



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

**Una Formulación Galerkin-MEF del
Método de Cálculo de Incrementos Finitos
para Problemas de Advección Dominante**

T E S I S

que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias
con orientación en
Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:
Manuel Ramírez Aranda

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez

Diciembre de 2010

Guanajuato, Gto. México



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

**Una Formulación Galerkin-MEF del
Método de Cálculo de Incrementos Finitos
para Problemas de Advección Dominante**

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Manuel Ramírez Aranda

Director de Tesis:

Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez

Jurado integrado por:

Dr. Fernando Galaz Fontes (CIMAT)

Dr. Salvador Botello Rionda (CIMAT)

Dr. Pedro González Casanova Henríquez (UNAM)

Dr. Jesús Gerardo Valdés Vázquez (UG)

Lector especial:

Dr. Eugenio Oñate Ibañez de Navarra (CIMNE)

Vo. Bo. Director de Tesis

Dedicatoria

A mi esposa Claudia Araceli

A mi hija Ashley Karina

A mis padres y hermanos

*El amor no es amor si no causa dolor,
al igual que el oro por el fuego tiene que pasar
purificarlo todo y lo mejor de uno lograr.*

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada con *No. de Registro de Becario*: 101752 y *No. De CVU*: 101752 en la convocatoria 290505 durante el período enero 2007 a enero 2010.

Al Programa de Mejoramiento del Profesorado por la beca otorgada durante el periodo enero de 2007 a enero de 2010 con *número de folio UAA* – 142 y con *número de oficio de la Carta de Liberación PROMEP*/103 – 5/07/1869.

Al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por los múltiples apoyos recibidos.

A mi director de tesis Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez por su paciencia, confianza y apoyo que siempre he recibido de él.

A los miembros del jurado Dr. Fernando Galaz Fontes, Dr. Salvador Botello Rionda, Dr. Pedro González Casanova Henríquez y Dr. Jesús Gerardo Valdés Vázquez por sus comentarios, correcciones y sugerencias. Así como al Dr. Eugenio Oñate Ibañez de Navarra por su participación como lector especial y sus comentarios realizados.

A mis profesores, compañeros y amigos del CIMAT que contribuyeron en mi formación, ayudaron a la terminación de mis estudios de doctorado y la culminación de esta tesis.

A la Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA) por la licencia académica y apoyos que recibí para la terminación de mis estudios de doctorado.

A los profesores del Departamento de Matemáticas y Física del Centro de Ciencias Básicas de la UAA, en particular a los jefes de departamento Dr. José Villa Morales y M. en C. Fernando Cortés Escalante.

A mi familia, mi esposa Claudia Araceli por su incondicional apoyo, comprensión y amor, mi hija Ashley Karina que será siempre mi motivación a ser una buena persona y a mis padres y hermanos que siempre están conmigo.

Índice general

Índice general	I
Introducción	III
1. Formulación Débil del Problema de Advección-Difusión	1
1.1. Preliminares del Análisis Funcional	1
1.1.1. Lema de Lax-Milgram	1
1.1.2. Espacios $L^p(\Omega)$ y $C^k(\overline{\Omega})$	3
1.1.3. Espacios de Sobolev $H^k(\Omega)$ y $W_p^k(\Omega)$	5
1.1.4. Desigualdad generalizada de Poincaré	9
1.2. Problema de Advección-Difusión	11
2. Análisis del Método de Cálculo de Incrementos Finitos	16
2.1. Introducción	16
2.2. Método de Cálculo de Incrementos Finitos	17
2.2.1. Forma Estabilizada del Problema de Advección-Difusión	17
2.2.2. Formulación Débil del FIC	23
2.3. Análisis del Método de Cálculo de Incrementos Finitos	25
2.3.1. Existencia y Unicidad en Espacios de Dimensión Finita	25
2.3.2. Estimación del Error	31
2.4. Método de Cálculo de Incrementos Finitos con Estabilización	
Lineal por Elemento	39
2.4.1. Existencia y Unicidad en Espacios de Dimensión Finita	39
2.4.2. Estimación del Error	43
3. Elección del Parámetro de Estabilización	46
3.1. Problema Unidimensional	46
3.1.1. Elección del Parámetro de Estabilización	46
3.1.2. Ejemplos	49

3.2. Problema Bidimensional	55
3.2.1. Elección del Parámetro de Estabilización	55
3.2.2. Suavización de la derivada	56
3.2.3. Ejemplos	58
A. Conclusiones y Trabajo Futuro	67
B. Implantación Computacional del FIC	68
B.1. Problema Unidimensional	68
B.1.1. Formulación Débil del FIC	69
B.1.2. Método de Cálculo de Incrementos Finitos en Espacios de Dimensión Finita	70
B.2. Problema Bidimensional	74
B.2.1. Mapeo local para un triángulo	74
B.2.2. Mapeo local para un cuadrilátero	77
B.2.3. Método de Cálculo de Incrementos Finitos sobre espacios de dimensión finita	80
B.2.4. Suavización de la derivada	84
Bibliografía	89

Introducción

Este trabajo de tesis es sobre el análisis y la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales que modelan fenómenos de advección-difusión, de particular interés son los problemas con advección dominante. En este caso se tienen soluciones con gradientes altos que los esquemas numéricos clásicos no reproducen adecuadamente. Un número asociado a la malla que caracteriza la complejidad de aproximación es el número de Péclet, si el número de Péclet es grande la solución discreta no corresponde con la física del fenómeno y puede presentar oscilaciones. Este problema se puede corregir con un refinamiento de la malla, dividiendo el dominio en elementos de menor tamaño hasta lograr reducir el número de Péclet. Desafortunadamente, esto tiene como consecuencia un incremento en el costo computacional debido al aumento en las dimensiones de los sistemas de ecuaciones lineales que tienen que resolverse. Una alternativa son los métodos de estabilización, que mejoran la calidad de la solución sin tener la necesidad de cambiar la malla. Entre estos métodos se pueden mencionar Difusión Artificial, Contracorriente (SUPG) (Streamline-Upwind Petrov Galerkin), Galerkin-Mínimos cuadrados (GLS) (Galerkin/Least-squares) y el Método de Subescalas (SGS) (Subgrid Scale). En todos los métodos anteriores la elección apropiada del parámetro de estabilización es de gran importancia. De nuestro conocimiento, la mayoría de los procedimientos de elección están basados en métodos heurísticos.

Un método de estabilización reciente es el de Cálculo de Incrementos Finitos (FIC) (Finite Increment Calculus) que está basado en un concepto de balance de flujo sobre *dominios infinitesimales*. Nuestro trabajo es una extensión y complemento del método, desarrollamos un análisis del método y proponemos un esquema de elección de parámetro de estabilización. El método ha sido aplicado de manera exitosa en mecánica de fluidos así como problemas elásticos, una revisión panorámica del método y su potencial, se presenta en [Oñate 3].

En general el problema con valores a la frontera asociado a la ecuación estabilizada obtenida por este método FIC es mal planteado en el sentido clásico. Dado que la aplicación natural del método es con Elemento Finito, se demuestra la existencia y unicidad de la solución en espacios de dimensión finita a partir de la formulación Galerkin-MEF y se proporciona una estimación del error. También se propone una elección del parámetro de estabilización por elemento. En particular, esta elección da lugar a una caracterización del valor crítico del parámetro de estabilización como parámetro óptimo en una dimensión. Ilustramos la bondad del método en algunos problemas bidimensionales de la literatura. Además se propone una variación del FIC en donde el parámetro de estabilización es lineal por elemento. El problema de aproximación de ecuaciones de advección-difusión con advección dominante es de gran interés actual, otros enfoques se pueden consultar en [Farhat] y [Turner].

El contenido del trabajo es como sigue.

En el primer capítulo se presentan los resultados básicos del análisis funcional en el contexto de ecuaciones diferenciales parciales. Algunas referencias básicas son [Adams], [Gilbarg] y [Krizek]. En el capítulo también se presenta la formulación clásica y variacional del problema con valores en la frontera de la ecuación de advección-difusión así como la prueba de la existencia y unicidad de la solución de la formulación débil de la ecuación de advección-difusión, en donde se usa la desigualdad de Friedrichs que es una generalización de la desigualdad clásica de Poincare y el Teorema de Lax Milgram. Mayores detalles se encuentran en [Ciarlet], [Knaber] y [Morton].

En el segundo capítulo se describe el método de Cálculo de Incrementos Finitos (FIC) que se basa en la solución estándar del MEF-Galerkin de las ecuaciones diferenciales de gobierno modificadas expresando el equilibrio de flujos en un dominio infinitesimal. Además se prueba la existencia y unicidad de la solución de la formulación débil del FIC en espacios de dimensión finita utilizando funciones prueba que son polinomios de grado k en cada elemento. Por otro lado se prueba la existencia y unicidad de la solución de una variación del FIC que consiste en considerar que el parámetro es una función lineal vectorial sobre cada elemento y se utilizan funciones prueba lineales. Se prueban además los teoremas de estimación del error para estas formulaciones.

En el tercer capítulo se presenta una propuesta para la elección del parámetro de estabilización para el método de FIC en espacios de dimensión finita para el caso unidimensional y para el caso bidimensional se describe el proceso para obtener el parámetro de estabilización mediante un proceso de suavización. Al final de cada sección se presentan diversos ejemplos.

Se incluye un breve capítulo sobre conclusiones y trabajo futuro. Concluimos el trabajo con una descripción del método de elemento finito y la implantación computacional.

Capítulo 1

Formulación Débil del Problema de Advección-Difusión

En este capítulo, se presentan algunos resultados básicos del Análisis Funcional para referencia futura. En particular, se presenta la demostración del teorema de existencia y unicidad de la solución débil de un problema con valores en la frontera de la ecuación de advección-difusión, la prueba o consecuencia del Lema de Lax-Milgram y la desigualdad generalizada de Poincaré. Incluimos una demostración de esta desigualdad pues no es fácil de encontrar en la literatura y la aplicación en nuestro trabajo será fundamental.

1.1. Preliminares del Análisis Funcional

1.1.1. Lema de Lax-Milgram

Un *espacio de Banach* X es un espacio normado completo, es decir, para cada sucesión de Cauchy $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ existe un elemento $x \in X$ tal que

$$\|x_j - x\|_X \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow \infty.$$

Sean X y Y espacios de Banach. Un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ es *continuo* (*acotado*) si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X, \forall x \in X.$$

Una consecuencia directa del teorema del mapeo abierto es el siguiente teorema.

Teorema 1 *Si X y Y son espacios de Banach y T es un operador lineal continuo uno a uno de X sobre Y , entonces su inverso T^{-1} es un operador lineal y continuo.*

Sea V un espacio vectorial. Un *producto escalar* en $V \times V$ es una función compleja denotada por $(\cdot, \cdot)_V$, la cual satisface las siguientes condiciones:

$$(v + y, w)_V = (v, w)_V + (y, w)_V$$

$$(\alpha v, w)_V = \alpha(v, w)_V$$

$$(v, w)_V = \overline{(w, v)_V}$$

$$(v, v)_V \geq 0 \text{ y } (v, v)_V \neq 0 \text{ si } v \neq 0$$

para cualesquiera $v, w \in V$ y cualquier escalar α . Si V es un espacio real entonces $(\cdot, \cdot)_V$ es una función real.

La *norma inducida* por $(\cdot, \cdot)_V$ es

$$\|v\|_V = \sqrt{(v, v)_V}, \quad v \in V,$$

Se tiene la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*

$$|(v, w)_V| \leq \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V.$$

Mas aún

$$\|v\|_V = \sup_{w \neq 0} \frac{|(v, w)_V|}{\|w\|_V}.$$

Un operador lineal cuyos valores son escalares se llama *forma lineal* (o funcional lineal). Un espacio de Banach con norma inducida por un producto escalar se llama un espacio de *Hilbert*.

Teorema 2 (*Riesz*) Sea H un espacio de Hilbert. Entonces para cualquier funcional lineal continuo F definido en H existe exactamente un elemento $u \in H$ tal que

$$F(v) = (v, u)_H, \quad \forall v \in H.$$

Un mapeo escalar $a(\cdot, \cdot)$ definido sobre $V \times V$, donde V es un espacio vectorial, es una *forma sesquilineal* si para cualquier $v \in V$ fijo los mapeos $a(\cdot, v)$ y $a(v, \cdot)$ son lineales. Mas aún, si $a(\cdot, \cdot)$ toma valores reales entonces $a(\cdot, \cdot)$ se llama *forma bilineal*.

Una forma sesquilineal $a(\cdot, \cdot)$ es *continua* si existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$|a(v, w)| \leq C_1 \|v\|_V \|w\|_V, \quad \forall v, w \in V.$$

Una forma sesquilineal $a(\cdot, \cdot)$ es *coercitiva* si existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$|a(v, v)| \geq C_2 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Lema 3 (*Lax-Milgram*) Sea H un espacio de Hilbert y sea $a(\cdot, \cdot)$ una forma sesquilineal continua y coercitiva. Entonces para cualquier forma lineal continua F definida sobre H existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$a(v, u) = F(v), \quad \forall v \in H.$$

Prueba.

Ver Teorema 5.8 en [Gilbarg] ■

De este lema, se sigue que $\sqrt{|a(\cdot, \cdot)|}$ es una norma en H equivalente a la norma $\|\cdot\|_H$.

1.1.2. Espacios $L^p(\Omega)$ y $C^k(\overline{\Omega})$

Sea \mathbb{R}^d el espacio Euclidiano equipado con la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^d x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d.$$

El espacio de Lebesgue de funciones de valores reales ó complejos definidas sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, las cuales son integrables con la potencia $p \in [1, \infty)$, se denota por $L^p(\Omega)$ y está equipado con la norma

$$\|v\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |v|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad v \in L^p(\Omega).$$

Cuando $p = 2$, se escribe de forma abreviada $\|\cdot\|_{0,\Omega} = \|\cdot\|_{0,2,\Omega}$ y se define el producto escalar como

$$(v, w)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} v \bar{w} dx.$$

La *desigualdad de Hölder*

$$\left| \int_{\Omega} v w dx \right| \leq \|v\|_{0,p,\Omega} \|w\|_{0,q,\Omega}, \quad v \in L^p(\Omega) \text{ y } w \in L^q(\Omega)$$

se cumple para $p, q \in (1, \infty)$ que satisfacen la igualdad $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

El espacio de Lebesgue de funciones esencialmente acotadas sobre Ω se denota por $L^\infty(\Omega)$ y está equipado con la norma

$$\|v\|_{0,\infty,\Omega} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf \{M \geq 0 : \text{medida}(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0\}$$

Para cualquier $p, q \in [1, \infty)$, $p \leq q$ y Ω un espacio de medida positiva finita se tiene que

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

y existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{0,p,\Omega} \leq C \|v\|_{0,q,\Omega}, \quad \forall v \in L^q(\Omega).$$

Por $\bar{\Omega}$ se denotará la cerradura de Ω y por $\partial\Omega$ la frontera de Ω . Un dominio Ω es un conjunto abierto y conexo en \mathbb{R}^d .

Si Ω es un dominio acotado entonces el espacio de funciones continuas sobre $\bar{\Omega}$ se denota por $C(\bar{\Omega})$ y está equipado con la norma

$$\|v\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)|.$$

Es claro que

$$\|v\|_{C(\bar{\Omega})} = \|v\|_{0,\infty,\Omega}, \quad \forall v \in C(\bar{\Omega}).$$

El espacio de funciones cuyas derivadas clásicas de orden k pertenecen a $C(\bar{\Omega})$ se denota por $C^k(\bar{\Omega})$. El conjunto

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\bar{\Omega})$$

es el espacio de funciones infinitamente diferenciables sobre $\bar{\Omega}$.

