprendizaje, madurez y fortaleza.*

*A Lila y a Chahuixtle por su fidelidad, por su compañía y por todo su amor. Además por la paciencia que me han tenido, sobre todo en los momentos donde me dejé hundir en el mar de trabajo.*

*A mis amigos y familiares por darme el apoyo necesario y por estar siempre conmigo.*

*A mis profesores de CIMAT por toda la afluencia de conocimiento que recibí de ellos, en especial a la M.C. Helga Fetter Nathansky, a la Dra. Berta Gamboa de Buen y al Dr. José Ángel Canavati Ayub.*

*A mis codirectoras M.C. Helga Fetter Nathansky y Dra. Berta Gamboa de Buen, por darme su confianza al aceptar dirigir mi tesis, por su gran labor como asesoras y por sus comentarios, ideas y sugerencias que fueron fundamentales para* *el desarrollo de la tesis. Aprendí mucho de ambas y me enriqueció trabajar bajo la dirección de las dos. Por un lado el carácter analítico de la Maestra Helga y por otro la perspectiva geométrica de la Doctora Berta se complementaron para ayudarme a desarrollar mi trabajo de mejor manera. Asimismo les agradezco por preocuparse no sólo por mi lado académico sino también por mi lado personal.*

*A mis sinodales, Dr. Enrique Llorens Fuster, Dr. Fernando Galaz Fontes, Dr. Adolfo Sánchez Valenzuela y Dr. Carlos Bosch Giral, por la revisión de mi tesis y por sus valiosos comentarios y aportaciones.*

*Al Dr. Enrique Llorens Fuster, que además de revisar mi tesis me dio varias cuestiones para pensar y así complementar mi trabajo. Además de que la serie de pláticas impartidas por él en CIMAT me dio un panorama más completo de la situación y problemática que hay en nuestro tema de investigación.*

*A CIMAT por abrirme sus puertas y permitirme formarme en su institución.*

*A todo el personal de CIMAT por la ayuda y comedimiento que me brindaron.*

*A CONACyT por otorgarme una beca, sin su apoyo económico habría sido prácticamente imposible mantenerme en Guanajuato y estudiar en CIMAT.*

*A DIOS, que es el dueño y centro de mi vida y porque a él debo todo lo que soy.*

# Índice general

# Introducción

La geometría de los espacios de Banach estudia las propiedades geométricas del espacio derivadas de su norma, las conexiones entre las distintas propiedades, su comportamiento respecto al producto, cociente, dualidad, etc., su relación con la reflexividad del espacio y sus propiedades de estabilidad. Algunas propiedades que estudia se pueden conservar bajo isomorfismos y otras sólo bajo isometrías, pueden ser locales o globales, uniformes o no uniformes. Aunque entre los espacios de Banach los espacios de Hilbert son los que poseen las propiedades geométricas más sencillas, existen muchas otras clases de espacios que tienen propiedades geométricas muy importantes.

La comprensión de la geometría de los espacios de Banach ha sido esencial para el desarrollo de la teoría de punto fijo para funciones no expansivas (FPP). Muchos resultados en esta teoría están basados en la geometría de la bola unitaria, es decir, en las características y propiedades de la norma del espacio.

Como es bien sabido las bolas de los espacios normados son conjuntos convexos. En los espacios de Banach existen nociones de convexidad que van más allá de la noción usual, por ejemplo, los conceptos de convexidad estricta y uniforme, suavidad uniforme, etc., determinados por la norma del espacio. Estos son muy importantes en el estudio de la geometría de los espacios de Banach, pero no son los únicos. De hecho existen muchos otros conceptos de convexidad muy útiles en la geometría de los espacios de Banach. En términos vagos, estas nociones sugieren entre otras cosas qué "tan redonda", qué "tan suave", qué "tan convexa", etc., es la bola unitaria de un espacio de Banach.

Iniciaremos este trabajo mencionando en el capítulo 1 los conceptos y resultados básicos que necesitaremos para el desarrollo de los capítulos posteriores.

El concepto de P-convexidad fue introducido en 1970 por Kottman en [35]. Él probó que todo espacio P-convexo es reflexivo y que la P-convexidad se sigue de la convexidad uniforme, así como también de la suavidad uniforme. En las secciones 2.4 y 2.5 estudiaremos condiciones que garantizan la P-convexidad de un espacio de Banach y generalizaremos el resultado de Kottman sobre convexidad uniforme de dos formas diferentes: todo U-espacio y todo espacio de Banach $X$ que satisface $\delta_X(1) > 0$ es P(3)-convexo.

En la sección 2.3 caracterizaremos a los espacios P-convexos de dimensión dos. En concreto, veremos que los espacios normados bidimensionales P(3)-convexos son exactamente aquellos cuyas bolas unitarias no son hexágonos o cuadrados. También probaremos que los espacios normados bidimensionales P(4)-convexos son exactamente aquellos cuyas bolas unitarias no son cuadrados, y que esta propiedad también equivale a que el espacio sea uniformemente no-cuadrado. Como consecuencia de este último resultado obtendremos que todo espacio normado bidimensional es P(5)-convexo. Los resultados de esta sección nos servirán para encontrar ejemplos sencillos relacionados con algunos resultados obtenidos en este trabajo.

Existen muchas propiedades y condiciones que garantizan la FPP. Entre éstas se encuentran las siguientes: Brodskii y Milman introdujeron en 1948 la estructura normal de un espacio de Banach [6] y Kirk probó en 1965 [34] que cualquier espacio de Banach con estructura normal tiene la propiedad débil del punto fijo para funciones no expansivas (WFPP). En 2006 en [23] García Falset, Llorens-Fuster y Mazcuñán Navarro definieron el coeficiente $MW(X)$ y probaron que la condición $MW(X) > 1$ garantiza la WFPP de $X$. La propiedad $(S_m)$ fue introducida por Wiśnicki en [66]. Él probó que si $X$ es un espacio superreflexivo y si existe un ultrafiltro libre $\mathfrak{U}$ en $\mathbb{N}$ tal que la ultrapotencia $\{X\}_{\mathfrak{U}}$ tiene la propiedad $(S_m)$ entonces $X$ tiene la FPP. Él también definió en [66] otra propiedad más fuerte que la propiedad $(S_m)$ llamada propiedad $(S)$. Huff definió la propiedad de Kadec-Klee uniforme [27] que es la versión uniforme de la propiedad de Kadec-Klee. Van Dust y Sims demostraron que cualquier espacio de Banach con la propiedad de Kadec-Klee uniforme tiene la WFPP [65].

En 2008 Saejung probó en [56] que si un espacio de Banach $X$ es P-convexo entonces $X^*$ tiene estructura normal uniforme y en particular $X^*$ tiene la FPP. En la sección 2.6 mostraremos algunos ejemplos de espacios de Banach que no poseen ciertas propiedades que garantizan la FPP y sin embargo son P-convexos. En concreto, mostraremos que estructura normal, la condición $MW(X) > 1$, la propiedad $(S)$ y la propiedad de Kadec-Klee no se siguen de la P-convexidad. Al parecer aún no se sabe si la P-convexidad implica la FPP.

Uno de los puntos que se investigan en el trabajo de tesis es la relación que existe entre algunos de los conceptos de convexidad y de suavidad en espacios de Banach. A nosotros nos interesa estudiar los espacios *P-convexos*, los *O-convexos*, los *U-espacios* y los espacios con las propiedades $EIS$ y $SEIS$, entre otros. Este punto será estudiado en la sección 2.7.

Muchas de las nociones de convexidad tienen tanto una versión uniforme como una no uniforme, por ejemplo, la convexidad estricta es la versión no uniforme de la convexidad uniforme, la suavidad es la versión no uniforme de la suavidad uniforme, un u-espacio es la versión no uniforme de un U-espacio. En esta tesis también definiremos el concepto de p-convexidad, que es la versión no uniforme de P-convexidad y obtendremos algunos resultados interesantes, todo esto en el capítulo 3. En ese mismo capítulo estudiaremos la noción dual de P-convexidad y ofreceremos una definición alternativa a la ya existente. A esta noción se le llama F-convexidad. Demostraremos además que la F-convexidad implica una propiedad geométrica para los espacios de Banach, llamada propiedad (S), que sirve para dar condiciones suficientes para que un espacio tenga la propiedad de punto fijo para funciones no expansivas.

Un problema importante dentro de la geometría de espacios de Banach es la permanencia de las propiedades geométricas bajo sumas directas. En los últimos 40 años han sido publicados muchos trabajos que estudian el comportamiento bajo sumas directas de ciertas propiedades. En 2002, Takahashi, Kato y Saito [61] introdujeron la $\psi$-suma directa de dos espacios de Banach, que es uno de los temas principales de esta tesis. Este tipo de suma es una generalización de la $l_p$-suma directa. Entre los resultados que se tienen acerca de la permanencia de las condiciones de convexidad bajo $\psi$-sumas directas están los siguientes: en 2003 [57] Saito y Kato mostraron que la $\psi$-suma directa de dos espacios de Banach es uniformemente convexa si y sólo si cada uno de los espacios es uniformemente convexo y $\psi$ es estrictamente convexa y, en 2005 [47] Mitani, Oshiro y Saito probaron que la $\psi$-suma directa de dos espacios de Banach es uniformemente suave si y sólo si cada uno de los espacios es uniformemente suave y $\psi$ es suave.

En el capítulo 4 daremos condiciones sobre las funciones $\psi$ de manera que la P-convexidad, la O-convexidad, la propiedad SEIS y la propiedad EIS se preserven bajo $\psi$-sumas. En la sección 4.2 estudiaremos el comportamiento de la $\psi$-suma directa de dos espacios de Banach O-convexos, en la sección 4.3 haremos lo correspondiente para la $\psi$-suma de dos espacios P-convexos y en la sección 4.4 lo haremos para espacios que tienen las propiedades SEIS y EIS.

# CAPÍTULO 1

# Preliminares

Iniciaremos dando los conceptos y resultados básicos que necesitaremos para el desarrollo de este trabajo.

**Notación 1.0.1.** Cuando no haya confusión con relación a la norma, un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se denotará simplemente como $X$. La bola unitaria $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ y la esfera unitaria $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ de $X$ se denotarán, respectivamente, mediante $B_X$ y $S_X$. La bola cerrada con centro en $x \in X$ y radio $r > 0$ se denotará por $B(x, r)$. El espacio dual topológico de $X$ se denotará por $X^*$. Para cada $x, y \in X$ definimos los conjuntos $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, $(x, y) = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 < \lambda < 1\}$, $[x, y) = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 < \lambda \leq 1\}$ y $(x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda < 1\}$. Nótese que para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que $[x, y] = [y, x]$, $(x, y) = (y, x)$ y $[x, y) = (y, x]$. En este trabajo los espacios de Banach se consideran sobre el campo $\mathbb{R}$.

## 1.1. Nociones de convexidad y suavidad usuales

En los espacios de Banach existen nociones de convexidad que permiten determinar importantes propiedades geométricas del espacio. Una de las primeras nociones de convexidad que aparecieron, y también una de las más importantes, es la noción de *convexidad uniforme*.

**Definición 1.1.1.** *Un espacio de Banach $X$ es uniformemente convexo si para* *cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se tiene la implicación siguiente*

$$\forall\ x, y \in B_X : \parallel x - y \parallel \geq \varepsilon \ \Rightarrow \ \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

El concepto de convexidad uniforme fue dado por J. A. Clarkson en 1936 [10] cuando introdujo el concepto de módulo de convexidad.

**Definición 1.1.2.** *El módulo de convexidad de un espacio de Banach $X$ es la función $\delta_X : [0,2] \longrightarrow [0,1]$ definida por*

$$\delta_X(\varepsilon) = \text{ínf}\left\{1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in B_X,\ \parallel x - y \parallel \geq \varepsilon \right\}.$$

*El coeficiente de convexidad de un espacio de Banach $X$ es el número $\varepsilon_0(X)$ definido como*

$$\varepsilon_0(X) = \sup\big\{\varepsilon \in [0,2] : \delta_X(\varepsilon) = 0\big\}.$$

Así, podemos redefinir el concepto de espacio uniformemente convexo como aquel espacio $X$ que cumple $\delta_X(\varepsilon) > 0$ para cada $\varepsilon > 0$, o bien, que $\varepsilon_0(X) = 0$. El módulo de convexidad $\delta_X$ es continuo y estrictamente creciente en $[\varepsilon_0, 2]$ (véase [25] o [26]). Se puede probar que en las definiciones anteriores podemos sustituir a la bola unitaria por la esfera unitaria. D. P. Milman en 1938 [46] y B. S. Pettis en 1939 [52] demostraron de manera independiente que todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.

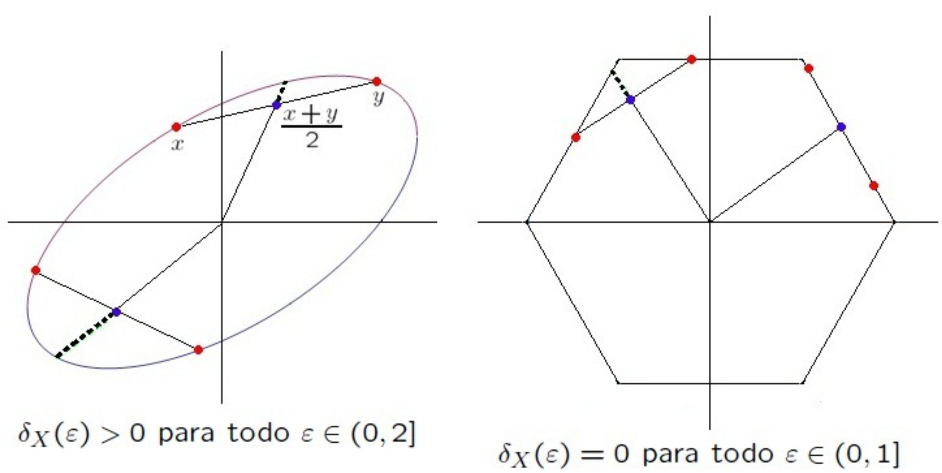


Figura. 1.1. El módulo de convexidad de dos espacios bidimensionales

Consideremos la primera bola unitaria de un espacio bidimensional $X$ (Figura 1.1) y fijemos $\varepsilon > 0$. Tomamos dos elementos $x, y \in S_X$ tales que $\|x - y\| \geq \varepsilon$ y consideremos el número $1 - \frac{1}{2}\|x + y\|$ que es la longitud del segmento punteado. Realizamos el mismo proceso con todos los pares de elementos en la esfera que distan al menos $\varepsilon$ y así obtenemos que el ínfimo de todas las longitudes de los segmentos punteados es $\delta_X(\varepsilon)$. En este caso se tiene que $\delta_X(\varepsilon) > 0$ para cada $0 < \varepsilon \leq 2$. ¿Qué pasa con la segunda bola unitaria? Tomando $0 < \varepsilon \leq 1$ y haciendo el mismo procedimiento nos encontramos con dos elementos $x, y \in S_X$ tales que $\|x - y\| \geq \varepsilon$ y $1 - \frac{1}{2}\|x + y\| = 0$. Por tanto, en el segundo caso se tiene que $\delta_X(\varepsilon) = 0$ para cada $0 < \varepsilon \leq 1$.

**Ejemplo 1.1.3.** *Usando la ley del paralelogramo es fácil probar que todo espacio de Hilbert $H$ es uniformemente convexo. De hecho,*

$$\delta_H(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{1/2}, \quad \forall\, \varepsilon \in [0, 2].$$

*Los espacios $L_p[0, 1]$ y $l_p$ también son uniformemente convexos para $1 < p < \infty$. Clarkson probó en 1936 que para $p \geq 2$ se cumple que*

$$\delta_{L_p}(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}, \quad \forall\, \varepsilon \in [0, 2].$$

El módulo de convexidad determina qué tan "convexa" o qué tan "redonda" es la bola unitaria de $X$ en el sentido de que cuanto más grande es $\delta_X(\varepsilon)$ tanto más "redonda" es la bola unitaria de $X$. Aunque cada espacio de Hilbert $H$ y cada espacio $L_p[0, 1]$ $(2 < p < \infty)$ son uniformemente convexos, la bola unitaria de $H$ es más "convexa" o más "redonda" que la bola de $L_p$ ya que $\delta_H(\varepsilon) > \delta_{L_p}(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0, 2)$. Por otro lado, pareciera que la bola unitaria de un espacio de Hilbert $H'$ con forma muy elíptica o muy aplastada es menos "convexa" que la bola unitaria de $H$ con forma poco elíptica o poco aplastada, pero no es así, al menos no en el sentido de este módulo .

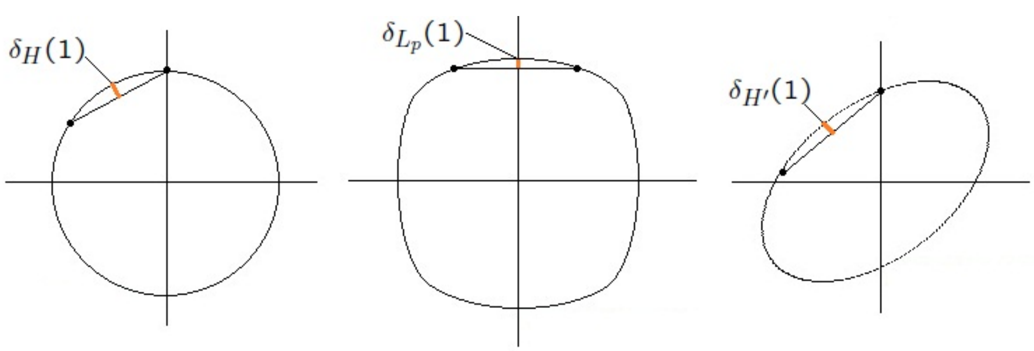


Figura 1.2. Las bolas unitarias de los espacios de Hilbert son las más "convexas"

El significado geométrico de $\varepsilon_0(X)$ es el supremo de todas las longitudes de los segmentos contenidos en $S_X$ o que están arbitrariamente cercanos a $S_X$. Este coeficiente determina qué tan "cuadrada" es la bola unitaria del espacio, en el sentido de que cuanto más grande sea $\varepsilon_0(X)$, tanto más "cuadrada" es la bola unitaria de $X$.

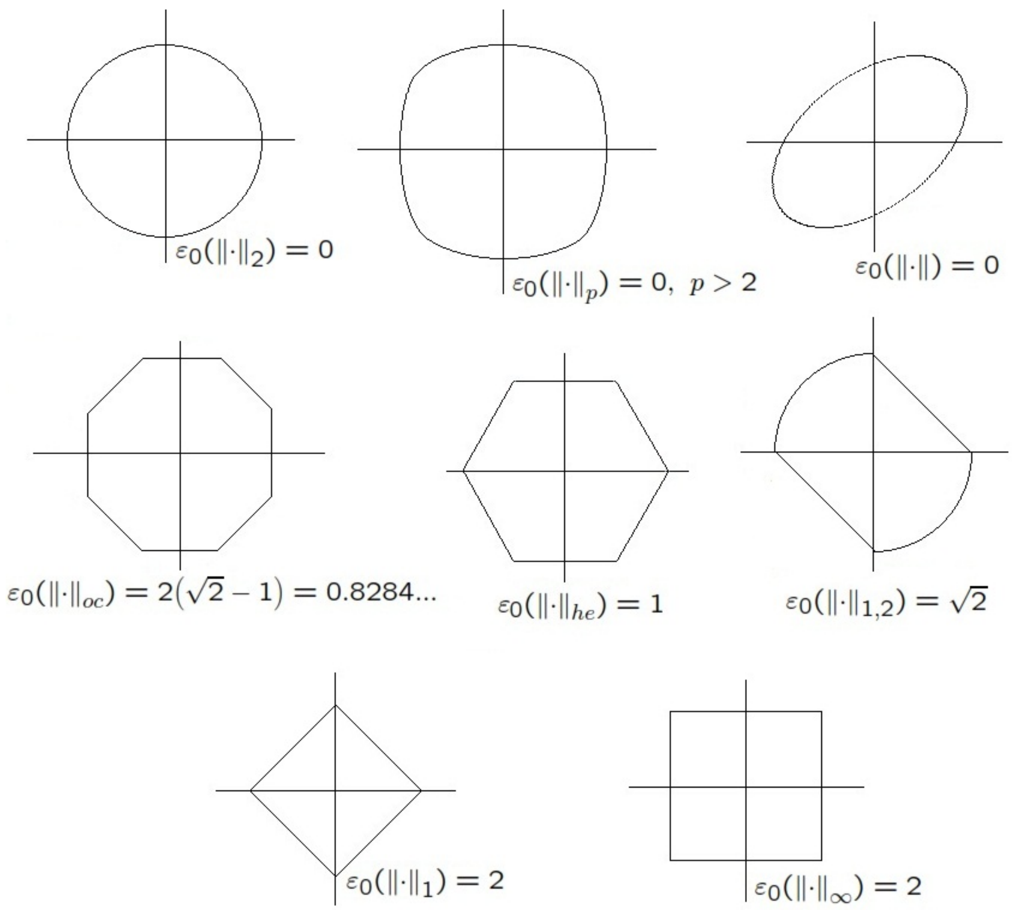


Figura 1.3. Coeficiente de convexidad de algunos espacios bidimensionales

En la figura anterior $\varepsilon_0(\|\cdot\|)$ denota el coeficiente de convexidad de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ y definimos $\|(x,y)\| = (x^2 - xy + y^2)^{1/2}$, $\|(x,y)\|_{oc} = \text{máx}\big\{\|(x,y)\|_\infty, \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}\|(x,y)\|_1\big\}$, $\|(x,y)\|_{he} = \text{máx}\big\{|x + \frac{1}{\sqrt{3}}y|, |x - \frac{1}{\sqrt{3}}y|, \frac{2}{\sqrt{3}}|y|\big\}$, $\|(x,y)\|_{1,2} = \|(x,y)\|_1$ si $xy \geq 0$ y $\|(x,y)\|_{1,2} = \|(x,y)\|_2$ si $xy \leq 0$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**Ejemplo 1.1.4.** *Defina para cada $\lambda \geq 1$ el espacio $X_\lambda = (l_2, \|\cdot\|_\lambda)$, donde $\|x\|_\lambda = \text{máx}\big\{\|x\|_\infty, \frac{1}{\lambda}\|x\|_2\big\}$. El coeficiente de convexidad de $X_\lambda$ es $\varepsilon_0(X_\lambda) = 2\sqrt{\lambda^2 - 1}$ para $\lambda \leq \sqrt{2}$ y $\varepsilon_0(X_\lambda) = 2$ para $\lambda \geq \sqrt{2}$ (véase [26]).*

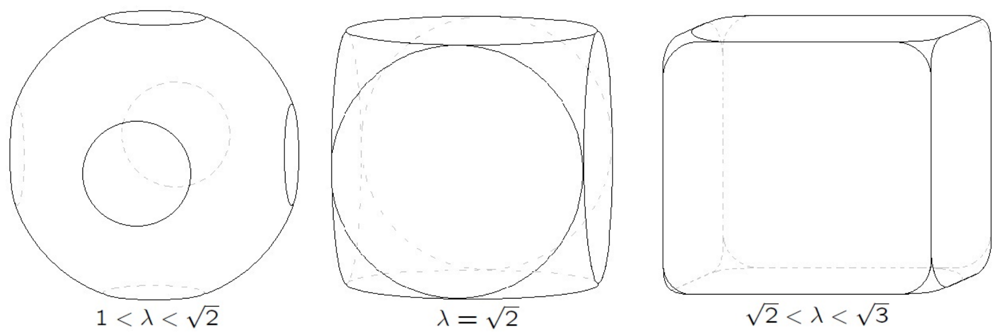


Figura 1.4. Bola unitaria del espacio $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\lambda)$

Aunque las propiedades más fáciles de manejar para muchos fines las poseen los espacios con coeficiente de convexidad cero o muy pequeño, también tiene una gran importancia el hecho de que la bola no sea del todo "cuadrada", es decir que $\varepsilon_0(X) < 2$. Este tipo de espacios fueron introducidos por James en [29].

**Definición 1.1.5.** *Decimos que un espacio de Banach $X$ es uniformemente no cuadrado si existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x, y \in S_X$ se cumpla la desigualdad*

$$\text{mín}\big\{\|x-y\|, \|x+y\|\big\} \leq 2 - \alpha.$$

Es fácil ver que $X$ es uniformemente no cuadrado si y sólo si $\varepsilon_0(X) < 2$. James probó que la clase de espacios uniformemente no cuadrados está contenida en una clase muy importante de espacios que a continuación definiremos.

**Definición 1.1.6.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach. Se dice que $Y$ es finitamente representable en $X$ si para cualquier subespacio finito dimensional $Y_0$ de $Y$ y cualquier $\lambda > 1$ existe un isomorfismo $T : Y_0 \longrightarrow X$ sobre su imagen tal que*

$$\lambda^{-1}\|y\| \leq \|Ty\| \leq \lambda\|y\|, \quad \forall y \in Y.$$

*Un espacio de Banach $X$ es superreflexivo si cualquier espacio de Banach $Y$ finitamente representable en $X$ es reflexivo.*

James probó en 1964 [29] el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.7.** *Todo espacio uniformemente no cuadrado es superreflexivo.*

Todo espacio normado de dimensión finita es superreflexivo . Por tanto el espacio $\big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty\big)$ es un ejemplo de espacio superreflexivo que no es uniformemente no cuadrado.

**Ejemplo 1.1.8.** *Los espacios $l_p$ y $L_p$, $1 < p < \infty$, son superreflexivos ya que son uniformemente convexos. Los espacios $l_1$ y $L_1$ no son superreflexivos ya que no son reflexivos. El espacio $c_0$ y, consecuentemente, $C[0,1]$ y $l_\infty$, no son superreflexivos ya que no son reflexivos.*

Claramente todo espacio superreflexivo es reflexivo. Sin embargo existen espacios reflexivos que no son superreflexivos. El más conocido es el siguiente, dado por M. M. Day en 1941 (véase [26]).

**Ejemplo 1.1.9.** *Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ defina $|x|_n^1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ y $|x|_n^\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Denotemos $l_n^1 = (\mathbb{R}^n, |\cdot|_n^1)$ y $l_n^\infty = (\mathbb{R}^n, |\cdot|_n^\infty)$ y definamos los siguientes espacios:*

$$D_1 = \left\{ x = \{x^n\}_{n=1}^\infty : x^n \in l_n^1,\ \|x\|_{D_1} = \left( \sum_{i=1}^\infty \left(|x^i|_i^1\right)^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

*y*

$$D_\infty = \left\{ x = \{x^n\}_{n=1}^\infty : x^n \in l_n^\infty,\ \|x\|_{D_\infty} = \left( \sum_{i=1}^\infty \left(|x^i|_i^\infty\right)^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

*$D_1$ y $D_\infty$ son espacios reflexivos y cada uno es el dual del otro. Sin embargo ninguno es superreflexivo.*

Enseguida mostraremos un teorema que involucra a los conceptos de convexidad uniforme, cuadratura uniforme y superreflexividad. La equivalencia $(a) \Leftrightarrow (c)$ fue probada por James en [30] y $(a) \Leftrightarrow (b)$ por Enflo en [18], ambas en 1972.

**Teorema 1.1.10.** *Para un espacio de Banach $X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*$(a)$ $X$ es superreflexivo.*

*$(b)$ $X$ admite una norma equivalente uniformemente no cuadrada.*

*$(c)$ $X$ admite una norma equivalente uniformemente convexa.*

En 1963 Lindenstrauss introdujo en [40] el módulo de suavidad:

**Definición 1.1.11.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Se define el módulo de suavidad de $X$ como la función $\rho_X : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ dada por*

$$\rho_X(t) = \sup\left\{ \frac{\| x + ty \| + \| x - ty \|}{2} - 1 \ :\ x, y \in B_X \right\},$$

*para cada $t \geq 0$. Decimos que $X$ es uniformemente suave si*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\rho_X(t)}{t} = 0.$$

En términos simples, el módulo de suavidad nos indica qué tan "suave" es la bola unitaria del espacio, en el sentido de que cuanto más pequeño es el límite anterior, tanto más "suave" es la bola unitaria. Para ver geométricamente la noción de suavidad uniforme necesitamos la siguiente definición.

**Definición 1.1.12.** *La norma de un espacio de Banach $X$ es uniformemente Fréchet diferenciable si el límite*

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} \tag{1.1}$$

*existe uniformemente para $x, y \in X$.*

En [14], cap. 2, podemos ver la prueba del siguiente teorema.

**Teorema 1.1.13.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Tenemos que $X$ es uniformemente suave si y sólo si la norma de $X$ es uniformemente Fréchet diferenciable.*

En la Figura 1.5 vemos que la norma $\|\cdot\|_\infty$ no es uniformemente Fréchet diferenciable ya que si $x=(-1,1)$ y $y=(0,1)$ entonces

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty\|_\infty-\|x\|_\infty}{t}=1 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0^-}\frac{\|x+ty\|_\infty-\|x\|_\infty}{t}=0.$$

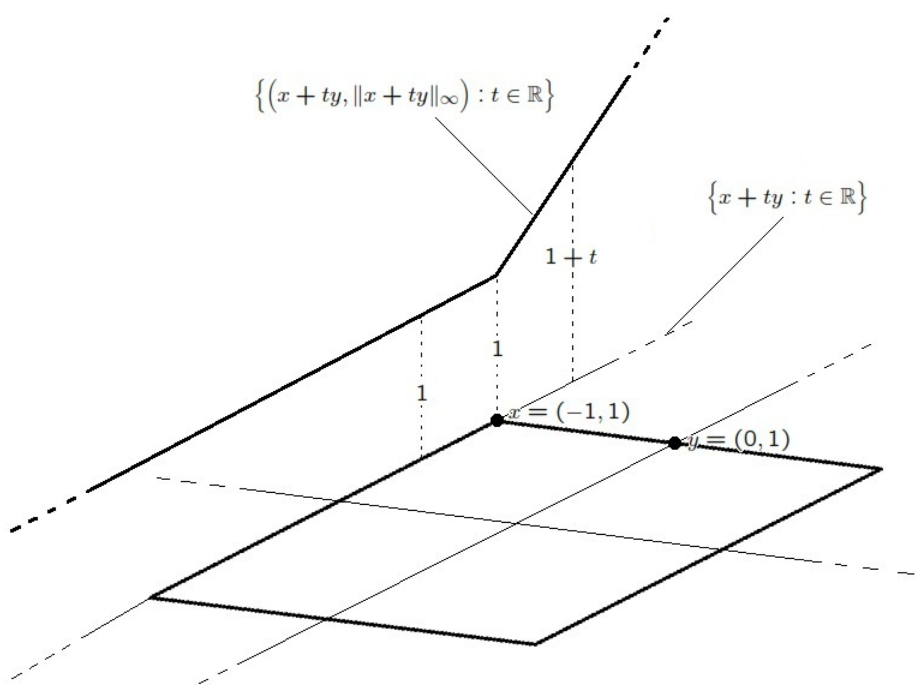


Figura 1.5. La norma $\|\cdot\|_\infty$ no es uniformemente Fréchet diferenciable

Por tanto, si la bola unitaria del espacio $X$ tiene un "pico" en $x \in S_X$ entonces tendremos que el límite (1.1) no existe para algún $y \in S_X$. En la Figura 1.6 vemos que la norma $\|\cdot\|_2$ es uniformemente Fréchet diferenciable y en este caso la esfera unitaria es "suave" o no tiene "picos".

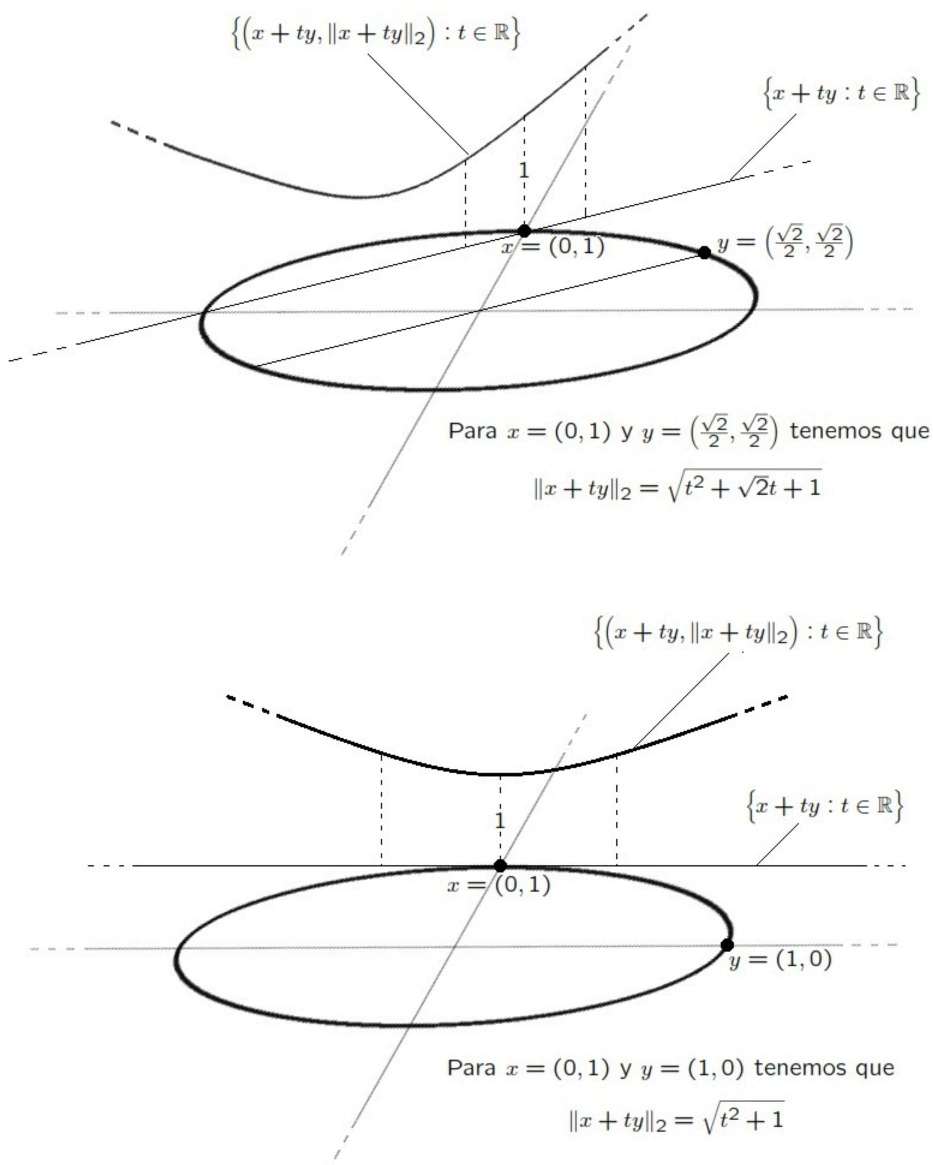


Figura 1.6. La norma $\|\cdot\|_2$ es uniformemente Fréchet diferenciable

La convexidad uniforme y la suavidad uniforme son conceptos duales, como lo muestra el siguiente teorema (véase [14], cap. 2):

**Teorema 1.1.14.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Entonces $X$ es uniformemente suave si y sólo si $X^*$ es uniformemente convexo. Asimismo, $X$ es uniformemente convexo si y sólo si $X^*$ es uniformemente suave.*

De los resultados anteriores se obtiene que los espacios de Hilbert son uniformemente suaves y que los espacios uniformemente suaves son reflexivos.

Desde la introducción de estas nociones de convexidad se han definido muchas otras también muy importantes, cada vez más generales, o bien independientes, permitiendo el desarrollo de la geometría de los espacios de Banach. En los capítulos siguientes definiremos diversas nociones de convexidad y de suavidad, tales como P-convexidad, O-convexidad, Q-convexidad, propiedad EIS, F-convexidad, etc., que serán objeto de estudio en esta tesis.

Enseguida definiremos otros conceptos geométricos que también necesitaremos en este trabajo.

**Definición 1.1.15.** *Un espacio de Banach es $X$ es estrictamente convexo si la siguiente implicación se satisface*

$$\forall\ x, y \in B_X :\ x \neq y\ \Rightarrow\ \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Podemos considerar a la convexidad uniforme como la versión uniforme de la convexidad estricta. Es claro que todo espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo. De hecho ambos conceptos coinciden en espacios de dimensión finita.

**Ejemplo 1.1.16.** *Para cada $\alpha > 0$, el espacio $(C[0,1], \|\cdot\|_\alpha)$ es estrictamente convexo pero no uniformemente convexo , donde $\|x\|_\alpha = \|x\|_\infty + \alpha\|x\|_2$ para cada $x \in C[0,1]$ (véase [25]).*

Aunque la referencia más antigua de la convexidad estricta aparece en el trabajo de Clarkson, M. G. Krein también lo definió de manera independiente.

Existen muchas caracterizaciones de la convexidad estricta. Dos de las más conocidas son las siguientes, la primera probada en [25] y en [26] y la segunda en [4].

**Teorema 1.1.17.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Se tiene que $X$ es estrictamente convexo si y sólo si $\delta_X(2) = 1$.*

**Teorema 1.1.18.** *Sea $X$ un espacio de Banach. $X$ es estrictamente convexo si y sólo si se cumple la siguiente implicación:*

$$x, y \in X \backslash \{0\},\ \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Longrightarrow x = \lambda y \ \textit{para algún}\ \lambda > 0.$$

**Definición 1.1.19.** *$X$ es suave si para cualquier $x \in S_X$ existe un único $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = 1$, esto es, para cada $x \in S_X$, $\nabla(x)$ consiste en un sólo punto, donde para cada $x \in X$*

$$\nabla(x) = \big\{ f \in S_{X^*} : \ f(x) = \| \, x \, \| \big\}.$$

En virtud del teorema de Hahn-Banach tenemos que $\nabla(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

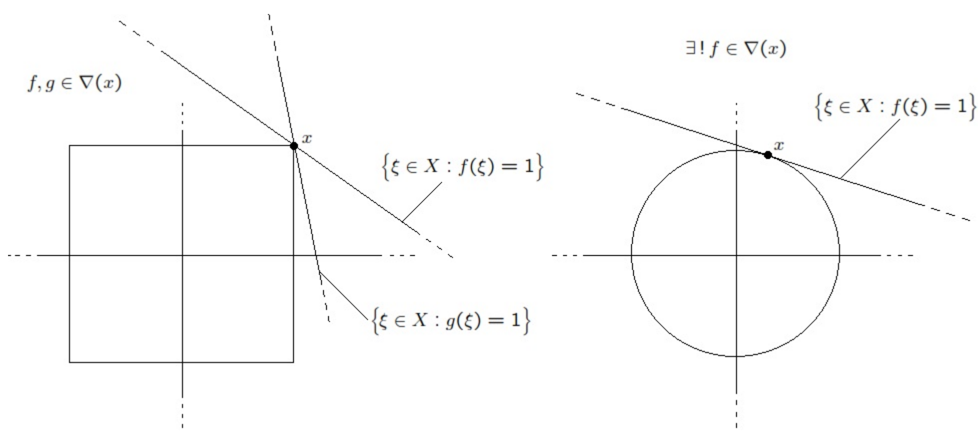


Figura 1.7. Un espacio que no es uniformemente suave y otro que sí lo es

No es difícil probar que $X$ es suave si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$, $x \neq 0$, el siguiente límite existe:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = \phi_x(y).$$

En este caso decimos que la norma es Gateaux diferenciable. Este límite define un funcional $\phi_x \in X^*$ que es llamado la derivada de Gateaux de la norma en $x$ y además $\phi_x \in \nabla(x)$ (véase [14], cap. 2).

Es sabido que todo espacio uniformemente suave es suave y, al igual que en el caso de la convexidad uniforme y estricta, ambos conceptos coinciden en espacios de dimensión finita. V. Klee mostró que los conceptos de convexidad estricta y suavidad son conceptos parcialmente duales, en el sentido de que si un espacio de Banach $X$ cumple que su dual $X^*$ es suave entonces $X$ es estrictamente convexo, y viceversa (véase [14], cap. 2).

El siguiente concepto fue introducido por J. Gao y K. S. Lau en 1978 [39].