Por $C_0^\infty(\Omega)$ se denota al espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω , donde

$$\text{soporte } v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}.$$

1.1.3. Espacios de Sobolev $H^k(\Omega)$ y $W_p^k(\Omega)$

Este párrafo sigue la presentación de [Adams], una referencia clásica para Espacios de Sobolev. Algunos conceptos están basados en [Krizek].

Definición 4 *Un conjunto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tiene frontera Lipschitz continua si para cualquier $z \in \partial\Omega$ existe una vecindad $U = U(z)$ tal que el conjunto $U \cap \Omega$ puede ser expresado, en algún sistema coordenado Cartesiano (x_1, \dots, x_d) , por la desigualdad $x_d < F(x_1, \dots, x_{d-1})$, donde F es una función Lipschitz continua.*

Se denota por \mathcal{L} el conjunto de todos los dominios acotados en \mathbb{R}^d con frontera Lipschitz continua.

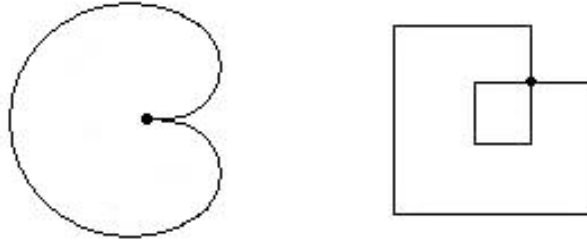


Figura 1. Ejemplos de dominios cuyas fronteras no son Lipschitz continua.

La figura 1 muestra algunos dominios cuyas fronteras no son Lipschitz continua. Los puntos negros en la frontera indican donde la continuidad Lipschitz no es válida.

Suponer que $\Omega \in \mathcal{L}$ no es tan restrictivo para aplicaciones sobre dominios acotados. Mas aún, si $\Omega \in \mathcal{L}$ entonces la normal exterior que apunta hacia afuera existe casi en todas partes sobre $\partial\Omega$.

Sea $\Omega \in \mathcal{L}$. Para cualquier $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ y multi-índice $m = (m_1, \dots, m_d)$ se define la m -ésima derivada clásica como

$$D^m v = \frac{\partial^{|m|} v}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_d^{m_d}},$$

donde m_1, \dots, m_d son enteros no negativos y $|m| = m_1 + \dots + m_d$.

Una función $v \in L^2(\Omega)$ tiene m -ésima derivada generalizada de orden m en $L^2(\Omega)$, si existe una función $z \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} z w dx = (-1)^{|m|} \int_{\Omega} v D^m w dx, \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega).$$

Entonces la función z se llama m -ésima derivada generalizada de v y expresamos $D^m v = z$. Se puede demostrar que $D^m v$ está bien definida.

Para $k = 0, 1, \dots$, los espacios de Sobolev $H^k(\Omega)$ se definen como

$$H^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D^m v \in L^2(\Omega), |m| \leq k\}.$$

Se puede demostrar que $H^k(\Omega)$, equipado con el producto escalar

$$(v, w)_{k, \Omega} = \sum_{|m| \leq k} \int_{\Omega} D^m v \overline{(D^m w)} dx, \quad v, w \in H^k(\Omega)$$

es un espacio de Hilbert. La norma inducida es

$$\|v\|_{k, \Omega} = \left(\sum_{|m| \leq k} \int_{\Omega} |D^m v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in H^k(\Omega)$$

y en $H^k(\Omega)$ también consideramos la seminorma

$$|v|_{k, \Omega} = \left(\sum_{|m|=k} \int_{\Omega} |D^m v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in H^k(\Omega).$$

El subíndice Ω se omite frecuentemente, es decir,

$$(\cdot, \cdot)_k = (\cdot, \cdot)_{k, \Omega}, \quad \|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{k, \Omega}, \quad |\cdot|_k = |\cdot|_{k, \Omega}.$$

En particular, se tiene

$$\|v\|_1^2 = \|v\|_0^2 + \|\nabla v\|_0^2.$$

Es claro que

$$\|v\|_{k-1} \leq \|v\|_k, \quad \forall v \in H^k(\Omega), \quad k = 1, 2, \dots$$

y

$$L^2(\Omega) = H^0(\Omega) \supset H^1(\Omega) \supset H^2(\Omega) \dots$$

Observe que cada derivada clásica es también derivada generalizada, así se tiene que

$$C^k(\bar{\Omega}) \subset H^k(\Omega), \quad k = 0, 1, \dots$$

Definición 5 *Un conjunto $\Gamma \subset \partial\Omega$ es un abierto (relativo) en $\partial\Omega$ si para cualquier $x \in \Gamma$ existe una bola abierta $B \subset \mathbb{R}^d$ que contiene a x tal que $B \cap \partial\Omega \subset \Gamma$.*

El espacio de Lebesgue de funciones cuadrado integrables sobre un conjunto abierto $\Gamma \subset \partial\Omega$ se denota por $L^2(\Gamma)$ y está equipado con la norma estándar

$$\|v\|_{0, \Gamma} = \left(\int_{\Gamma} |v|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in L^2(\Gamma),$$

donde ds indica el elemento de área de dimensión $d - 1$ en Γ .

Teorema 6 *(Traza) Sea $\Omega \in \mathcal{L}$. Entonces existe un único operador lineal continuo $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ tal que*

$$\gamma v = v|_{\partial\Omega} \quad \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Prueba.

Ver Teorema 1 de la sección 5.5 en [Evans]. ■

La función γv para $v \in H^1(\Omega)$ se llama *la traza* de v , y se denota por simplicidad, por $v|_{\partial\Omega}$. El teorema, de hecho, indica que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{0,\partial\Omega} \leq C \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

El teorema de traza permite definir el espacio

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Observe que los espacios $H_0^1(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ resultan ser la completación de $C_0^\infty(\Omega)$ y $C^\infty(\bar{\Omega})$, respectivamente, bajo la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, es decir,

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}, \quad H^1(\Omega) = \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}.$$

Se denota por $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ al espacio de trazas de todas las funciones de $H^1(\Omega)$. Entonces se tiene la siguiente relación de densidad

$$L^2(\partial\Omega) = \overline{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$

donde la cerradura se toma bajo la norma $\|\cdot\|_{0,\partial\Omega}$.

Teorema 7 (Rellich) *Sea $\Omega \in \mathcal{L}$. Entonces el mapeo identidad de $H^1(\Omega)$ a $L^2(\Omega)$ es compacto (es decir, cualquier sucesión acotada en $H^1(\Omega)$ contiene una subsucesión convergente en $L^2(\Omega)$).*

Prueba.

Ver Teorema 4.12 en [Adams]. ■

Teorema 8 (Integración por partes). *Sea $\Omega \in \mathcal{L}$. Entonces para cada $i \in \{1, \dots, d\}$*

$$\int_{\Omega} w \partial_i v dx + \int_{\Omega} v \partial_i w dx = \int_{\partial\Omega} n_i v w ds, \quad \forall v, w \in H^1(\Omega),$$

donde n_i son las componentes de la normal exterior unitaria a $\partial\Omega$ y $\partial_i v = \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

1.1.4. Desigualdad generalizada de Poincaré

Teorema 9 (*Desigualdad generalizada de Poincaré*) Sea $\Omega \in \mathcal{L}$ y sea $\omega \neq \emptyset$ un abierto en Ω o bien en $\partial\Omega_0$, donde $\Omega_0 \subseteq \Omega$, $\Omega_0 \in \mathcal{L}$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|v\|_1 \leq C \left(|v|_1^2 + \left| \int_{\omega} v d\omega \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (1.1)$$

donde $d\omega$ es dx o bien ds .

Prueba.

Supongamos que la desigualdad (1.1) no es cierta. Entonces existe una sucesión $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H^1(\Omega)$ tal que

$$\|v_j\|_1 > j \left(|v_j|_1^2 + \left| \int_{\omega} v_j d\omega \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

Se puede suponer que los términos v_j son elegidos tal que

$$\|v_j\|_1 = 1, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Por el teorema de Rellich el encaje $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ es compacto. De aquí, existe $z \in L^2(\Omega)$ y una subsucesión de $\{v_j\}$, que se denotará también por $\{v_j\}$, tal que

$$\|v_j - z\|_0 \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

De acuerdo a (1.2) y (1.3) se tiene que

$$|v_j|_1 \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

y así, por (1.4) y (1.5), $\{v_j\}$ es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$, y otra vez por (1.4)

$$\|v_j - z\|_1 \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

De aquí y de (1.5) se tiene que $|z|_1 = 0$, es decir, z es una función constante casi en todas partes en Ω . Denotemos por medida ω la medida d ó $(d-1)$ -dimensional de $\omega \subset \Omega$ ó $\omega \subset \partial\Omega_0$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(\omega)$ y (1.6) se obtiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega} (v_j - z) d\omega \right| &\leq \left(\text{medida } \omega \int_{\omega} |v_j - z|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|v_j - z\|_1 \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Donde la segunda desigualdad se sigue de

$$\|v\|_{0,\omega} \leq \|v\|_{0,\Omega} \leq \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

si ω es un conjunto abierto en Ω , o de

$$\|v\|_{0,\omega} \leq \|v\|_{0,\partial\Omega_0} \leq C \|v\|_{1,\Omega_0} \leq C \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

si ω es un conjunto abierto en $\partial\Omega_0$. Mas aún, de (1.2)

$$\int_{\omega} v_j d\omega \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Así, la función constante z es cero por (1.7) y (1.8). Esto contradice (1.3) y (1.6) ■

Supongamos que las hipótesis del Teorema de la Desigualdad de Poincaré se cumplen. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\left| \int_{\omega} v d\omega \right|^2 \leq \text{medida } (\omega) \int_{\omega} |v|^2 d\omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

y por (1.1)

$$\|v\|_1 \leq C \left(|v|_1^2 + \|v\|_{0,\omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (1.9)$$

Esta desigualdad se llama *desigualdad de Friedrichs* cuando $\omega \subset \partial\Omega$. En particular,

$$\|v\|_1 \leq C |v|_1, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Cuando $\omega = \partial\Omega$ y $v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene la desigualdad de Poincaré clásica.

Se define el espacio de Sobolev $W_p^k(\Omega)$ como el espacio de funciones cuyas derivadas generalizadas de orden superior $k \in \{0, 1, \dots\}$ pertenecen a $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$. Para $p < \infty$ está equipado con la norma

$$\|v\|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|m| \leq k} \int_{\Omega} |D^m v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad v \in W_p^k(\Omega)$$

y consideraremos la seminorma

$$|v|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|m|=k} \int_{\Omega} |D^m v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad v \in W_p^k(\Omega).$$

Para $p = \infty$

$$\|v\|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|m| \leq k} \|D^m v\|_{0,\infty,\Omega}, \quad |v|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|m|=k} \|D^m v\|_{0,\infty,\Omega}.$$

El subíndice Ω se omite frecuentemente, es decir,

$$\|\cdot\|_{k,p} = \|\cdot\|_{k,p,\Omega}, \quad |\cdot|_{k,p} = |\cdot|_{k,p,\Omega}.$$

El espacio de Sobolev $W_p^k(\Omega)$ es la completación de $C^\infty(\Omega)$ en la norma $\|\cdot\|_{k,p}$ y en particular, cuando $\Omega \in \mathcal{L}$ entonces $W_p^k(\Omega)$ es la completación de $C^\infty(\bar{\Omega})$. Los espacios de Sobolev son espacios de Banach y para $p = 2$ son espacios de Hilbert, de hecho,

$$H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega).$$

El teorema de encaje de Sobolev para $p \in [1, \infty]$ y $k \in \{1, 2, \dots\}$ toma la forma

$$W_p^k(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}) \text{ si } pk > d.$$

Observe que la condición $pk > d$ no es necesaria pero sí suficiente. Por ejemplo, se tiene $W_1^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ para $d = 2$, en este caso, la condición $pk > d$ no se satisface.

1.2. Problema de Advección-Difusión

Considere ahora el siguiente problema con valores en la frontera:

Encontrar $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que

$$-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = Q \text{ en } \Omega \tag{1.10}$$

con condiciones de frontera

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \text{ en } \Gamma_D \quad (1.11)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) - \bar{q} = 0 \text{ en } \Gamma_N \quad (1.12)$$

donde $\Omega \in \mathcal{L}$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}(x)$ es una matriz simétrica, uniformemente positiva definida sobre $\bar{\Omega}$ (es decir, existe una constante $C > 0$ tal que $\mathbf{y}^T \mathbf{D}(x) \mathbf{y} \geq C \|\mathbf{y}\|^2$, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ y $\forall x \in \bar{\Omega}$), \mathbf{u} es el vector velocidad, $Q \in C(\bar{\Omega})$ es el término fuente, $\bar{\phi} \in C^2(\bar{\Omega})$, $\bar{q} \in C(\bar{\Gamma}_N)$ y Γ_D, Γ_N son conjuntos abiertos relativos con respecto a $\partial\Omega$ y forman una partición de $\partial\Omega$, donde Γ_D es no vacío.

Las condiciones (1.11) y (1.12) se llaman condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann respectivamente. Una función $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$ que satisface (1.10), (1.11) y (1.12) se llama solución clásica del problema.

Consideremos el espacio de funciones prueba:

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0 \right\}. \quad (1.13)$$

Multiplicando la ecuación (1.10) por una función prueba arbitraria $v \in V$ e integrando sobre Ω , se obtiene

$$\int_{\Omega} v (-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi) dx = \int_{\Omega} Qv dx.$$

Integrando por partes

$$\int_{\Omega} (\nabla v) (\mathbf{D}\nabla\phi) dx + \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi) dx = \int_{\Omega} Qv dx + \int_{\partial\Omega} v \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) ds.$$

Como $v = 0$ sobre Γ_D y por la condición de Neumann (1.12) se tiene

$$\int_{\Omega} (\nabla v) (\mathbf{D}\nabla\phi) dx + \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi) dx = \int_{\Omega} Qv dx + \int_{\Gamma_N} v \bar{q} ds.$$

Definimos la forma bilineal

$$a_0(\phi, v) = \int_{\Omega} (\nabla v) (\mathbf{D}\nabla\phi) dx + \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi) dx, \quad v, \phi \in H^1(\Omega)$$

y el funcional

$$l_0(v) = \int_{\Omega} Qv dx + \int_{\Gamma_N} v \bar{q} ds, \quad v \in V.$$

Sea $\mathbf{D}(x) = (d_{ij}(x))$ y $\mathbf{u} = (u_i)$. Se considera que $d_{i,j}, u_i \in L^\infty$, $Q \in L^2(\Omega)$, $\bar{q} \in C(\bar{\Gamma}_N)$ y $\bar{\phi} \in H^1(\Omega)$ para que las integrales estén bien definidas.

Así, la formulación débil del problema (1.10)-(1.11)-(1.12) es:

Encontrar $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que $\phi - \bar{\phi} \in V$ y

$$a_0(\phi, v) = l_0(v), \quad \forall v \in V. \quad (1.14)$$

Supondremos que la matriz \mathbf{D} es igual a una función escalar $d(x) = d > 0$ que multiplica a la matriz identidad, $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D} \nabla \phi)$ en la condición de frontera (1.12) se reemplaza por la derivada normal $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ y que $\bar{q} = 0$. Entonces

$$a(\phi, v) = \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (d \nabla \phi) dx + \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi) dx, \quad v, \phi \in H^1(\Omega) \quad (1.15)$$

y

$$l(v) = \int_{\Omega} Qv dx. \quad (1.16)$$

Por lo tanto, se considerará la formulación débil:

Encontrar $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que $\phi - \bar{\phi} \in V$ y

$$a(\phi, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.17)$$

donde a y l están definidos por (1.15) y (1.16) respectivamente.

Teorema 10 *Suponga que $d, \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ sobre Γ_N y sobre Ω se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{u} \leq 0$ y $d \geq d_0 > 0$, para alguna constante d_0 . Entonces dadas $\bar{\phi} \in L^2(\partial\Omega)$ y $Q \in L^2(\Omega)$ existe una única solución $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$a(\phi, v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

Prueba.

El problema de encontrar un único $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que $\phi - \bar{\phi} \in V$ y se cumpla (1.17) puede reformularse de la siguiente manera:

Encontrar $\hat{\phi} = \phi - \bar{\phi} \in V$ tal que $a(\hat{\phi}, v) = l(v) - a(\bar{\phi}, v)$, $\forall v \in V$.

Veremos que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es continua. Supongamos que $v, \phi \in V$ entonces

$$|a(\phi, v)| \leq \left| \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (d\nabla \phi) dx \right| + \left| \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi) dx \right|$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |a(\phi, v)| &\leq \|v\|_1 \|d\|_{0,\infty} \|\phi\|_1 \\ &\quad + \|v\|_0 \|\mathbf{u}\|_{0,\infty} \|\phi\|_1 \\ &\leq C_1 \|v\|_1 \|\phi\|_1 \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde $C_1 = \|d\|_{0,\infty} + \|\mathbf{u}\|_{0,\infty}$.

Para mostrar que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es coercitiva suponemos que $v \in V$ entonces tomando $\omega = \Gamma_D$ en la desigualdad de Friedrichs (1.9) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (d\nabla v) dx &\geq d_0 \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (\nabla v) dx \\ &= d_0 |v|_1^2 \\ &\geq C_2 \|v\|_1^2. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Además

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla v) dx &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (v \nabla v) dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla v^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\partial\Omega} v^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} v^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx \right), \end{aligned} \tag{1.20}$$

donde la última igualdad se obtiene integrando por partes. Así, observe que

$$\begin{aligned}
 a(v, v) &= \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (d\nabla v) \, dx + \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla v) \, dx & (1.21) \\
 &= \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (d\nabla v) \, dx + \frac{1}{2} \left(\int_{\partial\Omega} v^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\Omega} v^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \, dx \right) \\
 &= \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (d\nabla v) \, dx + \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_N} v^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\Omega} v^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \, dx \right) \\
 &\geq \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (d\nabla v) \, dx \\
 &\geq C_2 \|v\|_1^2,
 \end{aligned}$$

utilizando (1.20), $v = 0$ sobre Γ_D , $u \cdot n \geq 0$ sobre Γ_N , $\nabla \cdot u \leq 0$ sobre Ω y (1.19).

De esta manera, establecimos que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es continua y coercitiva.

Para mostrar que $v \rightarrow l(v) - a(\bar{\phi}, v)$ es un funcional continuo se supone que $v \in V$ y utilizando que $v \rightarrow a(\bar{\phi}, v)$ es continuo y que

$$|l(v)| \leq \|Q\|_0 \|v\|_0 \leq \|Q\|_0 \|v\|_1,$$

donde $Q \in L^2(\Omega)$; se obtiene que

$$|l(v) - a(\bar{\phi}, v)| \leq C_3 \|v\|_1.$$

Así, por el Teorema de Lax-Milgram se sigue que existe un único $\hat{\phi} \in V$ tal que

$$a(\hat{\phi}, v) = l(v) - a(\bar{\phi}, v), \quad \forall v \in V.$$

■

Capítulo 2

Análisis del Método de Cálculo de Incrementos Finitos

En este capítulo se estudiará el método de Cálculo de Incrementos Finitos (FIC); a partir del método se obtiene una ecuación estabilizada de Advección-Difusión. Se demuestra la existencia y unicidad de la solución en espacios de dimensión finita utilizando la desigualdad inversa. También se proporciona una estimación del error. Y finalmente se propone una variación del FIC en donde el parámetro de estabilización es lineal por elemento.

2.1. Introducción

En general, la solución analítica del problema (1.10)-(1.11)-(1.12) no es conocida, por lo que se recurre a métodos de aproximación. Uno de los procedimientos más usados es el Método de Elemento Finito (FEM), el cual está basado en la formulación débil. El número de Péclet tiene un efecto importante en la calidad de la solución discreta, si el número de Péclet es mayor que uno la solución discreta obtenida por el método de Galerkin-FEM (Método de Elemento Finito de Galerkin) y otros métodos puede presentar oscilaciones. Este fenómeno se conoce como un problema de convección dominante.

Para problemas en dos dimensiones, el *número de Péclet* en base a una malla se define como

$$\gamma = \frac{\|\mathbf{u}\|_{\infty,e} h_{K_e}}{2|d|},$$

donde h_{K_e} es una medida del elemento, la matriz de difusión es $\mathbf{D} = d\mathbf{I}$ y $\|\mathbf{u}\|_{\infty,e}$ es la magnitud del campo advectivo en cada elemento.

Para corregir el caracter oscilatorio de la solución obtenida por Galerkin-FEM se puede realizar un refinamiento de la malla, dividiendo el dominio en elementos de menor tamaño hasta lograr reducir el número de Péclet, lo que tiene como consecuencia un incremento en el costo computacional debido al aumento en las dimensiones de los sistemas de ecuaciones lineales que tienen que resolverse; para evitar esto existen varios procedimientos llamados métodos de estabilización que mejoran la calidad de la solución sin tener la necesidad de cambiar la malla, entre estos métodos se pueden mencionar Difusión Artificial, Contracorriente (Streamline-Upwind), Petrov Galerkin, Galerkin –Mínimos cuadrados (GLS) (Galerkin/Least-squares) y el Método de Subescalas (SGS) (Subgrid Scale). En todos los métodos anteriores la apropiada elección del parámetro de estabilización es de gran importancia y desafortunadamente la mayoría de los procedimientos están basados en métodos heurísticos.

Un método alternativo es el Cálculo de Incrementos Finitos (FIC) (Finite Increment Calculus) que está basado en un concepto de balance de flujos sobre un dominio de tamaño infinitesimal.

2.2. Método de Cálculo de Incrementos Finitos

2.2.1. Forma Estabilizada del Problema de Advección-Difusión

Problema Unidimensional

A continuación se mostrará la derivación clásica de la ecuación estabilizada con el Método de Cálculo de Incrementos Finitos.

Se considera la ecuación unidimensional del problema de advección-difusión

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + u \frac{d\phi}{dx} = Q, \quad (2.1)$$

en un dominio de longitud L .

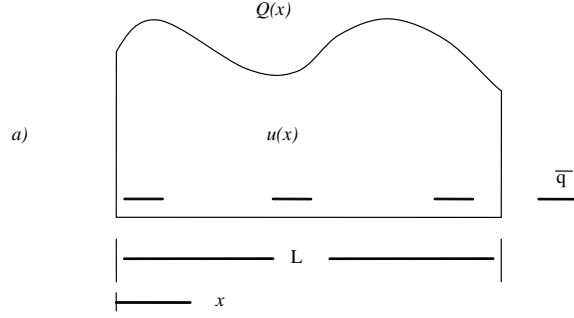


Figura 2. Problema unidimensional de advección-difusión.

Suponga una distribución lineal de Q sobre el intervalo infinitesimal $[A, B]$ de longitud h . El balance del flujo entre los extremos A y B puede ser escrito, considerando $A = x - h$ y $B = x$, de la siguiente manera

$$\sum \text{flujos} = [\text{flujo en A}] - [\text{flujo en B}] + \int_0^h Q dx = 0,$$

o bien,

$$q(x) + [u\phi](x) - q(x-h) - [u\phi](x-h) - \frac{1}{2}[Q(x) + Q(x-h)]h = 0. \quad (2.2)$$

Los valores del término de flujo q y el término convectivo $u\phi$ se pueden aproximar, en el punto A , en términos de valores en el punto B por medio de polinomios de Taylor, esto es,

$$[u\phi](x-h) = [u\phi](x) - h \frac{d[u\phi](x)}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2[u\phi](x)}{dx^2} - O(h^3), \quad (2.3)$$

$$q(x-h) = q(x) - h \frac{dq(x)}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2q(x)}{dx^2} - O(h^3), \quad (2.4)$$

$$Q(x-h) = Q(x) - h \frac{dQ(x)}{dx} + O(h^2). \quad (2.5)$$

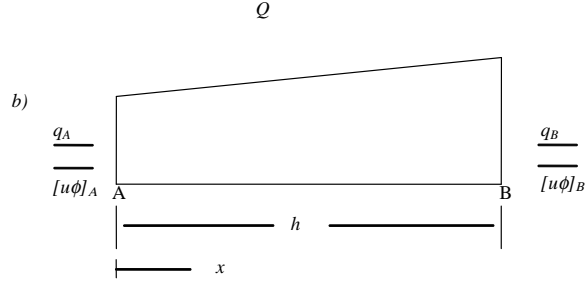


Figura 3. Balance de flujo en un dominio finito AB.

Sustituyendo las igualdades (2.3), (2.4) y (2.5) en la ecuación (2.2), después de simplificaciones, considerando que u es constante y usando la Ley de Fourier $q = -k \frac{d\phi}{dx}$ se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q \right] = 0. \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) puede ser escrita en forma más breve como

$$r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (2.7)$$

donde

$$r = \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q.$$

Observe que para $h = 0$ se obtiene la forma estándar infinitesimal de la ecuación de advección-difusión en una dimensión, es decir, la ecuación (2.1)

Condiciones de Frontera de Neumann

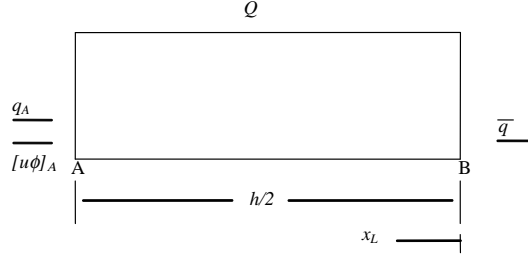


Figura 4. Dominio de Balance cercano a una frontera de Neumann.

Las condiciones de frontera de Dirichlet para la ecuación (2.1) son las condiciones de frontera estándar dadas por

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \text{ en } x = 0. \quad (2.8)$$

Para obtener las condiciones de frontera de Neumann se considera de nueva cuenta la ley de balance en un segmento AB cercano a un punto frontera. Se considera que la longitud de este segmento es la mitad de la longitud característica h . La ecuación de equilibrio entre los puntos A y B , suponiendo una distribución constante para el término fuente Q sobre $[A, B]$ y tomando $A = x - \frac{h}{2}$ y $B = x$, es

$$\bar{q} - q \left(x - \frac{h}{2} \right) - [u\phi] \left(x - \frac{h}{2} \right) - \frac{h}{2}Q = 0, \quad (2.9)$$

donde \bar{q} es el flujo total prescrito en $x = L$. Usando un polinomio de Taylor de segundo orden para aproximar el flujo advectivo y difusivo en el punto A se obtiene,

$$k \frac{d\phi}{dx} - u\phi + \bar{q} - \frac{h}{2} \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q \right) = 0 \text{ en } x = L, \quad (2.10)$$

o bien,

$$k \frac{d\phi}{dx} - u\phi + \bar{q} - \frac{h}{2}r = 0 \text{ en } x = L. \quad (2.11)$$

Cuando sólo es prescrito flujo difusivo la ecuación (2.11) toma la forma

$$k \frac{d\phi}{dx} + \bar{q} - \frac{h}{2}r = 0 \text{ en } x = L. \quad (2.12)$$

De esta manera, se obtiene el problema con valores en la frontera (2.7), (2.8) y (2.12), donde h es un parámetro por determinar.

Conservación del Flujo

Suponga que conocemos el flujo \bar{q}_0 y \bar{q}_L en $x = 0$ y $x = L$ respectivamente, entonces $\Gamma_D = \emptyset$. Tomando una función v en el espacio de funciones prueba y multiplicando (2.7) se obtiene

$$\int_0^L v \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q \right) \right) dx = 0.$$

Si se integra por partes se obtiene

$$\begin{aligned} & v \left[k \frac{d\phi}{dx} - u\phi - \frac{h}{2} \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q \right) \right]_0^L \\ & - \int_0^L \frac{dv}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q \right) \right) dx \\ & + \int_0^L v Q dx \\ & = 0. \end{aligned}$$

Tomando la función constante $v = 1$ como función prueba se tiene

$$\left[k \frac{d\phi}{dx} - u\phi - \frac{h}{2} \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q \right) \right]_0^L + \int_0^L v Q dx = 0,$$

y usando (2.10) se sigue que

$$q_L - q_0 + \int_0^L Q dx = 0$$

lo que confirma las propiedades de conservación.

Problema Bidimensional.

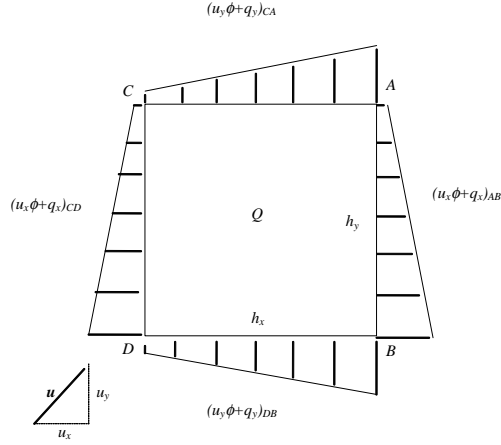


Figura 5. Dominio de balance para el problema bidimensional de advección-difusión.

Si se considera ahora un dominio rectangular de dimensiones h_x y h_y en las direcciones de x y y respectivamente, los conceptos desarrollados en la sección anterior pueden ser extendidos a dos dimensiones. Los flujos convectivo y difusivo se suponen que varían linealmente a lo largo de los lados del rectángulo. Así, después de establecer el balance de flujo, de la misma manera como se hizo en el caso unidimensional, se obtiene lo siguiente. Sea

$$r(\phi) := \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi + Q \quad (2.13)$$

entonces

$$r - \frac{1}{2}\mathbf{h} \cdot \nabla r = 0 \text{ en } \Omega \quad (2.14)$$

con las condiciones de frontera

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \text{ en } \Gamma_D \quad (2.15)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) + \bar{q} - \frac{1}{2}\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}r = 0 \text{ en } \Gamma_N, \quad (2.16)$$

donde $\Omega \in \mathcal{L}$.