**Definición 1.1.20.** *Un espacio de Banach $X$ es un $U$-espacio si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in S_X, \ f(x-y) \geq \varepsilon \ \ \textit{para algún } f \in \nabla(x) \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

J. Gao y K. S. Lau demostraron que la propiedad de ser un U-espacio es autodual y se sigue de la convexidad uniforme, así como también de la suavidad uniforme [20].

Un módulo de este tipo de convexidad fue introducido por Ji Gao en [21] y después estudiado por E. M. Mazcuñán-Navarro [43] y S. Saejung [55].

**Definición 1.1.21.** *El módulo de u-convexidad de un espacio de Banach $X$ es la función $u_X : [0,2] \longrightarrow [0,1]$ definida mediante*

$$u_X(\varepsilon) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_X,\ f(x-y) \geq \varepsilon, \quad \textit{para algún } f \in \nabla(x)\right\}.$$

*Es fácil ver que un espacio de Banach $X$ es U-espacio si y sólo si $u_X(\varepsilon) > 0$ para cada $\varepsilon > 0$. Obviamente $u_X(\varepsilon) \geq \delta_X(\varepsilon)$ para cada $0 \leq \varepsilon \leq 2$, y de aquí se sigue que todo espacio uniformemente convexo es U-espacio.*

Gao probó [21] que si un espacio de Banach satisface que $u_X(1) > 0$ entonces $X$ es uniformemente no cuadrado y, en particular, todo U-espacio es uniformemente no cuadrado.

**Definición 1.1.22.** *Sea $X$ un espacio de Banach. $X$ es un u-espacio si cumple la implicación siguiente*

$$x, y \in S_X,\ \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1 \Longrightarrow \nabla(x) = \nabla(y)$$

(véase [13]). Análogamente a los dos casos anteriores, todo U-espacio es u-espacio y ambos conceptos coinciden en espacios de dimensión finita.

## 1.2. Estructura normal y estructura normal uniforme

Ahora definamos un concepto dado en 1948 por Brodskii y Milman [6], llamado estructura normal.

**Definición 1.2.1.** *Sea $C$ un subconjunto acotado de un espacio de Banach $X$. Definimos el diámetro de $C$ como*

$$diam(C) = \sup\{\| x - y \| :\ x, y \in C\}.$$

*Para cada $x \in C$ definimos el radio de $C$ con respecto a $x$ mediante*

$$r_x(C) = \sup\{\| x - y \| :\ y \in C\}.$$

*Obviamente* $r_x(C) \leq \operatorname{diam}(C)$. *Decimos que* $x \in C$ *es un punto diametral de* $C$ *si* $r_x(C) = \operatorname{diam}(C)$ *y* $C$ *es llamado conjunto diametral si todo punto en* $C$ *es diametral.*

*Un subconjunto cerrado y convexo* $C$ *de un espacio de Banach tiene estructura normal si* $C$ *no contiene un subconjunto cerrado, acotado, convexo y diametral con diámetro positivo . Decimos que un espacio de Banach* $X$ *tiene estructura normal si todo subconjunto cerrado y convexo de* $X$ *tiene estructura normal.*

Este concepto ha sido ampliamente estudiado dentro de la teoría de punto fijo ya que en espacios reflexivos es una condición suficiente para que el espacio tenga la propiedad de punto fijo para funciones no expansivas. En 1970 Goebel demostró el siguiente teorema en [24].

**Teorema 1.2.2.** *Si un espacio de Banach* $X$ *cumple que* $\varepsilon_0(X) < 1$ *entonces* $X$ *tiene estructura normal.*

En 1982 Turett dio en [63] otra condición que garantiza la estructura normal.

**Teorema 1.2.3.** *Si un espacio de Banach* $X$ *cumple que* $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\rho_X(t)}{t} < \frac{1}{2}$ *entonces* $X$ *tiene estructura normal.*

Ahora veremos algunos ejemplos respecto a estos conceptos.

**Ejemplo 1.2.4.** *Sea* $X$ *un espacio normado. Se tiene que cada* $x \in S_X$ *es un punto diametral de* $B_X$. *Más aún, el conjunto de todos los puntos diametrales de* $B_X$ *es exactamente* $S_X$. *En efecto, denotemos como* $C$ *al conjunto de todos los puntos diametrales de* $B_X$. *Como para cada* $x \in S_X$ *se tiene que* $\|x - (-x)\| = 2$ *es claro que* $r_x(B_X) = 2 = \operatorname{diam}(B_X)$. *Por tanto,* $S_X \subset C$. *Sea* $x \in C$. *Tenemos que para cada* $z \in B_X$ *se tiene que* $\|x - z\| \leq 1 + \|x\|$ *y de aquí obtenemos que* $2 = r_x(B_X) \leq 1 + \|x\|$. *Luego,* $\|x\| = 1$ *y, consecuentemente,* $C \subset S_X$.

**Ejemplo 1.2.5.** *Es fácil probar que un subconjunto no vacío acotado y abierto* $A \subset X$ *no tiene puntos diametrales.*

**Ejemplo 1.2.6.** *Considere el espacio* $C[0,1]$ *y defina*

$$K = \big\{x \in C[0,1] : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1, \forall\, 0 \leq t \leq 1\big\}.$$

*Este conjunto es cerrado, acotado, convexo y diametral con diametro* $\operatorname{diam}(K) = 1$. *Luego,* $C[0,1]$ *no tiene estructura normal (véase [25] o [26]).*

**Ejemplo 1.2.7.** *Los espacios* $c_0$ *y* $l_1$ *no tienen estructura normal ya que si* $\{e_i\}$ *es la respectiva base canónica del espacio entonces* $\operatorname{conv}\{e_i\}$ *es diametral (véase [25], cap. 4), donde para cada subconjunto* $A$ *de un espacio de Banach* $X$ *se define* $\operatorname{conv}(A)$ *como el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos en* $A$ *y es llamado la envolvente convexa de* $A$.

**Ejemplo 1.2.8.** *Es fácil ver que todo espacio de dimensión finita tiene estructura normal. Los conjuntos compactos y convexos en cualquier espacio de Banach también tienen estructura normal.*

La siguiente caracterización de estructura normal fue probada por Brodskii y Milman en [6]. Ésta considera sucesiones del siguiente tipo:

**Definición 1.2.9.** *Una sucesión acotada $\{x_n\}$ de un espacio de Banach $X$ es diametral si no es finalmente constante (es decir si no existen $N \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tales que $x_n = x$ para todo $n \geq N$) y si*

$$\lim_{k\to\infty} d\big(x_{k+1}, conv\{x_i\}_{i=1}^{k}\big) = \mathrm{diam}\big(\{x_n\}_n\big).$$

**Lema 1.2.10.** *Un espacio de Banach tiene estructura normal si y sólo si no contiene sucesiones diametrales.*

Haremos uso del lema anterior en la sección 2.6.

En 1980 Bynum introdujo en [9] la versión uniforme de estructura normal al definir el coeficiente de estructura normal como sigue.

**Definición 1.2.11.** *Para cada subconjunto acotado $C \subset X$ definimos*

$$r(C) = \inf\big\{r_x(C) : x \in C\big\}.$$

*El coeficiente de estructura normal de un espacio de Banach $X$ es el número*

$$N(X) = \sup\left\{\frac{r(C)}{\mathrm{diam}(C)} : C \subset X \text{ es acotado y convexo, } \mathrm{diam}(C) > 0\right\}.$$

*En otras palabras, $N(X)$ es el número más pequeño tal que $r(C) \leq N(X)\,\mathrm{diam}(C)$ para todo subconjunto convexo y acotado $C \subset X$. Obviamente $N(X) \leq 1$. Un espacio de Banach $X$ tiene estructura normal uniforme si $N(X) < 1$.*

Es claro que estructura normal uniforme implica estructura normal. En 1992 Khamsi demostró el siguiente resultado en [31].

**Teorema 1.2.12.** *Si un espacio de Banach $X$ cumple que $\lim_{t\to 0^+} \frac{\rho_X(t)}{t} < \frac{1}{2}$ entonces $X$ tiene estructura normal uniforme.*

Como consecuencia del teorema 1.2.12 y del teorema 2.4.11 se sigue que si un espacio de Banach $X$ cumple que $\varepsilon_0(X) < 1$ entonces $X$ tiene estructura normal uniforme.

Existen espacios no reflexivos con estructura normal, en contraste con el siguiente resultado probado en 1984 por Maluta en [42].

**Teorema 1.2.13.** *Si un espacio de Banach $X$ tiene estructura normal uniforme entonces es reflexivo.*

## 1.3. Ultrapotencias de espacios de Banach

Recordemos la definición y algunos resultados sobre ultrapotencias que pueden ser encontrados en [1], cap. 1.

**Definición 1.3.1.** *Sea $I$ un conjunto no vacío. Un $filtro$ $\mathfrak{F}$ en $I$ es una colección no vacía de subconjuntos de $I$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

*(a) Si $A, B \in \mathfrak{F}$, entonces $A \bigcap B \in \mathfrak{F}$,*

*(b) Si $A \in \mathfrak{F}$, $B \subset I$ y $A \subset B$, entonces $B \in \mathfrak{F}$.*

*Obviamente $\emptyset \in \mathfrak{F}$ si, y sólo si $\mathfrak{F} = 2^I$. Decimos que $\mathfrak{F}$ es un $filtro$ $propio$ en $I$ si $\emptyset \notin \mathfrak{F}$, en caso contrario decimos que $\mathfrak{F}$ es un $filtro$ $impropio$ en $I$.*

**Definición 1.3.2.** *Sea $i_0 \in I$ fijo y considere el conjunto $\mathfrak{F}_{i_0} = \big\{A \subset I : i_0 \in A\big\}$. Claramente $\mathfrak{F}_{i_0}$ es un filtro en $I$. A este tipo de filtros se les llama filtros triviales en $I$.*

**Proposición 1.3.3.** *Sea $\mathcal{P}$ la familia de todos los filtros propios en $I$. Entonces $\mathcal{P}$ tiene un elemento maximal con respecto a la inclusión de conjuntos, es decir, existe $\mathfrak{F} \in \mathcal{P}$ tal que si $\mathfrak{G} \in \mathcal{P}$ y $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, entonces $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.*

**Definición 1.3.4.** *$\mathfrak{U} \in \mathcal{P}$ es llamado $ultrafiltro$ en $I$ si $\mathfrak{U}$ es un elemento maximal de $\mathcal{P}$.*

**Proposición 1.3.5.** *Sea $\mathfrak{U}$ un filtro en $I$. Entonces $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro en $I$ si, y sólo si, para cualquier $A \subset I$ se tiene que $A \in \mathfrak{U}$ ó $I \backslash A \in \mathfrak{U}$.*

**Definición 1.3.6.** *Sea $X$ un espacio topológico Hausdorff, $\{x_i\}_{i \in I}$ una colección de elementos de $X$ indizados por un conjunto $I$ y $\mathfrak{F}$ un filtro en $I$. Decimos que $\{x_i\}_{i \in I}$ converge a $x \in X$ sobre $\mathfrak{F}$ si para toda vecindad $V$ de $x$ se cumple que $\{i \in I : x_i \in V\} \in \mathfrak{F}$. El límite será denotado mediante $\lim\limits_{\mathfrak{F}} x_i$.*

**Proposición 1.3.7.** *Si $\mathfrak{F}$ es un filtro propio, entonces $\lim\limits_{\mathfrak{F}} x_i$ (en caso de existir) es único.*

**Proposición 1.3.8.** *Sea $C \subset X$ cerrado y $\{x_i\}_{i \in I} \in C$. Si $\mathfrak{F}$ es un filtro propio, entonces $\lim\limits_{\mathfrak{F}} x_i \in C$ (en caso de existir).*

**Proposición 1.3.9.** *Sea $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro no trivial en $\mathbb{N}$ y suponga que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ en la topología del espacio $X$. Entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ sobre $\mathfrak{U}$, es decir, $\lim\limits_{\mathfrak{U}} x_i = x$.*

**Proposición 1.3.10.** *Sea $X$ un espacio métrico, $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro no trivial en $\mathbb{N}$ y suponga que $\lim\limits_{\mathfrak{U}} x_i = x$. Entonces existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a $x \in X$ en la topología del espacio $X$.*

**Proposición 1.3.11.** *Sea* $\{X_i\}_{i\in I}$ *una familia de espacios de Banach y defina*

$$l_\infty(X_i) = \left\{ \{x_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : \sup\{\|x_i\|_{X_i} : i \in I\} < \infty \right\}.$$

*Si definimos* $\|\{x_i\}_{i\in I}\|_\infty = \sup\{\|x_i\|_{X_i} : i \in I\}$ *para cada* $\{x_i\}_{i\in I} \in l_\infty(X_i)$ *entonces* $\|\cdot\|_\infty$ *define una norma en el espacio* $l_\infty(X_i)$ *y* $\left(l_\infty(X_i), \|\cdot\|_\infty\right)$ *resulta ser un espacio de Banach.*

**Proposición 1.3.12.** *Si* $\mathfrak{U}$ *es un ultrafiltro en* $I$*, entonces para cada* $\{x_i\}_{i\in I} \in l_\infty(X_i)$ *se tiene que* $\lim_{\mathfrak{U}} \|x_i\|$ *existe y es único.*

**Proposición 1.3.13.** *Sea* $\mathfrak{U}$ *un ultrafiltro en* $I$ *y definamos*

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{U}} = \left\{ \{x_i\} \in l_\infty(X_i) : \lim_{\mathfrak{U}} ||x_i||_{X_i} = 0 \right\}.$$

$\mathcal{N}_{\mathfrak{U}}$ *es un subespacio cerrado de* $l_\infty(X_i)$.

**Definición 1.3.14.** *El ultraproducto de una familia de espacios de Banach* $\{X_i\}_{i\in I}$ *con respecto a un ultrafiltro* $\mathfrak{U}$ *en* $I$ *es el espacio cociente* $l_\infty(X_i)/\mathcal{N}_{\mathfrak{U}}$ *equipado con la norma cociente, el cual es denotado por* $\{X_i\}_{\mathfrak{U}}$ *y a sus elementos por* $\{x_i\}_{\mathfrak{U}}$*. Si* $X_i = X$ *para todo* $i \in I$*, entonces* $\{X\}_{\mathfrak{U}} = \{X_i\}_{\mathfrak{U}}$ *es llamada ultrapotencia de* $X$*.*

**Proposición 1.3.15.** *La norma cociente en* $\{X_i\}_{\mathfrak{U}}$*,*

$$\|\{x_i\}_{\mathfrak{U}}\| = \inf\{ \|\{x_i + y_i\}_i\|_\infty : \{y_i\}_i \in \mathcal{N}_{\mathfrak{U}}\}$$

*satisface la igualdad*

$$\|\{x_i\}_{\mathfrak{U}}\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_i\|_{X_i} \quad \textit{para cada } \{x_i\}_{\mathfrak{U}} \in \{X_i\}_{\mathfrak{U}}.$$

**Proposición 1.3.16.** $X$ *puede ser encajado isométricamente en* $\{X\}_{\mathfrak{U}}$ *y si* $X$ *es infinito dimensional y* $\mathfrak{U}$ *es un ultrafiltro no trivial en* $\mathbb{N}$*, entonces* $\{X\}_{\mathfrak{U}}$ *contiene a* $X$ *como subespacio propio.*

Escribiremos $\tilde{X}_i$ en lugar de $\{X_i\}_{\mathfrak{U}}$ y $\tilde{x}$ en lugar de $\{x_i\}_{\mathfrak{U}}$, a menos que necesitemos especificar el ultrafiltro que estemos considerando.

# CAPÍTULO 2

# P-convexidad y otras nociones de convexidad

En este capítulo caracterizaremos a los espacios P($n$)-convexos de dimensión dos, para cada $n > 2$. Esto nos servirá para encontrar ejemplos sencillos relacionados con algunos resultados obtenidos en este trabajo. Posteriormente mostraremos algunos resultados nuestros que relacionan a algunas nociones de convexidad.

## 2.1. Otras nociones de convexidad

En esta sección definiremos las nociones de convexidad que estudiaremos en este trabajo y daremos los resultados conocidos sobre ellas que son del interés de la tesis. Añadiremos algunas pruebas para la mejor comprensión del trabajo.

El siguiente concepto fue dado en 1970 por C. A. Kottman en [35]:

**Definición 2.1.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Para cada $n \geq 2$ definimos el coeficiente (o constante) de empaque de $X$ respecto a $n$ como*

$$P(n, X) = \sup\{r > 0 : \textit{existen } n \textit{ bolas cerradas disjuntas de radio } r \textit{ en } B_X\}.$$

**Observación 2.1.2.** *Es sabido (véase [15], cap. 5) que si $Y$ es un subespacio finito dimensional de un espacio de Banach infinito dimensional $X$ y $\theta > 0$, entonces existe $x \in S_X$ tal que $(1+\theta)\|y + \lambda x\| \geq \|y\|$ para todo $y \in Y$ y todo escalar $\lambda$. De aquí, es fácil ver que en un espacio de Banach infinito dimensional $X$ dado $\theta > 0$ existe una sucesión $\{x_n\} \subset S_X$ tal que $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{1+\theta}$, $i \neq j$. En efecto, sea $x_1 \in S_X$. Existe $x_2 \in S_X$ tal que $\|x_2 - y\| > \frac{\|y\|}{1+\theta}$ para todo*

*$y \in \operatorname{span}\{x_1\}$, donde para cada $A \subset X$ definimos $\operatorname{span} A$ como el espacio vectorial cuyos elementos son todas las combinaciones lineales finitas de elementos en $A$. Asimismo, existe $x_3 \in S_X$ tal que $\|x_3 - y\| > \frac{\|y\|}{1+\theta}$ para todo $y \in \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$. Claramente la sucesión $\{x_n\}$ cumple que $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{1+\theta}$, $i \neq j$.*

*De lo anterior podemos deducir que si $X$ es un espacio de Banach infinito dimensional entonces $P(n,X) \geq \frac{1}{3}$ para cada $n \geq 2$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y elegimos $\{x_n\} \subset S_X$ tal que $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{1+\varepsilon}$, $i \neq j$. Considere las bolas cerradas*

$$B\left(\frac{2}{3}x_k, \frac{1}{3} - \varepsilon\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

*Claramente $B\big(\frac{2}{3}x_k, \frac{1}{3} - \varepsilon\big) \subset B_X$ para cada $k$ ya que si $z \in B\big(\frac{2}{3}x_k, \frac{1}{3} - \varepsilon\big)$ entonces $\|z - \frac{2}{3}x_k\| \leq \frac{1}{3} - \varepsilon$ y por tanto $\|z\| \leq 1 - \varepsilon$. También se tiene que*

$$B\left(\frac{2}{3}x_k, \frac{1}{3} - \varepsilon\right) \bigcap B\left(\frac{2}{3}x_l, \frac{1}{3} - \varepsilon\right) = \emptyset \ \ \text{para cada} \ \ k \neq l.$$

*Para verificar esta afirmación suponga que*

$$z \in B\left(\frac{2}{3}x_k, \frac{1}{3} - \varepsilon\right) \bigcap B\left(\frac{2}{3}x_l, \frac{1}{3} - \varepsilon\right).$$

*De esto se tiene que*

$$\frac{2}{3}\|x_k - x_l\| \leq \left\|\frac{2}{3}x_k - z\right\| + \left\|z - \frac{2}{3}x_l\right\| \leq \frac{2}{3} - 2\varepsilon$$

*y por tanto $\|x_k - x_l\| \leq 1 - 3\varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon}$, lo que contradice nuestra hipótesis. Luego, para cada $\varepsilon > 0$ existe una colección contable de bolas cerradas disjuntas de radio $\frac{1}{3} - \varepsilon$ contenidas en $B_X$ y en particular obtenemos que $P(n,X) \geq \frac{1}{3}$ para cada $n \geq 2$.*

*Por otro lado es fácil ver que para todo espacio de Banach $X$ se cumple que $P(n,X) \leq \frac{1}{2}$ para cada $n \geq 2$. Para ver esto es suficiente notar que si $B\big(x, \frac{1}{2}\big) \subset B_X$ entonces $0 \in B\big(x, \frac{1}{2}\big)$. En efecto, tenemos que $\left\|\frac{x}{\|x\|} - x\right\| \geq \frac{1}{2}$ ya que si $\left\|\frac{x}{\|x\|} - x\right\| < \frac{1}{2}$ entonces $\frac{x}{\|x\|} \in \operatorname{int} B\big(x, \frac{1}{2}\big) \subset \operatorname{int} B_X$ lo cual no puede ser. De lo anterior se sigue que $1 - \|x\| = \left\|\frac{x}{\|x\|} - x\right\| \geq \frac{1}{2}$ y así $\|x\| \leq \frac{1}{2}$. Luego $0 \in B\big(x, \frac{1}{2}\big)$.*

*Por tanto cualesquiera dos bolas contenidas en $B_X$ de radio $\frac{1}{2}$ se intersectan en al menos el punto $0$ y consecuentemente $P(n,X) \leq \frac{1}{2}$ para $n \geq 2$.*

Considere las primeras dos bolas unitarias de la Figura 2.1. Podemos acomodar tres bolas de radio suficientemente pequeño dentro de $B_X$ de tal manera que cada par de ellas tiene intersección vacía. Sin embargo, existe un $r < \frac{1}{2}$ tal que para cualesquiera tres bolas de radio $r$ contenidas en $B_X$ dos de ellas se intersectan. ¿Qué pasa con la bola unitaria hexagonal? Para todo $r < \frac{1}{2}$ podemos acomodar dentro de $B_X$ tres bolas de radio $r$ de tal manera que cada par de ellas tiene intersección vacía. Similarmente con la última bola unitaria, pero con cuatro bolas.

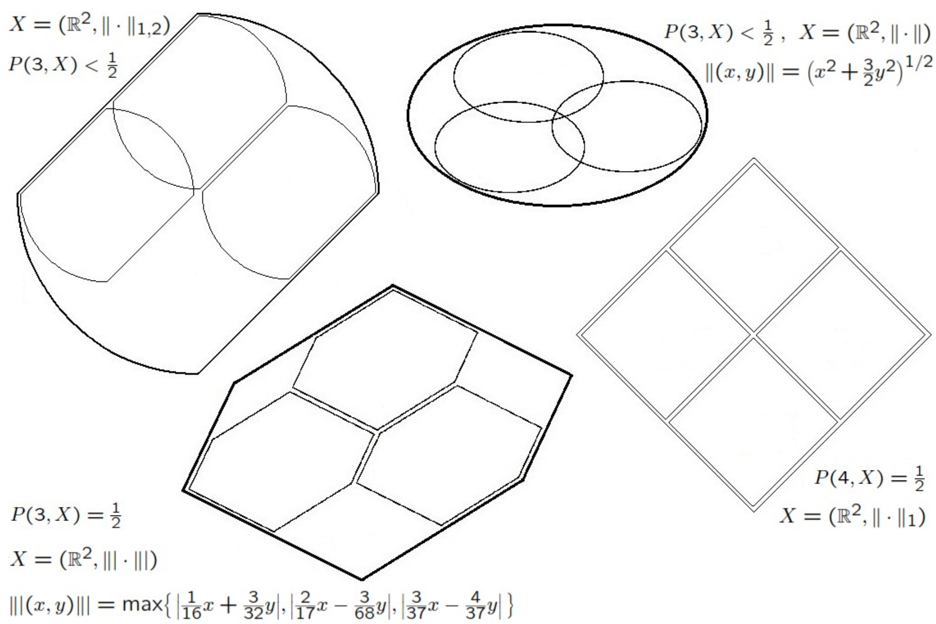


Figura 2.1. Empacamiento de bolas

**Definición 2.1.3.** *Un espacio de Banach $X$ es P-convexo si $P(n,X) < \frac{1}{2}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.*

En su artículo [35] Kottman dio la siguiente caracterización de P-convexidad.

**Lema 2.1.4.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $P(n,X) < \frac{1}{2}$ si, y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2, ..., x_n \in S_X$ se cumple*

$$\min\{\|x_i - x_j\| : 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j\} \leq 2 - \varepsilon. \tag{2.1}$$

*Es decir, $X$ es P-convexo si y sólo si $X$ cumple la condición (2.1) para algún $n \in \mathbb{N}$ y para algún $\varepsilon > 0$.*

**Definición 2.1.5.** *Dados $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ decimos que $X$ es $P(\varepsilon, n)$-convexo si $X$ cumple (2.1). Asimismo, para cada $n \in \mathbb{N}$ decimos que $X$ es $P(n)$-convexo si es $P(\varepsilon, n)$-convexo para algún $\varepsilon > 0$.*

La condición (2.1) es la definición de P-convexidad que usaremos en esta tesis.

Además Kottman probó en [35] que cualquier espacio P-convexo es reflexivo y que la P-convexidad se sigue de la convexidad uniforme, así como también de la suavidad uniforme.

**Observación 2.1.6.** *(a) Si un espacio infinito dimensional $X$ es $P(\varepsilon, n)$-convexo entonces necesariamente $\varepsilon \leq 1$. En efecto, si $1 < \varepsilon < 2$ entonces para $\theta = (\varepsilon - 1)/(2 - \varepsilon)$ existe una sucesión $\{x_n\} \subset S_X$ como la de la observación 2.1.2 tal que $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{1+\theta} = 2 - \varepsilon$, $i \neq j$.*

*(b) Por otro lado, si $X$ es de dimensión finita entonces es P-convexo. De hecho, para todo $\varepsilon \in (0, 2)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X$ es $P(\varepsilon, m)$-convexo. En efecto, como $B_X$ es compacto y $B_X \subset \bigcup_{x \in B_X} \operatorname{int} B(x, 1 - \frac{\varepsilon}{2})$, entonces existen $x_1, ..., x_n \in B_X$ tales que $B_X \subset \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int} B(x_i, 1 - \frac{\varepsilon}{2})$. Así, para cada $y_1, ..., y_{n+1} \in B_X$ existen $1 \leq i, j \leq n + 1$, $i \neq j$, tales que $y_i$ y $y_j$ pertenecen ambos a la misma bola $\operatorname{int} B(x_k, 1 - \frac{\varepsilon}{2})$, $k \in \{1, ..., n + 1\}$ y, consecuentemente, $\|y_i - y_j\| \leq 2 - \varepsilon$.*

*(c) Podemos reescribir la condición de P-convexidad (2.1) para puntos en $B_X$ en lugar de definirla en puntos de $S_X$. Para ver esto necesitamos la siguiente desigualdad que puede ser encontrada en [41].*

**Lema 2.1.7.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $x, y \in X$, $x, y \neq 0$. Se cumple que*

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \frac{1}{\min\{\|x\|, \|y\|\}} \Big( \|x - y\| - \big| \|x\| - \|y\| \big| \Big).$$

*De aquí se puede observar que si $X$ es $P(\varepsilon, n)$-convexo y $x_1, ..., x_n \in B_X$ entonces existen $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, tales que*

$$\begin{aligned} \|x_i - x_j\| &\leq \min\{\|x_i\|, \|x_j\|\} \left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} - \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| + \big| \|x_i\| - \|x_j\| \big| \\ &\leq (2-\varepsilon) \min\{\|x_i\|, \|x_j\|\} + \max\{\|x_i\|, \|x_j\|\} - \min\{\|x_i\|, \|x_j\|\} \leq 2-\varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, Kottman introdujo en [35] la siguiente definición que determina otra propiedad de convexidad y probó que es el concepto dual de P-convexidad.

**Definición 2.1.8.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $\varepsilon > 0$. Un subconjunto convexo $A$ de $B_X$ es llamado un $\varepsilon$-plano si $A \bigcap (1 - \varepsilon) B_X = \emptyset$. Una colección $\mathfrak{D}$ de $\varepsilon$-planos es llamada complementada si para cada par de $\varepsilon$-planos $A$ y $B$ en $\mathfrak{D}$ se tiene que $A \bigcup B$ contiene un par de puntos antipodales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$F(n, X) = \inf\{\varepsilon > 0 : B_X \text{ contiene una colección complementada } \mathfrak{D} \text{ con } n\ \varepsilon\text{-planos}\}.$$

**Teorema 2.1.9.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$(a)$ $F(n, X^*) = 0 \Leftrightarrow P(n, X) = \frac{1}{2}$.

$(b)$ $P(n, X^*) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow F(n, X) = 0$.

Considere la bola unitaria de la Figura 2.2. Existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualesquiera tres $\varepsilon_0$-planos $A_1, A_2, A_3$ existen $i \neq j$ tales que $A_i \bigcup A_j$ no contiene un par de puntos antipodales. En este caso $F(3, X) > 0$.

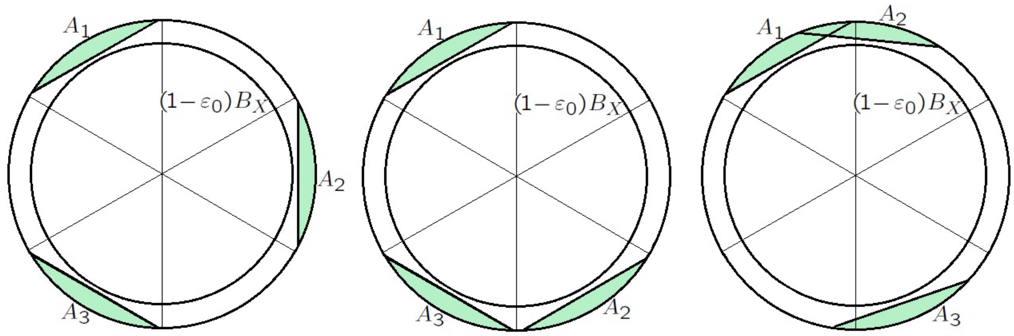


Figura 2.2. Espacio bidimensional $X$ tal que $F(3, X) > 0$

Ahora considere la bola unitaria hexagonal de la Figura 2.3. Para todo $\varepsilon > 0$ existen tres $\varepsilon$-planos $A_1, A_2, A_3$ tales que para todo $i \neq j$ se tiene que $A_i \bigcup A_j$ contiene un par de puntos antipodales, ya que $\pm x_{i,j} \in A_i \bigcup A_j$, $1 \leq i < j \leq 3$. Por tanto $F(3, X) = 0$. Análogamente podemos ver que para la bola unitaria cuadrada se cumple que $F(4, X) = 0$.

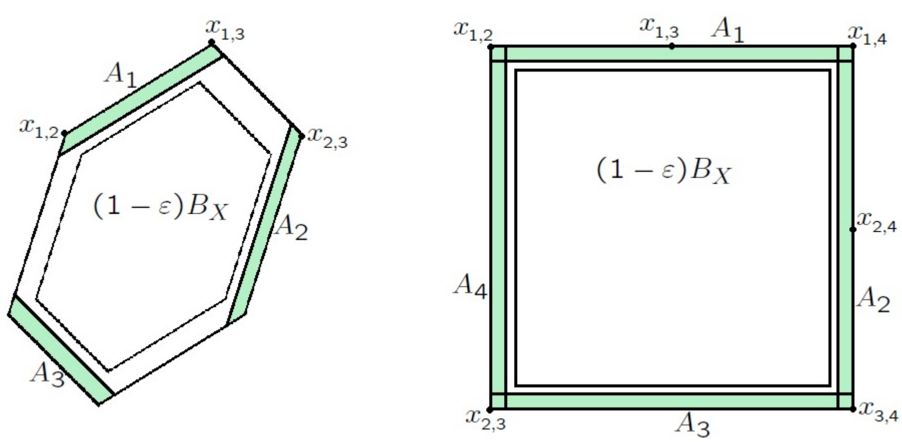


Figura 2.3. Espacios bidimensionales $X$ tales que $F(3, X) = 0$ y $F(4, X) = 0$

En 1978 Naidu y Sastry [51] llamaron a los espacios de Banach $X$ con $F(n, X) > 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$ espacios F-convexos. Dado $n \in \mathbb{N}$ diremos que $X$ es F($n$)-convexo si $F(n, X) > 0$.

La idea de Kottman al introducir la P-convexidad fue incluir a la clase de espacios uniformemente convexos y a la clase de espacios uniformemente suaves en una clase más grande que conserve la reflexividad. Sin embargo, Kottman no probó nada sobre la relación entre los espacios uniformemente no cuadrados y los P-convexos.

Más tarde, Naidu y Sastry mostraron en [51] el siguiente ejemplo de un espacio uniformemente no cuadrado que no es P-convexo.

**Ejemplo 2.1.10.** *No todo espacio uniformemente no cuadrado es P-convexo ni viceversa: Sean* $\frac{log\,3}{log\,2} < p < 2$ *y* $X$ *el espacio que se obtiene al renormar a* $l_p$ *con la norma*

$$\|x\| = \text{máx}\{\sup_{i,j} |x_i - x_j|, \|x\|_p\}$$

*para cada* $x = (x_i)_i \in l_p$*, donde* $\|\cdot\|_p$ *es la* $l_p$*-norma. Entonces* $X$ *es uniformemente no cuadrado, pero no P-convexo. Por otro lado, de la observación 2.1.6 se tiene que* $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ *es P-convexo y no es uniformemente no cuadrado.*

Naidu y Sastry se preguntaron si existía una condición de convexidad que englobara las nociones de espacio uniformemente no cuadrado y de espacio P-convexo y que al mismo tiempo conservara la reflexividad; respondieron esta pregunta afirmativamente, introduciendo una clase de espacios que contienen, tanto a la clase de espacios P-convexos como a la clase de espacios uniformemente no cuadrados, y los llamaron espacios O-convexos.

Antes de introducir la noción de espacio O-convexo necesitamos definir los siguientes conceptos.

**Definición 2.1.11.** *Sean* $X$ *un espacio de Banach y* $\varepsilon > 0$*. Decimos que un subconjunto de* $X$ *es* $\varepsilon$*-separado si la distancia entre cualesquiera dos elementos del subconjunto es mayor o igual que* $\varepsilon$*.*

*Decimos que* $A \subset X$ *es simétricamente* $\varepsilon$*-separado si* $A \bigcup (-A)$ *es* $\varepsilon$*-separado.*

**Definición 2.1.12.** *Sean* $X$ *un espacio de Banach,* $n \in \mathbb{N}$ *y* $0 < \varepsilon < 2$*. Decimos que* $X$ *es O(*$\varepsilon, n$*)-convexo si* $B_X$ *no contiene subconjuntos simétricamente* $(2-\varepsilon)$*-separados de cardinalidad* $n$*. Diremos que* $X$ *es O(*$n$*)-convexo si* $X$ *es O(*$\varepsilon, n$*)-convexo para algún* $\varepsilon > 0$ *y que* $X$ *es O-convexo si* $X$ *es O(*$\varepsilon, n$*)-convexo para algún* $\varepsilon > 0$ *y para algún* $n \in \mathbb{N}$*.*

Es fácil ver que $X$ es O($\varepsilon, n$)-convexo si y sólo si, para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in S_X$

se cumple la desigualdad

$$\min\big\{\min\{\|x_i - x_j\|\,, \|x_i + x_j\|\} : 1 \le i, j \le n,\ i \ne j\big\} \le 2 - \varepsilon. \tag{2.2}$$

De la equivalencia anterior es evidente que la clase de espacios uniformemente no cuadrados y la clase de espacios P-convexos son ambas subclases de la clase de espacios O-convexos. La condición 2.2 es la definición de O-convexidad que usaremos en esta tesis.

Naidu y Sastry también demostraron que la clase de espacios O-convexos está contenida en la clase de espacios superreflexivos. Además introdujeron la condición de convexidad que es dual de la O-convexidad y la llamaron E-convexidad. Ellos determinaron completamente todas las implicaciones entre espacios uniformemente no cuadrados, espacios P-convexos, espacios F-convexos, espacios O-convexos, espacios E-convexos y espacios superreflexivos mediante varios ejemplos y argumentos. En particular dieron en [51] los siguientes tres ejemplos.

**Ejemplo 2.1.13.** *La clase de espacios O-convexos y la clase de espacios E-convexos son ambas subclases propias de la clase de espacios superreflexivos: Sea $X$ el espacio obtenido al renormar $l_2$ con la norma*

$$\|x\| = \text{máx}\big\{\sup_{i \ne j}\{|x_i| + |x_j|\}, \|x\|_2\,\big\}$$

*para cada $x = (x_i)_i \in l_2$, donde $\|\cdot\|_2$ es la norma usual en $l_2$. Como $\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\| \le \sqrt{2}\|\cdot\|_2$, $X$ es un espacio superreflexivo. Sin embargo, $X$ no es O-convexo ni E-convexo.*

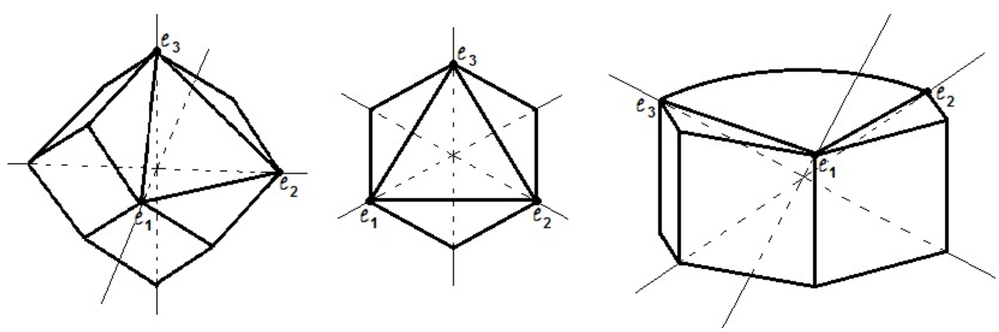


Figura 2.4. Bola unitaria de $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$, donde
$\|(x,y,z)\| = \text{máx}\big\{|x|+|y|, |y|+|z|, |x|+|z|, \|(x,y,z)\|_2\big\}$

**Ejemplo 2.1.14.** *La clase de espacios P-convexos es una subclase propia de la clase de espacios O-convexos. Además, no todo espacio O-convexo es E-convexo ni viceversa: Sea $X$ el espacio obtenido al renormar al espacio $l_2$ con la norma*

$$\|x\| = \text{máx}\big\{\sup_{i,j}|x_i - x_j|, \|x\|_2\,\big\}$$

*para cada $x = (x_i)_i \in l_2$. Este espacio no es P-convexo ni E-convexo, pero sí es O(4)-convexo. Por otra parte, $X^*$ es E(4)-convexo pero no O-convexo.*

**Ejemplo 2.1.15.** *No todo espacio P-convexo es E-convexo ni viceversa: Sea $X$ el espacio obtenido al renormar al espacio $l_2$ con la norma*

$$\|x\| = \text{máx}\{ \sup_{i \neq j} |x_i + x_j|, \|x\|_2 \}$$

*para cada $x = (x_i)_i \in l_2$. Este espacio es P-convexo y no es E-convexo. Por otro lado, el ejemplo 2.1.14 nos da un espacio E-convexo que no es P-convexo.*

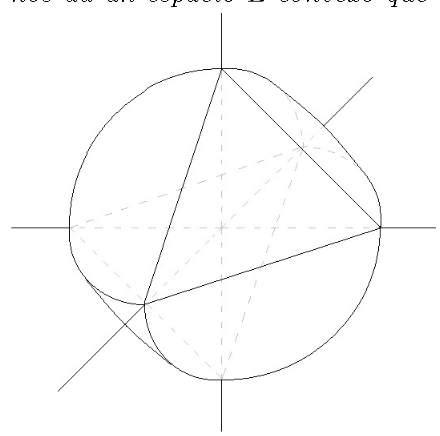

Figura 2.5. Bola unitaria del espacio $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$, donde $\|(x,y,z)\| = \text{máx}\{|x+y|, |y+z|, |x+z|, \|(x,y,z)\|_2\}$

Por tanto, del ejemplo 2.1.15 y de la dualidad entre P-convexidad y F-convexidad concluimos que no todo espacio P-convexo es F-convexo ni viceversa.

Naidu y Sastry se preguntaron después si existiría una condición de convexidad englobando las nociones de O-convexidad y de E-convexidad y que conservara la superreflexividad. Esta pregunta fue contestada afirmativamente en 1984 por Amir y Franchetti en [2]. A esta condición la llamaron Q-convexidad.