Observación 11 En general el problema (2.14)-(2.15)-(2.16) no está bien planteado en el sentido clásico. Para ver esto, se considera el siguiente problema en una dimensión:

Sea $r = k\phi'' - u\phi' + Q$ y la ecuación

$$r - \frac{1}{2}hr' = 0 \text{ en } [0, 1] \quad (2.17)$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \bar{\phi}_1 \\ \phi(1) &= \bar{\phi}_2. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación (2.17) con respecto a r se obtiene

$$r(x) = r(x_0)e^{\frac{2}{h}x}.$$

Y como $r = k\phi'' - u\phi' + Q$ entonces se tiene la ecuación

$$k\phi''(x) - u\phi'(x) + Q = r(x_0)e^{\frac{2}{h}x}$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \bar{\phi}_1 \\ \phi(1) &= \bar{\phi}_2, \end{aligned}$$

donde $r(x_0)$ es un término desconocido. ■

2.2.2. Formulación Débil del FIC

Observación 12 La condición de frontera de Neumann se obtendrá de manera natural en el desarrollo de la formulación débil del FIC. ■

Para obtener la formulación débil, se considera el espacio de funciones prueba:

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0 \right\}. \quad (2.18)$$

Se multiplica la ecuación (2.14) por una función prueba arbitraria $v \in V$ e integrando sobre Ω , se obtiene

$$\int_{\Omega} v \left(\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi + Q - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi + Q) \right) dx = 0.$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla v) (\mathbf{D}\nabla\phi) dx + \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi + Q) \nabla \cdot (v\mathbf{h}) dx \\ & = \int_{\Omega} Qv dx + \int_{\partial\Omega} v \left(\mathbf{D}\nabla\phi - \frac{\mathbf{h}}{2} (\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi + Q) \right) \cdot \mathbf{n} ds. \end{aligned}$$

Como $v = 0$ sobre Γ_D y por la condición de (2.16) se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla v) (\mathbf{D}\nabla\phi) dx + \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi + Q) \nabla \cdot (v\mathbf{h}) dx \\ & = \int_{\Omega} Qv dx + \int_{\Gamma_N} v\bar{q} ds, \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla v) (\mathbf{D}\nabla\phi) dx + \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi) \nabla \cdot (v\mathbf{h}) dx \\ & = \int_{\Omega} Qv dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q \nabla \cdot (v\mathbf{h}) dx + \int_{\Gamma_N} v\bar{q} ds. \end{aligned}$$

Se define la forma bilineal

$$\begin{aligned} a_{h_0}(\phi, v) & = \int_{\Omega} (\nabla v) (\mathbf{D}\nabla\phi) dx + \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi) - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi) \nabla \cdot (v\mathbf{h}) dx, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde $v, \phi \in H^2(\Omega)$ y el funcional

$$l_{h_0}(v) = \int_{\Omega} Qv dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q \nabla \cdot (v \mathbf{h}) dx + \int_{\Gamma_N} v \bar{q} ds, \quad v \in V. \quad (2.20)$$

Así, una formulación débil del problema (2.14)-(2.15)-(2.16) es:

Encontrar $\phi \in H^2(\Omega)$ tal que $\phi - \bar{\phi} \in V$ y

$$a_{h_0}(\phi, v) = l_{h_0}(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.21)$$

donde a_{h_0} y l_{h_0} están definidos por (2.19) y (2.20) respectivamente.

2.3. Análisis del Método de Cálculo de Incrementos Finitos

La aplicación natural del método de Cálculo de Incrementos Finitos (FIC) es con el método de Elemento Finito (FEM). En este contexto se demostrará la existencia y unicidad de la solución de la formulación débil del FIC en espacios de dimensión finita. El resultado es consistente con la observación 11 y nos dice que el problema es bien planteado al restringir el sentido de la solución.

2.3.1. Existencia y Unicidad en Espacios de Dimensión Finita

Sea Ω un dominio poligonal y consideremos una partición de Ω por elementos finitos $\tau_h = \{K_1, K_2, \dots, K_N\}$. Sea V_h el subespacio de dimensión finita definido como

$$V_h = \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_k(K) \text{ para todo } K \in \tau_h, \quad v|_{\Gamma_D} = 0 \right\},$$

donde $P_k(K)$ denota al conjunto de polinomios de grado k sobre $K \in \tau_h$.

Si $\{a_j\}$ son los nodos de la malla, la base usual son las funciones $v_i \in V_h$ tal que $v_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Se considera en V_h la norma $\|\cdot\|_1$.

Supondremos que la matriz \mathbf{D} es igual a una función escalar $d(x) = d > 0$ que multiplica a la matriz identidad, $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi)$ en la condición de frontera (2.16) se reemplaza por la derivada normal $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ y que $\bar{q} = 0$. Entonces se reescribe la forma bilineal (2.19) y el funcional (2.20) por

$$a_h(\phi_h, v_h) = \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla\phi_h) dx + \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi_h) dx \quad (2.22)$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (d\nabla\phi) - u \cdot \nabla\phi) \nabla \cdot (v\mathbf{h}) dx,$$

donde $v_h, \phi_h \in V_h$ y

$$l_h(v_h) = \int_{\Omega} Qv_h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q\nabla \cdot (v_h\mathbf{h}) dx, \quad v_h \in V_h. \quad (2.23)$$

Observación 13 El problema de encontrar $\phi_h \in V_h$ tal que $\phi_h - \bar{\phi} \in V_h$ y se cumpla

$$a_h(\phi_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

puede reformularse de la siguiente manera:

Encontrar $\hat{\phi} = \phi_h - \bar{\phi} \in V_h$ tal que

$$a_h(\hat{\phi}, v_h) = l(v_h) - a(\bar{\phi}, v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

donde el mapeo $v_h \rightarrow l_h(v_h) - a(\bar{\phi}, v_h)$ es un funcional continuo si $Q \in L^2(\Omega)$ y $v_h \rightarrow a(\bar{\phi}, v_h)$ es continuo. ■

Considerando que $\bar{\phi} = 0$ se tiene el problema:

Encontrar $\phi_h \in V_h$ tal que

$$a_h(\phi_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

donde a_h y l_h están definidos por (2.22) y (2.23) respectivamente.

Se define el diámetro del elemento $K_e \in \tau_h$ como:

$$h_{K_e} = \sup \{|x - y| \mid x, y \in K_e\}, \quad \forall e = 1, 2, \dots, N$$

y

$$h = \max_{e \in \{1, 2, \dots, N\}} \{h_{K_e} \mid K_e \in \tau_h\}$$

Teorema 14 (*Desigualdad inversa*) Sea $K_e \in \tau_h$. Entonces existe una constante $C_{\text{inv}} > 0$ tal que

$$\|\Delta v_h\|_{0,K_e} \leq \frac{C_{\text{inv}}}{h_{K_e}} |v_h|_{1,K_e}, \quad \forall v_h \in V_h,$$

donde la constante C_{inv} no depende de u ni de v_h ni tampoco del elemento K_e .

Prueba.

Ver expresión 3.2.33 en la prueba del Teorema 3.2.6 en [Ciarlet]. ■

A continuación se presenta el resultado principal de este capítulo:

Teorema 15 Suponga que $d, \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ sobre Γ_N , $d \geq d_0 > 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{u} \leq 0$ sobre Ω para alguna constante d_0 .

Supongamos además, que \mathbf{h} es constante en cada elemento de τ_h de la forma

$$\mathbf{h}^{(e)} = \alpha^{(e)} h_{K_e} \mathbf{P}$$

y

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla w) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla w) \geq 0, \quad \forall w \in V_h$$

donde $\alpha^{(e)} > 0$ y \mathbf{P} es un vector unitario. Entonces dado $Q \in L^2(\Omega)$ existe una única solución $\phi_h \in V_h$ tal que

$$a_h(\phi_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \tag{2.24}$$

Prueba.

Probaremos que la forma bilineal $a_h(\cdot, \cdot)$ es continua, para ello, supongamos que $v_h, \phi_h \in V_h$ entonces

$$\begin{aligned}
|a_h(\phi_h, v_h)| &\leq \left| \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla \phi_h) dx \right| + \left| \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) dx \right| \\
&\quad + \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} (d\Delta \phi_h - \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla \phi_h) dx \right| + \left| \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) dx \right| \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \left| \int_{K_e} (d\Delta \phi_h) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v_h) dx \right| \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \left| \int_{K_e} (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v_h) dx \right|.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y por la desigualda inversa se tiene

$$\begin{aligned}
|a_h(\phi_h, v_h)| &\leq \|v_h\|_1 \|d\|_{0,\infty} \|\phi_h\|_1 \\
&\quad + \|v_h\|_0 \|\mathbf{u}\|_{0,\infty} \|\phi_h\|_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \left[d \|\Delta \phi\|_{0,K_e} \|\mathbf{h}^{(e)}\|_{0,\infty,K_e} \|v_h\|_1 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \left[\|\mathbf{u}\|_{0,\infty,K_e} \|\mathbf{h}^{(e)}\|_{0,\infty,K_e} \|\phi_h\|_1 \|v_h\|_1 \right] \\
&\leq \left(\|d\|_{0,\infty} + \|\mathbf{u}\|_{0,\infty} \right) \|v_h\|_1 \|\phi_h\|_1 \\
&\quad + \frac{d}{2} \sum_{e=1}^N \frac{C_{\text{inv}}}{h_{K_e}} \|\mathbf{h}^{(e)}\|_{0,\infty,K_e} \|v_h\|_1 \|\phi_h\|_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \|\mathbf{h}^{(e)}\|_{0,\infty,K_e} \|\mathbf{u}\|_{0,\infty,K_e} \|v_h\|_1 \|\phi_h\|_1 \\
&= C_1 \|v_h\|_1 \|\phi_h\|_1.
\end{aligned}$$

2.3. Análisis del Método de Cálculo de Incrementos Finitos

Probaremos ahora que la forma bilineal $a_h(\cdot, \cdot)$ es coercitiva. Si $v_h \in V_h$ entonces tomando $\omega = \Gamma_D$ en la desigualdad de Friedrichs (1.9) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla v_h) dx &\geq d_0 \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (\nabla v_h) dx & (2.25) \\ &= d_0 \|v_h\|_1^2. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla v_h) dx &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (v_h \nabla v_h) dx & (2.26) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla v_h^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\partial\Omega} v_h^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} v_h^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_N} v_h^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} v_h^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx \right) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

al integrar por partes y usando que $v = 0$ sobre Γ_D , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ sobre Γ_N y $\nabla \cdot \mathbf{u} \leq 0$ sobre Ω .

Por otra parte, $\mathbf{h}^{(e)} = \alpha^{(e)} h_{K_e} \mathbf{P}$ en cada elemento y $\|\Delta v_h\|_{0, K_e} \leq \frac{C_{\text{inv}}}{h_{K_e}} |v_h|_{1, K_e}$ para todo $v_h \in V_h$ entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_e} (-d\Delta v_h) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v_h) dx \right| &= \alpha^{(e)} h_{K_e} \left| \int_{K_e} d\Delta v_h (\mathbf{P} \cdot \nabla v_h) dx \right| & (2.27) \\ &\leq \alpha^{(e)} h_{K_e} \|d\|_{0, \infty, K_e} \|\Delta v\|_{0, K_e} |v_h|_{1, K_e} \\ &\leq \alpha^{(e)} \|d\|_{0, \infty, K_e} C_{\text{inv}} |v_h|_{1, K_e}^2, \end{aligned}$$

Así, observe que

$$\begin{aligned}
a_h(v_h, v_h) &= \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla v_h) dx + \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla v_h) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (d\Delta v_h - \mathbf{u} \cdot \nabla v_h) \nabla \cdot (v_h h) dx \\
&= \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla v_h) dx + \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla v_h) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{K_e} (d\Delta v_h) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v_h) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{K_e} (\mathbf{u} \cdot \nabla v_h) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v_h) dx.
\end{aligned}$$

Dado que $(\mathbf{u} \cdot \nabla w) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla w) \geq 0$, $\forall w \in V_h$ se tiene que

$$\begin{aligned}
a_h(v_h, v_h) &\geq \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla v_h) dx + \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla v_h) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{K_e} (d\Delta v_h) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v_h) dx.
\end{aligned}$$

Por (2.25) y (2.26) se sigue

$$\begin{aligned}
a_h(v_h, v_h) &\geq C \|v_h\|_1^2 + \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_N} v_h^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} v_h^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{K_e} (d\Delta v_h) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v_h) dx,
\end{aligned}$$

y como $u \cdot \mathbf{n} \geq 0$ sobre Γ_N y $\nabla \cdot \mathbf{u} \leq 0$ sobre Ω entonces

$$a_h(v_h, v_h) \geq d_0 \|v_h\|_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{K_e} (d\Delta v_h) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v_h) dx.$$

Además por (2.27)

$$\begin{aligned}
 a_h(v_h, v_h) &\geq d_0 \|v_h\|_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \alpha^{(e)} \|d\|_{0,\infty,K_e} C_{\text{inv}} |v_h|_{1,K_e}^2 \\
 &\geq \sum_{e=1}^N \left(d_0 - \frac{1}{2} \alpha^{(e)} \|d\|_{0,\infty,K_e} C_{\text{inv}} \right) |v_h|_{1,K_e}^2 \\
 &\geq C_2 \|v_h\|_1^2,
 \end{aligned}$$

para $\alpha^{(e)}$ suficientemente pequeña.

Por otro lado, $l_h(v_h)$ es un funcional lineal continuo ya que si $v_h \in V_h$ y $Q \in L^2(\Omega)$ entonces

$$\begin{aligned}
 |l_h(v_h)| &= \left| \int_{\Omega} Q v_h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}^{(e)}) dx \right| \\
 &\leq \|Q\|_0 \|v_h\|_0 + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \left[\|Q\|_{0,K_e} \|\mathbf{h}^{(e)}\|_{0,\infty,K_e} \|v_h\|_1 \right] \\
 &\leq \|Q\|_0 \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \|\mathbf{h}^{(e)}\|_{0,\infty,K_e} \right) \|v_h\|_1 \\
 &\leq C_3 \|v_h\|_1.
 \end{aligned}$$

De esta manera la forma bilineal $a_h(\cdot, \cdot)$ es continua y coercitiva y $l_h(\cdot)$ es un funcional lineal continuo entonces por el Teorema de Lax-Milgram se sigue que existe un único $\phi \in V_h$ tal que

$$a(\phi, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

■

Observación 16 La condición $(\mathbf{u} \cdot \nabla w) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla w) \geq 0$ para toda $w \in V_h$ la satisface el método SUPG eligiendo el parámetro $\mathbf{h}^{(e)} = \alpha^{(e)} h_{K_e} \mathbf{P}$ con $\mathbf{P} = \mathbf{u}$. ■

2.3.2. Estimación del Error

Para realizar el análisis de la estabilidad y convergencia del Método de Cálculo de Incrementos Finitos (FIC) se considera el siguiente problema de Advección-Difusión:

Encontrar $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que

$$-\nabla \cdot (d\nabla\phi) + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = Q, \text{ en } \Omega, \quad (2.28)$$

con condición de frontera

$$\phi = 0, \text{ en } \partial\Omega, \quad (2.29)$$

donde $\Omega \in \mathcal{L}$, \mathbf{u} es el vector velocidad y $Q \in C(\bar{\Omega})$ es el término fuente.

Sean $v, \phi \in H^1(\Omega)$, considere la forma bilineal

$$a(\phi, v) = \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (d\nabla\phi) dx + \int_{\Omega} v (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi) dx \quad (2.30)$$

y el funcional

$$l(v) = \int_{\Omega} Qv dx. \quad (2.31)$$

Sea $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$. La formulación débil del problema (2.28) y (2.29) es

Encontrar $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(\phi, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.32)$$

donde $a(\phi, v)$ y $l(v)$ están definidos por (2.30) y (2.31) respectivamente.

Se considera d constante sobre Ω . Sea V_h el subespacio de dimensión finita definido como

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_k(K) \text{ para todo } K \in \tau_h, \ v|_{\partial\Omega} = 0\},$$

donde $P_k(K)$ denota al conjunto de polinomios de grado k sobre $K \in \tau_h$.