**Definición 2.1.16.** *Dados $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, y $\varepsilon > 0$ decimos que un espacio de Banach $X$ es un espacio Q($\varepsilon, n$)-convexo si para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in B_X$ existe $1 \leq k \leq n$ tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_k \right\| \leq k - \varepsilon.$$

*$X$ es Q-convexo si es Q($\varepsilon, n$)-convexo para algún $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, y algún $\varepsilon > 0$.*

Amir y Franchetti mostraron que la Q-convexidad es una propiedad autodual. Además probaron que O($\varepsilon, n-1$)-convexidad implica Q($\varepsilon, n$)-convexidad, añadiremos la prueba para mejor comprensión del trabajo.

**Proposición 2.1.17.** *Si $X$ es O($\varepsilon, n-1$)-convexo entonces es Q($\varepsilon, n$)-convexo.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es $\mathrm{O}(\varepsilon, n-1)$-convexo y sean $x_1, ..., x_n \in S_X$. Existen $1 \leq i < j \leq n-1$ tales que $\min\{\|x_i + x_j\|, \|x_i - x_j\|\} \leq 2 - \varepsilon$. Si $\|x_i + x_j\| \leq 2 - \varepsilon$ entonces

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1} x_k - x_n\right\| \leq \|x_i + x_j\| + \left\|\sum_{k\in\{1,...,n-1\}\setminus\{i,j\}} x_k - x_n\right\| \leq 2 - \varepsilon + n - 2 = n - \varepsilon.$$

Si $\|x_i - x_j\| \leq 2 - \varepsilon$ entonces

$$\left\|\sum_{k=1}^{j-1} x_k - x_j\right\| \leq \|x_i - x_j\| + \left\|\sum_{k\in\{1,...,j-1\}\setminus\{i\}} x_k\right\| \leq 2 - \varepsilon + j - 2 = j - \varepsilon.$$

Luego, $X$ es $\mathrm{Q}(\varepsilon, n)$-convexo. □

Como la O-convexidad no es una propiedad autodual, la Q-convexidad no implica necesariamente la O-convexidad. Ellos también mostraron que la clase de espacios Q-convexos es una subclase propia de la clase de espacios superreflexivos.

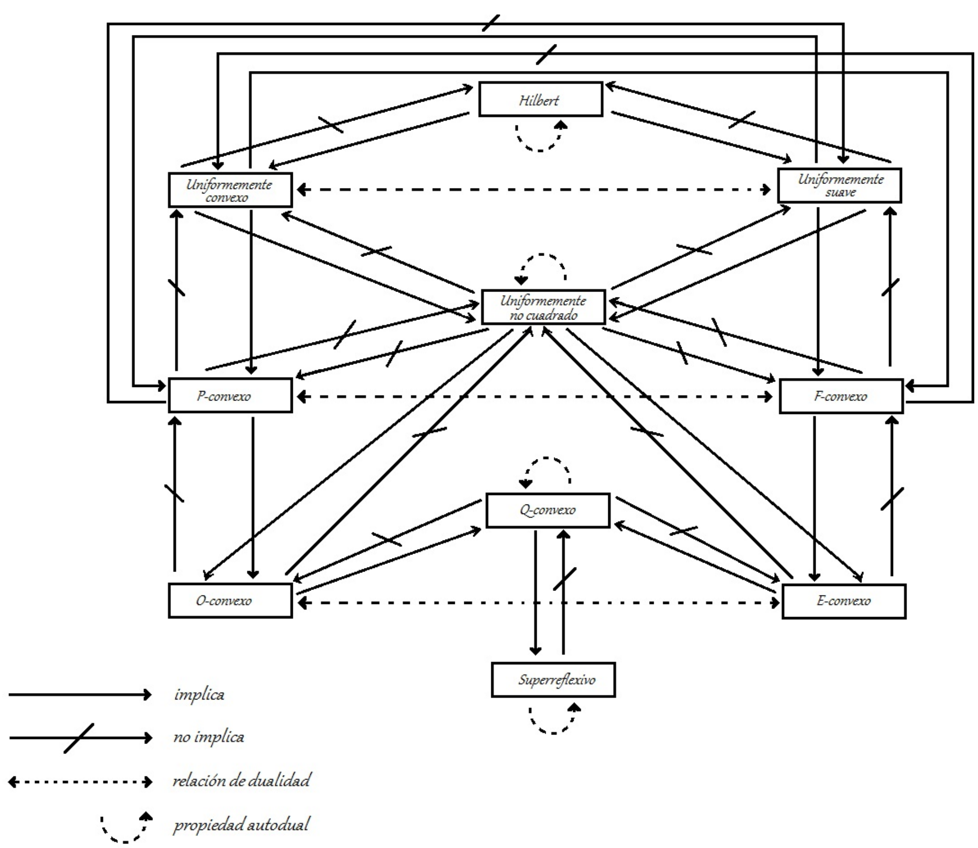


Figura 2.6. Implicaciones entre los espacios definidos previamente

Siguiendo esta misma línea, se han extendido los conceptos anteriores cada vez más, definiendo otras nociones de convexidad y encontrando las relaciones entre ellos. Los resultados que determinan completamente todas las implicaciones entre los espacios definidos previamente se muestran en el diagrama de la Figura 2.6, inspirado en el diagrama que se muestra en [2].

## 2.2. Otras nociones de suavidad

Una noción de suavidad que también será objeto de estudio en esta tesis es la propiedad EIS definida por H. Fetter y B. Gamboa de Buen en [19].

**Definición 2.2.1.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $k \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$s_k(X) = \sup\big\{r > 0 \mid \exists\, x_1, ...x_{k+1} \in S_X : \forall\, i \neq j,\ \|x_i - x_j\| \geq r\big\}.$$

Obsérvese que si $k = 1$ entonces $s_k(X) = 2$. De la primera parte de la observación 2.1.2 se tiene que si $\dim(X) = \infty$ entonces $s_k(X) \geq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

**Definición 2.2.2.** *Sean $X$ un espacio de Banach, $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in \big(0, s_k(X^*)\big)$. $X$ tiene la propiedad $\varepsilon$,$k$-EIS (empty intersection of slices) si existe $\delta \in (0,1)$ tal que para cualesquiera $f_1, ..., f_{k+1} \in S_{X^*}$ con $\|f_i - f_j\| \geq \varepsilon$, $i \neq j$, se cumple que $S(f_1, ..., f_{k+1}, \delta) = \emptyset$, donde para cada funcional $f \in X^*$ definimos*

$$S(f, \delta) = \big\{\ x \in B_X\ :\ f(x) \geq 1 - \delta\big\}$$

*y*

$$S(f_1, ..., f_n, \delta) = \bigcap_{i=1}^{n} S(f_i, \delta).$$

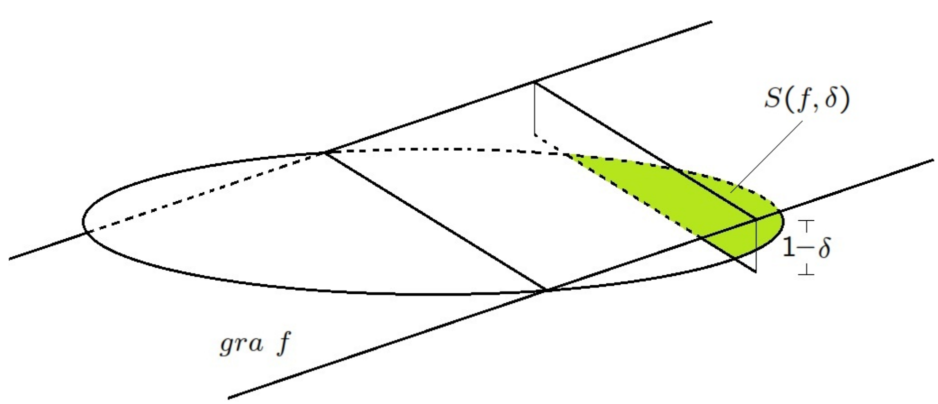


*Figura 2.7. Rebanada de $f$ con respecto a $\delta$*

*A este tipo de conjuntos se les conoce como rebanadas de $B_X$. $X$ tiene la propiedad EIS si tiene la propiedad $\varepsilon$,k-EIS para algún $\varepsilon > 0$ y algún $k \in \mathbb{N}$.*

En [19], H. Fetter y B. Gamboa de Buen obtuvieron que si $X$ tiene la propiedad $EIS$ entonces es superreflexivo y tiene estructura normal.

Ahora introduciremos una noción de convexidad que resulta ser el concepto dual de la propiedad EIS.

**Definición 2.2.3.** *Sean $X$ un espacio de Banach, $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in \big(0, s_k(X)\big)$. $X$ tiene la propiedad $\varepsilon$,k-EIS$^*$ si existe $\delta \in (0,1)$ tal que para cualesquiera $x_1, ..., x_{k+1} \in S_X$ con $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ para $i \neq j$, se cumple la desigualdad*

$$\left\| \frac{x_1 + \cdots + x_{k+1}}{k+1} \right\| \leq 1 - \delta.$$

*$X$ tiene la propiedad EIS$^*$ si $X$ tiene la propiedad $\varepsilon$,k-EIS$^*$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y algún $\varepsilon \in (0, s_k(X)\,)$.*

Fetter y Gamboa de Buen probaron la siguiente proposición en [19].

**Proposición 2.2.4.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Entonces $X$ tiene la propiedad EIS si y sólo si $X^*$ tiene la propiedad EIS$^*$ .*

A continuación introduciremos una versión modificada de la propiedad EIS.

**Definición 2.2.5.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Decimos que $X$ tiene la propiedad SEIS (strongly empty intersection of slices) si dado $\varepsilon \in (0,1)$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $X$ tiene la propiedad $\varepsilon$,k-EIS .*

Obviamente la propiedad SEIS implica la propiedad EIS. Apelando al teorema 1.1.14 es fácil ver que se cumple el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.6.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Entonces $X$ es uniformemente suave si y sólo dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0,1)$ tal que*

$$f, g \in S_{X^*},\ \|f - g\| \geq \varepsilon \Longrightarrow S(f, g, \delta) = \emptyset. \tag{2.3}$$

*Demostración.* Supongamos que $X$ es uniformemente suave y sea $\varepsilon > 0$. Como $X^*$ es uniformemente convexo, existe $\delta \in (0,1)$ tal que si $f, g \in S_{X^*}$ con $\|f - g\| \geq \varepsilon$ entonces $\frac{1}{2}\|f + g\| \leq 1 - \delta$. Por tanto, si $f, g \in S_{X^*}$ son tales que $\|f - g\| \geq \varepsilon$ entonces $S(f, g, \frac{\delta}{2}) = \emptyset$, ya que si $x \in S(f, g, \frac{\delta}{2})$ tenemos que

$$2 - \delta \leq f(x) + g(x) \leq \|f + g\| \leq 2 - 2\delta$$

y así obtenemos una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que $X$ cumple la condición (2.3) y sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta \in (0,1)$ tal que si $f, g \in S_{X^*}$ con $\|f-g\| \geq \varepsilon$ entonces $S(f,g,\delta) = \emptyset$. Sean $f, g \in S_{X^*}$ tales que $\|f-g\| \geq \varepsilon$. Verifiquemos que $\frac{1}{2}\|f+g\| \leq 1-\frac{\delta}{2}$. En efecto, si $\frac{1}{2}\|f+g\| > 1-\frac{\delta}{2}$ entonces existe $x \in S_X$ tal que $\frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)\big) \geq 1-\frac{\delta}{2}$ y por tanto $\min\{f(x), g(x)\} \geq 1-\delta$. De lo anterior obtenemos que $x \in S(f,g,\delta)$, lo que es una contradicción. □

Por la proposición anterior, $X$ es uniformemente suave si y sólo si $X$ tiene la propiedad SEIS para $k=1$, es decir, el concepto de espacio uniformemente suave es un caso particular de espacio con la propiedad SEIS.

Enseguida mencionaremos algunos hechos acerca de cierta modificación de la suavidad uniforme. Para esto primero veamos un concepto definido por Istratescu y estudiado por Mazcuñán Navarro en su tesis doctoral [44].

Istratescu introdujo en [28] la siguiente noción de convexidad.

**Definición 2.2.7.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $k \geq 1$. $X$ es $k$-uniformemente convexo si dado $\varepsilon \in \big(0, s_k(X^*)\big)$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x_1, \ldots x_{k+1} \in S_X$ con $\min\big\{\|x_i - x_j\| : 1 \leq i,j \leq k+1, i \neq j\big\} \geq \varepsilon$ se tiene que*

$$\left\|\frac{x_1 + \cdots x_{k+1}}{k+1}\right\| \leq 1-\delta.$$

Es decir, $X$ es $k$-uniformemente convexo si para todo $\varepsilon \in \big(0, s_k(X^*)\big)$ $X$ tiene la propiedad $\varepsilon$,$k$-EIS$^*$. Mazcuñán Navarro estudió este concepto en su tesis doctoral [44] y probó lo siguiente.

**Proposición 2.2.8.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *$X$ es uniformemente convexo.*

(*b*) *$X$ es $k$-uniformemente convexo para algún $k \geq 1$.*

(*c*) *$X$ es $k$-uniformemente convexo para todo $k \geq 1$.*

Ahora introduzcamos la siguiente noción de suavidad que es una definición modificada de la suavidad uniforme.

**Definición 2.2.9.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $k \geq 1$. $X$ es $k$-uniformemente suave si dado $\varepsilon \in (0,1)$ existe $\delta \in (0,1)$ tal que para cualesquiera $f_1, \ldots f_{k+1} \in S_{X^*}$*

*con* $\text{mín}\big\{\|f_i - f_j\| : 1 \leq i, j \leq k+1, i \neq j\big\} \geq \varepsilon$ *se tiene que*

$$S(f_1, ..., f_{k+1}, \delta) = \emptyset.$$

La prueba de la siguiente proposición es análoga a la prueba de la proposición 1 en [19].

**Proposición 2.2.10.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Entonces $X$ es $k$-uniformemente convexo si y sólo si $X^*$ es $k$-uniformemente suave.*

Claramente se tienen las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned} \text{suavidad uniforme} &\Rightarrow \text{suavidad } k\text{-uniforme para algún } k \geq 1 \\ &\Rightarrow \text{ propiedad SEIS } \Rightarrow \text{ propiedad EIS} \end{aligned}$$

Sin embargo, de las proposiciones 2.2.8 y 2.2.10 obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.11.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *$X$ es uniformemente suave.*

(*b*) *$X$ es $k$-uniformemente suave para algún $k \geq 1$.*

(*c*) *$X$ es $k$-uniformemente suave para todo $k \geq 1$.*

Es decir, la definición 2.2.9 no nos proporciona ninguna propiedad nueva.

## 2.3. P-convexidad bidimensional

En esta sección veremos que los espacios normados bidimensionales P(3)-convexos son exactamente aquellos cuyas bolas unitarias no son hexágonos o cuadrados. También probaremos que los espacios normados bidimensionales P(4)-convexos son exactamente aquellos cuyas bolas unitarias no son cuadrados, y esto también equivale a que el espacio sea uniformemente no cuadrado. Veremos que como consecuencia de este último resultado todo espacio normado bidimensional es P(5)-convexo. Empezaremos esta sección con una definición y un par de observaciones.

**Observación 2.3.1.** *Si $X$ es un espacio normado de dimensión finita, entonces $X$ es P($n$)-convexo si y sólo si para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in S_X$ se cumple la desigualdad*

$$\text{mín}\big\{\|x_i - x_j\| : 1 \leq i, j \leq n,\, i \neq j\big\} < 2. \tag{2.4}$$

*Es obvio que la P-convexidad implica la condición (2.4). Suponga que $X$ cumple (2.4). Definimos $J : (S_X)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como $J(x_1, ..., x_n) = \text{mín}\{\|x_i - x_j\| : i, j = 1, ..., n,\ i \neq j\}$, donde $(S_X)^n = S_X \times S_X \times \cdots \times S_X$ y consideramos en $(S_X)^n$ la topología producto. De la continuidad de $J$ y de la compacidad de $(S_X)^n$ se tiene que $J$ alcanza su máximo en algún punto de $(S_X)^n$, digamos, en $(\xi_1, ..., \xi_n)$. Como $X$ cumple (2.4) tenemos que $J(\xi_1, ..., \xi_n) < 2$ y así se obtiene que $\text{mín}\{\|x_i - x_j\| : i, j = 1, ..., n,\ i \neq j\} \leq J(\xi_1, ..., \xi_n)$ para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in S_X$. Luego, $X$ es P(n)-convexo. En lo que sigue haremos uso de este hecho.*

**Definición 2.3.2.** *Sea $X$ un espacio normado bidimensional. Decimos que la bola unitaria $B_X$ de $X$ es un hexágono si $S_X = [x, y] \bigcup [y, z] \bigcup [z, -x] \bigcup [-x, -y] \bigcup [-y, -z] \bigcup [-z, x]$, donde $x, y, z \in S_X$ y cualesquiera tres puntos del conjunto $\{x, y, z, -x, -y, -z\}$ no son colineales. Asimismo, decimos que $B_X$ es un cuadrado si $S_X = [x, y] \bigcup [y, -x] \bigcup [-x, -y] \bigcup [-y, x]$, con $x, y \in S_X$.*

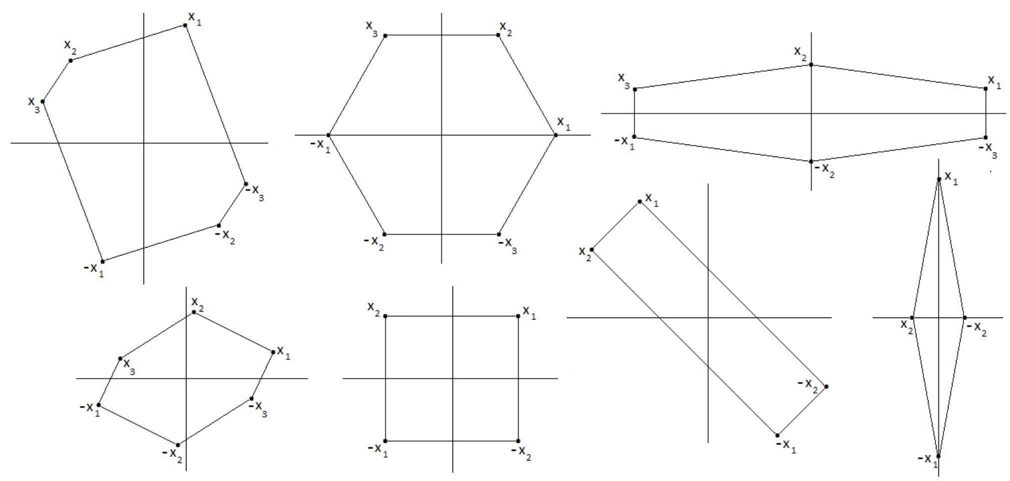

Figura 2.8. Bolas hexagonales y cuadradas

**Observación 2.3.3.** *Sea $X$ un espacio normado bidimensional. Entonces $B_X$ es un cuadrado si, y sólo si, $X$ no es uniformemente no cuadrado. En efecto, si $X$ no es uniformemente no cuadrado, entonces existen $x, y \in S_X$ tales que $\|x + y\| = \|x - y\| = 2$, ya que $\dim(X) < \infty$, y por tanto, $\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \in S_X$. Consecuentemente, $[x, y] \bigcup\ [x, -y] \subset S_X$ y claramente también se tiene que $[-x, -y] \bigcup [-x, y] \subset S_X$. Luego, $[x, y] \bigcup [x, -y] \bigcup [-x, -y] \bigcup [-x, y] \subset S_X$ y como una curva cerrada contenida en una curva cerrada simple es simple y ambas son iguales, se obtiene la igualdad en la última expresión. Por otro lado, si $B_X$ es un cuadrado con vértices $\pm x, \pm y$ entonces $[x, y] \bigcup [x, -y] \subset S_X$ y por tanto $\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \in S_X$. Consecuentemente, $\|x + y\| = \|x - y\| = 2$. Luego, $X$ no es uniformemente no cuadrado.*

**Proposición 2.3.4.** *Sea $X$ un espacio normado bidimensional. Entonces $X$ es P(3)-convexo si, y sólo si, $B_X$ no es un hexágono o un cuadrado.*

*Demostración.* Suponga que $B_X$ es un hexágono. Si $S_X$ es como en 2.3.2 entonces existen $x, y, z \in S_X$ tales que $[x, y] \bigcup [y, z] \bigcup [x, -z] \subset S_X$ y por tanto

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \left\| \frac{y+z}{2} \right\| = \left\| \frac{x-z}{2} \right\| = 1.$$

Haciendo $w = -y$ se obtiene que $\|x - w\| = \|z - w\| = \|x - z\| = 2$ y por tanto $X$ no es P(3)-convexo. Ahora suponga que $B_X$ es un cuadrado. Si $S_X$ es como en 2.3.2 entonces existen $x, y \in S_X$ tales que $[x, y] \bigcup [x, -y] \subset S_X$; luego

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \left\| \frac{x-y}{2} \right\| = 1$$

y por tanto, para cada $\eta, \xi \in \{x, y, -x, -y\}$ se cumple que $\|\eta - \xi\| = 2$. En cualquier caso se tiene que $X$ no es P(3)-convexo.

Supongamos ahora que $X$ no es P(3)-convexo. Sean $x, z, y \in S_X$ tales que $\|x - z\| = \|x - y\| = \|z - y\| = 2$. Como

$$\frac{x + (-z)}{2}, \ \frac{x + (-y)}{2}, \ \frac{z + (-y)}{2} \in S_X$$

es fácil ver que $[x, -z] \bigcup [x, -y] \bigcup [z, -y] \subset S_X$ y de aquí es claro que también $[-x, z] \bigcup [-x, y] \bigcup [-z, y] \subset S_X$. De lo anterior se obtiene la contención $[x, -y] \bigcup [-y, z] \bigcup [z, -x] \bigcup [-x, y] \bigcup [y, -z] \bigcup [-z, x] \subset S_X$. Como una curva cerrada contenida en una curva cerrada simple es simple y ambas son la misma, se obtiene la igualdad en la última expresión. Verifiquemos que $S_X$ es un hexágono o un cuadrado. Obviamente podemos suponer que todos los puntos en $A = \{x, y, z, -x, -y, -z\}$ son distintos. Nótese que no existen cuatro puntos en $A$ que sean colineales, ya que de lo contrario dos de estos cuatro puntos deben ser antipodales y, si $\alpha, -\alpha, \beta, \gamma \in A$ son colineales, existe $t \in (0, 1)$ tal que $\beta = t\alpha + (1 - t)(-\alpha) = (2t - 1)\alpha$ y por tanto $1 = \|\beta\| = |2t - 1| < 1$, lo que no puede ser. Sucede uno de los dos casos siguientes:

$(i)$ No existen tres puntos colineales en $A$. En este caso $B_X$ es un hexágono.

$(ii)$ Existen tres puntos en $A$ que son colineales. Si $u, v \in A$, $u \neq v$, $u \neq -v$, entonces $u, v, -u$ no pueden ser colineales ya que $v$ sería de la forma $\lambda u$ y esto no es posible. Entonces las únicas posibilidades para que tres puntos en $A$ sean colineales son las ternas $\{x, \pm y, \pm z\}$. Desde luego que si $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ son colineales entonces también lo son $-\alpha$, $-\beta$ y $-\gamma$.

$(a)$ Supongamos que $x, y, z$ son colineales. En este caso $x \in (y, z)$, $y \in (x, z)$ ó $z \in (x, y)$. No puede ser que $x \in (y, z)$ ó $z \in (x, y)$ ya que $[x, -y] \bigcup [-y, z] \bigcup [z, -x] \bigcup [-x, y] \bigcup [y, -z] \bigcup [-z, x]$ no sería curva cerrada simple. Si $y \in (x, z)$ entonces $[x, z] \subset S_X$ ya que $\|y\| = 1$ y por tanto $[x, -y] \bigcup [-y, z] \bigcup [z, x] = S_X$, consecuentemente $conv\{x, -y, z\} = B_X$, lo que no puede ser.

$(b)$ Supongamos que $x, -y, -z$ son colineales. En este caso $x \in (-y, -z)$, $-y \in (x, -z)$ ó $-z \in (x, -y)$. Si $-y \in (x, -z)$ ó $-z \in (x, -y)$ entonces $[x, -y] \bigcup [-y, z] \bigcup [z, -x] \bigcup [-x, y] \bigcup [y, -z] \bigcup [-z, x]$ no sería curva cerrada simple. Por tanto $x \in (-y, -z)$ y así $y, z, -y, -z$ serán los vértices del cuadrado y $S_X = [-y, z] \bigcup [z, y] \bigcup [y, -z] \bigcup [-z, -y]$.

Procedemos de manera semejante al caso anterior en los casos: $(c)$ $x, -y, z$ son colineales y $(d)$ $x, y, -z$ son colineales. En el caso $(c)$ $S_X$ es el cuadrado generado por $x, z, -x, -z$ y en el caso $(d)$ $S_X$ es el cuadrado con vértices $x, y, -x, -y$. $\square$

**Corolario 2.3.5.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Si $X$ es P(3)-convexo, entonces no contiene subespacios bidimensionales cuya bola unitaria sea un hexágono o un cuadrado.*

El recíproco de este corolario no necesariamente es cierto.

**Ejemplo 2.3.6.** *Considere al espacio $X = \left(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|\right)$, donde la norma $\|\cdot\|$ se define como sigue. Cada elemento $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ puede ser representado como $x = x^+ - x^-$ donde las respectivas i-ésimas componentes de $x^+$ y $x^-$ están dadas por $(x^+)_i = \max\{x_i, 0\}$ y $(x^-)_i = \max\{-x_i, 0\}$, $i = 1, 2, 3$. Definimos $\|x\| = ||x^+||_2 + ||x^-||_2$ donde $\|\cdot\|_2$ es la $l_2$-norma.*

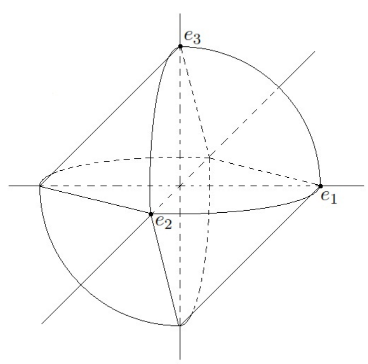


*Figura 2.9. Bola unitaria del espacio $X$, ejemplo 2.3.6*

*Este espacio no contiene subespacios bidimensionales cuya bola unitaria sea un hexágono o un cuadrado. Para probar nuestra afirmación necesitamos probar los siguientes lemas.*

**Lema 2.3.7.** *Considere al espacio $Z = (\mathbb{R}^3, |||\cdot|||)$, donde $|||(x, y, z)||| = |x| + (y^2 + z^2)^{1/2}$. Sean $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in S_X$ con $\xi_1 \geq \eta_1 \geq 0$. Si $[\xi, \eta] \subset S_Z$ entonces $[\xi, \eta] \subset [e_1, \mu]$ para algún $\mu \in S_X$ con $\mu = (0, \mu_2, \mu_3)$, es decir $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 1$, y donde $e_1 = (1, 0, 0)$.*

*Demostración.* Supongamos primero que $\xi_1 = 1$, es decir $\xi = e_1$, y sea $\alpha \in [0, 1]$. Si $\eta_1 = 1$ entonces $\xi = \eta = e_1$ y el resultado se sigue trivialmente. Supongamos que $\eta_1 < 1$. Definamos $\lambda = \alpha + (1-\alpha)\eta_1$,

$$\mu_2 = \frac{\eta_2}{1-\eta_1}\ , \quad \mu_3 = \frac{\eta_3}{1-\eta_1}$$

y $\mu = (0, \mu_2, \mu_3)$. Es fácil ver que $\lambda \in [0, 1]$, $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 1$ y

$$\alpha\xi + (1-\alpha)\eta = \lambda e_1 + (1-\lambda)\mu$$

es decir, $[\xi, \eta] \subset [e_1, \mu]$. Ahora supongamos que $\xi_1 < 1$.

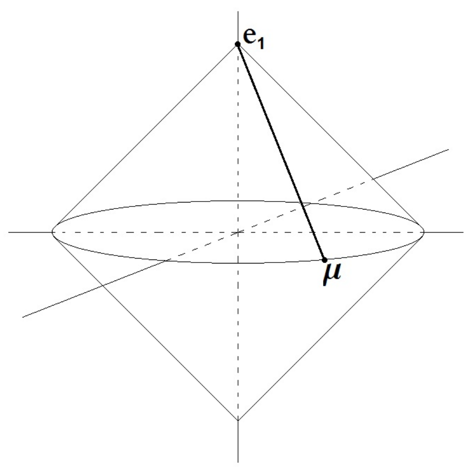


Figura 2.10. Bola unitaria de $(\mathbb{R}^3, |||\cdot|||)$, donde $|||(x, y, z)||| = |x| + (y^2 + z^2)^{1/2}$

Tenemos que

$$|\xi_1| + \left(\xi_2^2 + \xi_3^2\right)^{1/2} = |\eta_1| + \left(\eta_2^2 + \eta_3^2\right)^{1/2} = 1$$

y como $\frac{1}{2}(\xi + \eta) \in S_Z$ entonces

$$|\xi_1 + \eta_1| + \left(\left(\xi_2 + \eta_2\right)^2 + \left(\xi_3 + \eta_3\right)^2\right)^{1/2} = 2.$$

Como $\xi_1 \geq \eta_1 \geq 0$ entonces $|\xi_1 + \eta_1| = |\xi_1| + |\eta_1|$ y consecuentemente

$$\left(\left(\xi_2 + \eta_2\right)^2 + \left(\xi_3 + \eta_3\right)^2\right)^{1/2} = \left(\xi_2^2 + \xi_3^2\right)^{1/2} + \left(\eta_2^2 + \eta_3^2\right)^{1/2},$$

es decir,

$$\|(\xi_2, \xi_3) + (\eta_2, \eta_3)\|_2 = \|(\xi_2, \xi_3)\|_2 + \|(\eta_2, \eta_3)\|_2. \tag{2.5}$$

Si $\eta_1 = 1$, es decir, $(\eta_2, \eta_3) = (0,0)$, entonces $\eta_1 = \xi_1$ y $(\eta_2, \eta_3) = (\xi_2, \xi_3) = (0,0)$ y el resultado se sigue trivialmente. Supongamos que $\eta_1 \neq 1$, es decir, $(\eta_2, \eta_3) \neq (0,0)$. Defina

$$\mu_2 = \frac{\eta_2}{(\eta_2^2 + \eta_3^2)^{1/2}} \ , \quad \mu_3 = \frac{\eta_3}{(\eta_2^2 + \eta_3^2)^{1/2}}$$

y $\mu = (0, \mu_2, \mu_3)$. Obviamente $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 1$. Verifiquemos que $[\xi, \eta] \subset [e_1, \mu]$.

De (2.5) y del teorema 1.1.18 obtenemos que existe $\rho > 0$ tal que

$$(\xi_2, \xi_3) = \rho(\eta_2, \eta_3) \tag{2.6}$$

y de lo anterior, $1 = \xi_1 + \big(\xi_2^2 + \xi_3^2\big)^{1/2} = \xi_1 + \rho\big(\eta_2^2 + \eta_3^2\big)^{1/2} = \xi_1 + \rho\big(1 - \eta_1\big)$, por lo tanto

$$1 - \xi_1 = \rho(1 - \eta_1). \tag{2.7}$$

Sea $\alpha \in [0,1]$ y defina $\lambda = \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\eta_1$. Claramente $\lambda \in [0,1]$. De (2.7) se obtiene que

$$\frac{1-\lambda}{1-\eta_1} = \alpha\frac{1-\xi_1}{1-\eta_1} + 1 - \alpha = \alpha\rho + 1 - \alpha$$

y de (2.6) tenemos que

$$\alpha\xi_2 + (1-\alpha)\eta_2 = (\alpha\rho + 1 - \alpha)\eta_2 = \frac{1-\lambda}{1-\eta_1}\eta_2.$$

Análogamente se prueba que $\alpha\xi_3 + (1-\alpha)\eta_3 = \frac{1-\lambda}{1-\eta_1}\eta_3$. Luego $\alpha\xi + (1-\alpha)\eta = \lambda e_1 + (1-\lambda)\mu$ y consecuentemente $[\xi, \eta] \subset [e_1, \mu]$. $\square$

*De forma similar se prueba que si $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in S_X$, $\xi_1 \leq \eta_1 \leq 0$ y $[\xi, \eta] \subset S_Z$ entonces $[\xi, \eta] \subset [-e_1, \mu]$ para algún $\mu \in S_X$ con $\mu = (0, \mu_2, \mu_3)$, es decir $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 1$. Para nuestro segundo lema necesitamos definir los siguientes subconjuntos de $S_X$.*

*Sean*

$$C_1 = \{(x,y,z) \in S_X : x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

$$C_2 = \{(x,y,z) \in S_X : x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0\},$$

$$C_3 = \{(x,y,z) \in S_X : x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\},$$

$$C_4 = \{(x,y,z) \in S_X : x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0\},$$

$$C_5 = \{(x,y,z) \in S_X : x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0\},$$

$$C_6 = \{(x,y,z) \in S_X : x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0\},$$

$$C_7 = \{(x,y,z) \in S_X : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

$$C_8 = \{(x,y,z) \in S_X : x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0\}.$$

*Obviamente* $S_X = \bigcup_{i=1}^{8} C_i$. *Por otro lado es claro que cada* $C_i$, $i = 1, ..., 6$, *es la sección de una bola unitaria con forma de doble cono como la del lema 2.3.7. Por ejemplo, si* $(x, y, z) \in C_1$ *entonces*

$$\|(x,y,z)\| = \|(x,y,z)^+\|_2 + \|(x,y,z)^-\|_2 = |x| + (y^2+z^2)^{1/2} = \||(x,y,z)\||,$$

*es decir,* $C_1$ *es una sección de la bola unitaria del espacio* $Z$ *del lema 2.3.7. Por último, claramente los subconjuntos* $C_7$ *y* $C_8$ *son secciones de la bola unitaria euclideana del espacio* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *que en particular es estrictamente convexo. Por tanto* $C_7$ *y* $C_8$ *no contienen segmentos de recta.*

**Lema 2.3.8.** *Sean* $x, y \in S_X$. *Si* $[x,y] \subset C_i \bigcup C_j$, $1 \leq i, j \leq 6$, $i \neq j$, *entonces* $[x,y] \subset C_i$ *o* $[x,y] \subset C_j$.

*Demostración.* Vamos a verificar nuestra afirmación para $C_1$ y $C_2$, los demás casos son similares. Supongamos que $[x,y] \subset C_1 \bigcup C_2$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Como $x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ y $y_1 \leq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \leq 0$, tenemos que para toda $\lambda \in (0,1)$

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 \leq 0 \quad \text{y} \quad \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2 \geq 0.$$

Si $x_3 = y_3$ entonces $x_3 = y_3 = 0$ y $[x,y] \subset C_1 \bigcap C_2$. Supongamos que $x_3 \neq y_3$. Notemos que $\lambda x + (1-\lambda) y \in C_1$ si y sólo si $\lambda x_3 + (1-\lambda) y_3 \geq 0$, es decir, $\lambda \geq \frac{-y_3}{x_3 - y_3} = \lambda_0$ y en este caso $[x,b] \subset C_1$ y $[b,y] \subset C_2$, donde $b = \lambda_0 x + (1-\lambda_0) y$. Como $b = (b_1, b_2, b_3) \in C_1 \bigcap C_2$ tenemos que $b_3 = 0$ y

$$b = \big(\lambda_0 x_1 + (1-\lambda_0) y_1, \lambda_0 x_2 + (1-\lambda_0) y_2, 0\big).$$

Si $x = b$ o $y = b$ entonces el resultado se cumple trivialmente. Suponga que $x \neq b$ y $y \neq b$. Procediendo como en (2.6) tenemos que existen $\rho$ y $\sigma$ tales que

$$(b_2, b_3) = \rho(x_2, x_3) \quad \text{y} \quad (b_1, b_3) = \sigma(y_1, y_3).$$

Si $\rho \neq 0$ y $\sigma \neq 0$ entonces $x_3 = y_3 = 0$, es decir, $[x,y] \subset C_1 \bigcap C_2$.

Si $\rho = 0$ entonces $(b_2, b_3) = (0,0)$ y por tanto $b = (-1,0,0)$ y $\lambda_0 x_2 + (1-\lambda_0) y_2 = 0$. Como $x_2 \geq 0$ y $y_2 \geq 0$ esto implica que $x_2 = y_2 = 0$. Entonces $x = (x_1, 0, x_3)$ y $y = (y_1, 0, y_3)$ y como $\lambda_0 x_1 + (1-\lambda_0) y_1 = b_1 = -1$ entonces $x_1 = y_1 = -1$. De aquí, $x = (-1, 0, x_3)$ y $y = (-1, 0, y_3)$ y consecuentemente $x_3 = y_3 = 0$ y $x = y$.

Si $\sigma = 0$ entonces $(b_1, b_3) = (0,0)$ y de forma semejante obtenemos que $x = y$. □

*Ahora verifiquemos que* $X$ *no contiene subespacios bidimensionales cuya bola unitaria sea un hexágono o un cuadrado. Supongamos que existe un subespacio bidimensional* $Y$ *de* $X$ *tal que*

$$S_Y = [x,y] \bigcup [y,z] \bigcup [z,-x] \bigcup [-x,-y] \bigcup [-y,-z] \bigcup [-z,x]$$

***Paso 1.*** *Del lema 2.3.8 tenemos que* $[x,y] \subset C_i$ *para algún* $i = 1, ..., 6$*. Sin perdida de generalidad supongamos que* $[x,y] \subset C_1$*. Del lema 2.3.7 tenemos que* $[x,y] \subset [-e_1, \mu]$*, donde* $\mu = (0, \mu_2, \mu_3)$ *y* $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 1$*. Ahora probemos la igualdad* $[x,y] = [-e_1, \mu]$*. Supongamos lo contario, entonces existen* $\xi, \eta \in S_X$*,* $\xi \neq \eta$*, tales que* $[\xi, \eta] \subset [-e_1, \mu] \backslash [x,y]$*. Como* $[\xi, \eta]$ *y* $[x,y]$ *son segmentos colineales y* $[\xi, \eta] \subset S_X$ *se tiene que* $[\xi, \eta] \subset S_Y$*. Como* $[y,z]$*,* $[z,-x]$*,* $[-x,-y]$*,* $[-y,-z]$ *y* $[-z,x]$ *no son segmentos colineales dos a dos, necesariamente* $[\xi, \eta] \subset L$ *para alguna arista* $L \in \{[y,z],\ [z,-x], [-x,-y], [-y,-z], [-z,x]\}$*. Por último, como* $[\xi, \eta]$ *y* $[x,y]$ *son segmentos colineales entonces se tendría que* $L$ *y* $[x,y]$ *también lo son, pero por definición de bola hexagonal esto no es cierto. Luego* $[x,y] = [-e_1, \mu]$*.*

***Paso 2.*** *Como consecuencia del paso 1 tenemos que* $x = -e_1$ *o* $y = -e_1$*. Supongamos sin pérdida de generalidad que* $x = -e_1$*. Demostraremos que* $y = e_2$ *o* $y = e_3$*.*

*Nuevamente del lema 2.3.8 tenemos que* $[y,z] \subset C_i$ *para algún* $i = 1, ..., 6$*. Claramente* $[y,z]$ *no puede estar contenida en* $C_4$ *ya que de lo contrario tenemos que* $y \in C_1 \bigcap C_4$*, pero* $C_1 \bigcap C_4 = \emptyset$*. También es claro que* $[y,z]$ *no puede estar contenida en* $C_1$ *ya que de lo contrario tenemos que* $[y,z] \subset [-e_1, \mu']$ *y como en el paso 1 se prueba que* $[y,z] = [-e_1, \mu']$*. Pero esto no es posible ya que tendríamos que* $y = -e_1 = x$ *o* $z = -e_1 = x$*.*

*Si* $[y,z] \subset C_3$ *entonces* $y \in C_1 \bigcap C_3 = \{e_2\}$*, es decir* $y = e_2$*. Si* $[y,z] \subset C_5$ *entonces* $y \in C_1 \bigcap C_5 = \{e_3\}$*, es decir* $y = e_3$*. Suponga que* $[y,z] \subset C_2$*. Verifiquemos que* $y = e_2$*. Como también tenemos que* $[x,z] \in C_1$ *se sigue del lema 2.3.7 que*

$$[x,y] \subset [-e_1, \mu] \quad y \quad [y,z] \subset [e_2, \mu'],$$

*donde* $\mu = (0, \mu_2, \mu_3)$*,* $\mu' = (\mu_1', 0, \mu_3')$ *y* $\mu_2^2 + \mu_3^2 = (\mu_1')^2 + (\mu_3')^2 = 1$*. Por tanto existen* $\lambda, \beta \in [0,1]$ *tales que* $y = \lambda(-e_1) + (1-\lambda)\mu = \beta e_2 + (1-\lambda)\mu'$*, es decir,*

$$\big(-\lambda, (1-\lambda)\mu_2, (1-\lambda)\mu_3\big) = \big((1-\beta)\mu_1', \beta, (1-\beta)\mu_3'\big).$$

*Como* $\mu_3 \geq 0$ *y* $\mu_3' \leq 0$ *entonces* $(1-\lambda)\mu_3 = (1-\beta)\mu_3' = 0$*. De aquí se tiene que* $\lambda = 1$ *o* $\mu_3 = 0$*. Si* $\lambda = 1$ *entonces* $y = -e_1 = x$*, pero esto no puede ser. Por tanto* $\mu_3 = 0$*, es decir,* $\mu = e_2$*. De aquí* $[x,y] \subset [-e_1, e_2]$ *y de manera similar al paso 1 se prueba que* $[x,y] = [-e_1, e_2]$*, es decir,* $y = e_2$*. Se prueba análogamente que si* $[y,z] \subset C_6$ *entonces* $y = e_3$*.*

***Paso 3.*** *De lo anterior concluimos que* $[x,y] = [-e_1, e_2]$ *o* $[x,y] = [-e_1, e_3]$*. Suponiendo que* $[x,y] = [-e_1, e_2]$ *y procediendo de forma similar obtenemos que*

$$S_Y = [-e_1, e_2] \bigcup [e_2, -e_3] \bigcup [-e_3, e_1] \bigcup [e_1, -e_2] \bigcup [-e_2, e_3] \bigcup [e_3, -e_1]$$

*pero esto no puede ser ya que*

$$X = span\{e_1, e_2, e_3\} \subset span\{S_Y\} = Y.$$

*Luego $X$ no contiene subespacios bidimensionales cuya bola unitaria sea un hexágono. $X$ tampoco contiene subespacios bidimensionales cuya bola unitaria sea un cuadrado, puesto que $\varepsilon_0(X) = \sqrt{2}$.*

*Sin embargo, $X$ no es P(3)-convexo, ya que los puntos $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1) \in S_X$ cumplen la igualdad $\|x_i - x_j\| = 2$ para $i \neq j$.*

Aunque un espacio normado bidimensional cuya bola unitaria es un hexágono no es P(3)-convexo, hemos obtenido que sí es P(4)-convexo. Para probar nuestra afirmación haremos uso del siguiente lema cuya prueba se encuentra en [62], capítulo 4.

**Lema 2.3.9.** *Sean $X$ un espacio normado bidimensional y $x \in S_X$. Si se tiene una orientación en $S_X$ y si $x, z_1, z_2, -x \in B_X$ están en ese orden con respecto a la orientación, entonces $\|x - z_1\| \leq \|x - z_2\|$.*

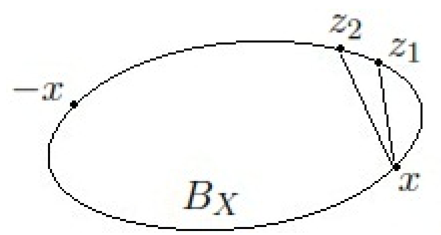


Figura 2.11. Bola unitaria con orientación contraria al sentido de las manecillas del reloj y $x, z_1, z_2, -x$ ordenadas en ese orden con respecto a esta orientación

**Proposición 2.3.10.** *Sea $X$ un espacio normado bidimensional. Si $B_X$ es un hexágono, entonces $X$ es P(4)-convexo.*

*Demostración.* Suponga que $S_X = [x,y] \bigcup [y,z] \bigcup [z,-x] \bigcup [-x,-y] \bigcup [-y,-z] \bigcup [-z,x]$, donde $x, y, z \in X$ y no hay tres puntos colineales en $\{x, y, z, -x, -y, -z\}$. Elijamos la orientación en $S_X$ dada por el sentido contrario de las manecillas del reloj. Primero verifiquemos que para todo $\xi \in [x,y) \bigcup [y,z)$ se cumple la desigualdad $\|\xi - x\| < 2$. Procedamos por contradicción suponiendo que existe $\xi \in [x,y) \bigcup [y,z)$ tal que $\|\xi - x\| = 2$. Entonces sucede uno de dos casos: $(i)$ $\xi \in [x,y)$ ó $(ii)$ $\xi \in [y,z)$.

Suponga primero que se cumple $(i)$. En la proposición 2.3.4 se muestra que $\|y + x\| = \|y - (-x)\| = 2$. Como $x, \xi, y, -x$ están en ese orden con respecto a la orientación, entonces del lema anterior tenemos que $\|\xi - (-x)\| = \|\xi + x\| = 2$. Pero hemos supuesto que $\|\xi - x\| = 2$ y, por tanto, de acuerdo con la observación 2.3.3 se tiene que $B_X$ es un cuadrado, lo cual contradice que $B_X$ es un hexágono.

Ahora suponga que se cumple $(ii)$. En la proposición 2.3.4 se probó que $\|z + y\| = \|z - (-y)\| = 2$. Como $y, \xi, z, -y$ están en ese orden con respecto a la orientación, entonces del lema anterior tenemos que $\|\xi - (-y)\| = \|\xi + y\| = 2$. Enla proposición 2.3.4 se muestra que $\|x + y\| = 2$ y hemos supuesto que $\|\xi - x\| = 2$. Por tanto, según la prueba de la proposición 2.3.4, se tiene que $S_X = [x, y] \bigcup [y, \xi] \bigcup [\xi, -x] \bigcup [-x, -y] \bigcup [-y, -\xi] \bigcup [-\xi, x]$. Como $z \in S_X \backslash \{x, \xi, y, -x, -\xi, -y\}$, se sigue que $z$ pertenece a alguno de los seis segmentos que forman la esfera, lo cual es una contradicción, ya que cualesquiera tres puntos en $\{x, y, z, -x, -y, -z\}$ deben ser no colineales. Consecuentemente, $\|\xi - x\| < 2$ para todo $\xi \in [x, y) \bigcup [y, z)$. Por tanto, apelando al lema anterior se obtiene que para todo $\xi, \eta \in [x, y) \bigcup [y, z)$ se cumple la desigualdad $\|\xi - \eta\| < 2$. Análogamente se prueba que para todo $\xi, \eta \in [z, -x) \bigcup [-x, -y)$ se cumple la desigualdad $\|\xi - \eta\| < 2$ y para todo $\xi, \eta \in [-y, -z) \bigcup [-z, x)$ se cumple la desigualdad $\|\xi - \eta\| < 2$. Por último, sean $x_1, x_2, x_3, x_4 \in S_X$. Como $S_X = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3$, donde $\Gamma_1 = [x, y) \bigcup [y, z)$, $\Gamma_2 = [z, -x) \bigcup [-x, -y)$ y $\Gamma_3 = [-y, -z) \bigcup [-z, x)$, existen $1 \leq i, j \leq 4$, $i \neq j$, tales que $x_i$ y $x_j$ pertenecen ambos al mismo conjunto $\Gamma_k$, $k \in \{1, 2, 3\}$ y consecuentemente $\|x_i - x_j\| < 2$. □

Como consecuencia directa de la proposición 2.3.10 se obtiene lo siguiente.

**Corolario 2.3.11.** *Sea $X$ un espacio normado bidimensional. Entonces $X$ es P(4)-convexo si y sólo si $X$ es uniformemente no cuadrado, es decir, $B_X$ no es un cuadrado.*

*Demostración.* En la sección 2.4, proposición 2.4.8, probaremos para espacios de Banach en general que si $X$ es P(4)-convexo entonces $X$ es uniformemente no cuadrado. Por otro lado, si $X$ no es P(4)-convexo entonces tampoco es P(3)-convexo y por el teorema 2.3.4 se tiene que $B_X$ es un hexágono o un cuadrado. Pero de la proposición 2.3.10 obtenemos que necesariamente $B_X$ es un cuadrado. □

**Corolario 2.3.12.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Si $X$ es P(4)-convexo, entonces no contiene subespacios bidimensionales cuya bola unitaria sea un cuadrado.*

El recíproco de este corolario no necesariamente es cierto.

**Ejemplo 2.3.13.** *Considere al espacio $X = \big(l_p, \|\cdot\|\big)$, donde la norma $\|\cdot\|$ se define como sigue. Cada elemento $x = (x_i) \in l_2$ puede ser representado como $x = x^+ - x^-$ donde las respectivas i-ésimas componentes de $x^+$ y $x^-$ están dadas por $(x^+)_i = \max\{x_i, 0\}$ y $(x^-)_i = \max\{-x_i, 0\}$, $i \in \mathbb{N}$. Definimos $\|x\| = ||x^+||_p + ||x^-||_p$ donde $\|\cdot\|_p$ es la $l_p$-norma.*

*Este espacio no contiene subespacios bidimensionales cuya bola unitaria sea un cuadrado ya que $\varepsilon_0(X) = 2^{1/p}$. Por otro lado $X$ no es P-convexo, ya que la base canónica $\{e_n\}_n$ de $l_p$ cumple que $e_i \in S_X$ para todo $i$ y $\|x_i - x_j\| = 2$ para $i \neq j$.*

Ya hemos visto que los espacios normados bidimensionales P(3)-convexos son exactamente aquellos cuya bola unitaria no es un hexágono o un cuadrado. Asimismo los espacios normados bidimensionales P(4)-convexos son exactamente aquellos que su bola unitaria no es un cuadrado. Para finalizar, hemos obtenido que todo espacio normado bidimensional es P(5)-convexo.

**Lema 2.3.14.** *Sea $X$ un espacio normado bidimensional tal que $B_X$ es un cuadrado con vértices $\pm x, \pm y$. Entonces existen $x, y \in S_X$ tales que*

$$B_X = B\Big(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\Big) \bigcup B\Big(\frac{y}{2}, \frac{1}{2}\Big) \bigcup B\Big(-\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\Big) \bigcup B\Big(-\frac{y}{2}, \frac{1}{2}\Big).$$

*Demostración.* Sea $S_X = [x,y] \bigcup [y,-x] \bigcup [-x,-y] \bigcup [-y,x]$, con $x, y \in X$. Claramente $B(\frac{x}{2},\frac{1}{2}) \bigcup B(\frac{y}{2},\frac{1}{2}) \bigcup B(-\frac{x}{2},\frac{1}{2}) \bigcup B(-\frac{y}{2},\frac{1}{2}) \subset B_X$, ya que si $\xi \in B(\frac{z}{2},\frac{1}{2})$, con $z \in \{x, y, -x, -y\}$, entonces $\|\xi\| \le \left\|\xi - \frac{z}{2}\right\| + \left\|\frac{z}{2}\right\| \le 1$. Sea $\xi \in S_X$. Verifiquemos que $\xi$ pertenece a alguna de las cuatro bolas anteriores. Tenemos que $\xi \in [x,y]$, $\xi \in [y,-x]$, $\xi \in [-x,-y]$ ó $\xi \in [-y,x]$. Probaremos sólo el caso $\xi \in [x,y]$ ya que los demás casos son análogos. Si $\xi \in [x,y]$ entonces $\xi \in [x, \frac{x+y}{2}]$ ó $\xi \in [\frac{x+y}{2}, y]$. Suponga que $\xi \in [x, \frac{x+y}{2}]$. Así, $\xi = \lambda x + (1-\lambda)\frac{x+y}{2} = (1+\lambda)\frac{x}{2} + (1-\lambda)\frac{y}{2}$ con $0 \le \lambda \le 1$ y por tanto $\left\|\frac{x}{2} - \xi\right\| \le \left\|\lambda \frac{x}{2}\right\| + \left\|(1-\lambda)\frac{y}{2}\right\| = \frac{1}{2}$, es decir, $\xi \in B(\frac{x}{2}, \frac{1}{2})$. Si $\xi \in [\frac{x+y}{2}, y]$ entonces se prueba de forma similar que $\xi \in B(\frac{y}{2}, \frac{1}{2})$. Por útimo, sea $\xi \in B_X$. Como hemos visto, $\frac{\xi}{\|\xi\|}$ pertenece a alguna de las cuatro bolas anteriores y claramente $0 \in B_X$ pertenece a cada una de las cuatro bolas anteriores. Como $\xi \in \left[0, \frac{\xi}{\|\xi\|}\right]$ y la bola es convexa se sigue que $\xi$ pertenece a la misma bola a la que pertenece $\frac{\xi}{\|\xi\|}$. Así obtenemos la otra contención. □

**Corolario 2.3.15.** *Sea $X$ un espacio normado bidimensional tal que $B_X$ es un cuadrado. Entonces $X$ es P(1,5)-convexo.*

*Demostración.* Como $S_X$ es un cuadrado con vértices $\pm x, \pm y$, del lema anterior se tiene que $B_X = B(\frac{x}{2},\frac{1}{2}) \bigcup B(\frac{y}{2},\frac{1}{2}) \bigcup B(-\frac{x}{2},\frac{1}{2}) \bigcup B(-\frac{y}{2},\frac{1}{2})$ y por tanto para cada $x_1, ..., x_5 \in B_X$ existen $1 \le i, j \le 5$, $i \ne j$, tales que $x_i, x_j$ pertenecen ambos a la misma bola de radio 1/2, y de aquí se sigue que $\|x_i - x_j\| \le 1$. □

**Corolario 2.3.16.** *Sea $X$ un espacio normado bidimensional. Entonces $X$ es P(5)-convexo.*

*Demostración.* Si $X$ no fuera P(5)-convexo entonces tampoco sería P(4)-convexo y, por el corolario 2.3.11, $S_X$ sería un cuadrado como en 2.3.2. Pero por el corolario anterior, en este caso se tendría que $X$ es P(5)-convexo, lo cual es una contradicción. □

## 2.4. P-convexidad y el coeficiente de convexidad

En [35] Kottman probó que si $X$ es un espacio de Banach que satisface $\delta_X(\frac{2}{3}) > 0$ entonces $X$ es P(3)-convexo. En esta sección damos un teorema que mejora el resultado anterior y mostramos que nuestra condición es la mejor posible. Para mostrar nuestro teorema necesitamos dos resultados conocidos, el primero puede ser encontrado en [26] y el segundo en [64].

**Lema 2.4.1.** *(Goebel-Kirk) Sea $X$ un espacio de Banach. Para cada $\varepsilon \in [\varepsilon_0(X), 2]$ se tiene la igualdad $\delta_X\big(2 - 2\delta_X(\varepsilon)\big) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.*

**Lema 2.4.2.** *(Ullán) Sea $X$ un espacio de Banach. Para cada $0 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 < 2$ se cumple la desigualdad $\delta_X(\varepsilon_1) - \delta_X(\varepsilon_2) \leq \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2 - \varepsilon_1}$.*

Usando estos lemas obtenemos lo siguiente:

**Teorema 2.4.3.** *Sea $X$ un espacio de Banach con $\delta_X(1) > 0$, i.e., $\varepsilon_0(X) < 1$. Entonces $X$ es P(3)-convexo. Más aún, existe un espacio de Banach $X$ con $\varepsilon_0(X) = 1$ que no es P(3)-convexo.*

*Demostración.* Sea $t_0 = 2 - \sqrt{2 - \varepsilon_0(X)}$. Claramente $\varepsilon_0(X) < t_0 < 1$. Sean $x, y, z \in S_X$ y suponga que $\|x - y\| > 2 - 2\,\delta_X(t_0)$ y $\|x - z\| > 2 - 2\,\delta_X(t_0)$. Verifiquemos que $\|y - z\| \leq 2 - 2\,\delta_X(t_0)$. Apelando al lema 2.4.1 se tiene que

$$\left\|\frac{x + y}{2}\right\| \leq 1 - \delta_X\big(2 - 2\delta_X(t_0)\big) = 1 - \left(1 - \frac{t_0}{2}\right) = \frac{t_0}{2}.$$

Análogamente $\left\|\frac{x+z}{2}\right\| \leq \frac{t_0}{2}$. De aquí se obtiene que

$$\|z - y\| \leq \|z + x\| + \|x + y\| \leq 2t_0.$$

Por último, del lema 2.4.2 se sigue que

$$\delta_X(t_0) = \delta_X(t_0) - \delta_X\big(\varepsilon_0(X)\big) \leq \frac{t_0 - \varepsilon_0(X)}{2 - t_0} = \sqrt{2 - \varepsilon_0(X)}\; - 1 = 1 - t_0.$$

Luego, $\|y - z\| \leq 2\,t_0 \leq 2 - 2\,\delta_X(t_0)$ y por tanto $X$ es P(3)-convexo.

Ahore considere para cada $1 < p < \infty$ el espacio $l_{p,\infty}$ definido como sigue. Cada elemento $x = \{x_i\}_i \in l_p$ puede ser representado como $x = x^+ - x^-$ donde las respectivas $i$-ésimas componentes de $x^+$ y $x^-$ están dadas por $(x^+)_i = \max\{x_i, 0\}$ y $(x^-)_i = \max\{-x_i, 0\}$. Definimos $\|x\|_{p,\infty} = \max\big\{\, ||x^+||_p, ||x^-||_p\big\}$ donde $\|\cdot\|_p$ es la $l_p$-norma. En [8] se probó que el espacio $l_{p,\infty} = (l_p, \|\cdot\|_{p,\infty})$ satisface $\varepsilon_0(l_{p,\infty}) = 1$. Por otro lado sean $x_1 = e_1 - e_3$, $x_2 = -e_1 + e_2$, $x_3 = -e_2 + e_3 \in l_{p,\infty}$, donde $\{e_i\}_i$ es la base canonica en $l_p$. Estos puntos satisfacen que $\|x_i\|_{p,\infty} = 1$ para cada $i = 1, 2, 3$ y $\|x_i - x_j\|_{p,\infty} = 2$, $i \neq j$. Por lo tanto $l_{p,\infty}$ no es P(3)-convexo. $\square$

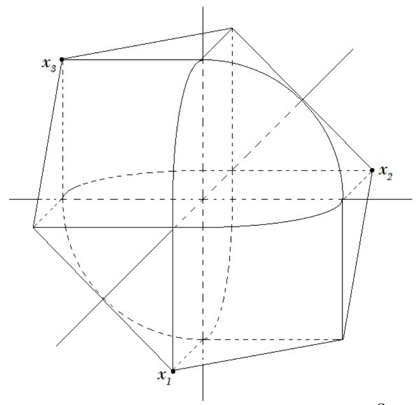


Figura 2.12. Bola unitaria del espacio $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_{2,\infty})$

En 1970 Goebel probó en [24] que si un espacio de Banach $X$ satisface $\varepsilon_0(X) < 1$ entonces $X$ tiene estructura normal y hemos probado en el teorema anterior que $\varepsilon_0(X) < 1$ implica P(3)-convexidad. El espacio $X = l_{p,\infty}$ es un ejemplo de un espacio de Banach con $\varepsilon_0(X) = 1$ que no tiene estructura normal [8] y no es P(3)-convexo.

Otro ejemplo de un espacio de Banach $X$ con $\varepsilon_0(X) = 1$ que no es P(3)-convexo es el siguiente:

**Ejemplo 2.4.4.** *Considere el espacio* $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$*, donde para cada* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\|(x, y)\| = \text{máx}\big\{|x|, |y|, |x - y|\big\}$. *Tenemos que* $\varepsilon_0(X) = 1$ *(véase [54]). Defina los puntos siguientes en* $\mathbb{R}^2$*:* $(x_1, y_1) = (1, 0)$*,* $(x_2, y_2) = (0, 1)$ *y* $(x_3, y_3) = (-1, -1)$*. Es fácil ver que* $(x_1, y_1)$*,* $(x_2, y_2)$*,* $(x_3, y_3) \in S_X$ *y que* $\|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| = 2$*,* $i \neq j$*. Por tanto* $X$ *no es* $P(3)$*-convexo.*

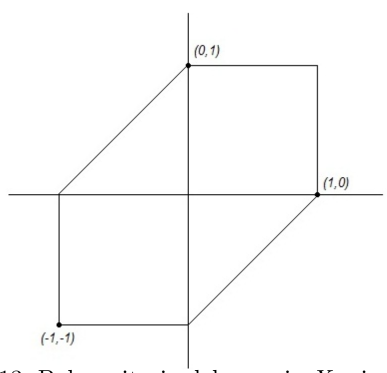


Figura 2.13. Bola unitaria del espacio $X$, ejemplo 2.4.4

Como consecuencia del teorema 2.4.3, de las proposiciones 2.3.4 y 2.3.10 y del corolario 2.3.11 obtenemos:

**Corolario 2.4.5.** *Sea* $X$ *un espacio normado bidimensional. Si* $B_X$ *es un hexágono entonces* $1 \leq \varepsilon_0(X) < 2$.

**Corolario 2.4.6.** *Sea $X$ un espacio normado bidimensional. Si $B_X$ es un hexágono entonces existen dos aristas de $B_X$ cada una de longitud mayor o igual que 1. Además, cada arista de $B_X$ tiene longitud menor que 2.*

*Demostración.* En vista de que $\delta_X(1) = 0$ y de que $\dim(X) < \infty$, tenemos que existen $x, y \in S_X$ tales que $\|x - y\| \geq 1$ y $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$. Luego, $[x, y], [-x, -y] \subset S_X$ tienen longitud mayor o igual que uno. Por otro lado, existe $\delta > 0$ tal que si $\xi, \delta \in B_X$ y $\|\xi - \eta\| > 2 - \delta$, entonces $\|\xi + \eta\| \leq 2 - \delta$. Expresando a $S_X$ como $S_X = [x, y] \bigcup [y, z] \bigcup [z, -x] \bigcup [-x, -y] \bigcup [-y, -z] \bigcup [-z, x]$, ya se ha mostrado que $\|x - z\| = 2$, $\|y + x\| = 2$ y $\|z + y\| = 2$ y por tanto $\|x - y\| \leq 2 - \delta$, $\|y - z\| \leq 2 - \delta$ y $\|z - (-x)\| \leq 2 - \delta$. $\square$

El ejemplo siguiente nos muestra que el recíproco del teorema 2.4.3 no necesariamente es cierto.

**Ejemplo 2.4.7.** *Considere el espacio $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, donde $\|(x, y)\| = \|(x, y)\|_2$ si $xy \geq 0$ y $\|(x, y)\| = \|(x, y)\|_1$ si $xy \leq 0$. De la proposición 2.3.4 se obtiene que este espacio es P(3)-convexo y sin embargo se sabe que $\varepsilon_0(X) = \sqrt{2}$ (véase [26]).*

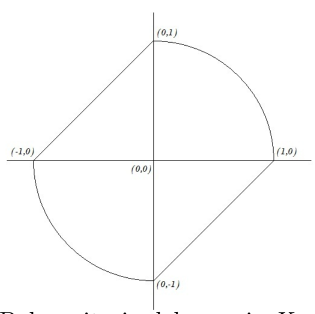


Figura 2.14. Bola unitaria del espacio $X$, ejemplo 2.4.7

Con respecto a los espacios $P(4)$-convexos obtuvimos el resultado siguiente.

**Proposición 2.4.8.** *Si $X$ es un espacio de Banach $P(\varepsilon, 4)$-convexo entonces $\varepsilon_0(X) \leq 2 - \varepsilon$ y, en particular, $X$ es uniformemente no cuadrado.*

*Demostración.* Sean $0 < \rho < \varepsilon$ y $x, y \in S_X$ tales que

$$\|x - y\| \geq 2 - \rho > 2 - \varepsilon. \tag{2.8}$$

Definiendo $z = -x$ y $w = -y$ se tiene por hipótesis que

$$\text{mín}\{\|x - y\|, \|x - z\|, \|x - w\|, \|y - z\|, \|y - w\|, \|z - w\|\} \leq 2 - \varepsilon,$$

y por (2.8) lo anterior se reduce a $\|x + y\| \leq 2 - \varepsilon$, i.e., $1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Luego $\delta_X(2 - \rho) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ y consecuentemente $\varepsilon_0(X) < 2 - \rho$. Como $\rho$ es arbitrario, se concluye que $\varepsilon_0(X) \leq 2 - \varepsilon$. $\square$

**Ejemplo 2.4.9.** *El recíproco de la proposición 2.4.8 no necesariamente se cumple. El espacio definido en el ejemplo 2.1.10 es uniformemente no cuadrado y no es P-convexo.*

Por la proposición 2.4.8 es natural pensar que si $X$ es un espacio $P(3)$-convexo entonces se debería tener una cota considerablemente más pequeña que 2 para $\varepsilon_0(X)$, pero extrañamente no es así.

**Ejemplo 2.4.10.** *Para cada* $1 < \lambda < \sqrt{2}$ *defina* $X_\lambda = (l^2, \|\cdot\|_\lambda)$*, donde* $\|x\|_\lambda = \max\left\{\|x\|_\infty, \frac{1}{\lambda}\|x\|_2\right\}$*. De la proposición 2.3.4 se tiene que* $X_\lambda$ *es P(3)-convexo y sin embargo es fácil ver que* $\varepsilon_0(X_\lambda) = 2\sqrt{\lambda^2 - 1}$ *(véase [26]) que se puede aproximar a 2 tanto como se quiera tomando* $\lambda$ *suficientemente cercano a* $\sqrt{2}$*.*

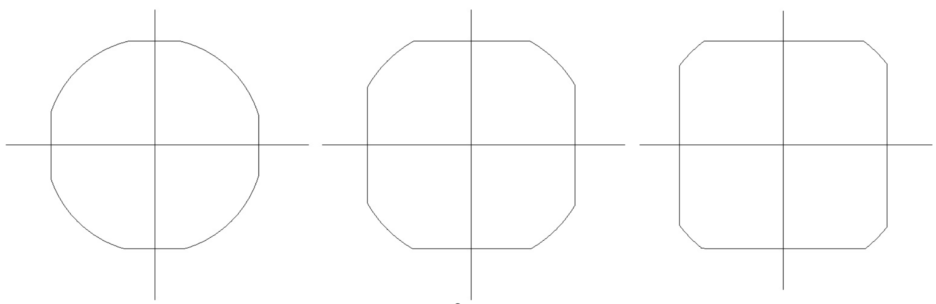

Figura 2.15. Bolas unitarias de los espacios $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\lambda)$, donde $\lambda$ se aproxima cada vez más a $\sqrt{2}$

Para espacios $P(n)$-convexos con $n \geq 5$ ya no se cumple la proposición 2.4.8, por ejemplo, del corolario 2.3.16 se tiene que $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ es $P(1,5)$-convexo, y sin embargo, es claro que $\varepsilon_0(X) = 2$.

Kottman también probó en [35] que cualquier espacio uniformemente suave (definición 1.1.11) es P-convexo. Probaremos una generalización de este hecho; para ello necesitamos los siguientes lemas, el primero de éstos probado en [1], cap. 3.

**Lema 2.4.11.** *Para cada espacio de Banach* $X$ *se tiene que* $\lim_{t\to 0}\frac{\rho_X(t)}{t} = \frac{1}{2}\varepsilon_0(X^*)$*.*

Aunque la P-convexidad no es una propiedad autodual, Naidu y Sastry probaron en [51] que la P(3)-convexidad sí lo es.

**Lema 2.4.12.** *Sea* $X$ *un espacio de Banach.* $X$ *es P(3)-convexo si y sólo si* $X^*$ *es P(3)-convexo.*

En virtud del teorema 2.4.3 y usando los lemas 2.4.11 y 2.4.12 deducimos lo siguiente.

**Corolario 2.4.13.** *Si* $X$ *es un espacio de Banach tal que* $\lim_{t\to 0}\frac{\rho_X(t)}{t} < \frac{1}{2}$ *entonces* $X$ *es P(3)-convexo.*

## 2.5. Espacios P-convexos y U-espacios

En esta sección mostraremos un resultado que relaciona a los U-espacios y a los espacios P-convexos. Hemos obtenido que la P-convexidad se sigue de la propiedad de U-espacio.

El siguiente resultado fue probado por Ji Gao en [21].

**Lema 2.5.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Si $X$ es U-espacio entonces $X$ es uniformemente no cuadrado.*

Usando el lema anterior obtenemos la siguiente generalización del resultado de Kottman, quien probó en [35] que la P(3)-convexidad se sigue de la convexidad uniforme.

**Teorema 2.5.2.** *Si $X$ es un U-espacio entonces $X$ es P(3)-convexo.*

*Demostración.* Del lema 2.5.1 se tiene que existe $\alpha > 0$ tal que para todo $\xi, \eta \in S_X$ se cumple la desigualdad

$$\text{mín}\left\{\|\xi - \eta\|, \|\xi + \eta\|\right\} \leq 2 - \alpha.$$

Como $X$ es U-espacio, para $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que se cumple la siguiente implicación

$$x, y \in S_X,\ f(x-y) \geq \frac{\alpha}{2} \ \text{ para algún } f \in \nabla(x) \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

Afirmamos que $X$ es P$(\beta, 3)$-convexo, donde $\beta = \text{mín}\{\alpha, \delta\}$. En efecto, procedemos por contradicción suponiendo que existen $x, y, z \in S_X$ tales que

$$\text{mín}\left\{\|x-y\|, \|x-z\|, \|y-z\|\right\} > 2 - \beta.$$

Definamos $w = -y$ y $u = -z$ y sea $f \in \nabla(w)$. Verifiquemos que $f(w-x) < \frac{\alpha}{2}$ y $f(w+u) < \frac{\alpha}{2}$. Si $f(w-x) \geq \frac{\alpha}{2}$ entonces

$$\left\|\frac{w+x}{2}\right\| < 1 - \delta$$

y por tanto, $2 - \delta \leq 2 - \beta < \|x - y\| < 2 - 2\delta$, lo que implica que $\delta > 2\delta$ y esto no puede ser. Análogamente se prueba que $f(w+u) < \frac{\alpha}{2}$. También se tiene que $\|x+u\| = \|x-z\| > 2 - \beta \geq 2 - \alpha$ y por tanto $f(x-u) \leq \|x-u\| \leq 2 - \alpha$. De lo anterior se sigue que

$$2 = 2f(w) = f(w-x) + f(x-u) + f(u+w) < \frac{\alpha}{2} + 2 - \alpha + \frac{\alpha}{2} = 2$$

llegando a una contradicción. $\square$

**Observación 2.5.3.** *No todo espacio P(3)-convexo es U-espacio. Por ejemplo, considere a* $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, *donde* $\|(x,y)\| = \|(x,y)\|_2$ *si* $xy \geq 0$ *y* $\|(x,y)\| = \|(x,y)\|_\infty$ *si* $xy \leq 0$.

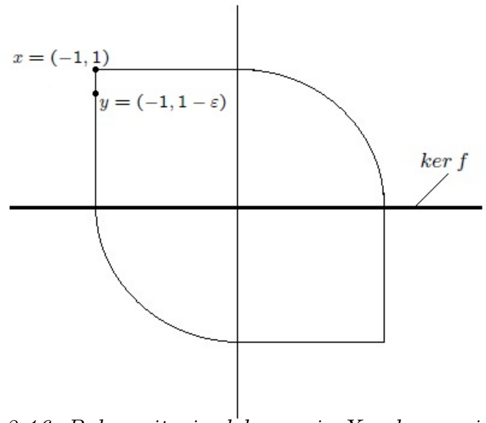


*Figura 2.16. Bola unitaria del espacio X, observación 2.5.3*

*De la proposición 2.3.4 se obtiene que este espacio es P(3)-convexo. Por otro lado, X no es U-espacio ya que si fijamos un* $0 < \varepsilon \leq 1$ *y definimos* $x = (-1, 1)$, $y = (-1, 1-\varepsilon)$, $f(a,b) = b$ *para todo* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *entonces es claro que* $x, y \in S_X$, $f \in \nabla(x)$, $f(x-y) = \varepsilon$ *y* $\|x+y\| = 2$.

El diagrama de la Figura 2.17 muestra las implicaciones demostradas en estas secciones.

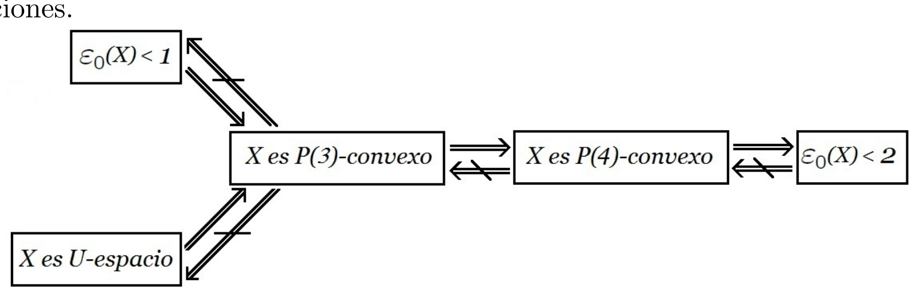


Figura 2.17.Implicaciones demostradas en estas secciones

Debido a los resultados anteriores es natural preguntarse lo siguiente: ¿Si $X$ es un espacio de Banach tal que $u_X(1) > 0$ es entonces $X$ P(3)-convexo?

## 2.6. P-convexidad y criterios que determinan la FPP

Nos gustaría saber si la P-convexidad implica la propiedad del punto fijo para funciones no expansivas (FPP). En esta sección veremos que varias de las condiciones conocidas que implican la FPP no nos son útiles para este fin. En concreto mostraremos que estructura normal, la condición $MW(X) > 1$, la propiedad $(S)$ y la propiedad de Kadec-Klee no se siguen de la P-convexidad.

### 2.6.1. P-convexidad y estructura normal

La estructura normal de un espacio de Banach ha sido ampliamente estudiada desde que Kirk probó en 1965 que un espacio con estructura normal tiene la propiedad débil del punto fijo para funciones no expansivas (WFPP) [34]. En 2008 Saejung probó en [56] que si un espacio de Banach $X$ es P-convexo entonces $X^*$ tiene estructura normal uniforme. El siguiente ejemplo nos muestra que la estructura normal no se sigue de la P-convexidad.

**Ejemplo 2.6.1.** *No todo espacio P-convexo tiene estructura normal. Sea $X$ el espacio obtenido al renormar al espacio $l_2$ con entradas en los reales con la norma*

$$\|x\| = \max\big\{ \sup_{i\neq j} |x_i + x_j|, \|x\|_2 \big\}$$

*para cada $x = (x_i) \in l_2$, donde $\|\cdot\|_2$ es la norma usual en $l_2$. Como ya se mencionó $X$ es P-convexo. Veremos que no tiene estructura normal. Defina la sucesión $\{x_n\}_n$ como $x_k = \frac{1}{2}(e_{2k-1} + e_{2k})$ para cada $k$. Es fácil ver que $\{x_n\}_n \subset S_X$ y que $\|x_i - x_j\| = 1$ para todo $i \neq j$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ y $\alpha_i \geq 0$ para cada $i$. Tenemos que*

$$\left\| x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| = \max\left\{ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right)^{1/2} \right\} = 1.$$

*Luego, $\lim_{k\to\infty} d\big(x_{k+1}, conv\{x_i\}_{i=1}^k\big) = diam\{x_n\}_n$, es decir, $\{x_n\}_n$ es una sucesión diametral. Consecuentemente del lema 1.2.10, $X$ no tiene estructura normal.*

Sin embargo, como $\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \sqrt{2}\|x\|_2$, del teorema A.0.23 obtenemos que $X$ tiene la FPP.

### 2.6.2. P-convexidad y el coeficiente $MW(X)$

En 2006 en [23] García Falset, Llorens-Fuster y Mazcuñán Navarro definieron para cada $a > 0$ el coeficiente

$$RW(a, X) = \sup\big\{ \min\{\liminf \|x_n + x\|, \liminf \|x_n - x\|\}\big\}$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones $\{x_n\} \subset B_X$ débilmente convergentes y todo $x \in X$ tal que $\|x\| \leq a$, así como el coeficiente

$$MW(X) = \sup\left\{ \frac{1+a}{RW(a, X)} : a > 0 \right\}$$

para probar que los espacios uniformemente no cuadrados tienen la FPP. Se satisface que $\max\{a,1\} \le RW(a,X) \le 1+a$ para cada $a>0$ y $1 \le MW(X) \le 2$. Ellos probaron que si un espacio $X$ cumple que $MW(X)>1$ entonces $X$ tiene la WFPP.

En una charla dada por Enrique Llorens en CIMAT en mayo de 2010 él pregunto si la P-convexidad implica $MW(X)>1$. El siguiente ejemplo da una respuesta negativa a la pregunta anterior.

**Ejemplo 2.6.2.** *No todo espacio P-convexo $X$ cumple la condición $MW(X)>1$. Considere el espacio $X=(l_2,\|\cdot\|)$ obtenido renormando a $l_2$ como sigue. Para cada $x=(x_n)_n \in l_2$ definimos*

$$\|x\| = |x_1| + \|(x_2,x_3,...)\|_2$$

*donde $\|\cdot\|_2$ es la norma usual en $l_2$. Como $l_2$ es uniformemente convexo, también es P($\varepsilon$,3)-convexo para algún $\varepsilon>0$. Sea $N\in\mathbb{N}$ tal que $N\frac{\varepsilon}{2}\ge 1$. Verifiquemos que $X$ es $P\big(\frac{\varepsilon}{2},2N+1\big)$-convexo. Sean $x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(2N+1)} \in S_X$, $x^{(m)} = (x_1^{(m)},x_2^{(m)},...)$ para cada $1\le m\le 2N+1$. De la contención*

$$[0,1] \subset \big[0,N\frac{\varepsilon}{2}\big] = \bigcup_{k=1}^{N}\Big[(k-1)\frac{\varepsilon}{2},k\frac{\varepsilon}{2}\Big]$$

*tenemos que existen $1\le i,j,k\le 2N+1$ distintos tales que*

$$\max\big\{|x_1^i-x_1^j|,|x_1^j-x_1^k|,|x_1^i-x_1^k|\big\} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

*Por otro lado, defina $y^{(m)}=(x_2^{(m)},x_3^{(m)},...)$, $1\le m\le 2N+1$. Claramente $y^{(m)}\in B_{l_2}$ para cada $1\le m\le 2N+1$. Como $l_2$ es P($\varepsilon$,3)-convexo, se cumple la desigualdad*

$$\min\big\{\|y^{(i)}-y^{(j)}\|_2,\|y^{(j)}-y^{(k)}\|_2,\|y^{(i)}-y^{(k)}\|_2\big\} \le 2-\varepsilon$$

*y por tanto*

$$\min\big\{\|x^{(i)}-x^{(j)}\|,\|x^{(j)}-x^{(k)}\|,\|x^{(i)}-x^{(k)}\|\big\} \le 2-\frac{\varepsilon}{2}.$$

*Luego, $X$ es $P\big(\frac{\varepsilon}{2},2N+1\big)$-convexo. Ahora considere la base canónica $\{e_n\}_n$ en $l_2$. Es claro que $e_n\in S_X$ para cada $n$ y $e_n \rightharpoonup 0$. Además para cada $a>0$ tenemos que $\|ae_1+e_i\|=1+a$ y $\|ae_1-e_i\|=1+a$ para todo $i>1$. Luego, $RW(a,X)=1+a$ para cada $a>0$ y consecuentemente $MW(X)=1$.*

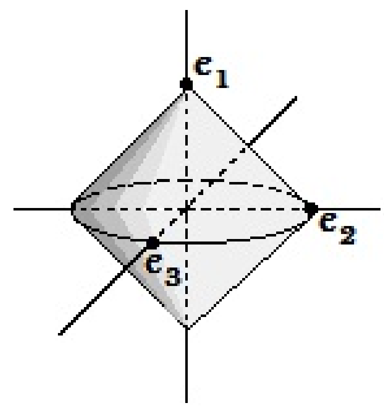


Figura 2.18. Bola unitaria del espacio $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$, donde $\|(x, y, z)\| = |x| + (y^2 + z^2)^{1/2}$

No es difícil ver que $\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \sqrt{2}\|x\|_2$ y por el teorema A.0.23 tenemos que $X$ tiene la FPP.