Sean $v_h, \phi_h \in V_h$, se considera la forma bilineal

$$\begin{aligned} a_h(\phi_h, v_h) &= a(\phi_h, v_h) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (d\Delta\phi_h - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi_h) \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) dx \end{aligned} \quad (2.33)$$

y el funcional

$$l_h(v_h) = l(v_h) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) \, dx, \quad v_h \in V_h. \quad (2.34)$$

La formulación débil del FIC es encontrar $\phi_h \in V_h$ tal que

$$a_h(\phi_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2.35)$$

donde a_h y l_h están definidos por (2.33) y (2.34) respectivamente.

Lema 17 *Sea ϕ solución de (2.32) y ϕ_h solución de (2.35) entonces*

$$a_h(\phi - \phi_h, v_h) = 0, \quad v_h \in V_h.$$

Prueba.

Sea $v_h \in V_h$. Observe que

$$\begin{aligned} a_h(\phi - \phi_h, v_h) &= a_h(\phi, v_h) - a_h(\phi_h, v_h) \\ &= a(\phi, v_h) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (d\Delta\phi - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi) \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) \, dx \\ &\quad - a_h(\phi_h, v_h). \end{aligned}$$

Dado que ϕ satisface $-d\Delta\phi + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = Q$ en Ω entonces

$$\begin{aligned} a_h(\phi - \phi_h, v_h) &= a(\phi, v_h) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) \, dx \\ &\quad - a_h(\phi_h, v_h). \end{aligned}$$

Como ϕ solución de (2.32) y ϕ_h solución de (2.35) entonces

$$\begin{aligned} a_h(\phi - \phi_h, v_h) &= l(v_h) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) \, dx \\ &\quad - l_h(v_h). \end{aligned}$$

Dado que $l_h(v_h) = l(v_h) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) \, dx$ se sigue que

$$\begin{aligned} a_h(\phi - \phi_h, v_h) &= l(v_h) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) \, dx \\ &\quad - l(v_h) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Definición 18 Sea $\phi \in C(\bar{\Omega})$. El operador interpolación se define como

$$I_h(\phi) = \sum_{i=1}^M \phi(a_i) \varphi_i \in V_h,$$

donde a_1, a_2, \dots, a_M son los nodos de la triangulación τ_h y con la correspondiente base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M$.

Lema 19 Sea $\{\tau_h\}$ una familia regular de triangulaciones. Si $\phi \in V$ es solución de (2.32) y pertenece al espacio $H^{k+1}(\Omega)$ entonces se tiene la siguiente estimación del error para el interpolante $I_h(\phi)$:

$$\|\phi - I_h(\phi)\|_{l,K} \leq c_{\text{int}} h_K^{k+1-l} |\phi|_{k+1,K},$$

para $0 \leq l \leq k+1$ y para todo $K \in \tau_h$

Prueba.

Ver Teorema 3.1.5. en [Ciarlet]. ■

Se introduce la llamada norma $H^1(\Omega) - d$ pesada (d-weighted $H^1(\Omega)$ - norm) definida por:

$$\|v\|_d := \left\{ d |v|_1^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Sea V_{h_1} el subespacio de dimensión finita definido como

$$V_{h_1} = \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_1(K) \text{ para todo } K \in \tau_h, v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

donde $P_1(K)$ denota al conjunto de polinomios de grado uno sobre $K \in \tau_h$.

Y sea \mathbf{h} constante en cada elemento de τ_h de la forma

$$\mathbf{h}^{(e)} = \alpha^{(e)} h_{K_e} \mathbf{P},$$

entonces la forma bilineal (2.33) se puede escribir como

$$\begin{aligned} a_h(\phi_h, v_h) &= \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d \nabla \phi_h) dx + \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{K_e} (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v_h) dx. \end{aligned}$$

Se demostrará la siguiente estimación del error:

Teorema 20 Si la solución débil $\phi \in V$ de (2.32) pertenece al espacio $H^2(\Omega)$ y $\phi_h \in V_{h_1}$ solución de (2.35) entonces

$$\|\phi - \phi_h\|_d \leq C \left(\sqrt{d} + \frac{1}{\sqrt{d}} \right) h |\phi|_2,$$

donde la constante C es independiente de d , h y ϕ .

Prueba.

Por la desigualdad del triangulo se tiene

$$\|\phi - \phi_h\|_d \leq \|\phi - I_h(\phi)\|_d + \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d.$$

Se utiliza el lema 19 para obtener una cota del primer término, esto es,

$$\begin{aligned} \|\phi - I_h(\phi)\|_d^2 &= d |\phi - I_h(\phi)|_1^2 \\ &= \sum_{K \in \tau_h} d |\phi - I_h(\phi)|_{1,K}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \tau_h} d C_1 h_K^2 |\phi|_{2,K}^2 \\ &\leq C_1 d h^2 |\phi|_2^2. \end{aligned}$$

Ahora, para obtener una cota del segundo término observe que por coercividad

$$\begin{aligned} \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d^2 &\leq a_h(I_h(\phi) - \phi_h, I_h(\phi) - \phi_h) \\ &= a_h(I_h(\phi) - \phi, I_h(\phi) - \phi_h) + a_h(\phi - \phi_h, I_h(\phi) - \phi_h); \end{aligned}$$

por el lema 17

$$a_h(\phi - \phi_h, I_h(\phi) - \phi_h) = 0,$$

así

$$\|I_h(\phi) - \phi_h\|_d^2 \leq a_h(I_h(\phi) - \phi, I_h(\phi) - \phi_h).$$

Además

$$d \int_{\Omega} \nabla(I_h(\phi) - \phi) \cdot \nabla(I_h(\phi) - \phi_h) dx \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq d |I_h(\phi) - \phi|_1 |I_h(\phi) - \phi_h|_1 \\
 &= \sqrt{d} |I_h(\phi) - \phi|_1 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d \\
 &\leq C_2 \sqrt{dh} |\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d,
 \end{aligned}$$

usando el lema 19. Observe que

$$(u \cdot \nabla \phi, v) = -(\phi, u \cdot \nabla v) - ((\nabla \cdot u) \phi, v),$$

entonces

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} (I_h(\phi) - \phi_h) u \cdot \nabla (I_h(\phi) - \phi) dx \\
 &= \int_{\Omega} (-\nabla \cdot u) (I_h(\phi) - \phi) (I_h(\phi) - \phi_h) dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} (I_h(\phi) - \phi) u \cdot \nabla (I_h(\phi) - \phi_h) dx,
 \end{aligned}$$

luego

$$\int_{\Omega} (I_h(\phi) - \phi_h) u \cdot \nabla (I_h(\phi) - \phi) dx \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|-\nabla \cdot u\|_{0,\infty} \|I_h(\phi) - \phi\|_0 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_0 \\
&\quad + \|I_h(\phi) - \phi\|_0 \|u \cdot \nabla (I_h(\phi) - \phi_h)\|_0 \\
&\leq |u|_{1,\infty} \|I_h(\phi) - \phi\|_0 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_0 \\
&\quad + \|u\|_{0,\infty} \|I_h(\phi) - \phi\|_0 |I_h(\phi) - \phi_h|_1 \\
&\leq \left(|u|_{1,\infty} + \|u\|_{0,\infty} \right) |I_h(\phi) - \phi|_1 |I_h(\phi) - \phi_h|_1 \\
&= \left(\frac{|u|_{1,\infty} + \|u\|_{0,\infty}}{\sqrt{d}} \right) |I_h(\phi) - \phi|_1 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d \\
&\leq \left(\frac{|u|_{1,\infty} + \|u\|_{0,\infty}}{\sqrt{d}} \right) C_3 h |\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d \\
&= \frac{C_4}{\sqrt{d}} h |\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d.
\end{aligned}$$

Y usando de nueva cuenta el lema 19 se tiene

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{K_e} (\mathbf{u} \cdot \nabla (I_h(\phi) - \phi)) \left(\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla (I_h(\phi) - \phi_h) \right) dx \right| \quad (2.38) \\
&\leq \sum_{e=1}^N \|u\|_{0,\infty,K_e} \|\mathbf{h}^{(e)}\|_{0,\infty,K_e} |I_h(\phi) - \phi|_{1,K_e} |I_h(\phi) - \phi_h|_{1,K_e} \\
&= \sum_{e=1}^N \left(\frac{\|u\|_{0,\infty,K_e} \|\mathbf{h}^{(e)}\|_{0,\infty,K_e}}{\sqrt{d}} \right) |I_h(\phi) - \phi|_{1,K_e} \|I_h(\phi) - \phi_h\|_{d,K_e} \\
&\leq \left(\sum_{e=1}^N \frac{\|u\|_{0,\infty,K_e} \|\mathbf{h}^{(e)}\|_{0,\infty,K_e}}{\sqrt{d}} \right) C_5 h |\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d \\
&= \frac{C_6}{\sqrt{d}} h |\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d.
\end{aligned}$$

De esta manera por (2.36), (2.37) y (2.38) se tiene que

$$\begin{aligned}\|I_h(\phi) - \phi_h\|_d^2 &\leq a_h(I_h(\phi) - \phi, I_h(\phi) - \phi_h) \\ &\leq \left(C_2\sqrt{d} + \frac{C_4}{\sqrt{d}} + \frac{C_6}{\sqrt{d}}\right) h|\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d \\ &= C\left(\sqrt{d} + \frac{1}{\sqrt{d}}\right) h|\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d.\end{aligned}$$

■

Observación 21 Este resultado completa el análisis del método y establece que en V_h el problema con valores en la frontera es bien planteado. Sería deseable tener una cota de error en términos del parámetro de estabilización que sugieran otras formas de elección.

2.4. Método de Cálculo de Incrementos Finitos con Estabilización Lineal por Elemento

Hasta el momento se ha considerado que el parámetro de estabilización \mathbf{h} es constante en cada elemento, ahora se trabajará en una variación del método que consiste en suponer que el parámetro es lineal en cada elemento. Se elije el parámetro de tal forma que se obtiene una forma bilineal que permite la demostración de la existencia y unicidad de una manera sencilla. Además cuando se implementa el método, la elección del parámetro se simplifica ya que en lugar de determinar un vector como parámetro de estabilización se reduce a un valor escalar.

Se considera el problema (2.35) pero sobre V_{h_1} , además se supone que \mathbf{u} es constante.

2.4.1. Existencia y Unicidad en Espacios de Dimensión Finita

Sean $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)$, $j = 1, 2, 3$ los vértices de un elemento triangular en la malla:

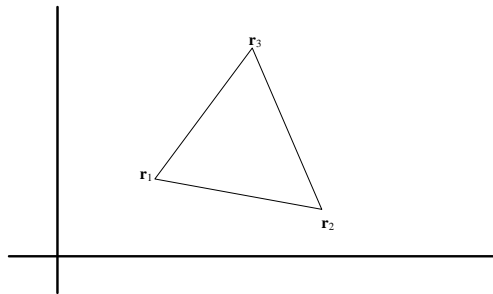


Figura 6. Elemento triangular.

Se define

$$\mathbf{x}_m^{(e)} = \frac{1}{3} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3).$$

Suponga que \mathbf{h} es una función lineal en cada elemento de τ_h de la forma

$$\mathbf{h}^{(e)} = \alpha \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m^{(e)} \right),$$

donde α es constante. Entonces

$$\int_{K_e} (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v) dx = (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi) \int_{K_e} (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v) dx = 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned} a_h(\phi_h, v_h) &= \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla \phi_h) dx + \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla \phi_h) dx + \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{K_e} (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{K_e} (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) (v_h \nabla \cdot \mathbf{h}^{(e)}) dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla \phi_h) dx + \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) dx \\ &\quad + \sum_{e=1}^N \frac{\nabla \cdot \mathbf{h}^{(e)}}{2} \int_{K_e} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla \phi_h) dx + \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) dx \\ &\quad + \alpha \sum_{e=1}^N \int_{K_e} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) dx, \end{aligned}$$

donde $\phi_h, v_h \in V_{h_1}$.

Así, se define la forma bilineal

$$a_h(\phi_h, v_h) = \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla \phi_h) dx + (1 + \alpha) \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) dx \quad (2.39)$$

y el funcional

$$l_h(v_h) = \int_{\Omega} Q v_h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) dx, \quad v_h \in V_{h_1}. \quad (2.40)$$

Se tiene el problema:

Encontrar $\phi_h \in V_{h_1}$ tal que

$$a_h(\phi_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

donde a_h y l_h están definidos por (2.39) y (2.40) respectivamente.

Teorema 22 *Suponga que $d, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ sobre Γ_N y $d \geq d_0 > 0$ sobre Ω para alguna constante d_0 . Si \mathbf{h} es una función lineal en cada elemento de τ_h de la forma*

$$\mathbf{h}^{(e)} = \alpha \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m^{(e)} \right),$$

donde α es constante. Entonces dado $Q \in L^2(\Omega)$ existe una única solución $\phi_h \in V_{h_1}$ tal que

$$a_h(\phi_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h_1}. \quad (2.41)$$

Prueba.

Mostraremos que la forma bilineal $a_h(\cdot, \cdot)$ es continua. Si $v_h, \phi_h \in V_{h_1}$ entonces

$$|a_h(\phi_h, v_h)| \leq \left| \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d \nabla \phi_h) dx \right| + (1 + \alpha) \left| \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) dx \right|$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |a_h(\phi_h, v_h)| &\leq \|v_h\|_1 \|d\|_{0,\infty} \|\phi_h\|_1 + (1 + \alpha) \|v_h\|_0 \|\mathbf{u}\|_{0,\infty} \|\phi_h\|_1 \\ &\leq \left(\|d\|_{0,\infty} + (1 + \alpha) \|\mathbf{u}\|_{0,\infty} \right) \|v_h\|_1 \|\phi_h\|_1 \\ &= C_1 \|v_h\|_1 \|\phi_h\|_1, \end{aligned}$$

Veremos que la forma bilineal $a_h(\cdot, \cdot)$ es coercitiva. Si $v_h \in V_{h_1}$ entonces por la desigualdad de Poincaré se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d \nabla v_h) dx &\geq d_0 \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (\nabla v_h) dx \\ &\geq C_2 \|v_h\|_1^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Además al integrar por partes y considerando que $v = 0$ sobre Γ_D se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla v_h) dx &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (v_h \nabla v_h) dx & (2.43) \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla v_h^2 \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla v_h^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{\partial\Omega} v_h^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} v_h^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_N} v_h^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} v_h^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx \right).
 \end{aligned}$$

Así, usando (2.43), $u \cdot n \geq 0$ sobre Γ_N y $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 a_h(v_h, v_h) &= \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla v_h) dx + (1 + \alpha) \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla v_h) dx \\
 &\geq \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla v_h) dx - (1 + \alpha) \int_{\Omega} v_h^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx \text{ por} \\
 &\geq \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla v_h) dx \\
 &\geq C_2 \|v_h\|_1^2.
 \end{aligned}$$

De esta manera la forma bilineal $a_h(\cdot, \cdot)$ es continua y coercitiva.

Y considerando que $Q \in L^2(\Omega)$ se tiene que $l_h(v_h)$ es un funcional continuo; entonces por el Teorema de Lax-Milgram se sigue que existe un único $\phi \in V_{h_1}$ tal que

$$a(\phi, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h_1}.$$

■

2.4.2. Estimación del Error

Teorema 23 *Si la solución débil $\phi \in V$ de (2.32) pertenece al espacio $H^2(\Omega)$ y $\phi_h \in V_{h_1}$ es solución de (2.35) entonces*

$$\|\phi - \phi_h\|_d \leq C \left(\sqrt{d} + (1 + \alpha) \frac{1}{\sqrt{d}} \right) h |\phi|_2,$$

donde la constante C es independiente de d , h y ϕ

Prueba.