### 2.6.3. P-convexidad y propiedad $(S)$

En [66] Wiśnicki definió una propiedad geométrica para los espacios de Banach, llamada la *propiedad* $(S)$. Wiśnicki demostró que si para un espacio superreflexivo $X$ existe un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ sobre $\mathbb{N}$ tal que su ultrapotencia $\{X\}_{\mathfrak{U}}$ tiene la propiedad $(S)$ entonces $X$ tiene la FPP.

**Definición 2.6.3.** *Decimos que un espacio de Banach $X$ tiene la propiedad $(S)$ si para cualquier subconjunto $A$ de la esfera unitaria $S_X$ con* $\mathrm{diam}(A) \leq 1$ *existe un funcional $F \in X^*$ tal que $F(x) > 0$ para todo $x \in A$.*

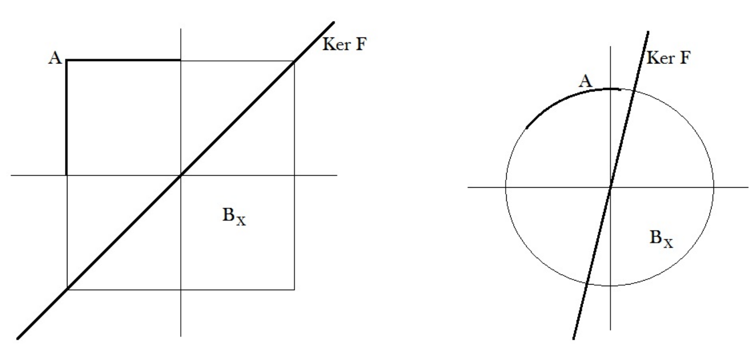


Figura 2.19. Representación gráfica de la propiedad (S)

Él mostró que existen espacios superreflexivos que no poseen esta propiedad. Él definió otra propiedad más débil que la propiedad $(S)$ y la llamó propiedad $(S_m)$.

**Definición 2.6.4.** *Un conjunto cerrado $A$ es métricamente convexo si para cualesquiera $x, y \in A$ existe $z \in A$ tal que*

$$\|x - z\| = \|y - z\| = \frac{\|x - y\|}{2}.$$

*Un espacio de Banach $X$ tiene la propiedad $(S_m)$ si para cualquier subconjunto métricamente convexo $A \subset X$ con $\operatorname{diam}(A) \leq 1$ existe un funcional $F \in X^*$ tal que $F(x) > 0$ para todo $x \in A$.*

Wiśnicki probó el siguiente teorema.

**Teorema 2.6.5.** *Sea $X$ un espacio superreflexivo y suponga que existe un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ sobre $\mathbb{N}$ tal que $\{X\}_{\mathfrak{U}}$ tiene la propiedad $(S_m)$. Entonces $X$ tiene la FPP.*

Él también demostró que cualquier espacio separable, cualquier espacio estrictamente convexo y cualquier espacio de Banach $X$ que satisface $\varepsilon_0(X) < 1$ tiene la propiedad $(S)$. Enseguida mostraremos que la P-convexidad no necesariamente implica la propiedad $(S)$.

**Ejemplo 2.6.6.** *Existe un espacio P-convexo sin la propiedad (S). Considere el espacio $X$ obtenido al renormar a $l_2(\mathbb{R})$ con la norma*

$$\|x\| = \max\left\{\sup_{\alpha \neq \beta} |x_\alpha + x_\beta|, \|x\|_2\right\}$$

*para cada $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}} \in l_2(\mathbb{R})$, donde $\|\cdot\|_2$ es la $l_2$-norma. Como para cada $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}} \in l_2(\mathbb{R})$ tenemos que todos excepto posiblemente un número contable de $x_\alpha$'s son cero, podemos probar como en [51], ejemplo 3.6, que $X$ es P-convexo. Ahora veremos que $X$ no tiene la propiedad (S). Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, definimos el elemento $x_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(e_\alpha + e_\beta)$, donde $\{e_\alpha\}_\alpha$ es la base canónica de $l_2(\mathbb{R})$. Sea $A = \{x_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta\}$. Claramente $A \subset S_X$. Verifiquemos que $\operatorname{diam}(A) = 1$. En efecto, sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$. Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ son todos distintos entonces $\|x_{\alpha,\beta} - x_{\gamma,\delta}\| = 1$. De otra manera, sólo dos de éstos pueden ser iguales. En este caso tenemos que $\|x_{\alpha,\beta} - x_{\gamma,\delta}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y así $\operatorname{diam}(A) = 1$. Finalmente sea $y \in \left(l_2(\mathbb{R})\right)^* = l_2(\mathbb{R})$, $y = \{y_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. Eligiendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, tales que $y_\alpha = y_\beta = 0$ y considerando $x_{\alpha,\beta} \in A$ obtenemos que $y(x_{\alpha,\beta}) = 0$ y por tanto $X$ no tiene la propiedad (S).*

En virtud del teorema A.0.23 tenemos que $X$ tiene la FPP ya que $\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \sqrt{2}\|x\|_2$.

### 2.6.4. P-convexidad y propiedad de Kadec-Klee

**Definición 2.6.7.** *Decimos que un espacio de Banach $X$ tiene la propiedad de Kadec-Klee si cada sucesión en la esfera unitaria que converge débilmente converge en norma.*

*$X$ tiene la propiedad de Kadec-Klee uniforme si dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión en la bola unitaria de $X$ tal que $\inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} > \varepsilon$ y $x_n \rightharpoonup x$ entonces $\|x\| \leq \delta$.*

Todo espacio con la propiedad de Kadec-Klee uniforme tiene la propiedad de Kadec-Klee. La propiedad de Kadec-Klee uniforme fue introducida por Huff [27]. van Dust y Sims mostraron que un espacio de Banach con la propiedad de Kadec-Klee uniforme tiene la WFPP [65]. En la búsqueda de un espacio P-convexo sin la propiedad de Kadec-Klee, Enrique Llorens-Fuster sugirió el siguiente espacio:

**Ejemplo 2.6.8.** *No todo espacio P-convexo tiene la propiedad de Kadec-Klee. En efecto, sean $\lambda \in \left(1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ y considere al espacio $X_\lambda = (l_2, \|\cdot\|_\lambda)$, donde $\|x\|_\lambda = \max\left\{\|x\|_\infty, \frac{1}{\lambda}\|x\|_2\right\}$. Es sabido que $\varepsilon_0(X_\lambda) = 2\sqrt{\lambda^2 - 1} < 1$ (véase [26]) y por el teorema 2.4.3 $X_\lambda$ es P(3)-convexo. Por otro lado, definamos $x = e_1$, $x_n = e_1 + c\, e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $\{e_n\}_n$ es la base canónica en $l_2$ y $c = \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Es fácil ver que $\{x_n\}_{n \geq 2} \subset S_X$, $x \in S_X$, $x_n \rightharpoonup x$ y $\|x_n - x\| = c > 0$. Luego, $X_\lambda$ no tiene la propiedad de Kadec-Klee.*

Es claro que $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_2 \leq \frac{\sqrt{5}}{2}\|x\|_\lambda$, y por tanto, apelando al teorema A.0.23 se sigue que $X$ tiene la FPP.

Estos ejemplos nos muestran que necesitamos estudiar otros criterios diferentes a los anteriores para determinar si los espacios P-convexos tienen la FPP.

## 2.7. Relación entre nociones de convexidad y suavidad

En esta sección veremos algunas relaciones existentes entre las nociones de convexidad definidas en las secciones 2.1 y 2.2.

Empezaremos introduciendo una noción de convexidad que resulta ser el concepto dual de la propiedad SEIS.

**Definición 2.7.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach. $X$ tiene la propiedad SEIS$^*$ si para cada $\varepsilon \in (0,1)$ existen $\delta \in (0,1)$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que para cualesquiera*

*$x_1, ..., x_{k+1} \in S_X$ con $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ para $i \neq j$, se cumple la desigualdad*

$$\left\| \frac{x_1 + \cdots + x_{k+1}}{k+1} \right\| \leq 1 - \delta.$$

La prueba de la siguiente proposición es análoga a la prueba de la proposición 2.2.4.

**Proposición 2.7.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Entonces $X$ tiene la propiedad SEIS si y sólo si $X^*$ tiene la propiedad SEIS$^*$.*

El siguiente ejemplo muestra que las propiedades EIS y SEIS no son autoduales.

**Ejemplo 2.7.3.** *Del teorema 4.4.3 obtenemos que el espacio $l_2 \oplus_\infty l_2$ tiene la propiedad SEIS y por el teorema 4.4.6 no tiene las propiedades EIS$^*$ y SEIS$^*$. Por tanto $l_2 \oplus_1 l_2$ tiene la propiedad SEIS$^*$ pero no las propiedades EIS y SEIS.*

No todo espacio con la propiedad SEIS es uniformemente no cuadrado ni viceversa, asimismo no todo espacio con la propiedad SEIS$^*$ es uniformemente no cuadrado ni viceversa como veremos en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.7.4.** *Sea $X_\lambda = (l_2, \|\cdot\|_\lambda)$, donde $\|x\|_\lambda = \text{máx}\{\|x\|_\infty, \frac{1}{\lambda}\|x\|_2\}$, $1 < \lambda < \sqrt{2}$. Es sabido que $\varepsilon_0(X_\lambda) = 2\sqrt{\lambda^2 - 1} < 2$ (véase [26]) y, en particular, $X_\lambda$ es uniformemente no cuadrado. Como la propiedad de cuadratura uniforme es autodual se sigue que $(X_\lambda)^*$ también es uniformemente no cuadrado. Defina $v_n = e_1 + c\, e_n$, $n > 1$, donde $\{e_n\}_n$ es la base canónica en $l_2$ y $c = \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Es fácil ver que $\{v_n\}_{n>1} \subset S_X$, $\|v_i - v_j\|_\lambda = c\|e_i - e_j\|_\lambda \geq \frac{1}{\lambda}\sqrt{2(\lambda^2 - 1)} > 0$ para cada $i \neq j$, $v_2 + v_3 + \cdots + v_k = (k-1)e_1 + c\sum_{i=2}^{k} e_i$ y por tanto $\|v_2 + v_3 + \cdots + v_k\|_\lambda = k - 1$ para cada $k$. Por tanto $X_\lambda$ no tiene la propiedad SEIS$^*$ y consecuentemente $(X_\lambda)^*$ no tiene la propiedad SEIS.*

Sin embargo Fetter y Gamboa de Buen probaron en [19] que el espacio $X_\lambda$ con $1 \leq \lambda < \sqrt{2}$ tiene la propiedad EIS para algún $\varepsilon < \sqrt{2}$.

Claramente todo espacio uniformemente convexo tiene la propiedad SEIS$^*$. Sin embargo, la condición $\varepsilon_0(X) < r$ para algún $r > 0$ no implica la propiedad SEIS$^*$ en $X$, como muestra el ejemplo 2.7.4. De lo anterior también se sigue que, aún cuando todo espacio uniformemente suave tiene la propiedad SEIS, la condición $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\rho_X(t)}{t} < r$ para algún $r > 0$ no implica la propiedad SEIS en $X$.

**Ejemplo 2.7.5.** *Un espacio uniformemente no cuadrado sin la propiedad EIS es el espacio de Bynum $l_{p,\infty}$, $1 < p < \infty$, definido como sigue. Cada elemento $x = \{x_i\}_i \in l_p$ puede ser representado como $x = x^+ - x^-$ donde las respectivas*

*$i$-ésimas componentes de $x^+$ y $x^-$ están dadas por $(x^+)_i = \max\{x_i, 0\}$ y $(x^-)_i = \max\{-x_i, 0\}$. Definimos $\|x\|_{p,\infty} = \max\{\, ||x^+||_p, ||x^-||_p\}$ donde $\|\cdot\|_p$ es la $l_p$-norma. Se sabe que el espacio $l_{p,\infty} = (l_p, \|\cdot\|_{p,\infty})$ satisface $\varepsilon_0(l_{p,\infty}) = 1$ y que no tiene estructura normal (véase [8]) y por lo tanto $l_{p,\infty}$ no tiene la propiedad EIS.*

*Sea $l_{p,1} = (l_p, \|\cdot\|_{p,1})$ donde $\|x\|_{p,1} = ||x^+||_p + ||x^-||_p$ y $\|\cdot\|_p$ es la $l_p$-norma. Bynum probó en [8] que $l_{p,1}$ y $l_{p,\infty}$ son mutuamente duales y que $\varepsilon_0(l_{p,1}) = 2^{1/p}$. De lo anterior tenemos que el espacio $l_{p,1}$ es uniformemente no cuadrado y no tiene la propiedad EIS$^*$.*

De los teoremas 4.4.3 y 4.1.11 $(g)$ obtenemos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.7.6.** *El espacio $l_2 \oplus_\infty l_2$ tiene la propiedad SEIS y no es uniformemente no cuadrado. Por tanto $l_2 \oplus_1 l_2$ tiene la propiedad SEIS$^*$ y no es uniformemente no cuadrado.*

Veremos enseguida que no todo espacio P-convexo tiene la propiedad SEIS o la propiedad SEIS$^*$.

**Ejemplo 2.7.7.** *Sea $X$ el espacio que se obtiene al renormar a $l_2$ con la norma*

$$\|x\| = \max\{\, \sup_{i\neq j} |x_i + x_j|, \|x\|_2 \,\}$$

*para cada $x = (x_i)_i \in l_2$, donde $\|\cdot\|_2$ es la norma usual en $l_2$. Naidu y Sastry probaron en [51] que este espacio es P-convexo. Veamos que $X$ no tiene la propiedad SEIS$^*$. Definamos la sucesión $\{x_n\} \subset S_X$ como $x_k = \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_{k+2}+e_{k+3})$, para cada $k = 1, 2, ....$ Estos puntos satisfacen que $\|x_i - x_j\| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\left\|\sum_{i=1}^k x_i\right\| = k$ para todo $k$. Por lo tanto $X$ no tiene la propiedad SEIS$^*$.*

*Por otro lado, en virtud de los teoremas 4.4.3 y 4.3.1 el espacio $l_2 \oplus_1 l_2$ es P-convexo pero no tiene la propiedad SEIS.*

A continuación daremos un ejemplo de un espacio O-convexo que no es P-convexo ni tiene la propiedad SEIS$^*$.

**Ejemplo 2.7.8.** *Sea $X$ el espacio que se obtiene al renormar a $l_2$ con la norma*

$$\|x\| = \max\{\, \sup_{i,j} |x_i - x_j|, \|x\|_2 \,\}$$

*para cada $x = (x_i)_i \in l_2$, donde $\|\cdot\|_2$ es la norma usual en $l_2$. Este espacio es O(4)-convexo pero no es P-convexo [51]. Veamos que tampoco tiene la propiedad SEIS$^*$. En efecto, definamos la sucesión $\{x_n\} \subset S_X$ como $x_k = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_{k+2} - e_{k+3})$, para cada $k = 1, 2, ....$ Estos puntos satisfacen que $\|x_i - x_j\| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\left\|\sum_{i=1}^k x_i\right\| = k$ para todo $k$. Por lo tanto $X$ no tiene la propiedad SEIS$^*$.*

La clase de espacios con la propiedad SEIS y la clase de los U-espacios son incomparables, como veremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.7.9.** *Del teorema 4.4.3 obtenemos que el espacio $l_2 \oplus_\infty l_2$ tiene la propiedad SEIS y del teorema 4.1.11 (e) se sigue que no es U-espacio. Asimismo del teorema 4.1.11 (e) tenemos que $l_2 \oplus_1 l_2$ es U-espacio y apelando al teorema 4.4.6 este espacio no tiene la propiedad SEIS.*

Como hemos mencionado anteriormente, Amir y Franchetti introdujeron en 1984 [2] el concepto de espacio Q-convexo y probaron que la clase de espacios O-convexos está contenida propiamente en la clase de espacios Q-convexos. Enseguida mostraremos que la clase de espacios con la propiedad EIS también está contenida propiamente en la clase de espacios Q-convexos.

**Proposición 2.7.10.** *Si $X$ es un espacio con la propiedad EIS$^*$ entonces es Q-convexo.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon \in (0, s_k(X)\,)$, $\delta \in (0,1)$ y $k \in \mathbb{N}$ como en la definición de la propiedad EIS$^*$. Sean $x_1, ..., x_{k+3} \in S_X$. Si existen $1 \leq i < j \leq k+3$ tales que $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$ entonces

$$\left\|\sum_{n=1}^{j-1} x_n - x_j\right\| \leq \left\|\sum_{n\neq i,j} x_n\right\| + \|x_i - x_j\| < j - (2-\varepsilon).$$

Supongamos que $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ para todo $1 \leq i, j \leq k+3$, $i \neq j$. Como $X$ tiene la propiedad EIS$^*$ se sigue que

$$\left\|\sum_{n=1}^{k+1} x_n\right\| \leq (k+1)(1-\delta)$$

y por tanto

$$\left\|\sum_{n=1}^{k+2} x_n - x_{k+3}\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{k+1} x_n\right\| + \|x_{k+2} - x_{k+3}\| \leq (k+1)(1-\delta)+2 = k+3-(k+1)\delta.$$

Luego, $X$ es $Q\big(\varepsilon', k+3\big)$-convexo, donde $\varepsilon' = \min\{(k+1)\delta, 2-\varepsilon\}$. □

Amir y Franchetti mostraron [2] que la Q-convexidad es una propiedad autodual y por tanto se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.7.11.** *Todo espacio con la propiedad EIS es Q-convexo.*

Hemos probado que la clase de espacios con la propiedad EIS está contenida en la clase de espacios Q-convexos. Como hemos mostrado en el ejemplo 2.7.3 la propiedad EIS no es autodual y por tanto la contención es propia.

# CAPÍTULO 3

# F-convexidad y p-convexidad

En este capítulo estudiamos dos conceptos que guardan una relación íntima y natural con la P-convexidad, su concepto dual y su versión no uniforme.

## 3.1. El concepto dual de P-convexidad

Como hemos mencionado en los preliminares, Kottman introdujo en [35] una propiedad que resulta ser el concepto dual de la P-convexidad. En esta sección caracterizamos el dual de un espacio P-convexo de una manera más sencilla. Además, a partir de aquí daremos algunos resultados relacionados con este concepto, la mayoría de los cuales son consecuencias directas de resultados que hemos obtenido para espacios P-convexos.

Empezaremos definiendo la condición (3.1) y posteriormente probaremos que resulta ser el concepto dual de P-convexidad. Esta condición fue sugerida por Helga Fetter y Berta Gamboa de Buen. La ventaja de esta caracterización sobre la de Kottman es que usa solamente conceptos simples, uno no necesita $\varepsilon$-planos. Además en la prueba de dualidad no usamos el teorema de Helly ni el teorema de Hahn-Banach, como Kottman lo hace en el teorema 2.1.9.

Sea $X$ un espacio de Banach y considere la siguiente condición: existen $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que para cualesquiera $f_1, f_2, ..., f_n \in S_{X^*}$ existen $1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j$, tales que

$$S(f_i,\ -f_j,\ \delta) = \emptyset. \tag{3.1}$$

**Proposición 3.1.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Entonces*

*(a) $X$ es P-convexo si y sólo si $X^*$ cumple la condición (3.1).*

*(b) $X$ cumple la condición (3.1) si y sólo si $X^*$ es P-convexo.*

*Demostración.* (a) Sea $X$ un espacio P$(\varepsilon, n)$-convexo. Sean $x_1^{**}, ..., x_n^{**} \in S_{X^{**}}$. Verifiquemos que existen $1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j$, tales que $S(x_i^{**}, -x_j^{**}, \varepsilon/4) = \emptyset$. Como $X$ es P-convexo, también es reflexivo. Por tanto, $x_1^{**} = \jmath(x_1), ..., x_n^{**} = \jmath(x_n)$, para algunos $x_1, ..., x_n \in S_X$, donde $\jmath$ es la inyección canónica de $X$ en $X^{**}$. Por hipótesis, existen $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, tales que $\|x_i - x_j\| \leq 2 - \varepsilon$. Todo se reduce a probar que

$$\left\{ f \in B_{X^*} : f(x_i) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}, -f(x_j) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4} \right\} = \emptyset.$$

Procedamos por contradicción suponiendo que existe $f \in B_{X^*}$ tal que $f(x_i) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}$ y $-f(x_j) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces

$$2 - \varepsilon \geq \|x_i - x_j\| \geq f(x_i - x_j) \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2},$$

lo cual no es posible; consecuentemente $X^*$ cumple la condición (3.1) con $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Ahora sea $X$ un espacio de Banach tal que $X^*$ cumple la condición (3.1). Sean $x_1, ..., x_n \in S_X$. Por hipótesis existen $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, tales que $S(\jmath(x_i), -\jmath(x_j), \varepsilon) = \emptyset$, es decir, para cada $f \in B_{X^*}$ se tiene que $f(x_i) < 1 - \varepsilon$ ó $-f(x_j) < 1 - \varepsilon$. Verifiquemos que $\|x_i - x_j\| \leq 2 - \varepsilon$. Nuevamente procedamos por contradicción suponiendo que $\|x_i - x_j\| = \|\jmath(x_i - x_j)\| > 2 - \varepsilon$. Existe $f \in S_{X^*}$ tal que $\jmath(x_i - x_j)(f) = f(x_i) - f(x_j) > 2 - \varepsilon$. Si $f(x_i) < 1 - \varepsilon$ entonces

$$1 = \|f\|\|x_j\| \geq -f(x_j) > 2 - \varepsilon - f(x_i) > 1$$

lo cual no puede ser. De aquí necesariamente $-f(x_j) < 1 - \varepsilon$ y mediante un argumento simétrico se obtiene una contradicción. Luego, $\|x_i - x_j\| \leq 2 - \varepsilon$ y consecuentemente $X$ es P$(\varepsilon, n)$-convexo. La demostración de (b) es análoga a la de (a). □

Consecuentemente las condiciones (3.1) y $F(n, X) > 0$ deben ser equivalentes, es decir, $X$ es F-convexo si y sólo si $X$ cumple la condición (3.1). Diremos que $X$ es F$(n, \delta)$-convexo si $X$ cumple la condición (3.1) con $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

**Corolario 3.1.2.** *Todo espacio de Banach F-convexo es reflexivo.*

**Corolario 3.1.3.** *Todo espacio uniformemente suave es F-convexo y todo espacio uniformemente convexo es F-convexo. Además, todo espacio finito dimensional es F-convexo.*

Como hemos visto, en analogía con la relación de dualidad que existe entre la convexidad uniforme y la suavidad uniforme, la P-convexidad y la F-convexidad son conceptos duales. Pero en el siguiente caso particular, ambos conceptos coinciden.

**Proposición 3.1.4.** *Sea $X$ un espacio de Banach. $X$ es P(3)-convexo si, y sólo si, $X$ es F(3)-convexo.*

*Demostración.* Verifiquemos que si $X$ es P($\varepsilon$,3)-convexo entonces $X$ es F$\left(\frac{\varepsilon}{2},3\right)$-convexo. Supongamos que existen $f, g, h \in S_{X^*}$ tales que $S(f, -g, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$, $S(g, -h, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ y $S(h, -f, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$. Sean $x \in S(f, -g, \frac{\varepsilon}{2})$, $y \in S(g, -h, \frac{\varepsilon}{2})$ y $z \in S(h, -f, \frac{\varepsilon}{2})$. Obtenemos así que $\|x - z\| \geq f(x-z) > 2-\varepsilon$, $\|y - x\| \geq g(y-x) > 2-\varepsilon$ y $\|z - y\| \geq h(z-y) > 2-\varepsilon$. Luego, $X$ no es P($\varepsilon$,3)-convexo. Recíprocamente si $X$ es F(3)-convexo entonces de la proposición 3.1.1 se tiene que $X^*$ es P(3)-convexo y, de lo anterior, se sigue que $X^*$ es F(3)-convexo. Luego, nuevamente de la proposición 3.1.1 se sigue que $X$ es P(3)-convexo. □

Como corolario obtenemos el resultado probado por Naidu y Sastry mencionado anteriormente que dice que dice que la P(3)-convexidad es autodual y además tenemos que la F(3)-convexidad también es autodual.

**Corolario 3.1.5.** *$X$ es P(3)-convexo si, y sólo si, $X^*$ es P(3)-convexo. Asimismo, $X$ es F(3)-convexo si, y sólo si, $X^*$ es F(3)-convexo.*

## 3.2. La versión no uniforme de P-convexidad

En esta sección introduciremos la versión no uniforme de P-convexidad y la llamaremos p-convexidad. Aquí mostraremos algunos resultados que hemos obtenido acerca de la p-convexidad, varios de los cuales están ligados íntimamente al concepto de P-convexidad.

### 3.2.1. p-convexidad y sus propiedades

Empezaremos esta subsección introduciendo el concepto de p-convexidad.

**Definición 3.2.1.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $n \in \mathbb{N}$. $X$ es p($n$)-convexo si para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in S_X$ existen $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, tales que $\|x_i - x_j\| < 2$ y $X$ es p-convexo si es p($n$)-convexo para algún $n \in \mathbb{N}$.*

De manera similar que en la observación 2.1.6 (c) podemos reescribir la condición de p-convexidad para puntos en $B_X$ en lugar de definirla en puntos de $S_X$.

Kottman definió el concepto de P-convexidad en términos de la intersección de bolas. En esta sección haremos algo similar para dar una definición equivalente de p-convexidad. Es fácil ver que en un espacio normado cualesquiera dos bolas cerradas de radio $\frac{1}{2}$ contenidas en la bola unitaria tienen intersección no vacía. Si el radio es menor que $\frac{1}{2}$ entonces existen espacios tales que para cualquier $n$ existen $n$ bolas cerradas de radio $r$ tales que cualesquiera dos de ellas no se intersectan. Un ejemplo es el espacio $l_1$. En efecto, sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de $l_1$. Entonces las bolas cerradas de radio $r < \frac{1}{2}$ centradas en los puntos $\frac{1}{2}e_i$ y $-\frac{1}{2}e_i$, $i \in \mathbb{N}$, son disjuntas y contenidas en la bola unitaria. Sin embargo, si $X$ es p($n$)-convexo veremos en el siguiente teorema que para cualesquiera $n$ puntos en la bola unitaria existe $r < \frac{1}{2}$ tal que si las $n$ bolas cerradas de radio $r$ centradas en estos $n$ puntos están contenidas en la bola unitaria, entonces existen dos diferentes bolas con intersección no vacía.

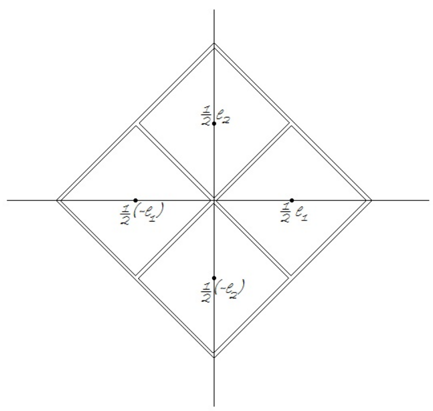


Figura 3.1. Bolas cerradas disjuntas de radio $r < \frac{1}{2}$ centradas en $\frac{1}{2}e_1$, en $\frac{1}{2}e_2$, en $-\frac{1}{2}e_1$ y en $-\frac{1}{2}e_2$, contenidas en la bola unitaria de $l_1^2$

**Teorema 3.2.2.** *$X$ es p($n$)-convexo si, y sólo si, para cualesquiera $y_1, ..., y_n \in B_X$ existe $r \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que si $B(y_i, r) \subset B_X$ para todo $i = 1, ..., n$, entonces existen $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, tales que*

$$B(y_i, r) \bigcap B(y_j, r) \neq \emptyset. \tag{3.2}$$

*Demostración.* Suponga que $X$ cumple la condición (3.2) y sean $x_1, ..., x_n \in S_X$. Sea $r \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ el número que cumple la condición (3.2) para $\frac{x_1}{2}, ..., \frac{x_n}{2}$. Es fácil ver que $B\left(\frac{x_i}{2}, r\right) \subset B_X$ para cada $i = 1, ..., n$. Por tanto, existen $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, tales que

$$B\left(\frac{x_i}{2}, r\right) \bigcap B\left(\frac{x_j}{2}, r\right) \neq \emptyset.$$

Sea

$$y \in B\left(\frac{x_i}{2}, r\right) \bigcap B\left(\frac{x_j}{2}, r\right).$$

Se tiene que

$$\left\|\frac{x_i - x_j}{2}\right\| \leq \left\|\frac{x_i}{2} - y\right\| + \left\|\frac{x_j}{2} - y\right\| < 2r < 1$$

y por tanto, $X$ es p($n$)-convexo.

Ahora suponga que existen $y_1, ..., y_n \in B_X$ tales que para cualquier $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ se cumple que

$$B\left(y_i, \frac{1}{2} - \rho\right) \subset B_X$$

para todo $i = 1, ..., n,$ y

$$B\left(y_i, \frac{1}{2} - \rho\right) \bigcap B\left(y_j, \frac{1}{2} - \rho\right) = \emptyset,$$

para todo $i, j = 1, ..., n,\ i \neq j$. Verifiquemos que $X$ no es p($n$)-convexo en cuatro pasos:

($a$) Es fácil ver que $\|y_i - y_j\| > 1 - 2\rho$, para todo $i, j = 1, ..., n,\ i \neq j$. En efecto, si $\|y_i - y_j\| \leq 1 - 2\rho$ para algunos $1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j$, entonces definiendo $z = \frac{1}{2}(y_i + y_j)$ se tiene que $\|y_i - z\| = \|y_j - z\| = \frac{1}{2}\|y_i - y_j\| \leq \frac{1}{2} - \rho$ y, por tanto,

$$B\left(y_i, \frac{1}{2} - \rho\right) \bigcap B\left(y_j, \frac{1}{2} - \rho\right) \neq \emptyset,$$

lo cual es una contradicción.

($b$) $\frac{1}{2} - 3\rho < \|y_i\| \leq \frac{1}{2} + \rho$, para todo $i = 1, ..., n$. Para verificar esta afirmación primero notemos que $\left\|\frac{y_i}{\|y_i\|} - y_i\right\| \geq \frac{1}{2} - \rho$ para cada $i$, ya que si $\left\|\frac{y_i}{\|y_i\|} - y_i\right\| < \frac{1}{2} - \rho$ para algún $i$ entonces $\frac{y_i}{\|y_i\|} \in int\ B\big(y_i, \frac{1}{2} - \rho\big) \subset int\ B_X$, lo cual no puede ocurrir. De aquí, como $\left\|\frac{y_i}{\|y_i\|} - y_i\right\| = 1 - \|y_i\|$, se sigue que $\|y_i\| = 1 - \left\|\frac{y_i}{\|y_i\|} - y_i\right\| \leq \frac{1}{2} + \rho$, para cada $i = 1, ..., n$. Por otro lado, si $\|y_i\| \leq \frac{1}{2} - 3\rho$ para algún $i$, entonces tendríamos de (a) que para todo $j \neq i$, $1 - 2\rho < \|y_i - y_j\| \leq \|y_i\| + \|y_j\| \leq (\frac{1}{2} - 3\rho) + (\frac{1}{2} + \rho) = 1 - 2\rho$ lo cual no es posible.

($c$) $|\,\|y_i\| - \|y_j\|\,| < 4\rho$, para todo $i, j = 1, ..., n,\ i \neq j$. En efecto, de (b) se obtiene que $-4\rho = (\frac{1}{2} - 3\rho) - (\frac{1}{2} + \rho) < \|y_i\| - \|y_j\| < (\frac{1}{2} + \rho) - (\frac{1}{2} - 3\rho) = 4\rho$.

($d$) De (a), (b), (c) y del lema 2.1.7 tenemos que

$$\left\|\frac{y_i}{\|y_i\|} - \frac{y_j}{\|y_j\|}\right\| \geq \frac{1}{\|y_i\|}\Big(\|y_i - y_j\| - \big|\|y_i\| - \|y_j\|\big|\Big) > 2 - \frac{16\rho}{1 + 2\rho}$$

para todo $i, j = 1, ..., n,\ i \neq j$. Como $\rho > 0$ es arbitrario, haciendo $\rho \to 0$ se sigue que $\left\|\frac{y_i}{\|y_i\|} - \frac{y_j}{\|y_j\|}\right\| = 2$ para todo $i, j = 1, ..., n,\ i \neq j$, y por tanto $X$ no es p($n$)-convexo. $\square$

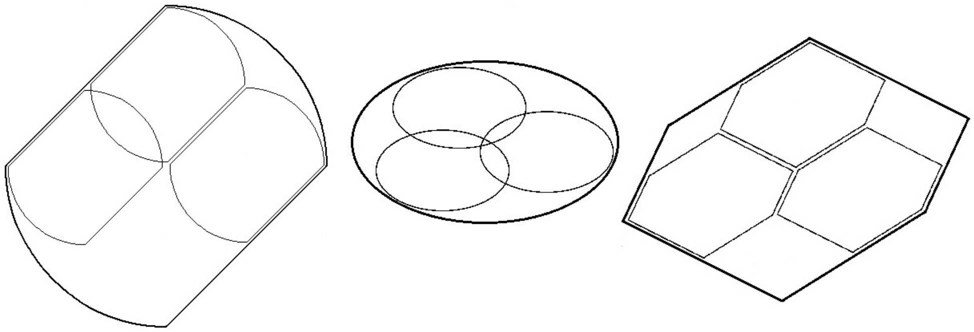

Figura 3.2. Bolas unitarias, las dos primeras son p(3)-convexas y la tercera no es p(3)-convexa

**Ejemplo 3.2.3.** *Existen espacios p-convexos que no son reflexivos. Por ejemplo, en el ejemplo 1.1.16 se mencionó que para cada* $\alpha > 0$ *el espacio* $(C[0,1], \|\cdot\|_\alpha)$ *es estrictamente convexo donde* $\|x\|_\alpha = \|x\|_\infty + \alpha\|x\|_2$ *para cada* $x \in C[0,1]$ *y en el teorema 3.2.11 se verá que todo espacio estrictamente convexo es p(3)-convexo. Por otro lado, es claro que* $(C[0,1], \|\cdot\|_\alpha)$ *no es reflexivo ya que es isomorfo a* $C[0,1]$ *y éste no es reflexivo.*

Enseguida damos algunos ejemplos de espacios que no son p-convexos. Los primeros tres no son reflexivos y el último es superreflexivo.

**Ejemplo 3.2.4.** $C[0,1]$ *no es p-convexo. En efecto, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *definimos las siguientes funciones continuas* $f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n$, *dadas por*

$$f_k(x) = \begin{cases} 2nx - 2k + 2, \ \text{si } x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{2k-1}{2n}\right], \\ 2k - 2nx, \ \text{si } x \in \left[\frac{2k-1}{2n}, \frac{k}{n}\right], \\ 0, \ \text{si } x \in [0,1] \setminus \left( \left[\frac{k-1}{n}, \frac{2k-1}{2n}\right] \bigcup \left[\frac{2k-1}{2n}, \frac{k}{n}\right] \right). \end{cases}$$

*Definimos ahora* $g_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} \, f_j$, *donde* $\lambda_{i,j} = 1$ *si* $j \neq i$ *y* $\lambda_{i,i} = -1$ *para cada* $i = 1, ..., n$. *Es sencillo verificar que* $g_1, ..., g_n \in S_{C[0,1]}$ *y que para cada* $i \neq j$ *se tiene que* $\|g_i - g_j\|_\infty = 2$.

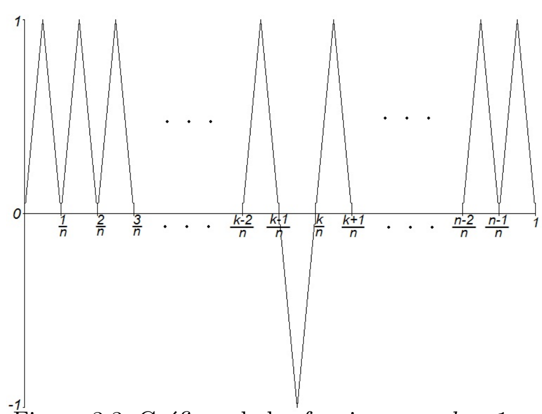


Figura 3.3. Gráficas de las funciones $g_k$, $k = 1, ..., n$

**Ejemplo 3.2.5.** *$c_0$, y consecuentemente, $l_\infty$ no son p-convexos. En efecto, sea $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ la base canónica en $c_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}\ e_j$, donde $\lambda_{i,j} = 1$ si $j \neq i$ y $\lambda_{i,i} = -1$ para cada $i = 1, ..., n$. Claramente $u_1, ..., u_n \in S_{c_0}$ y para cada $i \neq j$ se tiene que $\|u_i - u_j\|_\infty = 2$.*

**Ejemplo 3.2.6.** *$l_1$ no es p-convexo, ya que la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $l_1$ cumple que $\|e_i - e_j\|_1 = 2$ para cada $i \neq j$.*

**Ejemplo 3.2.7.** *Sea $X$ el espacio obtenido al renormar $l_2$ como sigue. Para $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$ definimos*

$$|||x||| = \text{máx}\left\{ \sup_{i,j} |x_i - x_j|, \left( \sum_{i=1}^{\infty} {x_i}^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

*Entonces $||x|| \leq |||x||| \leq \sqrt{2}||x||$, donde $\|\cdot\|$ es la $l_2$-norma y $X$ es superreflexivo. Más aún, este espacio es $O(4)$-convexo (véase ejemplo 2.1.14 ). Por otro lado, la base canónica $\{e_n\}_n$ en $l_2$ satisface $\|e_i - e_j\|_\infty = 2$ para cada $i \neq j$. Por tanto $X$ no es p-convexo.*

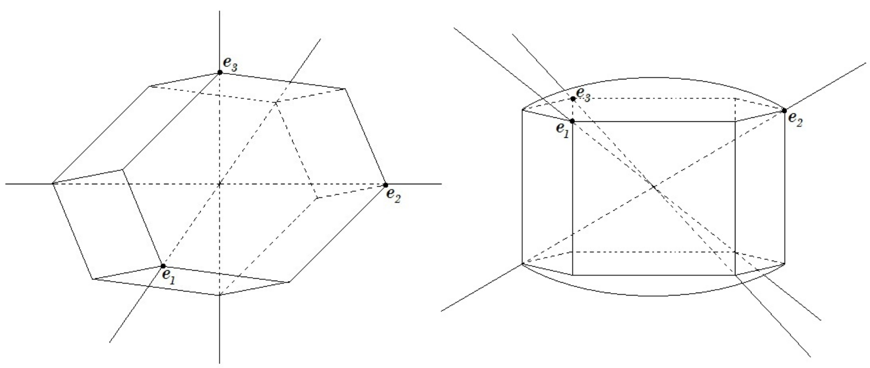


Figura 3.4. Bola unitaria del espacio $(\mathbb{R}^3, |||\cdot|||)$

Si $X$ es un espacio normado finito dimensional de la observación 2.1.6 se tiene que $X$ es p(k)-convexo para algún $k \in \mathbb{N}$, sin embargo resultaría interesante encontrar de forma explícita el mínimo número $k$ que lo cumpla.

**Ejemplo 3.2.8.** *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $l_\infty^n$ no es p($2^n$)-convexo y $l_1^n$ no es p(2n)-convexo. En efecto, para el espacio $l_\infty^n$ considere su base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ y al conjunto de puntos extremos de $B_{l_\infty^n}$, $\mathcal{E}(B_{l_\infty^n}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i : \xi_i \in \{-1, 1\} \right\}$. Claramente para cada $u, v \in \mathcal{E}(B_{l_\infty^n})$, $u \neq v$, se tiene que $\|u - v\|_\infty = 2$. Para el espacio $l_1^n$ considere su base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ y al conjunto de puntos extremos de $B_{l_1^n}$, $\mathcal{E}(B_{l_1^n}) = \left\{ \xi_i e_i : \xi_i \in \{-1, 1\} \right\}$. Claramente para cada $u, v \in \mathcal{E}(B_{l_1^n})$, $u \neq v$, se tiene que $\|u - v\|_\infty = 2$. Sin embargo, existen $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $l_\infty^n$ y $l_1^n$ son p(k)-convexo y p(m)-convexo, respectivamente.*

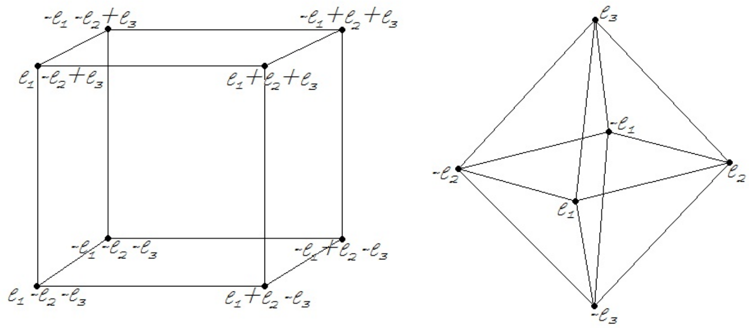


Figura 3.5. Bolas unitarias de $l_\infty^3$ y $l_1^3$ con sus puntos extremos

En [3] capítulo 4 se prueba un teorema estableciendo varias condiciones equivalentes para la convexidad estricta. Nosotros probamos un resultado similar para la p-convexidad.