Por la desigualdad del triangulo se tiene

$$\|\phi - \phi_h\|_d \leq \|\phi - I_h(\phi)\|_d + \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d.$$

A continuación se utiliza el lema 19 para obtener una cota del primer término, esto es,

$$\begin{aligned} \|\phi - I_h(\phi)\|_d^2 &= d |\phi - I_h(\phi)|_1^2 \\ &= \sum_{K \in \tau_h} d |\phi - I_h(\phi)|_{1,K}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \tau_h} d C_1 h_K^2 |\phi|_{2,K}^2 \\ &\leq C_1 d h^2 |\phi|_2^2. \end{aligned}$$

Ahora, para obtener una cota del segundo término observe que por coercitividad

$$\begin{aligned} \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d^2 &\leq a_h(I_h(\phi) - \phi_h, I_h(\phi) - \phi_h) \\ &= a_h(I_h(\phi) - \phi, I_h(\phi) - \phi_h) + a_h(\phi - \phi_h, I_h(\phi) - \phi_h); \end{aligned}$$

por el lema 17

$$a_h(\phi - \phi_h, I_h(\phi) - \phi_h) = 0,$$

así

$$\|I_h(\phi) - \phi_h\|_d^2 \leq a_h(I_h(\phi) - \phi, I_h(\phi) - \phi_h).$$

Además, por el lema 19 se tiene

$$d \int_{\Omega} \nabla(I_h(\phi) - \phi) \cdot \nabla(I_h(\phi) - \phi_h) dx \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq d |I_h(\phi) - \phi|_1 |I_h(\phi) - \phi_h|_1 \\
 &= \sqrt{d} |I_h(\phi) - \phi|_1 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d \\
 &\leq C_2 \sqrt{d} h |\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d.
 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} (I_h(\phi) - \phi_h) u \cdot \nabla (I_h(\phi) - \phi) dx \\
 &= \int_{\Omega} (-\nabla \cdot u) (I_h(\phi) - \phi) (I_h(\phi) - \phi_h) dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} (I_h(\phi) - \phi) u \cdot \nabla (I_h(\phi) - \phi_h) dx.
 \end{aligned}$$

Usando que

$$(u \cdot \nabla \phi, v) = -(\phi, u \cdot \nabla v) - ((\nabla \cdot u) \phi, v)$$

y el lema 19 se obtiene

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} (I_h(\phi) - \phi_h) u \cdot \nabla (I_h(\phi) - \phi) dx && (2.45) \\
 &= \|-\nabla \cdot u\|_{0,\infty} \|I_h(\phi) - \phi\|_0 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_0 \\
 &\quad + \|I_h(\phi) - \phi\|_0 \|u \cdot \nabla (I_h(\phi) - \phi_h)\|_0 \\
 &\leq |u|_{1,\infty} \|I_h(\phi) - \phi\|_0 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_0 \\
 &\quad + \|u\|_{0,\infty} \|I_h(\phi) - \phi\|_0 |I_h(\phi) - \phi_h|_1 \\
 &\leq \left(|u|_{1,\infty} + \|u\|_{0,\infty} \right) |I_h(\phi) - \phi|_1 |I_h(\phi) - \phi_h|_1 \\
 &= \left(\frac{|u|_{1,\infty} + \|u\|_{0,\infty}}{\sqrt{d}} \right) |I_h(\phi) - \phi|_1 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d \\
 &\leq \left(\frac{|u|_{1,\infty} + \|u\|_{0,\infty}}{\sqrt{d}} \right) C_3 h |\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d \\
 &= \frac{C_4}{\sqrt{d}} h |\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d.
 \end{aligned}$$

De esta manera por (2.44) y (2.45) se tiene que

$$\begin{aligned}\|I_h(\phi) - \phi_h\|_d^2 &\leq a_h(I_h(\phi) - \phi, I_h(\phi) - \phi_h) \\ &\leq \left(C_2\sqrt{d} + (1 + \alpha) \frac{C_4}{\sqrt{d}}\right) h |\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d \\ &\leq C \left(\sqrt{d} + (1 + \alpha) \frac{1}{\sqrt{d}}\right) h |\phi|_2 \|I_h(\phi) - \phi_h\|_d.\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Elección del Parámetro de Estabilización

A continuación se presenta una propuesta de un método de elección del parámetro basado en el error de aproximación por elemento de la formulación Galerkin-FEM del problema. Se obtiene una caracterización del valor crítico del parámetro de estabilización como parámetro óptimo en una dimensión además de una propuesta del parámetro de estabilización en dos dimensiones. Para ilustrar la bondad del método, se mostrarán algunos ejemplos numéricos.

3.1. Problema Unidimensional

3.1.1. Elección del Parámetro de Estabilización

Sea V_{h_1} el subespacio de dimensión finita formada por funciones continuas que satisfacen

- i) $v|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h$
- ii) $v = 0$ en sobre Γ_D

Suponga que h es constante en cada elemento de τ_h y es de la forma

$$h^{(e)} = \alpha^{(e)} h_{K_e} \frac{u}{|u|},$$

con $\alpha^{(e)} \geq 0$ y h_{K_e} la medida del elemento.

Observe que esta elección de h satisface

$$\left(u \frac{dw}{dx} \right) \left(h^{(e)} \frac{dw}{dx} \right) \geq 0, \forall w \in V_{h_1}.$$

Se considera el caso en que k y u son constantes. En este caso, la forma bilineal es

$$a(\phi_h, v_h) = \int_{K_e} d \frac{dv_h}{dx} \frac{d\phi_h}{dx} dx + \int_{K_e} v_h \left(u \frac{d\phi_h}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} \int_{K_e} \left(u \frac{d\phi_h}{dx} \right) \left(h^{(e)} \frac{dv_h}{dx} \right) dx$$

y el funcional

$$l_h(v_h) = \int_{\Omega} Q v_h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q \nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) dx.$$

Se define el residuo por elemento como

$$\begin{aligned} r^{(e)}(\phi_h) &= \int_{K_e} d \frac{dv_h}{dx} \frac{d\phi_h}{dx} dx + \int_{K_e} v_h \left(u \frac{d\phi_h}{dx} \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{K_e} \left(u \frac{d\phi_h}{dx} \right) \left(h^{(e)} \frac{dv_h}{dx} \right) dx, \end{aligned}$$

donde $\phi_h, v_h \in V_{h_1}$.

Se propone elegir $\alpha^{(e)}$ de tal forma que el residuo es cero. De esta manera, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha^{(e)} &= \frac{- \int_{K_e} d \frac{dv_h}{dx} \frac{d\phi_h}{dx} dx}{\frac{1}{2} h_{K_e} \int_{K_e} \left(u \frac{d\phi_h}{dx} \right) \left(\frac{u}{|u|} \frac{dv_h}{dx} \right) dx} \\ &\quad + \frac{- \int_{K_e} v_h \left(u \frac{d\phi_h}{dx} \right) dx}{\frac{1}{2} h_{K_e} \int_{K_e} \left(u \frac{d\phi_h}{dx} \right) \left(\frac{u}{|u|} \frac{dv_h}{dx} \right) dx} \\ &= \frac{-d}{\frac{1}{2} h_{K_e} |u|} + \frac{- \int_{K_e} v_h dx}{\frac{1}{2} h_{K_e} \frac{u}{|u|} \frac{dv_h}{dx} \int_{K_e} 1 dx}. \end{aligned}$$

Se elige v_h de tal manera que $\alpha^{(e)} \geq 0$. Esto es

- Si $\frac{u}{|u|} \geq 0$ entonces se elige $v_h = N_1^{(e)}$.
- Si $\frac{u}{|u|} \leq 0$ entonces se elige $v_h = N_2^{(e)}$,

donde $N_1^{(i)}(x) = \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}$ y $N_2^{(i)}(x) = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$ para $x \in [x_i, x_{i+1}]$ con $i = 1, \dots, N$.

De esta manera el parámetro de estabilización es

$$\begin{aligned}\alpha^{(e)} &= \frac{-d}{\frac{1}{2}h_{K_e}|u|} + 1 \\ &= 1 - \frac{1}{Pe},\end{aligned}$$

donde $Pe = \frac{h_{K_e}|u|}{2d}$ es el número de Peclet.

Observación 24 $1 - \frac{1}{Pe}$ es el valor crítico mínimo para garantizar una solución estable. Ver [Oñate 3]. Nuestra prueba muestra que es el mejor parámetro elemento a elemento con la formulación débil. Esto en contraste con el valor $\coth Pe - \frac{1}{Pe}$ que se conoce como el valor óptimo con valor exacto en los nodos.

3.1.2. Ejemplos

Los ejemplos a considerar son una muestra exhaustiva en una dimensión. Se consideran diferentes condiciones de frontera y términos fuente. En todos los ejemplos se compara la solución obtenida con el FIC con la solución del MEF sin estabilización y la solución exacta.

Ejemplo 25 Problema de advección-difusión unidimensional sin término fuente y condiciones de Dirichlet.

Se considera la ecuación

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + u \frac{d\phi}{dx} = 0, \text{ en } \Omega = (0, 1),$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ \phi(1) &= 1, \end{aligned}$$

donde $k = 0,01$ y $u = 1$ y se consideran 40 elementos de la misma longitud. El número de Péclet es $Pe = 1,25$.

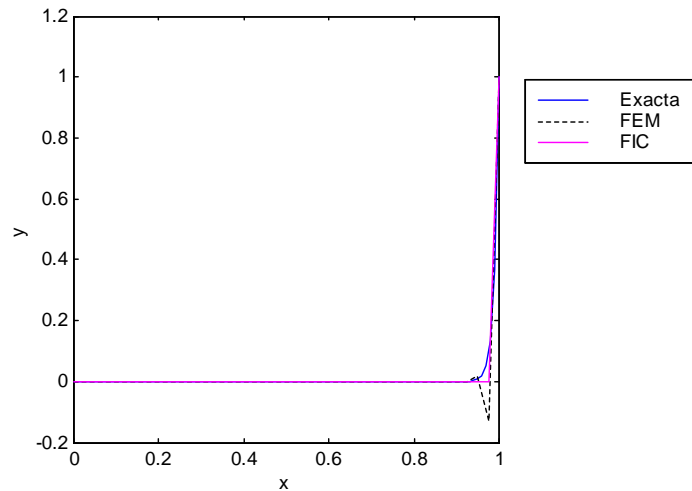


Figura 7. Comparación entre la solución exacta del ejemplo 25 y las aproximaciones obtenidas con FEM y FIC.

Ejemplo 26 Problema de advección-difusión unidimensional con término fuente y condiciones de Dirichlet.

Se considera la ecuación

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + u \frac{d\phi}{dx} = \text{sen}(\pi x), \text{ en } \Omega = (0, 1),$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ \phi(1) &= 0, \end{aligned}$$

donde $k = 0,01$ y $u = 1$ y se consideran 40 elementos de la misma longitud. El número de Péclet es $Pe = 1,25$.

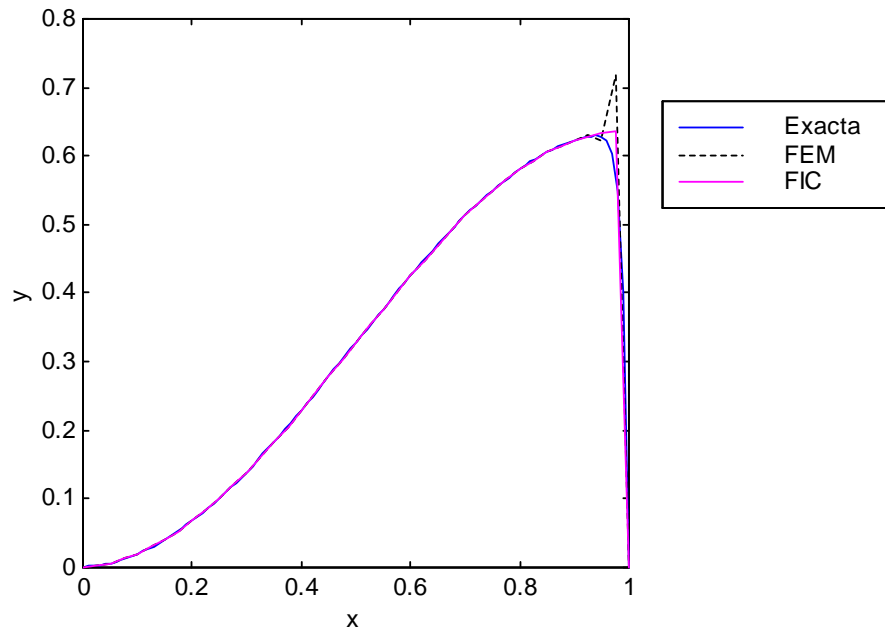


Figura 8. Comparación entre la solución exacta del ejemplo 26 y las aproximaciones obtenidas con FEM y FIC.

Ejemplo 27 Problema de advección-difusión unidimensional con término fuente y condiciones de Dirichlet

Se considera la ecuación

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + u \frac{d\phi}{dx} = \text{sen}(\pi x), \text{ en } \Omega = (0, 1),$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ \phi(1) &= 0, \end{aligned}$$

donde $k = 0,01$ y $u = -1$ y se consideran 40 elementos de la misma longitud. El número de Péclet es $Pe = 1,25$.

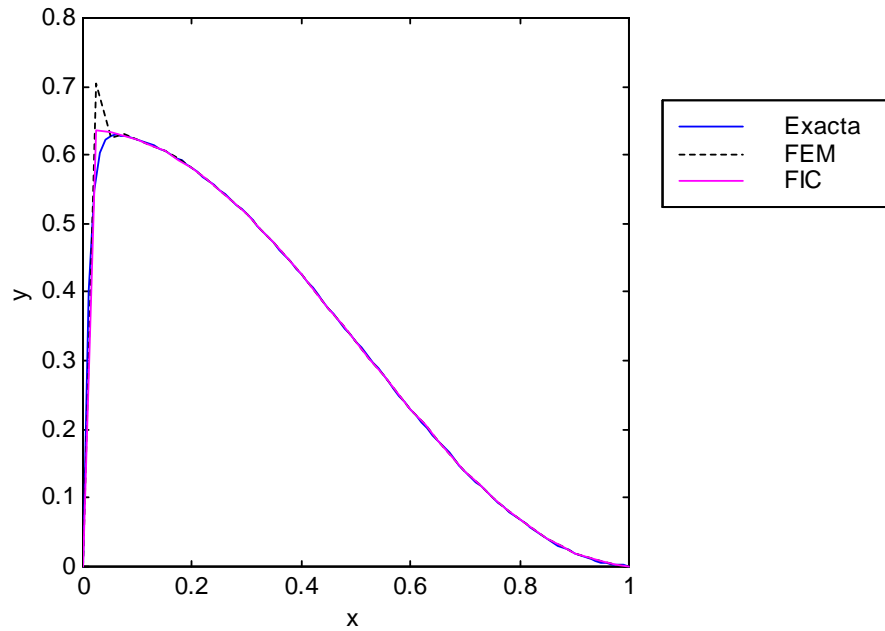


Figura 9. Comparación entre la solución exacta del ejemplo 27 y las aproximaciones obtenidas con FEM y FIC.