**Lema 3.2.9.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$(a)$ *$X$ es p(n)-convexo.*

$(b)$ *Para todo $q \in (1,\infty)$ y para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in X$, no todos cero, existen $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$, tales que $\|x_i - x_j\| < 2^{\frac{q-1}{q}} \left(\|x_i\|^q + \|x_j\|^q\right)^{1/q}$.*

$(c)$ *Para algún $q \in (1,\infty)$ y para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in X$, no todos cero, existen $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$, tales que $\|x_i - x_j\| < 2^{\frac{q-1}{q}} \left(\|x_i\|^q + \|x_j\|^q\right)^{1/q}$.*

*Demostración.* Las implicaciones $(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$ son inmediatas. Verifiquemos $(a) \Rightarrow (b)$. Sean $q \in (1,\infty)$ y $x_1, ..., x_n \in X$ no todos cero. Si $x_j = 0$ y $x_i \neq 0$ para algunos $1 \le i, j \le n$, entonces es claro que $\|x_i - x_j\| < 2^{\frac{q-1}{q}} \left(\|x_i\|^q + \|x_j\|^q\right)^{1/q}$. Suponga que $x_1, ..., x_n \in X \backslash \{0\}$. Existen $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$, tales que

$$\left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} - \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| < 2.$$

Si $\|x_j\| \le \|x_i\|$ por el lema 2.1.7 tenemos que

$$\|x_i - x_j\| \le \|x_j\| \left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} - \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| + \|x_i\| - \|x_j\| < \|x_i\| + \|x_j\|.$$

Como la función $t \mapsto t^q$ es convexa obtenemos que

$$\left\| \frac{x_i - x_j}{2} \right\|^q < \left( \frac{\|x_i\| + \|x_j\|}{2} \right)^q \le \frac{1}{2}\left(\|x_i\|^q + \|x_j\|^q\right).$$

Por tanto $\|x_i - x_j\| < 2^{\frac{q-1}{q}} \left(\|x_i\|^q + \|x_j\|^q\right)^{1/q}$. $\square$

Como consecuencia del lema anterior tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.2.10.** *Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios de Banach, donde el conjunto de índices $I \neq \emptyset$ tiene cualquier cardinalidad y $1 < q < \infty$. Entonces el espacio $X = l_q(X_i)$ es p(n)-convexo si, y sólo si, cada espacio $X_i$ es p(n)-convexo, donde*

$$l_q(X_i) = \left\{ x = \{x_i\} \in \prod_{i\in I} X_i : \|x\| = \left( \sum_{i\in I} \|x_i\|_{X_i}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

*Demostración.* Si $X$ es p($n$)-convexo es claro que $X_i$, para cada $i$, también lo es. Probemos el regreso. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios p($n$)-convexos. Sean $x^{(k)} = \left\{x_i^{(k)}\right\}_{i\in I} \in X$, $1 \leq k \leq n$, no todos cero. Sea $i_0 \in I$ tal que $x_{i_0}^{(k)} \neq 0$, para algún $k \in \{1, ..., n\}$. Como $X_{i_0}$ es un espacio p(n)-convexo tenemos por el lema previo que existen $1 \leq l, m \leq n$ tales que

$$\left\| x_{i_0}^{(l)} - x_{i_0}^{(m)} \right\|^q < 2^{q-1} \left( \left\| x_{i_0}^{(l)} \right\|^q + \left\| x_{i_0}^{(m)} \right\|^q \right).$$

De lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| x^{(l)} - x^{(m)} \right\|_q^q &= \sum_{i\in I} \left\| x_i^{(l)} - x_i^{(m)} \right\|^q \\ &< \sum_{i\in I} 2^{q-1} \left( \left\| x_i^{(l)} \right\|^q + \left\| x_i^{(m)} \right\|^q \right) = 2^{q-1} \left( \left\| x^{(l)} \right\|_q^q + \left\| x^{(m)} \right\|_q^q \right). \end{aligned}$$

Luego, por el lema previo, $X$ es p(n)-convexo. □

Ahora estableceremos varias propiedades que implican p-convexidad.

**Proposición 3.2.11.** *Todo espacio suave, todo espacio estrictamente convexo y todo u-espacio es p(3)-convexo.*

*Demostración.* Todo espacio suave y todo espacio estrictamente convexo es u-espacio. Por tanto es suficiente probar que la p(3)-convexidad se sigue de la propiedad de u-espacio. Si $X$ es un u-espacio, entonces para cualesquiera $x, y \in S_X$ se cumple la desigualdad: $\min\left\{ \|x - y\|, \|x + y\| \right\} < 2$. En efecto, si suponemos que existen $x, y \in S_X$ tales que $\|x + y\| = \|x - y\| = 2$ entonces $\nabla(x) = \nabla(y)$ y $\nabla(x) = \nabla(-y)$ lo cual no puede ser. Supongamos que $X$ no es p(3)-convexo, entonces existen $x, y, z \in S_X$ tales que $\|x - y\| = \|y - z\| = \|z - x\| = 2$. Como $\frac{1}{2}\|x - y\| = \frac{1}{2}\|y - z\| = 1$ tenemos que $\nabla(x) = \nabla(-y) = \nabla(z)$. Sea $f \in \nabla(-y)$.

Como $\|x - z\| = 2$ se sigue que $f(x + z) \leq \|x + z\| < 2$ y de aquí se obtiene una contradicción ya que

$$2 = f(x) + f(-y) = f(x + z) - f(z) + f(-y) = f(x + z) < 2.$$

Luego, $X$ es p(3)-convexo. $\square$

**Observación 3.2.12.** *No todo espacio p-convexo es estrictamente convexo, suave o u-espacio. Por ejemplo, si $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, donde $\|(x, y)\| = \|(x, y)\|_2$ si $xy \leq 0$ y $\|(x, y)\| = \|(x, y)\|_\infty$ si $xy \geq 0$, entonces de la proposición 2.3.4 tenemos que este espacio es p(3)-convexo. Por otro lado, $X$ no es u-espacio ya que se probó en la observación 2.5.3 que $X$ no es U-espacio.*

### 3.2.2. p-convexidad de espacios cocientes

Ahora dirigimos nuestra atención a algunos resultados con respecto a la p-convexidad de espacios cocientes. Para demostrarlos necesitamos el siguiente concepto.

**Definición 3.2.13.** *Un subespacio $Y$ de un espacio normado $X$ es proximinal si para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $d(x, Y) = \|x - y\|$.*

Si $Y$ es un espacio proximinal de un espacio de Banach $X$, entonces es fácil ver que $Y$ es cerrado y también que $q(B_X) = B_{X/Y}$, donde $q : X \longrightarrow X/Y$ es la función cociente.

**Proposición 3.2.14.** *Si $X$ es p(n)-convexo y $Y$ es un subespacio cerrado proximinal de $X$, entonces $X/Y$ es p(n)-convexo.*

*Demostración.* Sea $q : X \longrightarrow X/Y$ la función cociente. De la proximinalidad de $Y$ se tiene que $q(B_X) = B_{X/Y}$. Sean $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n \in B_{X/Y}$ y $x_1, ..., x_n \in B_X$ tales que $\tilde{x}_i = q(x_i)$. Como $X$ es p($n$)-convexo, existen $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, tales que $\|x_i - x_j\| < 2$ y consecuentemente $\|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\| < 2$. $\square$

**Corolario 3.2.15.** *Sea $X$ p(n)-convexo y reflexivo. Si $Y$ es un subespacio cerrado de $X$, entonces $X/Y$ es p(n)-convexo.*

*Demostración.* En [53] está demostrado que un espacio de Banach $X$ es reflexivo si, y sólo si, cada subespacio cerrado de $X$ es proximinal y por tanto el corolario es una consecuencia de la proposición 3.2.14. $\square$

De forma similar a la proposición 3.2.14 podemos probar que si $X$ es P($\varepsilon, n$)-convexo y $Y$ es un subespacio cerrado de $X$, entonces $X/Y$ es P($\varepsilon, n$)-convexo.

**Corolario 3.2.16.** *Si $X$ es F(n)-convexo y $Y$ es un subespacio cerrado de $X$, entonces $X/Y$ es F(n)-convexo.*

*Demostración.* Como $Y^{\perp}$ es un subespacio cerrado de $X^*$ y $X^*$ es P($n$)-convexo se tiene que $Y^{\perp}$ es P($n$)-convexo, y como $(X/Y)^*$ es isométricamente isomorfo a $Y^{\perp}$, se sigue que $(X/Y)^*$ es P($n$)-convexo. Luego, $X/Y$ es F($n$)-convexo. □

Claramente los recíprocos de los resultados anteriores no necesariamente se cumplen. Por ejemplo, si $Z$ es un espacio P-convexo (p-convexo) separable, entonces $Z$ es isométrico a un espacio cociente de $l_1$, digamos, $l_1/Y$. Por tanto, $l_1/Y$ es P-convexo (p-convexo), pero $l_1$ no lo es.

## 3.3. Relación entre la P-convexidad y la p-convexidad

Obviamente P-convexidad implica p-convexidad, sin embargo, no todo espacio p-convexo es P-convexo, ni aún en el caso en que el espacio sea reflexivo como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.3.1.** *Sea $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tales que $r_k > 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $r_k \downarrow 1$, cuando $k \to \infty$. Considere el espacio $X = l_2(l_{r_k})$, también denotado como $X = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus_2 \, l_{r_k}$. De la proposición 3.2.10 se sigue que $X$ es p(3)-convexo (de hecho es bien sabido que este espacio es estrictamente convexo). También se sabe que $X$ es reflexivo. Sin embargo $X$ no es P-convexo. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Elegimos $k \in \mathbb{N}$ de manera tal que $2 - \varepsilon < 2^{1/r_k}$. Si $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la base canónica de $l_{r_k}$, obtenemos que $\|e_i - e_j\|_{r_k} = 2^{1/r_k} > 2 - \varepsilon$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, y por tanto $X$ no es P-convexo.*

Sin embargo, la observación 2.3.1 prueba que la P-convexidad y la p-convexidad coinciden en espacios de dimensión finita.

Hemos obtenido que la P-convexidad y la p-convexidad coinciden también en las ultrapotencias de los espacios de Banach. Para probar nuestra afirmación necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 3.3.2.** *Sea $\{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$ con elementos indizado por un conjunto $I$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathfrak{F}$ un filtro en $I$. Si $\lim_{\mathfrak{F}} x_i$ existe y $\{i \in I : x_i \leq \alpha\} \in \mathfrak{F}$, entonces $\lim_{\mathfrak{F}} x_i \leq \alpha$.*

*Demostración.* Sea $x = \lim_{\mathfrak{F}} x_i$. Suponga que $x > \alpha$. Existe $\delta > 0$ tal que $\alpha < x - \delta$. Por definición de $\lim_{\mathfrak{F}} x_i$ tenemos que $\{i \in I : x - \delta < x_i < x + \delta\} \in \mathfrak{F}$ y consecuentemente $\emptyset = \{i \in I : x_i \leq \alpha\} \bigcap \{i \in I : x - \delta < x_i < x + \delta\} \in \mathfrak{F}$, lo cual no puede ser. Luego, $x \leq \alpha$. $\square$

Es sabido (véanse [1] cap. 2 y [13]) que $X$ es uniformemente convexo si y sólo si $\tilde{X}$ es estrictamente convexo, $X$ es uniformemente suave si y sólo si $\tilde{X}$ es suave y $X$ es un U-espacio si y sólo si $\tilde{X}$ es un u-espacio. Similarmente obtuvimos el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.3.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(a) $X$ es P(m)-convexo.*

*(b) $\tilde{X}$ es P(m)-convexo.*

*(c) $\tilde{X}$ es p(m)-convexo.*

*Demostración.* $(a) \Rightarrow (b)$. Sean $\tilde{x}_i \in S_{\tilde{X}}$, $\{x_i^{(n)}\}_n \in \tilde{x}_i$, $i = 1, ..., m$. Como $\lim\limits_{\mathfrak{U}} \left\| x_i^{(n)} \right\|_X = \|\tilde{x}_i\|_{\tilde{X}} = 1$ para cada $i$, existe una subsucesión $\{x_i^{(n_k)}\}_k$ de $\{x_i^{(n)}\}_n$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| x_i^{(n_k)} \right\|_X = 1$ y $\left\| x_i^{(n_k)} \right\|_X > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Defina

$$y_i^{(n_k)} = \frac{x_i^{(n_k)}}{\left\| x_i^{(n_k)} \right\|_X} \quad \text{y} \quad \Gamma_{i,j} = \left\{ k \in \mathbb{N} : \left\| y_i^{(n_k)} - y_j^{(n_k)} \right\|_X \leq 2 - \varepsilon \right\}$$

para cada $i, j = 1, ..., m$, $i \neq j$. Verifiquemos que existen $1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$, tales que $\Gamma_{i,j} \in \mathfrak{U}$. Procedamos por contradicción suponiendo que para todo $i \neq j$, $\Gamma_{i,j} \notin \mathfrak{U}$. Por tanto, apelando al lema 1.3.5, $\mathbb{N} \backslash \Gamma_{i,j} \in \mathfrak{U}$ para todo $i \neq j$ y consecuentemente,

$$\bigcap_{i \neq j} (\mathbb{N} \backslash \Gamma_{i,j}) = \mathbb{N} \backslash \left( \bigcup_{i \neq j} \Gamma_{i,j} \right) \in \mathfrak{U}.$$

En particular

$$\mathbb{N} \backslash \left( \bigcup_{i \neq j} \Gamma_{i,j} \right) \neq \emptyset$$

y de aquí, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \notin \bigcup_{i \neq j} \Gamma_{i,j}$. De esto se sigue que $\left\| y_i^{(n_{k_0})} - y_j^{(n_{k_0})} \right\|$ $> 2 - \varepsilon$ para todo $i \neq j$ y por tanto $X$ no sería P($m$)-convexo, lo cual es una contradicción. De lo anterior, existen $1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$, tales que $\Gamma_{i,j} \in \mathfrak{U}$, y en virtud del lema 3.3.2, se obtiene que $\lim\limits_{\mathfrak{U}} \left\| y_i^{(n_k)} - y_j^{(n_k)} \right\|_X \leq 2 - \varepsilon$. Por último observemos que

$$\left\| x_i^{(n_k)} - x_j^{(n_k)} \right\|_X \leq \left\| x_i^{(n_k)} - y_i^{(n_k)} \right\|_X + \left\| x_j^{(n_k)} - y_j^{(n_k)} \right\|_X + \left\| y_i^{(n_k)} - y_j^{(n_k)} \right\|_X$$

$$= \left|1 - \left\|x_i^{(n_k)}\right\|_X\right| + \left|1 - \left\|x_i^{(n_k)}\right\|_X\right| + \left\|y_i^{(n_k)} - y_j^{(n_k)}\right\|_X$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\|_{\tilde{X}} &= \lim_{\mathfrak{U}} \left\|x_i^{(n)} - x_j^{(n)}\right\|_X = \lim_{\mathfrak{U}} \left\|x_i^{(n_k)} - x_j^{(n_k)}\right\|_X \\ &\leq \lim_{\mathfrak{U}}\left|1-\left\|x_i^{(n_k)}\right\|_X\right| + \lim_{\mathfrak{U}}\left|1-\left\|x_i^{(n_k)}\right\|_X\right| + \lim_{\mathfrak{U}}\left\|y_i^{(n_k)} - y_j^{(n_k)}\right\|_X \leq 2-\varepsilon.\end{aligned}$$

Luego, $\tilde{X}$ es P($m$)-convexo.

$(b) \Rightarrow (c)$ es obvio.

$(c) \Rightarrow (a)$. Suponga que $X$ no es P($m$)-convexo. De aquí, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_1^{(n)}, ..., x_m^{(n)} \in S_X$ tales que $\left\|x_i^{(n)} - x_j^{(n)}\right\|_X > 2 - \frac{1}{n}$ para todo $i, j = 1, ..., m$, $i \neq j$. Definimos $m$ elementos de la ultrapotencia mediante $\tilde{x}_i = \left\{x_i^{(n)}\right\}_{\mathfrak{U}}$ para cada $i = 1, ..., m$. Claramente $\tilde{x}_i \in S_{\tilde{X}}$ para cada $i$, ya que $\|\tilde{x}_i\|_{\tilde{X}} = \lim_{\mathfrak{U}} \left\|x_i^{(n)}\right\|_X = 1$, y además,

$$\|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\|_{\tilde{X}} = \lim_{\mathfrak{U}} \left\|x_i^{(n)} - x_j^{(n)}\right\|_X = \lim_{n\to\infty} \left\|x_i^{(n)} - x_j^{(n)}\right\|_X = 2$$

para cada $i \neq j$. Luego, $\tilde{X}$ no es p($m$)-convexo. □

Del teorema anterior podemos deducir el siguiente resultado que ya era conocido, pues Naidu y Sastry mostraron en [51] la superreflexividad de los espacios O-convexos.

**Corolario 3.3.4.** *Si $X$ es P-convexo entonces $X$ es superreflexivo.*

*Demostración.* Si $X$ es P-convexo entonces $\tilde{X}$ es P-convexo y por tanto reflexivo. Pero en la ultrapotencia de un espacio de Banach reflexividad y superreflexividad son equivalentes, de donde se sigue que $\tilde{X}$ es superreflexivo y consecuentemente $X$ es superreflexivo. □

Como consecuencia del corolario anterior se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 3.3.5.** *Si $X$ es F-convexo entonces $X$ es superreflexivo.*

## 3.4. f-convexidad

En el caso de la p-convexidad encontramos un concepto dual semejante a la condición (3.1).

**Definición 3.4.1.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que $X$ es $f(n)$-convexo si para cualesquiera $f_1, ..., f_n \in S_{X^*}$ existen $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, tales que $\big\{x \in S_X : f_i(x) = 1,\ -f_j(x) = 1\big\} = \emptyset$. Decimos que $X$ es $f$-convexo si es $f(n)$-convexo para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Un teorema conocido es que si $X$ un espacio suave entonces $X^*$ es estrictamente convexo. Asimismo, si $X$ es estrictamente convexo entonces $X^*$ es suave (véase [14], cap. 2). En analogía con este teorema obtuvimos el siguiente resultado.

**Proposición 3.4.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach. Se cumple:*

*$(a)$ Si $X^*$ es p(n)-convexo entonces $X$ es f(n)-convexo.*

*$(b)$ Si $X^*$ es f(n)-convexo entonces $X$ es p(n)-convexo.*

*Demostración.* $(a)$ Suponga que $X^*$ es p($n$)-convexo y sean $f_1, ..., f_n \in S_{X^*}$. Existen $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, tales que $\|f_i - f_j\| < 2$. Sea $x^{**} \in \nabla(f_i)$. Se tiene que $1 + x^{**}(-f_j) = x^{**}(f_i - f_j) \leq \|f_i - f_j\| < 2$ y por tanto $x^{**}(-f_j) < 1$, es decir $x^{**} \notin \nabla(-f_j)$. Por tanto, $\nabla(f_i) \bigcap \nabla(-f_j) = \emptyset$. Por último, nótese que si $\jmath$ es la inyección canónica de $X$ a $X^{**}$, se sigue que $\big\{x \in S_X : \jmath(x)(f_i) = 1,\ \jmath(x)(-f_j) = 1\big\} \subset \nabla(f_i) \bigcap \nabla(-f_j)$ y, consecuentemente, $\big\{x \in S_X : f_i(x) = 1,\ -f_j(x) = 1\big\} = \emptyset$. Luego, $X$ es f($n$)-convexo.

$(b)$ Suponga que $X^*$ es f($n$)-convexo y sean $x_1, ..., x_n \in S_X$. Existen $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, tales que $\big\{f \in S_X^* : \jmath(x_i)(f) = 1,\ -\jmath(x_j)(f) = 1\big\} = \nabla(x_i) \bigcap \nabla(-x_j) = \emptyset$. Elegimos $f \in \nabla(x_i - x_j)$. Como $f \notin \nabla(x_i) \bigcap \nabla(-x_j)$ tenemos que $\|x_i - x_j\| = f(x_i) + f(-x_j) < 2$. Luego, $X$ es p($n$)-convexo. $\square$

**Corolario 3.4.3.** *Si $X$ es un espacio reflexivo entonces:*

*$(a)$ $X$ es p(n)-convexo si, y sólo si, $X^*$ es f(n)-convexo.*

*$(b)$ $X$ es f(n)-convexo si, y sólo si, $X^*$ es p(n)-convexo.*

Análogamente a la proposición 3.1.4, hemos encontrado este resultado.

**Proposición 3.4.4.** *$X$ es p(3)-convexo si, y sólo si, $X$ es f(3)-convexo.*

*Demostración.* Suponga que $X$ no es f(3)-convexo. Existen $f, g, h \in S_{X^*}$ tales que $\big\{\xi \in S_X : f(\xi) = 1,\ -g(\xi) = 1\big\} \neq \emptyset$, $\big\{\xi \in S_X : g(\xi) = 1,\ -h(\xi) = 1\big\} \neq \emptyset$ y $\big\{\xi \in S_X : h(\xi) = 1,\ -f(\xi) = 1\big\} \neq \emptyset$. Sean $x \in \big\{\xi \in S_X : f(\xi) = 1,\ -g(\xi) = 1\big\}$, $y \in \big\{\xi \in S_X : g(\xi) = 1,\ -h(\xi) = 1\big\}$ y $z \in \big\{\xi \in S_X : h(\xi) = 1,\ -f(\xi) = 1\big\}$. Se tiene que $\|x - y\| \geq f(x-y) = 2$, $\|y - z\| \geq g(y-z) = 2$ y $\|z - x\| \geq h(z-x) = 2$. Luego, $X$ no es p(3)-convexo.

Recíprocamente suponga que $X$ no es p(3)-convexo. Existen $x, y, z \in S_X$ tales que $\|x-y\| = \|y-z\| = \|z-x\| = 2$. Sean $f \in \nabla(x-y)$, $g \in \nabla(y-z)$ y $h \in \nabla(z-x)$. Se tiene que $f(x-y) = \|x-y\| = 2$, $g(y-z) = \|y-z\| = 2$ y $h(z-x) = \|z-x\| = 2$ y por tanto, $f(x) = f(-y) = g(y) = g(-z) = h(z) = h(-x) = 1$ y consecuentemente $\left\{\xi \in S_X : f(\xi) = 1,\ -g(\xi) = 1\right\} \neq \emptyset$, $\left\{\xi \in S_X : g(\xi) = 1,\ -h(\xi) = 1\right\} \neq \emptyset$ y $\left\{\xi \in S_X : h(\xi) = 1,\ -f(\xi) = 1\right\} \neq \emptyset$. Luego, $X$ no es f(3)-convexo. $\square$

De las proposiciones 3.2.11 y 3.4.4 se tiene este corolario.

**Corolario 3.4.5.** *Todo espacio suave, todo espacio estrictamente convexo y todo u-espacio es f(3)-convexo.*

Es sabido que en espacios reflexivos $\left(\tilde{X}\right)^*$ es isométricamente isomorfo a $\widetilde{(X^*)}$; como consecuencia de esto y del teorema 3.3.3, obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.4.6.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(a) $X$ es F(n)-convexo.*

*(b) $\tilde{X}$ es F(n)-convexo.*

*(c) $\tilde{X}$ es f(n)-convexo.*

Por otra parte, de la proposición 3.2.10 y del corolario 3.4.3 se sigue el siguiente corolario.

**Corolario 3.4.7.** *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios reflexivos donde el conjunto de índices $I \neq \emptyset$ tiene cualquier cardinalidad. Entonces el espacio $X = l_q(X_i)$ ($1 < q < \infty$) es f(n)-convexo si, y sólo si, cada espacio $X_i$ es f(n)-convexo.*

## 3.5. La propiedad $(S)$ en espacios F-convexos

Como hemos visto, en [66] Wiśnicki definió una propiedad geométrica para los espacios de Banach, llamada la *propiedad* $(S)$ y demostró que si para un espacio superreflexivo $X$ existe un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ sobre $\mathbb{N}$ tal que su ultrapotencia $\{X\}_{\mathfrak{U}}$ tiene la propiedad $(S)$, entonces $X$ tiene la FPP. En esta sección mostraremos que todo espacio F-convexo tiene la propiedad $(S)$.

Para demostrar que todo espacio F-convexo tiene la propiedad $(S)$ necesitaremos el siguiente lema, que es una ligera modificación del lema 4.6 de [66].

**Lema 3.5.1.** *Sea $X$ un espacio reflexivo y suponga que existe $A \subset S_X$ con $diam(A) \leq 1$ que no puede ser separado de cero, es decir, para todo $F \in X^*$ existe $x \in A$ tal que $F(x) = 0$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen sucesiones $\{x_n\}_n \subset A$ y $\{f_n\}_n \subset S_{X^*}$ tales que $f_i(x_i) = 1$ y $0 \leq f_i(x_j) < \varepsilon$ para $i \neq j$.*

*Demostración.* En el lema 4.6 de [66], Wiśnicki prueba que si para cada $x \in A$ elegimos un funcional soporte $f_x \in S_{X^*}$ con $f_x(x) = 1$, entonces existe $y \in \bar{A}^w$ tal que $f_x(y) = 0$ para todo $x \in A$, donde $\bar{A}^w$ denota la $w$-cerradura del conjunto $A$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos una sucesión $\{x_n\}_n \subset A$ tal que $x_n \rightharpoonup y$. Para cada $n$ denotemos $f_{x_n} = f_n$. Como $B_{X^*}$ es $w$-compacto existe una subsucesión de $\{f_n\}_n$, que denotaremos nuevamente como $\{f_n\}_n$, tal que $f_n \rightharpoonup f \in B_{X^*}$. En particular $f(y) = 0$. Como $x_n \rightharpoonup y$, $f(y) = f_n(y) = 0$ para cada $n$ y $f_n \rightharpoonup f$, existe un entero $k_1 > 1$ tal que cumple simultáneamente $|f_1(x_k - y)| = |f_1(x_k)| < \varepsilon$, $|f(x_k - y)| = |f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|(f_k - f)(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k > k_1$. Análogamente existe un entero $k_2 > k_1$ tal que cumple simultáneamente las desigualdades $|f_{k_1}(x_k)| < \varepsilon$, $|f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|(f_k - f)(x_{k_1})| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k > k_2$. Procediendo inductivamente encontramos una sucesión estrictamente creciente de números naturales $\{k_i\}_i$ tales que $|f_{k_i}(x_{k_j})| < \varepsilon$, $|f(x_{k_i})| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|(f_{k_j} - f)(x_{k_i})| < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $1 \leq i < j$. De las dos últimas desigualdades se sigue que $|f_{k_j}(x_{k_i})| < |f(x_{k_i})| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ para cada $1 \leq i < j$. Por último notemos que para $i \neq j$ se tiene que $1 - f_j(x_i) = f_j(x_j - x_i) \leq \|x_j - x_i\| \leq 1$ y por tanto $f_j(x_i) \geq 0$. De lo anterior obtenemos que $f_{k_i}(x_{k_i}) = 1$ y $0 \leq f_{k_i}(x_{k_j}) < \varepsilon$ para cada $i \neq j$. $\square$

**Proposición 3.5.2.** *Todo espacio F-convexo tiene la propiedad (S).*

*Demostración.* Suponga que $X$ es $\mathrm{F}(\varepsilon, n)$-convexo pero no cumple la propiedad $(S)$. Entonces existe $A \subset S_X$ con $diam(A) \leq 1$ que no puede ser separado de cero. Del lema 3.5.1 existen sucesiones $\{x_n\}_n \subset A$ y $\{f_n\}_n \subset S_{X^*}$ tales que $f_i(x_i) = 1$ y $0 \leq f_i(x_j) < \varepsilon$ para $i \neq j$. Como $f_i(x_i - x_j) > 1 - \varepsilon$ y $x_i - x_j \in B_X$ para $i \neq j$ se sigue que $x_i - x_j \in S(f_i, -f_j, \varepsilon)$, $i \neq j$, lo cual contradice el hecho de que $X$ es $\mathrm{F}(\varepsilon, n)$-convexo. $\square$

Del teorema 2.6.5, del lema 3.5.1 y del corolario 3.4.6 se tiene otra prueba de la FPP para espacios F-convexos.

**Corolario 3.5.3.** *Si $X$ es F-convexo entonces tiene la FPP.*

*Demostración.* Por el corolario 3.4.6 tenemos que $\tilde{X}$ es F-convexo y de la proposición 3.5.2 se obtiene que $\tilde{X}$ tiene la propiedad $(S)$ y en particular tiene la propiedad $(S_m)$. Por tanto, por el teorema 2.6.5 $X$ tiene la FPP. $\square$

Saejung probó en [56] el siguiente teorema.

**Teorema 3.5.4.** *Si un espacio de Banach $X$ es F-convexo entonces tiene estructura normal uniforme.*

Para probar el Teorema 3.5.4, Saejung usó la definición 2.1.8 dada por Kottman y el siguiente lema.

**Lema 3.5.5.** *Sea $X$ un espacio reflexivo y suponga que no tiene estructura normal. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y para cada número natural $n \geq 2$ existen $x_1, x_2, ..., x_n \in S_X$ y $f_1, f_2, ..., f_n \in S_{X^*}$ tales que la siguientes condiciones se satisfacen:*

(*a*) $\big|\, ||x_i - x_j|| - 1 \,\big| < \varepsilon$ *y* $|f_i(x_j)| < \varepsilon$ *para todo* $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$,

(*b*) $f_i(x_i) = 1$ *para todo* $i = 1, 2, ..., n$.

Nosotros probamos que todo espacio F-convexo tiene estructura normal uniforme de manera más directa, procediendo de manera similar que en la prueba de la proposición 3.5.2 y usando la condición (3.1) y el lema 3.5.5.

**Proposición 3.5.6.** *Todo espacio F-convexo tiene estructura normal uniforme.*

*Demostración.* Suponga que $X$ es $\mathrm{F}(\varepsilon, n)$-convexo pero no tiene estructura normal. Del lema 3.5.5 tenemos que existen $x_1, x_2, ..., x_n \in S_X$ y $f_1, f_2, ..., f_n \in S_{X^*}$ tales que

(*a*) $||x_i - x_j|| < 1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$ y $f_i(x_j) < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$,

(*b*) $f_i(x_i) = 1$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Como $f_i\big(\frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}\big) > 1 - \varepsilon$ se sigue que $\frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|} \in S(f_i, -f_j, \varepsilon)$, $i \neq j$, lo cual contradice el hecho de que $X$ es $\mathrm{F}(\varepsilon, n)$-convexo. Luego, $X$ tiene estructura normal. Por último, si $X$ es F-convexo del corolario 3.4.6 tenemos que $\tilde{X}$ es F-convexo y de lo anterior se obtiene que $\tilde{X}$ tiene estructura normal, lo que equivale a que $X$ tiene estructura normal uniforme. $\square$

# CAPÍTULO 4

# Permanencia bajo $\psi$-Sumas Directas

En este capítulo nuestro interés se enfoca a hallar condiciones que garanticen la preservación de ciertas nociones de convexidad bajo $\psi$-sumas directas. En la sección 4.2 estudiaremos el comportamiento de la $\psi$-suma directa de dos espacios de Banach O-convexos, en la sección 4.3 haremos lo correspondiente para la $\psi$-suma de dos espacios P-convexos y en la sección 4.4 lo haremos para espacios que tienen las propiedades SEIS y EIS.

## 4.1. $\psi$-Sumas Directas

Como ya mencionamos, un problema importante dentro de la geometría de espacios de Banach es la permanencia de las propiedades bajo sumas directas. En los últimos 40 años han sido publicados muchos trabajos que estudian el comportamiento bajo sumas directas de ciertas propiedades. Por ejemplo, en 1968, Belluce, Kirk y Steiner demostraron en [5] que la suma directa de dos espacios de Banach con estructura normal, dotado con la norma del máximo, también tiene estructura normal. En [7] Brown probó en 1974 que si $Y$ y $Z$ son subespacios de un espacio de Banach $X$ tales que $Y$ es finito dimensional, $Z$ es P-convexo y $X = Y \oplus Z$, entonces $X$ es P-convexo. Él también probó que $X \oplus_\infty Y$ es P-convexo siempre que $X$ y $Y$ lo sean. En [51] Naidu y Sastry probaron en 1978 que la $l_p$-suma directa, $1 \leq p < \infty$, de dos espacios P-convexos (O-convexos) es P-convexo (O-convexo). En 1984, T. Landes [36] mostró que la estructura normal es preservada bajo una amplia clase de sumas directas incluyendo todas las $l_p^N$-sumas, $1 < p \leq \infty$, pero no bajo las $l_1^N$-sumas [37]. B. Sims y M. Smyth probaron en 1999 que las propiedades (P) y asintóticamente (P), son ambas preservadas bajo sumas directas finitas con normas monotonas [60]. En 2007 Fetter y Gamboa [19] demostraron que la $l_p$-suma directa, $1 < p \leq \infty$, de dos espacios de Banach tiene la propiedad EIS si y sólo si cada espacio tiene la propiedad EIS. Además demostraron que si $X$ es cualquier espacio de Banach y si $Y$ es un espacio de Banach infinito dimensional, entonces $X \oplus_1 Y$ no tiene la propiedad EIS.

En 2002, Takahashi, Kato y Saito [61] introdujeron la $\psi$-suma directa de dos espacios, que generaliza el concepto de $l_p$-suma directa. Enseguida definiremos este concepto.

**Definición 4.1.1.** *Considere al conjunto*

$$\Psi = \big\{\psi : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \psi \text{ es continua, convexa y } \text{máx}\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1,\ t \in [0,1]\big\}.$$

*Para cada $\psi \in \Psi$, definimos la norma $||\cdot||_\psi$ en $\mathbb{C}^2$ como $\|(0,0)\|_\psi = 0$ y $\|(z,w)\|_\psi = (|z|+|w|)\psi\big(\frac{|w|}{|z|+|w|}\big)$ para todo $(z,w) \neq (0,0)$.*

*Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y $\psi \in \Psi$. Definimos la norma $\|\cdot\|_\psi$ en $X \oplus Y$ mediante $\|(0,0)\|_\psi = 0$ y*

$$\|(x,y)\|_\psi = \|(\,||x||_X, ||y||_Y)\|_\psi \tag{4.1}$$

*para cada $(x,y) \neq (0,0)$.*

En [61] está demostrado que el espacio $(X \oplus Y, \|\cdot\|_\psi)$ resulta ser un espacio de Banach que se denota por $X \oplus_\psi Y$ y es llamado la *$\psi$-suma directa* de $X$ y $Y$.

**Ejemplo 4.1.2.** *Sea $1 \leq p < \infty$. Para cada $0 \leq t \leq 1$ definamos $\psi_p(t) = \big((1-t)^p + t^p\big)^{1/p}$ y $\psi_\infty(t) = \text{máx}\big\{1-t, t\big\}$. Es fácil ver que $\psi_p \in \Psi$ y $\|(x,y)\|_{\psi_p} = \|(x,y)\|_p$ para cada $(x,y) \in X \oplus Y$. Por tanto la $\psi_p$-suma directa de $X$ y $Y$ coincide con la $l_p$-suma directa usual $X \oplus_p Y$. Además, para cualquier $\psi \in \Psi$ se cumple la desigualdad*

$$\|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_\psi \leq \|(x,y)\|_1,\ \forall (x,y) \in X \oplus Y.$$

Usaremos frecuentemente los siguientes resultados demostrados por Saito, Kato y Takahashi en [61].

**Lema 4.1.3.** *Para cada $\psi \in \Psi$ se cumple que la función $t \mapsto \frac{\psi(t)}{t}$, $t \in (0,1]$, es decreciente. Asimismo, la función $t \mapsto \frac{\psi(t)}{(1-t)}$, $t \in [0,1)$, es creciente.*

**Lema 4.1.4.** *Sean $\psi \in \Psi$, $(x,y), (z,w) \in \mathbb{C}^2$. Si $|x| \leq |z|$ y $|y| \leq |w|$ entonces $\|(x,y)\|_\psi \leq \|(z,w)\|_\psi$.*

Se sabe que el dual de la $l_p$-suma directa de dos espacios de Banach es la $l_q$-suma directa de sus duales, donde $p$ y $q$ son exponentes conjugados. En [13] Dhompongsa, Kaewkhao y Saejung describieron el dual de $X \oplus_\psi Y$. Para definirlo necesitamos la siguiente definición.

**Definición 4.1.5.** *Dada $\psi \in \Psi$, definamos la función $\psi^* : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como*

$$\psi^*(s) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{st + (1-s)(1-t)}{\psi(t)}, \ 0 \leq s \leq 1.$$

*En [13] Dhompongsa, Kaewkhao y Saejung prueban que $\psi^* \in \Psi$. Esta función es llamada la función dual de $\psi$. También prueban el siguiente teorema.*

**Teorema 4.1.6.** *El espacio dual de $X \oplus_\psi Y$, $(X \oplus_\psi Y)^*$, es isométricamente isomorfo a $X^* \oplus_{\psi^*} Y^*$. Más aún, cada funcional lineal acotado $F \in (X \oplus_\psi Y)^*$ puede ser representado de manera única por $(f, g) \in X^* \oplus_{\psi^*} Y^*$ donde*

$$F(x, y) = f(x) + g(y), \ \forall (x, y) \in X \oplus_\psi Y.$$

Tomando $X$ y $Y$ reflexivos en el teorema 4.1.6 y usando 4.1.11 (f) se puede ver que $\psi^{**} = \psi$.

A continuación enunciaremos un resultado que muestra que algunas propiedades de convexidad en espacios de Banach se preservan bajo cierto tipo de $\psi$-sumas directas. Pero antes necesitamos dar algunas definiciones.