Ejemplo 28 Problema de advección-difusión unidimensional con término fuente y condiciones mixtas

Se considera la ecuación

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + u \frac{d\phi}{dx} = \text{sen}(\pi x), \text{ en } \Omega = (0, 1),$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ -k\phi'(1) &= 1, \end{aligned}$$

donde $k = 0,01$ y $u = 1$ y se consideran 40 elementos de la misma longitud. El número de Péclet es $Pe = 1,25$.

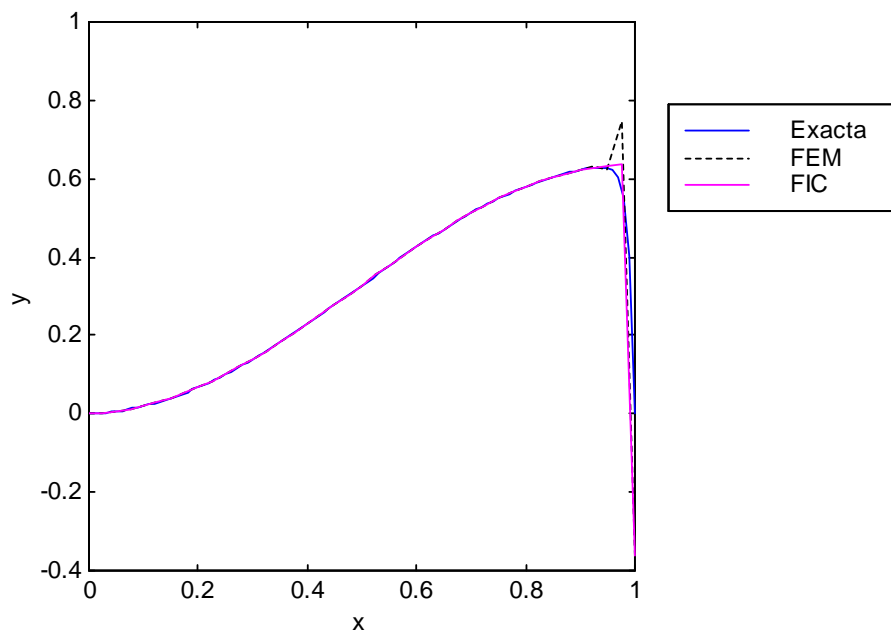


Figura 10. Comparación entre la solución exacta del ejemplo 28 y las aproximaciones obtenidas con FEM y FIC.

Ejemplo 29 Problema de advección-difusión unidimensional sin término fuente y condiciones de frontera mixtas.

Se considera la ecuación

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + u \frac{d\phi}{dx} = 0, \text{ en } \Omega = (0, 1),$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ -k\phi'(1) &= -1, \end{aligned}$$

donde $k = 0,01$ y $u = 1$ y se consideran 40 elementos de la misma longitud. El número de Péclet es $Pe = 1,25$.

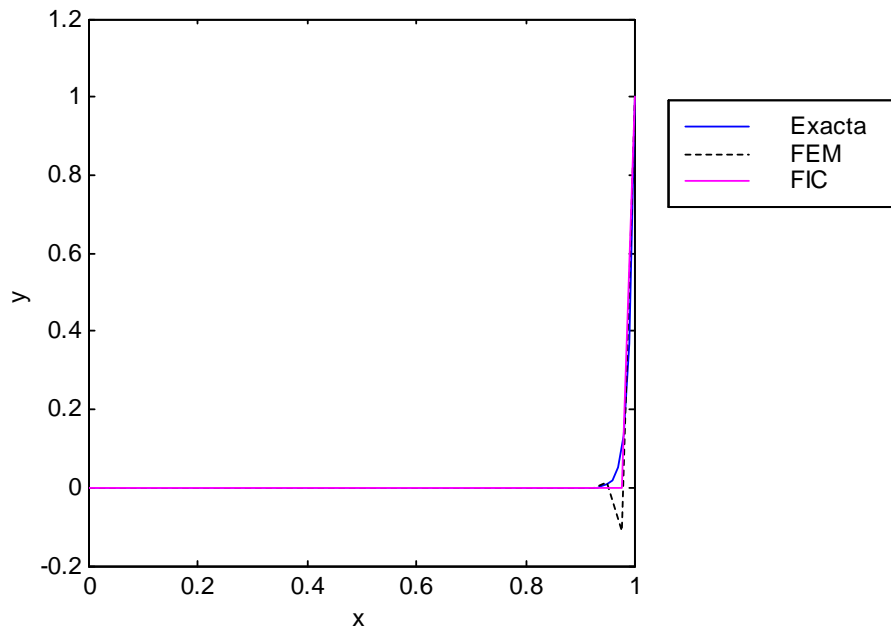


Figura 11. Comparación entre la solución exacta del ejemplo 29 y las aproximaciones obtenidas con FEM y FIC.

Ejemplo 30 Problema de advección-difusión unidimensional con término fuente y condiciones de frontera mixtas.

El término fuente es una función concentrada en $x = \frac{1}{2}$. La ecuación es

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + u \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{0,01 + (2x - 1)^2}, \text{ en } \Omega = (0, 1),$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ -k\phi'(1) &= 0, \end{aligned}$$

donde $k = 0,01$ y $u = 1$ y se consideran 10 elementos de la misma longitud. El número de Péclet es $Pe = 5$.

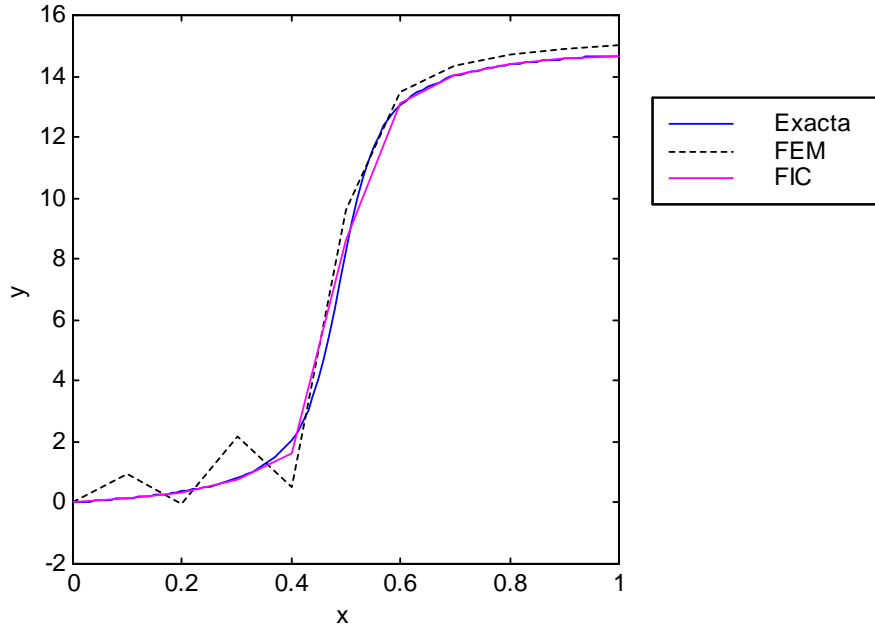


Figura 12. Comparación entre la solución exacta del ejemplo 30 y las aproximaciones obtenidas con FEM y FIC.

3.2. Problema Bidimensional

3.2.1. Elección del Parámetro de Estabilización

Sea V_{h_1} el subespacio de dimensión finita definido como

$$V_{h_1} = \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_1(K) \text{ para todo } K \in \tau_h, v|_{\Gamma_D} = 0 \right\},$$

donde $P_1(K)$ denota al conjunto de polinomios de grado uno sobre $K \in \tau_h$.

Suponga que $\hat{\phi}$ es solución y ϕ_x y ϕ_y sus respectivas derivadas. Se define para cada elemento

$$\begin{aligned} r^{(e)}(\hat{\phi}) &= \int_{K_n} (\nabla N_i) \cdot (d\nabla \hat{\phi}) dx + \int_{K_n} N_i (\mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\phi}) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{K_n} (\mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\phi}) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla N_i) \mathbf{h} dx, \end{aligned}$$

para algún $N_i \in V_{h_1}$.

El parámetro se elige de la forma

$$\mathbf{h}^{(e)} = \alpha^{(e)} h_{K_e} \frac{\mathbf{P}}{\|\mathbf{P}\|},$$

donde

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\phi}}{\nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi}} \nabla \hat{\phi}.$$

La propuesta para obtener el parámetro de estabilización es mediante el siguiente procedimiento iterativo:

1. Se resuelve el problema con $\alpha^{(e)} = 0$ para cada elemento.
2. Para $k = 1, 2, \dots$ encontrar una solución $\hat{\phi}^{(k)}$ más suave a partir de $\hat{\phi}^{(k-1)}$.
3. Sea $\alpha_k^{(e)}$ el parámetro que corresponde a $\hat{\phi}^{(k)}$ con el mismo residuo que con $\alpha_{k-1}^{(e)}$ y $\hat{\phi}^{(k-1)}$, esto es

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(e)} = & - \frac{\int_{K_n} (\nabla N_i) \cdot \left(d \left(\nabla \hat{\phi}^{(k)} - \nabla \hat{\phi}^{(k-1)} \right) \right) dx}{\frac{1}{2} h_{K_e} \int_{K_e} \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\phi}^{(k)} \right) (\mathbf{P} \cdot \nabla v) dx} \\ & - \frac{\int_{K_n} N_i \left(\mathbf{u} \cdot \left(\nabla \hat{\phi}^{(k)} - \nabla \hat{\phi}^{(k-1)} \right) \right) dx}{\frac{1}{2} h_{K_e} \int_{K_e} \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\phi}^{(k)} \right) (\mathbf{P} \cdot \nabla v) dx} \\ & + \alpha_{k-1}^{(e)} \frac{\int_{K_e} \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\phi}^{(k-1)} \right) (\mathbf{P} \cdot \nabla v) dx}{\int_{K_e} \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\phi}^{(k)} \right) (\mathbf{P} \cdot \nabla v) dx}. \end{aligned}$$

4. Se repiten los pasos 2, 3 y 4 hasta obtener convergencia.

3.2.2. Suavización de la derivada

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$ base de V_h . Y considere

$$\hat{\phi}_h = \sum_{i=1}^{k+1} v_i \hat{\phi}_i,$$

la solución obtenida con FEM.

De la definición de derivada débil se tiene que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{\phi}_h}{\partial x_\alpha} v_i dx = - \int_{\Omega} \hat{\phi}_h \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} dx,$$

con $i = 1, 2, \dots, k + 1$.

Si se expresa $\frac{\partial \hat{\phi}_h}{\partial x_\alpha}$ como una combinación lineal de los elementos de la base $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$, esto es

$$\frac{\partial \hat{\phi}_h}{\partial x_\alpha} = \sum_{j=1}^{k+1} v_j \hat{\phi}_{\alpha j},$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{\phi}_h}{\partial x_{\alpha}} v_i dx &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{k+1} v_j \hat{\phi}_{\alpha j} \right) v_i dx \\
 &= \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega} v_i v_j \hat{\phi}_{\alpha j} dx \\
 &= - \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{k+1} v_j \hat{\phi}_j \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_{\alpha}} dx \\
 &= - \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_{\alpha}} v_j \hat{\phi}_j dx,
 \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, k + 1$.

En forma matricial es

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \int_{\Omega} v_1 v_1 dx & \cdots & \int_{\Omega} v_1 v_{k+1} dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega} v_{k+1} v_1 dx & \cdots & \int_{\Omega} v_{k+1} v_{k+1} dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{\alpha 1} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{\alpha(k+1)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} - \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x_{\alpha}} v_j \hat{\phi}_j dx \\ \vdots \\ - \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial x_{\alpha}} v_j \hat{\phi}_j dx \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$\hat{\phi}_{\alpha 1}, \dots, \hat{\phi}_{\alpha(k+1)}$ son los coeficientes a determinar, con lo que se tendría la derivada de $\hat{\phi}_h$ como una combinación lineal de la base.

3.2.3. Ejemplos

Los siguientes ejemplos son un "benchmark" de los distintos ejemplos que se pueden encontrar en la literatura,

Ejemplo 31 Encontrar $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que

$$-\nabla \cdot (d\nabla\phi) + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = 0, \text{ en } \Omega,$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi &= 1 \text{ en } \Gamma_{D_1} \\ \phi &= 0 \text{ en } \Gamma_{D_2}, \end{aligned}$$

donde $d = 0,000001$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\Gamma_{D_1} = ([0, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ y $\Gamma_{D_2} = \partial\Omega/\Gamma_{D_1}$. Se considera una malla de 625 elementos rectangulares de cuatro nodos de tal manera que el número de Péclet es $Pe = 800$. Se resuelve el problema utilizando FEM y la solución obtenida se muestra en las figuras 14 y 16 después de 5 iteraciones se obtiene la solución con FIC mostrada en las figuras 15 y 17 utilizando los vectores de estabilización en cada elemento como se muestra en las figuras 18 y 19.

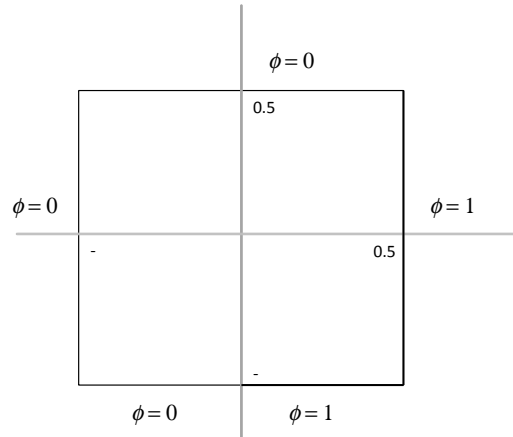


Figura 13. Dominio y condiciones de frontera del ejemplo 31.

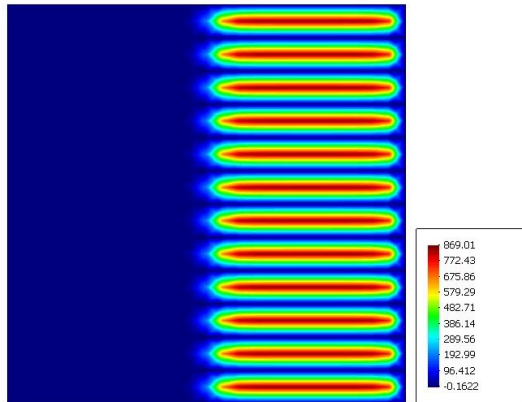


Figura 14. Solución obtenida con FEM (primera iteración).

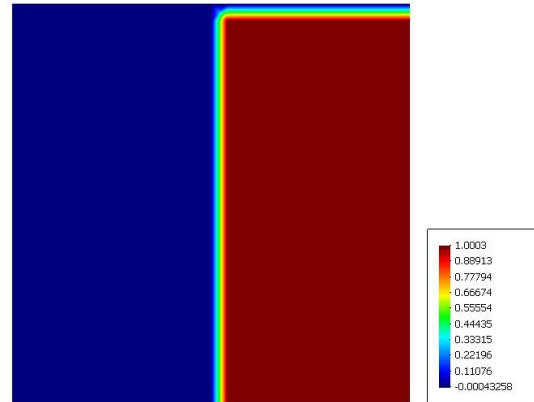


Figura 15. Solución obtenida con FIC (quinta iteración).