**Definición 4.1.7.** *Sea $\psi \in \Psi$. Decimos que $\psi$ es estrictamente convexa si para cualesquiera $t, s \in [0,1]$ y para cualquier $\lambda \in (0,1)$ se cumple la siguiente desigualdad*

$$\psi\big(\lambda t + (1-\lambda)s\big) < \lambda\psi(t) + (1-\lambda)\psi(s).$$

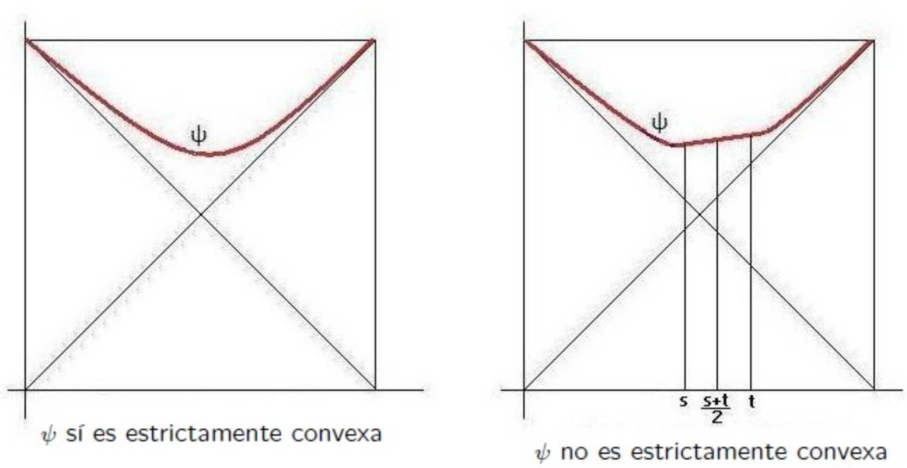


Figura 4.1. Una función $\psi \in \Psi$ estrictamente convexa y otra que no es

**Definición 4.1.8.** *Sea $\psi \in \Psi$. Decimos que $\psi$ es suave si las siguientes condiciones se tienen: $(i)$ la derivada de $\psi$ existe en cada $0 < t < 1$, $(ii)$ la derivada por la derecha de $\psi$ en 0 es igual a -1 y $(iii)$ la derivada por la izquierda de $\psi$ en 1 es igual a 1.*

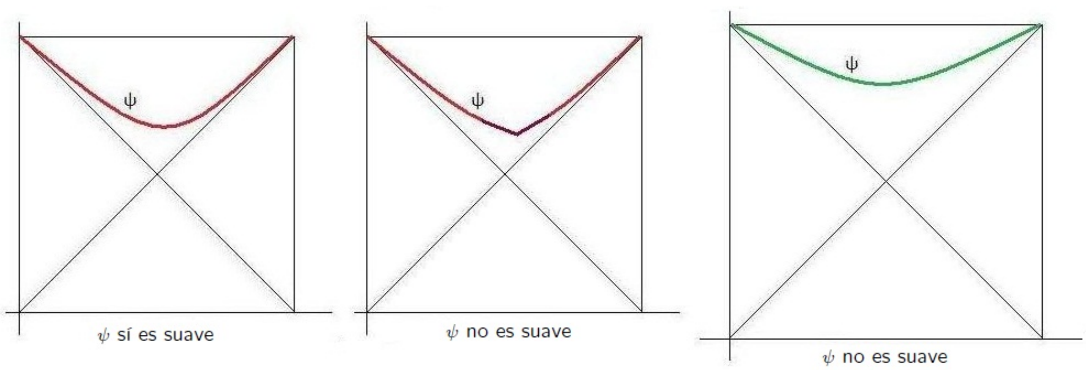


Figura 4.2. Una función $\psi \in \Psi$ suave y dos que no lo son

**Definición 4.1.9.** *Sea $\psi \in \Psi$. Decimos que $\psi$ es una $u$-función si para cualquier intervalo $[a, b] \subset (0, 1)$ tal que $\psi$ es afín en $[a, b]$, se tiene que $\psi$ es derivable en $a$ y en $b$.*

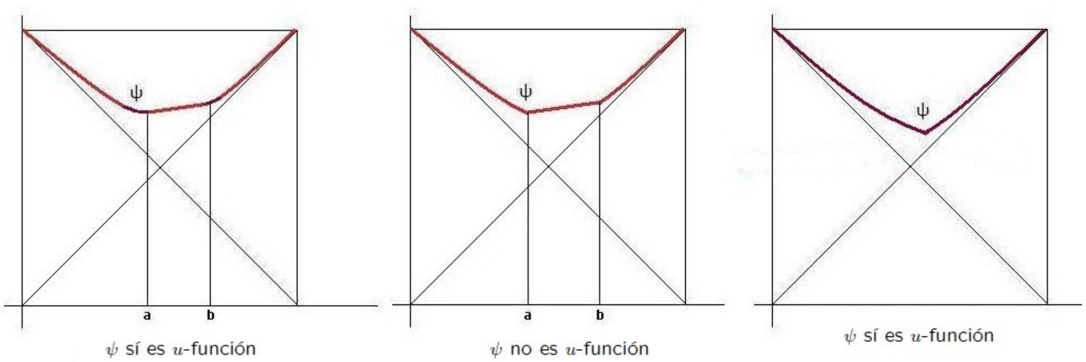


Figura 4.3. Dos $u$-funciones $\psi \in \Psi$ y una que no lo es

Claramente toda función estrictamente convexa y toda función suave es $u$-función. Sin embargo no toda $u$-función es estrictamente convexa o suave.

**Ejemplo 4.1.10.** *Defina la función $\psi(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$, $\psi(x) = x^2 - x + \frac{17}{16}$ si $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ y $\psi(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ si $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$. Es fácil ver que $\psi$ no es estrictamente convexa ni suave y sí es una $u$-función.*

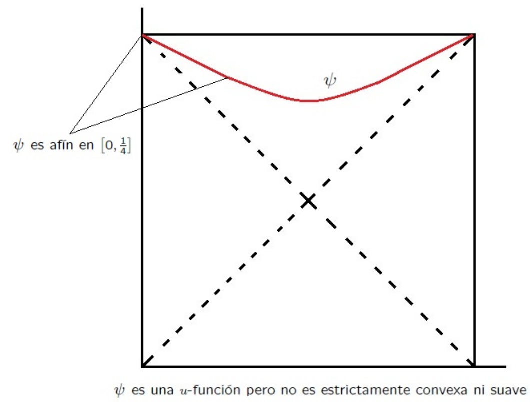


Figura 4.4. Una $u$-función $\psi \in \Psi$ que no es suave ni estrictamente convexa

**Teorema 4.1.11.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y $\psi \in \Psi$. Entonces*

(*a*) *$X \oplus_\psi Y$ es estrictamente convexo si y sólo si $X$ y $Y$ son estrictamente convexos y $\psi$ es estrictamente convexa.*

(*b*) *$X \oplus_\psi Y$ es uniformemente convexo si y sólo si $X$ y $Y$ son uniformemente convexos y $\psi$ es estrictamente convexa.*

(*c*) *$X \oplus_\psi Y$ es suave si y sólo si $X$ y $Y$ son suaves y $\psi$ es suave.*

(*d*) *$X \oplus_\psi Y$ es uniformemente suave si y sólo si $X$ y $Y$ son uniformemente suaves y $\psi$ es suave.*

(*e*) *$X \oplus_\psi Y$ es un U-espacio si y sólo si $X$ y $Y$ son U-espacios y $\psi$ es una u-función.*

(*f*) *$X \oplus_\psi Y$ es un u-espacio si y sólo si $X$ y $Y$ son u-espacios y $\psi$ es una u-función.*

(*g*) *$X \oplus_\psi Y$ es uniformemente no cuadrado si y sólo si $X$ y $Y$ son uniformemente no cuadrados y $\psi \neq \psi_\infty$, $\psi \neq \psi_1$.*

(*h*) *$X \oplus_\psi Y$ es reflexivo si y sólo si $X$ y $Y$ son reflexivos.*

(*i*) *$X \oplus_\psi Y$ es un espacio de Banach si y sólo si $X$ y $Y$ son espacios de Banach.*

Takahashi, Kato y Saito demostraron $(a)$ en [61], Saito y Kato probaron $(b)$ e $(i)$ en [57], $(c)$, $(e)$, $(f)$ y $(h)$ fueron probados por Dhompongsa, Kaewhao y Saejung en [13], Mitani, Oshiro y Saito demostraron $(d)$ en [47] y $(g)$ fue probado por Kato, Saito y Tamura en [32].

## 4.2. O-convexidad de $\psi$-Sumas Directas

En [51] Naidu y Sastry mostraron que $X \oplus_p Y$, $1 \leq p < \infty$, es O-convexo cuando $X$ y $Y$ son O-convexos. En esta sección nos enfocaremos en encontrar condiciones que garanticen la O-convexidad de una $\psi$-suma directa de dos espacios O-convexos. Mostraremos que la noción de O-convexidad se preserva bajo $\psi$-sumas directas cuando $\psi$ es diferente de $\psi_\infty$. Para nuestro resultado sobre la O-convexidad de $\psi$-sumas directas necesitamos enunciar el Teorema de Ramsey para dos colores, que está probado en [38], cap. 1.

**Teorema 4.2.1.** (Ramsey para dos colores) *Sea $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Existe un entero positivo $N$ tal que si coloreamos las aristas de un grafo completo con $N$ vértices con dos colores $A$ y $B$, entonces el grafo contiene un subgrafo completo de color $A$ de longitud $m$ o un subgrafo completo de color $B$ de longitud $n$. El menor entero $N$ con esta propiedad es llamado el número de Ramsey y es denotado por $R(m, n)$.*

**Lema 4.2.2.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $x, y \in X$, $x, y \neq 0$. Si*

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 - \varepsilon$$

*para algún $0 \leq \varepsilon \leq 1$ entonces se tiene que*

$$\|x - y\| \leq \max\big\{\|x\|, \|y\|\big\} + (1 - \varepsilon) \min\big\{\|x\|, \|y\|\big\}.$$

*Demostración.* Suponiendo que $0 < \|x\| \leq \|y\|$, del lema 2.1.7 se obtiene que

$$\|x - y\| \leq \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| + \|y\| - \|x\| \leq \|y\| + (1 - \varepsilon) \|x\| .$$

□

Sean $\psi \in \Psi$, $\psi \neq \psi_\infty$ y $t_0 = \min\{t \in [0, 1] : \psi(t) = t\}$. Claramente $t_0 > \frac{1}{2}$, ya que si $t_0 = \frac{1}{2}$ entonces $\psi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Por tanto, de la convexidad de $\psi$ se obtendría para cada $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ que $\alpha \leq \psi(\alpha) = \psi\big((1-\lambda)\frac{1}{2} + \lambda\big) \leq (1-\lambda)\psi(\frac{1}{2}) + \lambda\psi(1) = \frac{1+\lambda}{2} = \alpha$, donde $\lambda = 2\alpha - 1$, es decir, para cada $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\alpha = \psi(\alpha)$. Análogamente se tendría que $\alpha = \psi(\alpha)$ para cada $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ y, consecuentemente, $\psi = \psi_\infty$. De forma similar tenemos que si $s_0 = \max\{s \in [0, 1] : \psi(s) = 1 - s\}$ entonces $s_0 < \frac{1}{2}$. Esta observación será necesaria para el siguiente lema.

De aquí en adelante escribiremos simplemente $\|x\|$ y $\|y\|$ para $x \in X$ y $y \in Y$ en lugar de $\|x\|_X$ y $\|y\|_Y$, cuando sea claro en qué espacio se considera la norma.

Necesitaremos el siguiente lema auxiliar:

**Lema 4.2.3.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y $\psi \in \Psi$, $\psi \neq \psi_\infty$.*

*(a) Sean $t_0 = \text{mín}\{t \in [0,1] : \psi(t) = t\}$ y $\frac{1}{2} < t_0' < t_0$. Entonces para cada $\xi_0 \in (0,1)$ existe $\eta_0 \in (0,1)$ tal que la siguiente implicación se cumple*

$$(g,h) \in X \oplus_\psi Y,\ \|(g,h)\|_\psi = 1,\ 0 \leq \frac{\|h\|}{\|g\| + \|h\|} \leq t_0',\ \|g\| \geq \xi_0 \implies \|h\| \leq 1 - \eta_0.$$

*(b) Sean $s_0 = \text{máx}\{s \in [0,1] : \psi(s) = 1 - s\}$ y $s_0 < s_0' < \frac{1}{2}$. Entonces para cada $\xi_0 \in (0,1)$ existe $\eta_0 \in (0,1)$ tal que la siguiente implicación se cumple*

$$(g,h) \in X \oplus_\psi Y,\ \|(g,h)\|_\psi = 1,\ s_0' \leq \frac{\|h\|}{\|g\| + \|h\|} \leq 1,\ \|h\| \geq \xi_0 \implies \|g\| \leq 1 - \eta_0.$$

*Demostración.* Supongamos que existe $\xi_0 \in (0,1)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen sucesiones $\{g_n\}_n \subset X$ y $\{h_n\}_n \subset Y$ tales que $\|(g_n,h_n)\|_\psi = 1$, $0 \leq \frac{\|h_n\|}{\|g_n\|+\|h_n\|} \leq t_0'$, $\|g_n\| \geq \xi_0$ y $\|h_n\| \geq 1 - \frac{1}{n}$. Tomando una subsucesión de $\{g_n\}$ podemos suponer si es necesario que $\|g_n\| \to a \geq \xi_0$ cuando $n \to \infty$, para algún $a \geq \xi_0$. Por tanto, $\frac{\|h_n\|}{\|g_n\|+\|h_n\|} \to \frac{1}{a+1} \leq t_0'$, $n \to \infty$. De la continuidad de $\psi$ se obtiene que

$$1 = \|(g_n,h_n)\|_\psi = (\|g_n\| + \|h_n\|)\psi\left(\frac{\|h_n\|}{\|g_n\| + \|h_n\|}\right) \longrightarrow (1+a)\psi\left(\frac{1}{1+a}\right)$$

cuando $n \to \infty$, y por tanto, $\psi\big(\frac{1}{1+a}\big) = \frac{1}{1+a}$, lo cual es una contradicción ya que $\frac{1}{1+a} < t_0$. La prueba de $(b)$ es similar. $\square$

Antes de probar el teorema principal de esta sección estableceremos algunos hechos.

Sean $X$ y $Y$ espacios $O(\varepsilon, n_1)$ y $O(\varepsilon, n_2)$-convexos, respectivamente, y $\psi \in \Psi$ tal que $\psi \neq \psi_\infty$.

Como las funciones $u \mapsto \frac{1-u}{\psi(u)}$ y $u \mapsto \frac{u}{\psi(u)}$ son uniformemente continuas en $[0,1]$ elegimos $0 < \delta < \frac{1}{8}$ tal que si $|u - w| < \delta$ entonces

$$\text{máx}\left\{ \left|\frac{1-u}{\psi(u)} - \frac{1-w}{\psi(w)}\right|, \left|\frac{u}{\psi(u)} - \frac{w}{\psi(w)}\right| \right\} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.2}$$

Sean $s_0 < s_0' < \frac{1}{2} < t_0' < t_0$ como en los lemas previos. Del lema 4.2.3 tenemos que existe $\eta_1 > 0$ tal que

$$(x,y) \in X \oplus_\psi Y, \quad \|(x,y)\|_\psi = 1, \quad 0 \leq \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|} \leq t_0'$$

$$\text{y } \|x\| > \frac{1}{4} - 2\delta > 0 \ \Rightarrow \|y\| \leq 1 - \eta_1. \tag{4.3}$$

Similarmente existe $\eta_2 > 0$ tal que

$$(x, y) \in X \oplus_\psi Y, \quad \|(x, y)\|_\psi = 1, \quad s_0' \leq \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|} \leq 1$$

$$\text{y } \|y\| > \frac{1}{4} - 2\delta > 0 \ \Rightarrow \|x\| \leq 1 - \eta_2. \tag{4.4}$$

Sean $n = R(n_1 + 1, n_2 + 1)$, $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ y $N$ el menor entero que satisface $N\delta \geq 1$. En este contexto tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.4.** *Sean $X$ y $Y$ espacios $O(\varepsilon, n_1)$ y $O(\varepsilon, n_2)$-convexos, respectivamente, y $\psi \in \Psi$ tal que $\psi \neq \psi_\infty$. Entonces $X \oplus_\psi Y$ es $O(\rho, 3k)$-convexo, donde $\rho = \min\{\eta\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1-2s_0'}{1-s_0'}\varepsilon, \frac{2t_0'-1}{t_0'}\varepsilon\}$ y $k = NR(n, n)$, donde $\eta, n, N, s_0'$ y $t_0'$ se eligen de acuerdo al procedimiento anterior.*

*Demostración.* Sean $z_i = (x_i, y_i) \in S_{X \oplus_\psi Y}$, $i = 1, ..., 3k$. Claramente se cumple una de las siguientes tres opciones:

$$(A) \quad \text{Existen } k \ z_i's \text{ tales que } s_0' \leq \frac{\|y_i\|}{\|x_i\| + \|y_i\|} \leq t_0'.$$

$$(B) \quad \text{Existen } k \ z_i's \text{ tales que } 0 \leq \frac{\|y_i\|}{\|x_i\| + \|y_i\|} \leq s_0'.$$

$$(C) \quad \text{Existen } k \ z_i's \text{ tales que } t_0' \leq \frac{\|y_i\|}{\|x_i\| + \|y_i\|} \leq 1.$$

Supongamos que se cumple $(A)$. Renumerando a los $z_i$'s supongamos que $s_0' \leq \frac{\|y_i\|}{\|x_i\|+\|y_i\|} \leq t_0'$ para cada $i = 1, ..., k$. Definamos para cada $i, j = 1, ..., k$, $i \neq j$,

$$s_i = \frac{\|y_i\|}{\|x_i\| + \|y_i\|}, \quad t_{i,j} = \frac{\|y_i - y_j\|}{\|x_i - x_j\| + \|y_i - y_j\|}, \quad u_{i,j} = \frac{\|y_i + y_j\|}{\|x_i + x_j\| + \|y_i + y_j\|}.$$

Como $s_i \in [0, 1]$ y $\psi(s_i) = \frac{1}{\|x_i\|+\|y_i\|}$ obtenemos que

$$\frac{1 - s_i}{\psi(s_i)} = \frac{\|x_i\|}{\|x_i\| + \|y_i\|} \frac{1}{\psi(s_i)} = \|x_i\|$$

y

$$\frac{s_i}{\psi(s_i)} = \frac{\|y_i\|}{\|x_i\| + \|y_i\|} \frac{1}{\psi(s_i)} = \|y_i\|. \tag{4.5}$$

Sea $F = \{1, 2, ..., k\}$. Tenemos que

$$F = \bigcup_{j=1}^{N} I_j,$$

donde $I_j = \{i \in F : (j-1)\delta \leq \psi(s_i)\|y_i\| < j\delta\}$. También tenemos que existe $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq N$ tal que $\#I_l \geq R(n,n)$. Entonces $I_l = \{i_1, ..., i_m\}$ con $m \geq R(n,n)$. Para cada $i, j \in I_l$, $i \neq j$, se cumple una de dos opciones:

$$(i) \quad \psi(t_{i,j})\|x_i - x_j\| \geq \frac{\|z_i - z_j\|}{2}$$

ó

$$(ii) \quad \psi(t_{i,j})\|y_i - y_j\| \geq \frac{\|z_i - z_j\|}{2}.$$

Considere el grafo completo $K_m$ con $m$ vértices. Coloreamos las aristas $(i, j)$ de $K_m$ con color $A$ si $(i)$ sucede y con color $B$ si $(ii)$ ocurre, pero no $(i)$. En virtud del Teorema de Ramsey, existe un subgrafo completo $K_n$ de longitud $n$ con todas sus aristas de color $A$, ó existe un subgrafo completo $K_n'$ de longitud $n$ con cada una de sus aristas de color $B$.

Supongamos que $J_1 = \{j_1, ..., j_n\} \subset I_l$ es tal que $(i)$ se cumple para todo $i, j \in J_1$, $i \neq j$.

Para cada $i, j \in J_1$ también se cumple una de dos opciones:

$$(i.I) \quad \psi(u_{i,j})\|x_i + x_j\| \geq \frac{\|z_i + z_j\|}{2}$$

ó

$$(i.II) \quad \psi(u_{i,j})\|y_i + y_j\| \geq \frac{\|z_i + z_j\|}{2}.$$

Ahora considere el grafo completo $K_n$ de $n$ vértices. Coloreamos las aristas $(i, j)$ de $K_n$ con color $A$ si $(i.I)$ sucede, y con color $B$ si $(i.II)$ ocurre, pero no $(i.I)$. Como $n = R(n_1 + 1, n_2 + 1)$, nuevamente por el Teorema de Ramsey, existe un subgrafo completo $K_{n_1+1}$ de longitud $n_1 + 1$ con todas sus aristas de color $A$, ó existe un subgrafo completo $K_{n_2+1}$ de longitud $n_2 + 1$ con cada una de sus aristas de color $B$.

Suponga que $L_1 = \{j_1, ..., j_{n_1+1}\} \subset J_1$ es tal que $(i.I)$ se cumple para todo $i, j \in L_1$, $i \neq j$.

Dividimos esta parte de la prueba en dos casos:

Caso $i.I.a.$ $l \geq \frac{3}{4}N + 1$. En este caso obtenemos que

$$\psi(s_i)\|y_i\| \geq (l-1)\delta \geq \frac{3}{4}N\delta \geq \frac{3}{4}$$

y por tanto, $\psi(s_i)\|x_i\| = 1 - \psi(s_i)\|y_i\| \leq \frac{1}{4}$ para cada $i \in L_1$. Luego

$$\|x_i\| \leq \frac{1}{4}\frac{1}{\psi(s_i)} \leq \frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

Afirmamos que existen $i, j \in L_1$ tales que $\min\{\|z_i - z_j\|, \|z_i + z_j\|\} \leq 2 - \frac{\varepsilon}{2}$. Procedamos por contradicción suponiendo que $\min\{\|z_i - z_j\|, \|z_i + z_j\|\} > 2 - \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $i, j \in J_1$, $i \neq j$. De aquí,

$$\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{\psi(t_{i,j})} \frac{\|z_i - z_j\|}{2} > \frac{2 - \varepsilon/2}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{4}$$

y

$$\|x_i + x_j\| \geq \frac{1}{\psi(u_{i,j})} \frac{\|z_i + z_j\|}{2} > \frac{2 - \varepsilon/2}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Claramente $\max\big\{\|x_i\|, \|x_j\|\big\} > \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{8} > 0$ para cada par $i, j \in L_1$. Por otro lado, por (4.5) se tiene que $|s_i - s_j| = \big|\, \psi(s_i)\|y_i\| - \psi(s_j)\|y_j\| \,\big| < \delta$, y de (4.3) se sigue que

$$\left| \frac{1 - s_i}{\psi(s_i)} - \frac{1 - s_j}{\psi(s_j)} \right| = \big|\, \|x_i\| - \|x_j\| \,\big| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Luego, suponiendo $\|x_i\| = \max\big\{\|x_i\|, \|x_j\|\big\}$, se obtiene del lema 2.1.7 y de (4.6)

$$\left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} - \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \geq \frac{1}{\|x_i\|}\Big( \|x_i - x_j\| - \big|\, \|x_i\| - \|x_j\| \,\big| \Big) > 2\Big(1 - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4}\Big) = 2 - \varepsilon$$

y

$$\left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} + \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \geq \frac{1}{\|x_i\|}\Big( \|x_i + x_j\| - \big|\, \|x_i\| - \|x_j\| \,\big| \Big) > 2\Big(1 - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4}\Big) = 2 - \varepsilon$$

para todo $i, j \in L_1$, $i \neq j$, lo cual contradice el hecho de que $X$ es $O(\varepsilon, n_1)$-convexo. Así, existen $i, j \in L_1$, $i \neq j$, tales que $\min\{\|z_i - z_j\|, \|z_i + z_j\|\} \leq 2 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Caso *i.I.b.* $l < \frac{3}{4}N + 1$. En este caso se tiene que $\psi(s_i)\|y_i\| \leq l\delta < \frac{3}{4}N\delta + \delta < \frac{3}{4} + 2\delta$, y por tanto, $\psi(s_i)\|x_i\| = 1 - \psi(s_i)\|y_i\| > 1 - \frac{3}{4} - 2\delta = \frac{1}{4} - 2\delta$. Luego $\|x_i\| > \frac{1}{\psi(s_i)}(\frac{1}{4} - 2\delta) \geq \frac{1}{4} - 2\delta > 0$, para cada $i \in L_1$. De (4.3) se sigue que $\|y_i\| \leq 1 - \eta$, para cada $i \in L_1$.

Por hipótesis existen $i, j \in L_1$, $i \neq j$, tales que

$$\min\left\{ \left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} - \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\|, \left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} + \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right\} \leq 2 - \varepsilon.$$

Sin pérdida de generalidad suponga que $s_i \leq s_j$. Del lema 4.1.3 tenemos que $t \mapsto \frac{t}{\psi(t)}$ es creciente y $t \mapsto \frac{1-t}{\psi(t)}$ es decreciente, por tanto

$$\|x_i\| = \frac{1 - s_i}{\psi(s_i)} \geq \frac{1 - s_j}{\psi(s_j)} = \|x_j\| \quad \text{y} \quad \|y_i\| = \frac{s_i}{\psi(s_i)} \leq \frac{s_j}{\psi(s_j)} = \|y_j\|.$$

Apelando al lema 4.2.2

$$\min\{\|x_i - x_j\|, \|x_i + x_j\|\} \leq \|x_i\| + (1 - \varepsilon)\|x_j\|. \tag{4.7}$$

Si $\|y_i\| = \|y_j\| = 0$ entonces $\|z_i - z_j\| = \|x_i - x_j\| \leq 2 - \varepsilon$ y no habría nada que probar. Suponga que $\|y_j\| = \text{máx}\{\|y_i\|, \|y_j\|\} > 0$. Sea $r_j = \frac{\|y_j\|}{(1-\varepsilon)\|x_j\|+\|y_j\|}$. Claramente $0 < s_j < r_j < 1$. De aquí

$$\psi(r_j) = \psi\left(\frac{r_j - s_j r_j}{1 - s_j}\right) = \psi\left(\frac{1 - r_j}{1 - s_j} s_j + \frac{r_j - s_j}{1 - s_j} 1\right) \leq \frac{1 - r_j}{1 - s_j}\psi(s_j) + \frac{r_j - s_j}{1 - s_j}\psi(1)$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
&\frac{\psi(s_j)}{s_j} - \frac{\psi(r_j)}{r_j} \\
&\geq \frac{\psi(s_j)}{s_j} - \frac{1}{r_j}\left(\frac{1 - r_j}{1 - s_j}\psi(s_j) + \frac{r_j - s_j}{1 - s_j}\right) \\
&= \psi(s_j)\left(\frac{1}{s_j} - \frac{1 - r_j}{r_j(1 - s_j)}\right) - \frac{r_j - s_j}{r_j(1 - s_j)} \\
&= \psi(s_j)\left[\frac{1}{s_j} - \left(\frac{(1-\varepsilon)\|x_j\|}{(1-\varepsilon)\|x_j\| + \|y_j\|}\right)\left(\frac{(1-\varepsilon)\|x_j\| + \|y_j\|}{\|y_j\|}\right)\left(\frac{\|x_j\| + \|y_j\|}{\|x_j\|}\right)\right] \\
&- \left(\frac{\|y_j\|}{(1-\varepsilon)\|x_j\| + \|y_j\|} - \frac{\|y_j\|}{\|x_j\| + \|y_j\|}\right)\left(\frac{(1-\varepsilon)\|x_j\| + \|y_j\|}{\|y_j\|}\right)\left(\frac{\|x_j\| + \|y_j\|}{\|x_j\|}\right) \\
&= \psi(s_j)\left(\frac{1}{s_j} - (1-\varepsilon)\frac{1}{s_j}\right) - \left(\frac{\|x_j\| + \|y_j\|}{\|x_j\|} - \frac{(1-\varepsilon)\|x_j\| + \|y_j\|}{\|x_j\|}\right) \\
&= \left(\frac{\psi(s_j)}{s_j} - 1\right)\varepsilon = \left(\frac{1}{\|y_j\|} - 1\right)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\|x_j\|+\|y_j\|}{\|y_j\|} = \frac{1}{s_j}$ y $\frac{(1-\varepsilon)\|x_j\|+\|y_j\|}{\|y_j\|} = \frac{1}{r_j}$ de lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\big(\|x_j\| + \|y_j\|\big)\psi(s_j) - \big((1-\varepsilon)\|x_j\| + \|y_j\|\big)\psi(r_j) &= \|y_j\|\left(\frac{\psi(s_j)}{s_j} - \frac{\psi(r_j)}{r_j}\right) \\
&\geq (1 - \|y_j\|)\varepsilon \geq \big(1 - (1-\eta)\big)\varepsilon = \eta\varepsilon.
\end{aligned}$$

Por último, de lo anterior, de (4.7) y del lema (4.1.4) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|z_i - z_j\| &= \|(x_i - x_j, y_i - y_j)\|_\psi = \big\|(\|x_i - x_j\|, \|y_i - y_j\|)\big\|_\psi \\
&\leq \big\|\big(\|x_i\| + (1-\varepsilon)\|x_j\|, \|y_i\| + \|y_j\|\big)\big\|_\psi \\
&= \big(\|x_i\| + (1-\varepsilon)\|x_j\| + \|y_i\| + \|y_j\|\big)\, \psi\left(\frac{\|y_i\| + \|y_j\|}{\|x_i\| + (1-\varepsilon)\|x_j\| + \|y_i\| + \|y_j\|}\right) \\
&= \big(\|x_i\| + (1-\varepsilon)\|x_j\| + \|y_i\| + \|y_j\|\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\psi\Big(\frac{\|x_i\|+\|y_i\|}{\|x_i\|+(1-\varepsilon)\|x_j\|+\|y_i\|+\|y_j\|}\ \frac{\|y_i\|}{\|x_i\|+\|y_i\|} \\
&+\ \frac{(1-\varepsilon)\|x_j\|+\|y_j\|}{\|x_i\|+(1-\varepsilon)\|x_j\|+\|y_i\|+\|y_j\|}\ \frac{\|y_j\|}{(1-\varepsilon)\|x_j\|+\|y_j\|}\Big) \\
&\leq \big(\|x_i\|+\|y_i\|\big)\psi\bigg(\frac{\|y_i\|}{\|x_i\|+\|y_i\|}\bigg)+\big((1-\varepsilon)\|x_j\|+\|y_j\|\big)\psi\bigg(\frac{\|y_j\|}{(1-\varepsilon)\|x_j\|+\|y_j\|}\bigg) \\
&\leq \big(\|x_i\|+\|y_i\|\big)\psi\bigg(\frac{\|y_i\|}{\|x_i\|+\|y_i\|}\bigg)+\big(\|x_j\|+\|y_j\|\big)\psi\bigg(\frac{\|y_j\|}{\|x_j\|+\|y_j\|}\bigg)-\eta\varepsilon \\
&= \|(x_i,y_i)\|_\psi+\|(x_j,y_j)\|_\psi-\eta\varepsilon = 2-\eta\varepsilon,
\end{aligned}$$

ó análogamente

$$\begin{aligned}
\|z_i+z_j\| = \|(x_i+x_j,y_i+y_j)\|_\psi &= \big\|(\|x_i+x_j\|,\|y_i+y_j\|)\big\|_\psi \\
&\leq \big\|\big(\|x_i\|+(1-\varepsilon)\|x_j\|,\|y_i\|+\|y_j\|\big)\big\|_\psi \leq 2-\eta\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $L_2=\{j_1,...,j_{n_2+1}\}\subset J_1$ es tal que $(i.II)$ se cumple para todo $i,j\in L_2$, $i\neq j$.

Si $\|z_i+z_j\|\leq 2-\frac{\varepsilon}{2}$ para algunos $i,j\in L_2$, $i\neq j$, entonces no hay nada que probar. Así, podemos suponer que $\|z_i+z_j\|>2-\frac{\varepsilon}{2}$ para todo $i,j\in L_2$, $i\neq j$. Como

$$\psi(u_{i,j})\,\|y_i\|+\psi(u_{i,j})\,\|y_j\|\geq\psi(u_{i,j})\,\|y_i+y_j\|\geq\frac{\|z_i+z_j\|}{2}>1-\frac{\varepsilon}{4},$$

se tiene que $\text{máx}\{\|y_i\|,\|y_j\|\}>\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{8}\geq\frac{1}{4}$ para todo $i,j\in L_2$, $i\neq j$, y consecuentemente, existen $n_2$ $y_i$'s tales que $\|y_i\|>\frac{1}{4}$. Renumerando a los $y_i$'s podemos suponer que $\|y_i\|>\frac{1}{4}$, para todo $i=1,...,n_2$. De (4.4) obtenemos que $\|x_i\|\leq 1-\eta$, para todo $i=1,...,n_2$ y procedemos como en el caso $i.I.b$.

Si ahora suponemos que $J_2\subset I_l$ es tal que $(ii)$ se cumple para todo $i,j\in J_2$, $i\neq j$, entonces se procede de forma análoga al caso $(i)$.

Ahora supongamos que $(B)$ se cumple. Renumerando a los $z_i$'s se tiene que $\|y_i\|\leq\frac{s_0'}{1-s_0'}<1$ para cada $i=1,...,k$. Claramente $\|x_i\|>0$ para cada $i=1,...,k$, ya que si $\|y_i\|=0$ entonces $\|x_i\|=1$ y si $\|y_i\|>0$ entonces $\|x_i\|\geq\frac{1-s_0'}{s_0'}\,\|y_i\|>0$. Por hipótesis, existen $i\neq j$ tales que

$$\text{mín}\bigg\{\bigg\|\frac{x_i}{\|x_i\|}-\frac{x_j}{\|x_j\|}\bigg\|,\bigg\|\frac{x_i}{\|x_i\|}+\frac{x_j}{\|x_j\|}\bigg\|\bigg\}\leq 2-\varepsilon,$$

y por tanto, $\text{mín}\big\{\|x_i-x_j\|,\|x_i+x_j\|\big\}\leq\text{máx}\{\|x_i\|,\|x_j\|\}+(1-\varepsilon)\,\text{mín}\{\|x_i\|,\|x_j\|\}$ $\leq 2-\varepsilon$. De aquí se procede de igual manera que en el caso $i.I.b$, sustituyendo a

$1-\eta$ por $\frac{s_0'}{1-s_0'}$ para obtener que $\min\{\|z_i - z_j\|, \|z_i + z_j\|\} \le 2 - \frac{1-2s_0'}{1-s_0'}\varepsilon$. El caso $(C)$ es análogo a $(B)$, pero ahora como $\|x_i\| \le \frac{1-t_0'}{t_0'} < 1$ para cada $i = 1, ..., k$ obtenemos que $\min\{\|z_i - z_j\|, \|z_i + z_j\|\} \le 2 - \frac{2t_0'-1}{t_0'}\varepsilon$. □

**Corolario 4.2.5.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y $\psi \in \Psi$, con $\psi \neq \psi_\infty$. Entonces $X \oplus_\psi Y$ es O-convexo si, y sólo si, $X$ y $Y$ son O-convexos.*

Si $X$ y $Y$ son O-convexos entonces $X \oplus_\infty Y$ no es necesariamente O-convexo. En [51] Naidu y Sastry dan un ejemplo de este hecho, que añadiremos para una mejor comprensión del trabajo.

**Ejemplo 4.2.6.** *Sea $X$ el espacio obtenido al renormar a $l_2$ con entradas en $\mathbb{R}$ con la norma*

$$\|x\| = \max\{ \sup_{i,j} |x_i - x_j|, \|x\|_2 \}$$

*para cada $x = (x_i)_i \in l_2$, donde $\|\cdot\|_2$ es la norma usual en $l_2$. Este espacio es O(4)-convexo. Por otro lado, $Z = X \oplus_\infty X$ no es O-convexo ya que el conjunto $\{(x_n, y_n) : n = 1, 2, ...\}$, donde $x_n = e_n$ y $y_n = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_{n+2})$, es un subconjunto de $S_Z$ simétricamente 2-separado.*

Del corolario 4.2.5 y de la relación de dualidad entre la O-convexidad y la E-convexidad se sigue el siguiente resultado.

**Corolario 4.2.7.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y $\psi \in \Psi$, con $\psi \neq \psi_1$. Entonces $X \oplus_\psi Y$ es E-convexo si, y sólo si, $X$ y $Y$ son E-convexos.*

## 4.3. P-convexidad de $\psi$-Sumas Directas

En [7] Brown probó que si $Y$ y $Z$ son subespacios de un espacio de Banach $X$ tales que $Y$ finito dimensional, $Z$ es P-convexo y $X = Y \oplus Z$, entonces $X$ es P-convexo. Él también probó que $X \oplus_\infty Y$ es P-convexo siempre que $X$ y $Y$ lo sean. En [51] Naidu y Sastry demostraron que $X \oplus_p Y$, $1 \le p < \infty$, es P-convexo cuando $X$ y $Y$ son espacios P-convexos. En esta sección estudiaremos el comportamiento de la $\psi$-suma directa de dos espacios P-convexos. Hemos obtenido que la P-convexidad se preserva bajo $\psi$-sumas directas.

Antes de enunciar el teorema principal de esta sección estableceremos algunos hechos.

Sean $X$ y $Y$ espacios $P(\varepsilon, n_1)$ y $P(\varepsilon, n_2)$-convexos, respectivamente, y $\psi \in \Psi$, $\psi \neq \psi_\infty$.

Dado $\varepsilon$ como antes, gracias a la continuidad uniforme de las aplicaciones $u \mapsto \frac{1-u}{\psi(u)}$ y $u \mapsto \frac{u}{\psi(u)}$ en $[0,1]$ podemos elegir $0 < \delta < \frac{1}{8}$ tal que si $|u - w| < \delta$ entonces

$$\text{máx}\left\{ \left|\frac{1-u}{\psi(u)} - \frac{1-w}{\psi(w)}\right|, \left|\frac{u}{\psi(u)} - \frac{w}{\psi(w)}\right| \right\} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sean $s_0 < s_0' < \frac{1}{2} < t_0' < t_0$ como en el lema 4.2.3. Por este lema tenemos que existe $\eta_1 > 0$ tal que si $(x,y) \in X \oplus_\psi Y$, $\|(x,y)\|_\psi = 1$, $0 \leq \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|} \leq t_0'$ y $\|x\| > \frac{1}{4} - 2\delta > 0$ entonces $\|y\| \leq 1 - \eta_1$. Similarmente existe $\eta_2 > 0$ tal que si $(x,y) \in X \oplus_\psi Y$, $\|(x,y)\|_\psi = 1$, $s_0' \leq \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|} \leq 1$ y $\|y\| > \frac{1}{4} - 2\delta > 0$ entonces $\|x\| \leq 1 - \eta_2$.

Tenemos que la $\psi$-suma directa de dos espacios P-convexos es P-convexo. En contraste al correspondiente resultado para O-convexidad mencionado en la sección anterior, la $\psi_\infty$-suma directa es también P-convexa. La demostración de este resultado es similar a la prueba del teorema 4.2.4, pero es de hecho más fácil.

Sean $\eta_1$, $\eta_2$, y $\delta$ como arriba y $\eta = \text{mín}\{\eta_1, \eta_2\}$ y $N$ el menor entero que satisface $N\delta \geq 1$.

**Teorema 4.3.1.** *Sean $X$ y $Y$ espacios $P(\varepsilon, n_1)$ y $P(\varepsilon, n_2)$-convexos y $\psi \in \Psi$. Si $\psi \neq \psi_\infty$ entonces $X \oplus_\psi Y$ es $P\big(\rho, 3n\big)$-convexo con $\rho = \text{mín}\big\{\eta\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1-2s_0'}{1-s_0'}\varepsilon, \frac{2t_0'-1}{t_0'}\varepsilon\big\}$ y $n = NR(n_1, n_2)$, y $X \oplus_\infty Y$ es $P(\varepsilon, n)$-convexo, con $n = R(n_1, n_2)$.*

Para el caso $\psi = \psi_\infty$ se mejora el número $n$ al dado en el teorema de Brown [7]; Brown da el número $n = R(m,m)$, donde $m = \text{máx}\{n_1, n_2\}$.

**Corolario 4.3.2.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y $\psi \in \Psi$. Entonces $X \oplus_\psi Y$ es P-convexo si, y sólo si, $X$ y $Y$ son P-convexos.*

Del teorema 4.1.6 y del corolario 4.3.2 se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 4.3.3.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y $\psi \in \Psi$. Se tiene que $X \oplus_\psi Y$ es F-convexo si, y sólo si $X$ y $Y$ son F-convexos.*

La demostración del siguiente teorema es análoga a la del teorema 4.3.1.

**Teorema 4.3.4.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y $\psi \in \Psi$. Entonces $X \oplus_\psi Y$ es p-convexo si, y sólo si $X$ y $Y$ son p-convexos.*

Por otra parte, del teorema 4.3.4 y del corolario 3.4.3 se sigue el siguiente corolario.

**Corolario 4.3.5.** *Sean $X$ y $Y$ espacios reflexivos y $\psi \in \Psi$. Entonces $X \oplus_\psi Y$ es f-convexo si, y sólo si $X$ y $Y$ son f-convexos.*

## 4.4. Propiedades $SEIS$ y $EIS$ de $\psi$-Sumas Directas

H. Fetter y B. Gamboa de Buen demostraron en [19] que la propiedad EIS se preserva bajo la $l_p$-suma directa ($1 < p \leq \infty$) de dos espacios con la propiedad EIS. En esta sección presentaremos otro resultado nuestro acerca de $\psi$-sumas directas. Mostraremos que la $\psi$-suma directa de dos espacios con la propiedad SEIS (EIS) se preserva bajo una clase particular de funciones $\psi \in \Psi$ que contiene a la clase de funciones suaves. Antes de presentar este resultado necesitaremos probar tres lemas auxiliares.

**Lema 4.4.1.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach, $\psi \in \Psi$, $f \in X^* \oplus_{\psi^*} Y^*$, donde $\|f\| = 1$, $f = (g, h)$, $g \in X^*$, $h \in Y^*$ y $z \in S(f, \delta^2)$, con $z = (x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Si $\|g\| \, \|x\| \geq \delta$ entonces $\frac{x}{\|x\|} \in S\big(\frac{g}{\|g\|}, \delta\big)$.*

*Demostración.* Usando (4.1) y la definición 4.1.5 obtenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}
\|g\| \, \|x\| + \|h\| \, \|y\| &= \left( \frac{\|g\| \, \|x\| + \|h\| \, \|y\|}{(\|g\| + \|h\|)(\|x\| + \|y\|)} \right) (\|g\| + \|h\|)(\|x\| + \|y\|) \\
&\leq \psi^* \left( \frac{\|h\|}{\|g\| + \|h\|} \right) \psi \left( \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|} \right) (\|g\| + \|h\|)(\|x\| + \|y\|) \\
&= \|(g, h)\|_{\psi^*} \, \|(x, y)\|_{\psi} \leq 1
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$1 - \delta^2 \leq f(z) = g(x) + h(y) \leq g(x) + \|h\| \, \|y\| \leq g(x) + 1 - \|g\| \, \|x\|$$

y por tanto $g(x) \geq \|g\| \, \|x\| - \delta^2$. Luego

$$\frac{g}{\|g\|} \left( \frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{g(x)}{\|g\| \, \|x\|} \geq 1 - \frac{\delta^2}{\|g\| \, \|x\|} \geq 1 - \delta.$$

□

La prueba del siguiente lema es similar a la del lema 4.2.3.

**Lema 4.4.2.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y $\psi \in \Psi$.*

*(a) Si $\psi(t) > t$ para todo $t \in (0, 1)$ entonces para cada $\xi_0 \in (0, 1)$ existe $\eta_0 \in (0, 1)$ tal que la siguiente implicación se cumple*

$$(g, h) \in X \oplus_\psi Y, \ \|(g, h)\|_\psi = 1, \ \|g\| \geq \xi_0 \implies \|h\| \leq 1 - \eta_0.$$

*(b) Si $\psi(t) > 1 - t$ para todo $t \in (0, 1)$ entonces para cada $\xi_0 \in (0, 1)$ existe $\eta_0 \in (0, 1)$ tal que la siguiente implicación se cumple*

$$(g, h) \in X \oplus_\psi Y, \ \|(g, h)\|_\psi = 1, \ \|h\| \geq \xi_0 \implies \|g\| \leq 1 - \eta_0.$$

Sean $X$ y $Y$ espacios con la propiedad SEIS. Sean $\varepsilon > 0$ arbitrario, $0 < r_0 < \frac{\varepsilon}{2}$, $t_1 \in \mathbb{N}, \delta_1 > 0$ los números que cumplen la condición dada en la definición 2.2.5 para $\frac{\varepsilon - r_0}{2} > 0$, con respecto al espacio $X$ y $t_2 \in \mathbb{N}, \delta_2 > 0$ los números que cumplen la definición 2.2.5 para $\frac{\varepsilon - r_0}{2} > 0$, con respecto al espacio $Y$. Sea $\psi \in \Psi$ tal que $\psi^*(s) > \text{máx}\{s, 1-s\}$ para todo $s \in (0,1)$. Por el lema 4.4.2 podemos elegir $\eta_0 > 0$ de manera tal que si $(g,h) \in X \oplus_\psi Y$, $\|(g,h)\|_\psi = 1$, $\|g\| \geq \frac{r_0}{2}$ entonces $\|h\| \leq 1 - \eta_0$ y si $\|(g,h)\|_\psi = 1$, $\|h\| \geq \frac{r_0}{2}$ entonces $\|g\| \leq 1 - \eta_0$.

Dado $\varepsilon$ como antes, por la continuidad uniforme de las aplicaciones $u \mapsto \frac{1-u}{\psi^*(u)}$ y $u \mapsto \frac{u}{\psi^*(u)}$ en $[0,1]$ podemos elegir $\delta_3 > 0$ tal que si $|u - w| < \delta_3$ entonces

$$\text{máx}\left\{\left|\frac{1-u}{\psi^*(u)} - \frac{1-w}{\psi^*(w)}\right|, \left|\frac{u}{\psi^*(u)} - \frac{w}{\psi^*(w)}\right|\right\} < \frac{r_0}{2}.$$

Defina $\delta = \text{mín}\left\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \frac{\eta_0}{2}, \frac{r_0}{2}\right\}$ y sea $N$ el menor entero tal que $(N+1)\delta \geq 1$. Por último defina $t = (N+1)R(t_1+2, t_2+2) - 1$. En este contexto, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 4.4.3.** *Sean $X$ y $Y$ espacios con la propiedad SEIS y $\psi \in \Psi$ tal que $\psi^*(s) > \text{máx}\{s, 1-s\}$ para todo $s \in (0,1)$. Entonces $X \oplus_\psi Y$ tiene la propiedad SEIS.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon \in (0,1)$ y sean $\delta$ y $t$ como en el párrafo anterior. Sean $f_1, ..., f_{t+1} \in X^* \oplus_{\psi^*} Y^*$, con $\|f_i\| = 1$, $f_i = (g_i, h_i)$, $g_i \in X^*$, $h_i \in Y^*$, $i = 1, ...,$ $t+1$, tales que $\|f_i - f_j\| \geq \varepsilon$ para $i \neq j$. Verifiquemos que $S(f_1, ..., f_{t+1}, \delta^2) = \emptyset$. Procedemos por contradicción suponiendo que existe $z \in S(f_1, ..., f_{t+1}, \delta^2)$, con $z = (x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Definimos para cada $i, j = 1, ..., t+1,\ i \neq j$,

$$t_{i,j} = \frac{\|h_i - h_j\|}{\|g_i - g_j\| + \|h_i - h_j\|}, \quad s_i = \frac{\|h_i\|}{\|h_i\| + \|g_i\|}.$$

Procediendo como en el teorema 4.2.4 obtenemos que existe $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq N+1$ tal que si $I_l = \left\{i \in F :\ (l-1)\delta \leq \psi^*(s_i)\|h_i\| < l\delta\right\}$ entonces $\#I_l \geq R(t_1+2, t_2+2)$ y existe:

$(a)$ $J_1 \subset I_l$ con $t_1 + 2$ elementos tal que

$$\psi^*(t_{i,j})\|g_i - g_j\| \geq \frac{\|f_i - f_j\|}{2}, \ \ \forall\, i, j \in J_1,\ i \neq j,$$

ó $(b)$ $J_2 \subset I_l$ con $t_2 + 2$ elementos tal que

$$\psi^*(t_{i,j})\|h_i - h_j\| \geq \frac{\|f_i - f_j\|}{2}, \ \ \forall\, i, j \in J_2,\ i \neq j.$$

Supongamos que $J_1 = \left\{j_1, ..., j_{t_1+2}\right\} \subset I_l$ es tal que $(a)$ se cumple. Sean $i, j \in J_1$, $i \neq j$. Tenemos que $\|g_i\| \geq \frac{r_0}{2}$ ó $\|g_j\| \geq \frac{r_0}{2}$, ya que si $\text{máx}\left\{\|g_i\|, \|g_j\|\right\} < \frac{r_0}{2}$, entonces

$$\psi^*(t_{i,j})\,\|g_i - g_j\| \leq \|g_i - g_j\| \leq \|g_i\| + \|g_j\| < r_0 \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\|f_i - f_j\|}{2},$$

lo cual contradice $(a)$. De lo anterior se obtiene que para todo $i \in J_1$ salvo quizás uno, se tiene que $\|g_i\| \geq \frac{r_0}{2}$. Así, renumerando a los $g_i$'s consideramos al conjunto $\{g_1, ..., g_{t_1+1}\}$ tal que $\|g_i\| \geq \frac{r_0}{2}$ para todo $i = 1, ..., t_1 + 1$. Por el lema 4.4.2 se tiene que $h_i(y) \leq \|h_i\| \leq 1 - \eta_0$ para todo $i = 1, ..., t_1 + 1$, y consecuentemente

$$1 - \delta^2 \leq f_i(z) = g_i(x) + h_i(y) \leq g_i(x) + 1 - \eta_0, \qquad i = 1, ..., t_1 + 1.$$

Luego, $\|g_i\|\,\|x\| \geq g_i(x) \geq \eta_0 - \delta^2 \geq \frac{\eta_0}{2} > \delta$, $i = 1, ..., t_1 + 1$. En virtud del lema 4.4.1 se obtiene que

$$\frac{x}{\|x\|} \in S\left(\frac{g_1}{\|g_1\|}, ..., \frac{g_{t_1+1}}{\|g_{t_1+1}\|}, \delta\right) \subset S\left(\frac{g_1}{\|g_1\|}, ..., \frac{g_{t_1+1}}{\|g_{t_1+1}\|}, \delta_1\right). \tag{4.8}$$

Por otro lado, como $|s_i - s_j| = \big|\,\psi^*(s_i)\,\|h_i\| - \psi^*(s_j)\,\|h_j\|\,\big| < \delta$ se sigue que

$$\big|\|g_i\| - \|g_j\|\big| = \left|\frac{1 - s_i}{\psi^*(s_i)} - \frac{1 - s_j}{\psi^*(s_j)}\right| < \frac{r_0}{2}.$$

Luego, apelando al lema 2.1.7 concluimos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g_i}{\|g_i\|} - \frac{g_j}{\|g_j\|}\right| &\geq \|g_i - g_j\| - \big|\|g_i\| - \|g_j\|\big| \\
&\geq \psi^*(t_{i,j})\,\|g_i - g_j\| - \big|\|g_i\| - \|g_j\|\big| \\
&\geq \frac{\|f_i - f_j\|}{2} - \frac{r_0}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{r_0}{2},
\end{aligned}$$

para todo $i, j = 1, ..., t_1 + 1$, $i \neq j$, lo cual contradice junto con (4.8) el hecho de que $X$ tiene la propiedad SEIS.

La prueba es simétrica si suponemos ahora que existe $J_2 = \{i_1, ..., i_{t_2+2}\} \subset I_l$ tal que $(b)$ se cumple. $\square$

**Corolario 4.4.4.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y $\psi \in \Psi$ tal que $\psi^*(t) > \max\{t, 1 - t\}$ para todo $t \in (0, 1)$. Entonces $X \oplus_\psi Y$ tiene la propiedad SEIS si, y sólo si, $X$ y $Y$ tienen la propiedad SEIS.*

Es fácil ver que la prueba del teorema 4.4.3 se puede adaptar para probar el siguiente resultado.

**Corolario 4.4.5.** *Sean $X$ y $Y$ espacios de Banach y $\psi \in \Psi$ tal que $\psi^*(t) > \max\{t, 1 - t\}$ para todo $t \in (0, 1)$. Entonces $X \oplus_\psi Y$ tiene la propiedad EIS si, y sólo si, $X$ y $Y$ tienen la propiedad EIS.*

Para la $l_1$-suma directa Fetter y Gamboa de Buen probaron lo siguiente en [19].

**Proposición 4.4.6.** *Suponga que $X$ es cualquier espacio de Banach y que $Y$ es un espacio de Banach infinito dimensional. Entonces $X \oplus_1 Y$ no tiene la propiedad EIS.*

Finalizaremos esta sección con una caracterización de las funciones $\psi \in \Psi$ tales que $\psi^*(t) > \max\{t, 1-t\}$ para todo $t \in (0,1)$.

**Lema 4.4.7.** *Sea $\psi \in \Psi$. Se cumple que*

*(a) $\psi'_+(0) = -1$ si y sólo si $\psi^*(s) > 1 - s$ para todo $s \in (0,1)$,*

*(b) $\psi'_-(1) = 1$ si y sólo si $\psi^*(s) > s$ para todo $s \in (0,1)$.*

*Demostración.* $(a)$ Suponga que

$$\psi'_+(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\psi(t)-1}{t} = -1.$$

Dada $s \in (0,1)$ elegimos $0 < \varepsilon < \frac{s}{1-s}$. Por tanto existe $t_0 > 0$ tal que

$$1 + \frac{\psi(t_0)-1}{t_0} \leq \varepsilon,$$

o bien $\psi(t_0) \leq 1 + (\varepsilon - 1)t_0$. De aquí,

$$\begin{aligned}\psi^*(s) &\geq \frac{st_0 + (1-s)(1-t_0)}{\psi(t_0)} \geq \frac{st_0 + (1-s)(1-t_0)}{1+(\varepsilon-1)t_0} \\ &> \frac{(1-s)\varepsilon t_0 + (1-s)(1-t_0)}{1+(\varepsilon-1)t_0} = \frac{(1-s)\big(1+(\varepsilon-1)t_0\big)}{1+(\varepsilon-1)t_0} = 1-s.\end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $0 < \varepsilon < 1$. Tenemos que

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \frac{\varepsilon t + (1-\varepsilon)(1-t)}{\psi(t)} + \varepsilon - 1 = \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{\varepsilon t + (1-\varepsilon)\big(1-t-\psi(t)\big)}{\psi(t)} > 0.$$

De aquí, existe $\delta \in (0,1]$ tal que $\varepsilon\delta + (1-\varepsilon)\big(1-\delta-\psi(\delta)\big) > 0$. Luego

$$\frac{\psi(\delta)+\delta-1}{\delta} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{4.9}$$

Por otro lado, como $\psi$ es convexa se tiene que si $0 < t_1 \leq t_2 \leq 1$ entonces

$$\frac{\psi(t_1)-1}{t_1} \leq \frac{\psi(t_2)-1}{t_2}$$

y por tanto la aplicación

$$t \to \frac{\psi(t)-1}{t} + 1 = \frac{\psi(t)+t-1}{t} \tag{4.10}$$

es creciente. Por último de (4.9) y (4.10) concluimos que si $0 < t \leq \delta$ entonces

$$0 \leq \frac{\psi(t)+t-1}{t} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Luego, $\psi'_+(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\psi(t)-1}{t} = -1.$

El inciso $(b)$ se prueba de forma análoga a $(a)$. $\square$

**Corolario 4.4.8.** *Sea $\psi \in \Psi$. Entonces $\psi^*(t) > \max\{t, 1-t\}$ para todo $t \in (0,1)$ si y sólo si, $\psi'_+(0) = -1$ y $\psi'_-(1) = 1$.*

Del lema anterior se sigue que la clase de funciones suaves está contenida en la clase de todas las funciones $\psi \in \Psi$ tales que la $\psi$-suma directa preserva la propiedad SEIS (EIS).

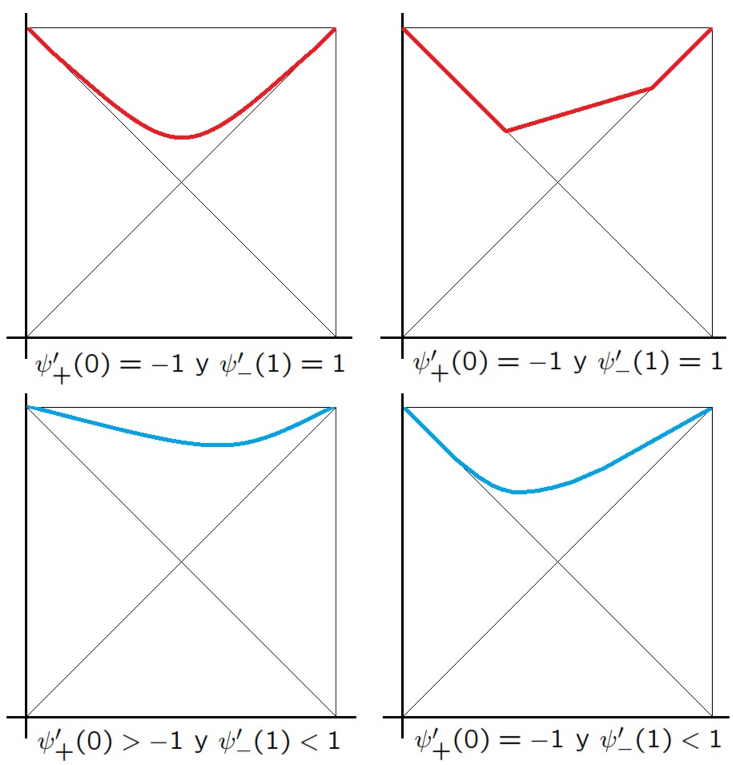


Figura 4.5. Dos funciones $\psi \in \Psi$ que cumplen $\psi'_+(0) = -1$ y $\psi'_-(1) = 1$ y dos que no

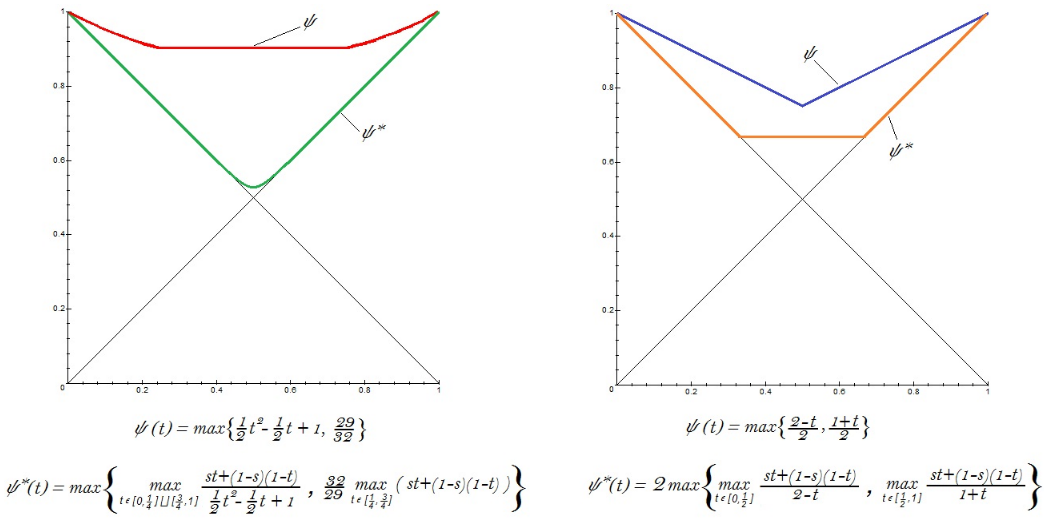


Figura 4.6. Ejemplos de funciones $\psi \in \Psi$ tales que $\psi(t) > \text{máx}\{t, 1-t\}$ para todo $t \in (0,1)$ y sus funciones duales $\psi^*$.

# APÉNDICE A

## La FPP para funciones no expansivas

En este apéndice intentaremos mostrar la gran importancia que ha tenido la geometría de los espacios de Banach para poder desarrollar la teoría de punto fijo para funciones no expansivas, así como también una síntesis de su desarrollo.

Sean $A \neq \emptyset$ un conjunto arbitrario y $f : A \longrightarrow A$ una función. Decimos que $x \in A$ es un *punto* $fijo$ de $f$ si $f(x) = x$.

A grandes rasgos, la teoría del punto fijo se encarga de estudiar condiciones que debe cumplir una función y la estructura de su dominio de manera tal que la función tenga un punto fijo en el conjunto.

Tomemos como punto de partida dos de los principales teoremas de la teoría métrica de punto fijo, el teorema de punto fijo de Brouwer (L.E.J. Brouwer, 1912) y el principio de contracción de Banach (S. Banach, 1922) citados a continuación:

**Teorema A.0.9.** (del Punto Fijo de Brouwer) *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach que satisface* $\dim(X) < \infty$*,* $C$ *un subconjunto no vacío, acotado, cerrado y convexo de* $X$ *y* $T : C \longrightarrow C$ *continua. Entonces* $T$ *tiene un punto fijo en* $C$*.*

**Definición A.0.10.** *Sean* $(M, d)$ *un espacio métrico y* $T : M \longrightarrow M$ *una función. Decimos que* $T$ *es una contracción en* $M$ *si existe una constante* $0 \leq k < 1$ *tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq k\ d(x, y),\ \forall\ x, y \in X.$$

**Teorema A.0.11.** (Principio de Contracción de Banach) *Sean* $(M, d)$ *un espacio métrico completo y* $T : M \longrightarrow M$ *una contracción. Entonces* $T$ *tiene un único punto fijo en* $M$*.*

Es de notarse algo entre las hipótesis de estos dos teoremas. En el teorema de punto fijo de Brouwer la condición que debe cumplir la función es más débil, es decir, más general, que la condición impuesta a la función en el principio de contracción de Banach, mientras que la estructura del espacio en el teorema de punto fijo de Brouwer debe cumplir una condición más fuerte que la estructura del espacio en el principio de contracción de Banach. De aquí, se empezaron a variar las hipótesis tanto de la función como del espacio, lo que llevó a definir los siguientes conceptos y a obtener estos resultados que pueden verse en [25]:

**Definición A.0.12.** *Sea* $(M, d)$ *un espacio métrico y* $T : M \longrightarrow M$ *una función. Decimos que* $T$ *es* $\phi$*-contractiva en* $M$ *si existe una función continua* $\phi : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ *que satisface* $\phi(t) < t$ *para cada* $t > 0$*, tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq \phi\big(\, d(x, y)\,\big), \; \forall \; x, y \in X.$$

$T$ *es contráctil o contractiva en* $M$ *si*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \; \forall \; x, y \in X.$$

$T$ *es no expansiva en* $M$ *si*

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y), \; \forall \; x, y \in X.$$

Es claro que se tienen las siguientes implicaciones: $T$ *es contracción* $\Rightarrow$ $T$ *es* $\phi$*-contractiva* $\Rightarrow$ $T$ *es contráctil* $\Rightarrow$ $T$ *es no expansiva* $\Rightarrow$ $T$ *es continua.*

**Teorema A.0.13.** *Sean* $(M, d)$ *un espacio métrico completo y acotado y* $T : M \longrightarrow M$ $\phi$ *-contractiva. Entonces* $T$ *tiene un único punto fijo en* $M$*.*

**Teorema A.0.14.** *Sean* $(M, d)$ *un espacio métrico compacto y* $T : M \longrightarrow M$ *contráctil. Entonces* $T$ *tiene un único punto fijo en* $M$*.*

**Teorema A.0.15.** *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach,* $C$ *un subconjunto compacto y convexo de* $X$ *y* $T : C \longrightarrow C$ *no expansiva. Entonces* $T$ *tiene un punto fijo en* $M$*.*

En el orden anterior, es claro cómo van aumentando las hipótesis en la estructura del espacio y del dominio de cada función al mismo tiempo que las condiciones impuestas a las funciones disminuyen.

Por otra parte, en 1930, Schauder probó este resultado:

**Teorema A.0.16.** (del Punto Fijo de Schauder) *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach,* $C$ *un subconjunto no vacío, compacto y convexo de* $X$ *y* $T : C \longrightarrow C$ *continua. Entonces* $T$ *tiene un punto fijo en* $C$*.*

Claramente, tanto el teorema de punto fijo de Brouwer como el teorema de punto fijo para funciones no expansivas son casos particulares del teorema de Schauder. En ese momento no se tenía un teorema importante de punto fijo para funciones no expansivas. Por ello se empezó a estudiar la teoría de punto fijo concerniente a funciones no expansivas. En principio nótese que si el dominio de una función no expansiva no es convexo, cerrado ó acotado, entonces la función no necesariamente tiene un punto fijo. Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $g : S_X \longrightarrow S_X$, $g(x) = -x$ y $h : (0, 1] \longrightarrow (0, 1]$, $h(x) = x/2$ son funciones no expansivas que carecen de punto fijo. Es por ello que en teoremas de punto fijo para funciones no expansivas se pide, en principio, que el dominio de una función no expansiva sea convexo, cerrado y acotado.

**Definición A.0.17.** *Un espacio de Banach $X$ tiene la propiedad de punto $fijo$ $(FPP)$ si para cada $C \subset X$ no vacío, acotado, cerrado y convexo y para cada función no expansiva $T : C \longrightarrow C$, se tiene que $T$ tiene un punto fijo en $C$.*

Sin embargo, las condiciones de cerradura, acotamiento y convexidad del dominio de la función son necesarias, más no suficientes. El siguiente ejemplo muestra una función no expansiva con dominio convexo, cerrado y acotado sin puntos fijos.

**Ejemplo A.0.18.** *Considere el espacio $c_0$ y defina $T : B_{c_0} \longrightarrow B_{c_0}$ como*

$$T(x_1, x_2, ...) = (1, x_1, x_2, ...).$$

*Es fácil verificar que $T$ es no expansiva y sin puntos fijos.*

Desde los inicios de la teoría se tuvo gran dificultad en caracterizar a los espacios de Banach con la FPP. Y por ello se tuvo la necesidad de estudiar, no únicamente la estructura del dominio, sino también la del espacio y pedir condiciones extras a su estructura. Tales condiciones no son tan sólo de naturaleza topológica, sino que dependen fuertemente de las características de la norma, es decir, de la geometría de la bola unitaria.

Pero no fue sino hasta en 1965 que Browder y Göhde notaron que para probar que un espacio de Banach tiene la FPP es de gran ayuda que la bola unitaria del espacio sea “redonda” en el sentido de la convexidad uniforme.

**Teorema A.0.19.** *Si $X$ es un espacio de Banach uniformemente convexo entonces $X$ tiene la FPP.*

Curiosamente en ese mismo año, Kirk demostró un teorema más general, que se cita después de esta definición:

**Definición A.0.20.** *Un subconjunto no vacío, cerrado y convexo $C$ de un espacio de Banach tiene la propiedad de la $intersección$ $convexa$ $(CIP)$ si para cualquier* *familia de subconjuntos no vacíos, cerrados, acotados y convexos* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *de* $C$ *totalmente ordenados por la inclusión (i.e. para cada* $\alpha,\beta\in A$, $C_\alpha\subset C_\beta$ *ó* $C_\beta\subset C_\alpha$*), se tiene que*

$$\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha \neq \emptyset.$$

**Teorema A.0.21.** (del Punto Fijo de Kirk) *Si* $X$ *es un espacio de Banach con la* $CIP$ *y con estructura normal entonces* $X$ *tiene la FPP.*

Un resultado conocido es que si $\varepsilon_0(X)<1$ entonces $X$ tiene la CIP (véase [25], cap. 4) y estructura normal [24].

Las demostraciones de todos los teoremas anteriores pueden ser vistas en el libro de Goebel, Concise Course on Fixed Point Theorems [25].

Hasta hace poco no había algún teorema garantizando que los espacios de Banach $X$ con $\varepsilon_0(X)<r$ para algún $r\in(1,2]$, tienen la FPP. El teorema de Kirk no puede aplicarse para deducir la FPP para este tipo de espacios. En 2006 García-Falset, Llorens-Fuster y Mazcuñán-Navarro demostraron en [23] el siguiente resultado:

**Teorema A.0.22.** *Si* $X$ *es uniformemente no cuadrado, es decir si* $\varepsilon_0(X)<2$, *entonces* $X$ *tiene la FPP.*

Por otro lado existen espacios no reflexivos con la FPP. P.K. Lin, demostró en 2008 que en $l_1$ existe una norma $\|\cdot\|$ equivalente a la ordinaria de manera tal que $(l_1,\|\cdot\|)$ tiene la FPP.

Entre los problemas abiertos más importantes en teoría del punto fijo para funciones no expansivas se tienen los siguientes:

¿Tiene todo espacio reflexivo la FPP?

¿Tiene todo espacio superreflexivo la FPP?

¿Tiene todo espacio isomorfo a un espacio de Hilbert la FPP?

Una respuesta parcial a la última pregunta fue respondida por Mazcuñán-Navarro en 2005 [45] cuando probó el siguiente resultado de estabilidad de la FPP.

**Teorema A.0.23.** *Sea* $H$ *un espacio de Hilbert. Si* $X$ *es un espacio de Banach tal que*

$$d(H,X)<\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}},$$

*entonces $X$ tiene la FPP, donde para cualesquiera dos espacios de Banach isomorfos $X$ y $Y$ definimos la distancia de Banach-Mazur entre $X$ y $Y$ como*

$$d(X, Y) = \inf\Big\{ \ \|U\|\|U^{-1}\| \mid U : X \to Y \ \textit{es un isomorfismo lineal}\Big\}.$$

Respecto a los conceptos de convexidad que son objeto de estudio en esta tesis y su relación con la FPP tenemos lo siguiente: En 2006 Saejung demostró en [56] que los espacios F-convexos tienen estructura normal uniforme y, consecuentemente, tienen la FPP. También dio un ejemplo de un espacio E-convexo que no tiene estructura normal. En 2008 Dowling, Randrianantoanina y Turett probaron en [17] que los espacios E-convexos tienen la FPP. Fetter y Gamboa de Buen demostraron en [19] que los espacios con la propiedad EIS son superreflexivos y tienen estructura normal y, en particular, tienen la FPP. Los U-espacios tienen la FPP, ya que en [55] Saejung probó que $X$ es uniformemente no cuadrado si y sólo si existe $\alpha > 0$ tal que $u_X(2 - \alpha) > 0$. Al parecer, hasta ahora no se sabe si los espacios P-convexos y los espacios O-convexos tienen la FPP.

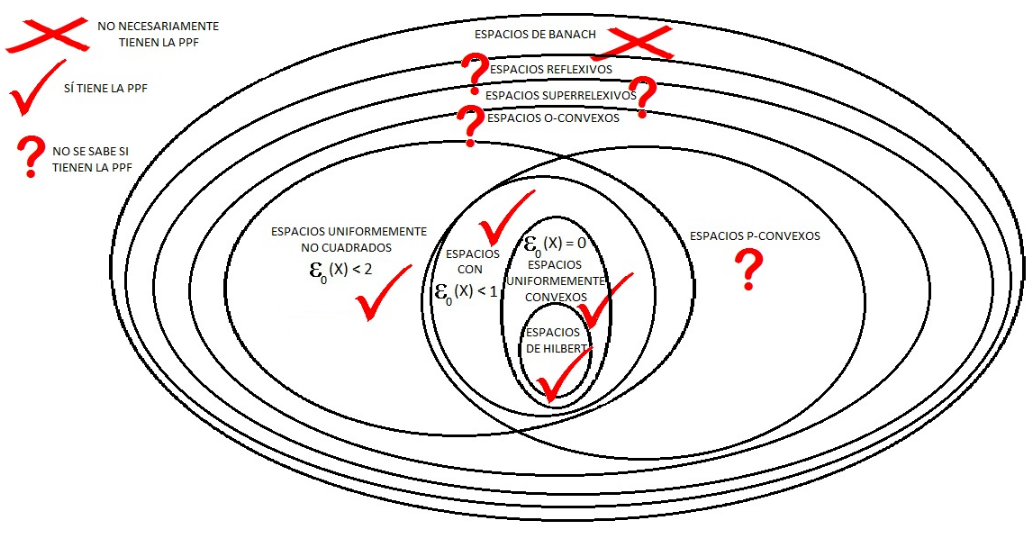


Figura A.1. Diagrama de clases de espacios y su relación con la FPP

Como hemos visto, los avances y resultados en esta teoría se han obtenido con la determinación de propiedades de los espacios de Banach cada vez más generales. Sin embargo, hasta la fecha no se ha conseguido resolver por completo el problema de caracterizar a los espacios de Banach con la FPP.

# Bibliografía


[1] Aksoy, A. G., Khamsi, M. A., *Nonstandard Methods in Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, 1990.

[2] Amir, D., Franchetti, C., *The radius ratio and convexity properties in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 282, No. 1 (1984) 275-291.

[3] Ayerbe Toledano, J. M., Domínguez Benavídez, T., López Acedo, G., *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, Birkhäuser Verlag, 1997.

[4] Beauzamy, B., *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam/NewYork/Oxford, 1985.

[5] Belluce, L. P., Kirk, W. A., Steiner, L. F., *Normal structure in Banach spaces*, Pacific J. Math. 26 (1968) 433-440.

[6] Brodskii, M. S., Milman, D. P., *On the center of a convex set*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR N. S. 59 (1948) 837-840.

[7] Brown. D. R., *P-convexity and B-convexity in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 187 (1974) 77-81.

[8] Bynum, W. L., *A class of spaces lacking normal structure*, Compos. Math. 25 (1972) 233-236.

[9] Bynum, W. L., *Normal Structure Coefficient for Banach spaces*, Pacific J. Math., Vol. 86, No. 2 (1980) 427-436.

[10] Clarkson, J. A., *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936) 396-414.

[11] Clarkson, J. A., *The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space*, Ann. Math. 38 (1937) 114-115.

[12] Day, M. M., *Normed Linear Spaces* 2nd. edition, Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1973.

[13] Dhompongsa, S., Kaewkhao, A., Saejung, S., *Uniform smoothness and U-convexity of $\psi$-direct sums*, J. Nonlinear Convex Anal., 6, No. 2 (2005) 327-338.

[14] Diestel, J., *Geometry of Banach Spaces - Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 485, Springer-Verlag, 1975.

[15] Diestel, J., *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Math. 92, Springer-Verlag, 1984.

[16] Fabián, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V.S., Pelant, V., Zizler, V.,*Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer-Verlag New York, Inc., 2001.

[17] Dowling, P. N., Randrianantoanina, B., Turett, B., *The fixed point property via dual space properties*, J. Funct. Anal., 255 (2008) 768-775.

[18] Enflo, P., *Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm*, Israel J. Math. 13 (1972) 281-288.

[19] Fetter, H., Gamboa de Buen, B., *A generalization of uniform smoothness*, Nonlinear Analysis, No. 66 (2007) 926-935.

[20] Gao. J., Lau, K. S., *On two classes of Banach spaces with uniform normal structure*, Studia Math. 99 (1) (1991) 41-56.

[21] Gao, J., *Normal structure and modulus of u-convexity in Banach spaces*, Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, (Prague, 1995), Prometeus Books, New York, (1996) 195-199.

[22] García Falset, J., Llorens Fuster, E., Mazcuñán-Navarro, E. M., *The fixed point property and normal structure for some B-convex Banach spaces*, Ull. Austral. Math. Soc. 63 (2001) 75-81.

[23] García Falset, J., Llorens Fuster, E., Mazcuñán-Navarro, E. M., *Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. Funct. Anal., 233 (2006) 494-514.

[24] Goebel, K., *Convexity of balls and fixed point theorems for mappings with nonexpansive square*, Compositio Math. 22 (1970) 268-274.

[25] Goebel, K., *Concise Course on Fixed Point Theorems*, Yokohama Publishers, Inc., 2002.

[26] Goebel, K., Kirk, W. A., *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, 1990.

[27] Huff, R., *Banach spaces which are nearly uniformly convex*, Rocky Mountain J. Math., vol. 10, no. 4, pp. 743-749, 1980.

[28] Istratescu, V. I., Partington, J. R., *On nearly uniformly convex and k-uniformly convex spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 95 (1984), 325-327.

[29] James, R. C., *Uniformly non-Square Banach Spaces*, Ann. Math. 80 (1964), 542-550.

[30] James, R. C., *Super-reflexive Banach spaces*, Can. J. Math. 24 (1972) 896-904.

[31] Khamsi, M. A., *Uniform smoothness implies super-normal structure property*, Nonlinear Anal. 19 (1992) 1063-1069.

[32] Kato, M., Saito, K.-S., Tamura, T., *Uniform non-squareness of $\psi$-direct sums of Banach spaces $X \oplus_\psi Y$*, Math. Inequal. Appl., Vol. 7, 3 (2004) 429-437.

[33] Kolwicz, P., Pluciennik, R., *P-convexity of Orlicz-Bochner spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 126, No. 8 (1998) 2315-2322.

[34] Kirk, W. A., *A fixed point theorem for mappings which don not increase distances*, Amer. Math. Monthly 72 (1965) 1004-1006.

[35] Kottman, C. A., *Packing and reflexivity in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 150, No. 2 (1970) 565-576.

[36] Landes, T., *Permanence properties of normal structure*, Pacific J. Math. 110 (1984), 125-143.

[37] Landes, T., *Normal structure and the sum-property*, Pacific J. Math. 123 (1986), 127-147.

[38] Landman, B. M., Robertson, A., *Ramsey theory on the integers*, Student mathematical library, Vol. 24, 1951.

[39] Lau, K.S., *Best approximation by closed sets in Banach spaces*, J. Approx. Theory 23 (1978) No. 1, 29-36.

[40] Lindenstrauss, J., *On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces*, Michigan Math. J. 10 (1963) 241-252.

[41] Maligranda, L., *Some remarks on the triangle inequality for norms*, Banach J. Math. Anal. 2 (2008) No. 2, 31-41.

[42] Maluta, E., *Uniformly normal structure and related coefficients*, Pacific J. Math. 111, No. 2, (1984) 357-369.

[43] Mazcuñán-Navarro, E. M., *On the modulus of u-convexity of Ji Gao*, Abstr. Appl. Anal., No. 1, (2003) 49-54.

[44] Mazcuñán-Navarro, E. M., *Geometry of Banach spaces in metric fixed point theory*, Ph.D. Thesis, University of Valencia, 2003.

[45] Mazcuñán-Navarro, E. M., *Stability of the fixed point property in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 134, No. 1 (2005) 129-138.

[46] Milman, D. P., *On some criteria for the regularity of spaces of type (B)*, C. R. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 20 (1938) 243-246.

[47] Mitani, K.-I., Oshiro, S., Saito, K.-S., *Smoothness of $\psi$-direct sums of Banach spaces*, Math. Inequal. Appl., 8 (2005) 147-157.

[48] Muñiz-Pérez, O., *On P- and p-Convexity of Banach spaces*, Abstr. Appl. Anal., Volume 2010, Article ID 102462, 14 pages.

[49] Muñiz-Pérez, O., *P-convexity and properties implying the fixed point property*, Fixed Point Theory, por aparecer.

[50] Muñiz-Pérez, O., *Convexity Conditions of $\psi$-Direct Sums*, preprint.

[51] Naidu, S. V. R., Sastry, K. P. R., *Convexity conditions in normed spaces*, J. Reine Angew Math. 297 (1978) 35-53.

[52] Pettis, B. J., *A proof that every uniformly convex space is reflexive*, Duke Math. J. 5 (1939) 249-253.

[53] Phelps, R. R., *Uniqueness of Hanh-Banach extension and unique best approximation*, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960) 238-255.

[54] Prus, S., *Multidimensional uniform convexity and uniform smoothness in Recent Advances on Metric Fixed Point Theory*, T. Domínguez Benavides, Ed. Seville, 1996.

[55] Saejung, S., *On the modulus of U-convexity*, Abstr. Appl. Anal., No. 1, (2005) 59-66.

[56] Saejung, S., *Convexity conditions and normal structure of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 344 (2008) 851-856.

[57] Saito, K.-S., Kato, M., *Uniform convexity of $\psi$-direct sums of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 277 (2003) 1-11.

[58] Saito, K.-S., M. Kato, M., Takahashi, Y., *Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$ , J. Math. Anal. Appl. 244 (2000), 515-532.

[59] Saito, K.-S., M. Kato, M., Takahashi, Y., *On absolute norms on* $\mathbb{C}^2$ , J. Math. Anal. Appl. 252 (2000), 879-905.

[60] Sims, B., Smyth, M. A., *On some Banach spaces properties sufficient for weak normal structure and their permanence properties*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999) 497-513

[61] Takahashi, Y., Kato, M., Saito, K.-S., *Strict convexity of absolute norms on $\mathbb{C}^2$ and direct sums of Banach spaces*, J. Inequal. Appl., 7 (2002) 179-186.

[62] Thompson, A. C., *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, 1996.

[63] Turett, B., *A dual view of a theorem of Baillon*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 80, Marcel Dekker (1982) 279-286.

[64] Ullán, A., *Módulos de convexidad y lisura en espacios normados*, Tesis doctoral, Universidad de Extremadura, 1991.

[65] van Dulst, D., Sims, B., *Fixed points of nonexpansive mappings and Chebyshev centers in Banach spaces with norms of type (KK)*, Banach Space Theory and its Applications (Bucharest, 1981), vol. 991 of Lecture Notes in Mathematics, pp. 35-43, Springer, Berlin, Germany, 1983.

[66] Wiśnicki, A., *Towards the fixed point property for superreflexive spaces*, Bull. Austral. Math. Soc., 64 (2001) 435-444.

# Índice alfabético