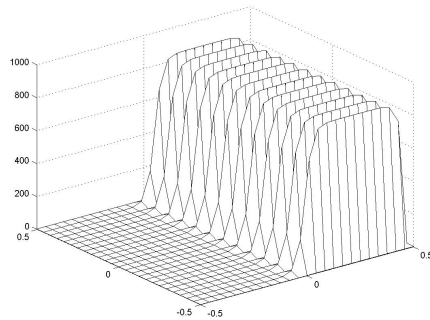


Figura 16. Solución obtenida con FEM en vista 3D (primera iteración).

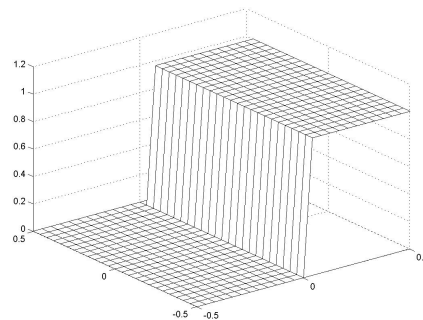


Figura 17. Solución obtenida con FIC en vista 3D (quinta iteración).

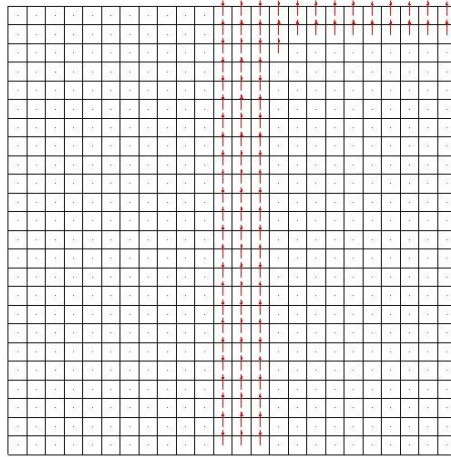


Figura 18. Malla de 625 elementos rectangulares y vectores de estabilización en la quinta iteración de FIC.

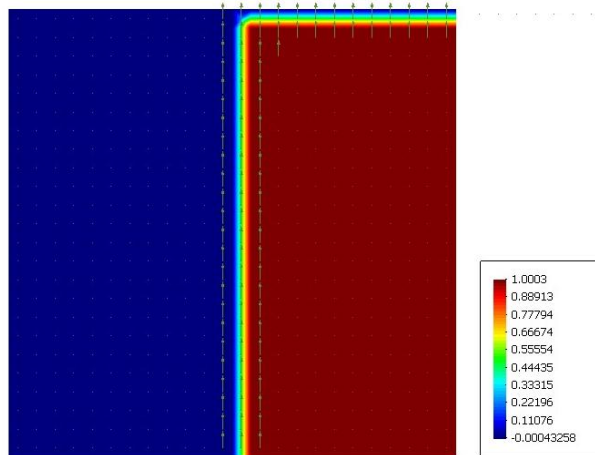


Figura 19. Solución aproximada y vectores de estabilización en la quinta iteración de FIC.

Ejemplo 32 Encontrar $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que

$$-\nabla \cdot (d\nabla\phi) + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = 0, \text{ en } \Omega,$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned}\phi &= 100 \text{ en } \Gamma_{D_1} \\ \phi &= 0 \text{ en } \Gamma_{D_2} \\ q_n &= 0 \text{ en } \Gamma_{N_1},\end{aligned}$$

donde $d = 10^{-10}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_{D_1} = \{1\} \times [0, 1]$, $\Gamma_q = [0, 1] \times \{1\}$ y $\Gamma_{D_2} = \Gamma_D/\Gamma_{D_1}$. Se considera una malla de 400 elementos rectangulares de cuatro nodos de tal manera que el número de Péclet es $Pe = 1,25 \times 10^7$. Se resuelve el problema utilizando FEM y la solución obtenida se muestra en las figuras 21 y 23 después de 5 iteraciones se obtiene la solución con FIC mostrada en las figuras 22 y 24 utilizando los vectores de estabilización en cada elemento como se muestra en las figuras 25 y 26.

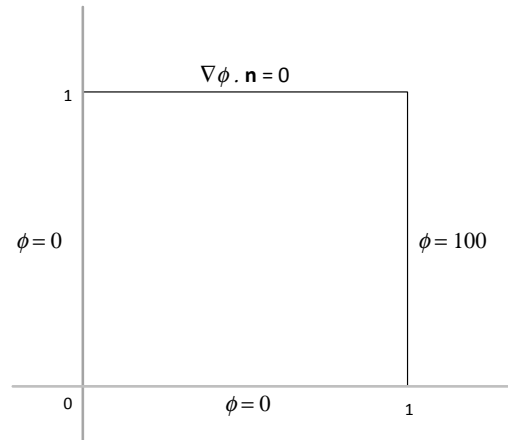


Figura 20. Dominio y condiciones de frontera del ejemplo 32.

3.2. Problema Bidimensional

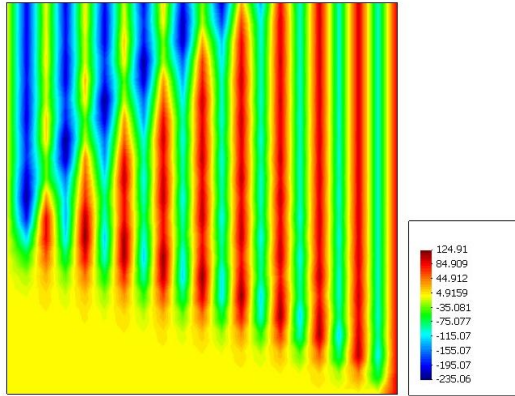


Figura 21. Solución obtenida con FEM (primera iteración)

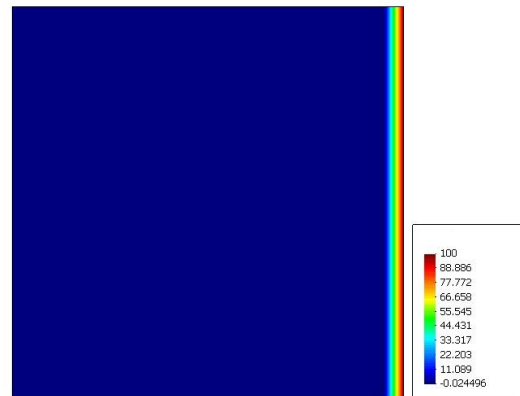


Figura 22. Solución obtenida con FIC (quinta iteración)

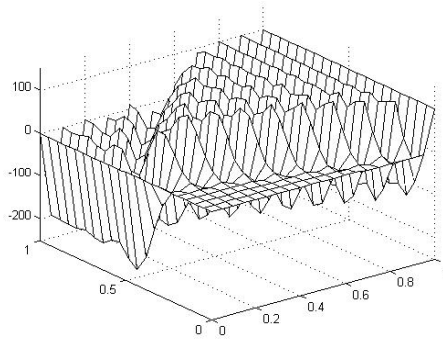


Figura 23. Solución obtenida con FEM en vista 3D (primera iteración).

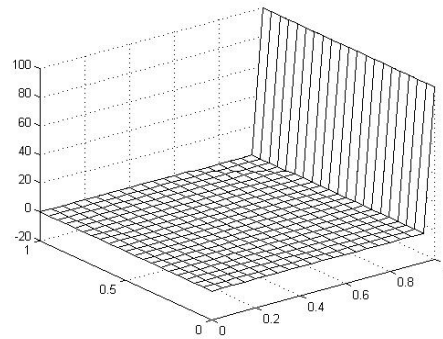


Figura 24. Solución obtenida con FIC en vista 3D (quinta iteración).

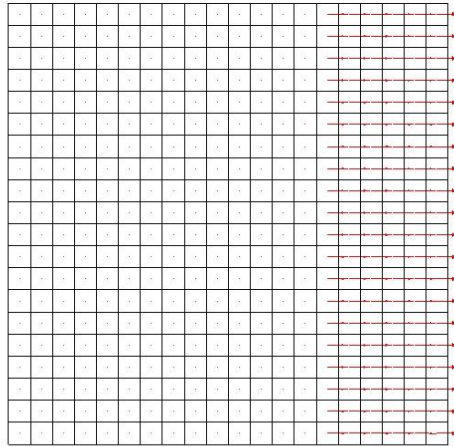


Figura 25. Malla de 400 elementos rectangulares y vectores de estabilización en la quinta iteración de FIC.

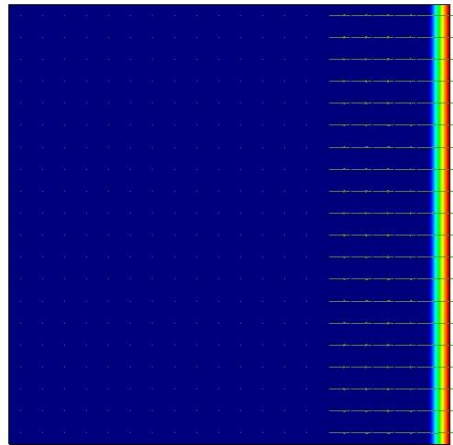


Figura 26. Solución aproximada y vectores de estabilización en la quinta iteración de FIC.

Ejemplo 33 Encontrar $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que

$$-\nabla \cdot (d\nabla\phi) + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = 0, \text{ en } \Omega,$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi &= 100 \text{ en } \Gamma_{D_1} \\ \phi &= 0 \text{ en } \Gamma_{D_2}, \end{aligned}$$

donde $d = 0,000001$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\Omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\Gamma_{D_1} = \{-\frac{1}{2}\} \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{\frac{1}{2}\}$ y $\Gamma_{D_2} = \partial\Omega/\Gamma_{D_1}$. Se considera una malla de 576 elementos rectangulares de cuatro nodos de tal manera que el número de Péclet es $Pe = 1736,1$. Se resuelve el problema utilizando FEM y la solución obtenida se muestra en las figuras 28 y 30 después de 5 iteraciones se obtiene la solución con FIC mostrada en las figuras 29 y 31 utilizando los vectores de estabilización en cada elemento como se muestra en las figuras 32 y 33.

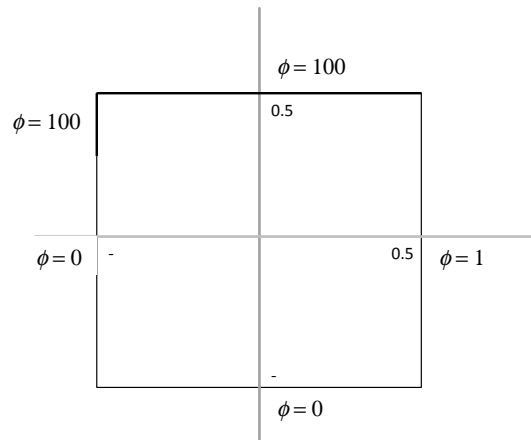


Figura 27. Dominio y condiciones de frontera del ejemplo 33

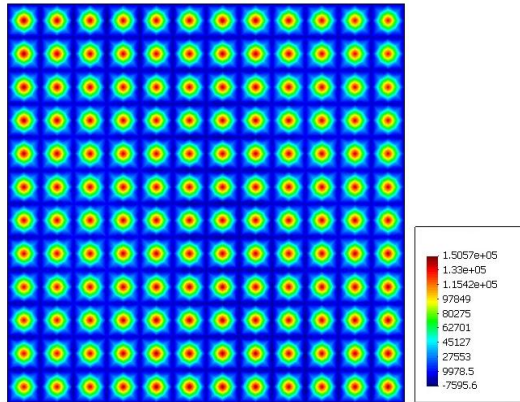


Figura 28. Solución obtenida con FEM (primera iteración)

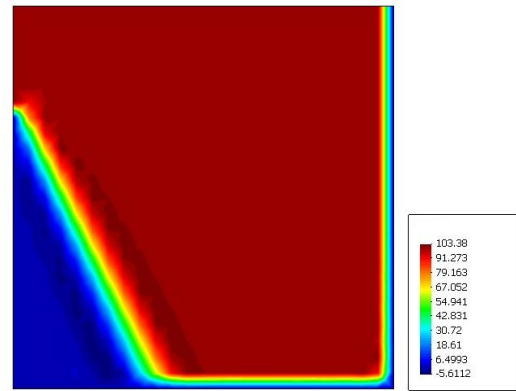


Figura 29. Solución obtenida con FIC (quinta iteración)

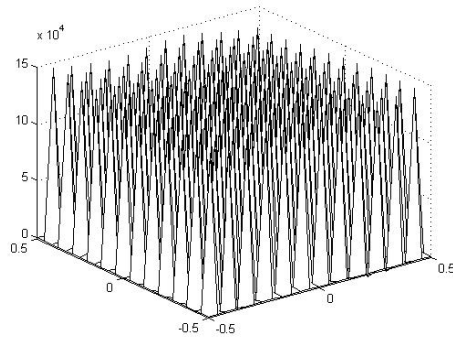


Figura 30. Solución obtenida con FEM en vista 3D (primera iteración).

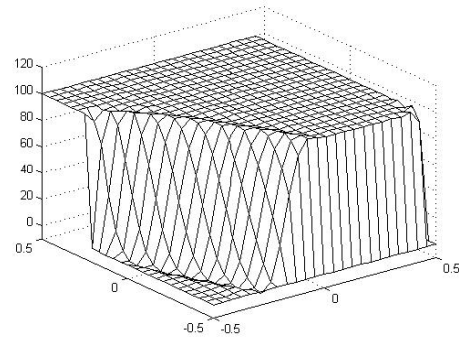


Figura 31. Solución obtenida con FIC en vista 3D (quinta iteración).

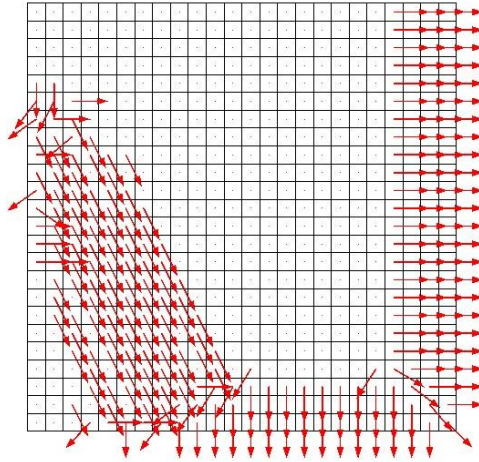


Figura 32. Malla de 576 elementos rectangulares y vectores de estabilización en la quinta iteración de FIC.

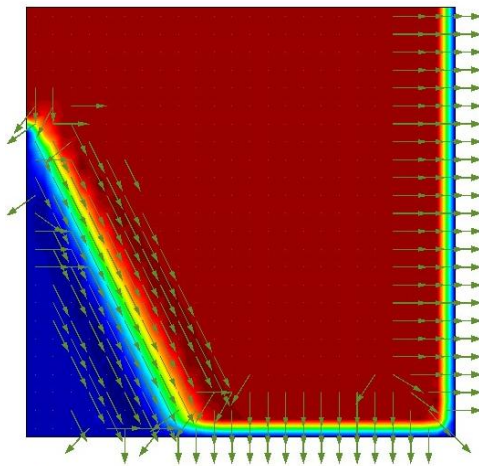


Figura 33. Solución aproximada y vectores de estabilización en la quinta iteración de FIC.

Apéndice A

Conclusiones y Trabajo Futuro

Observamos que el problema con valores en la frontera obtenido a partir del método FIC, no es un problema bien planteado en el sentido clásico. En este trabajo hemos presentado una formulación débil del problema en espacios de elemento finito. La formulación es congruente con el uso del FIC en la práctica. En este contexto, hemos demostrado existencia, unicidad y estabilidad de la solución. esto establece que el problema es bien planteado. Por otra parte, se propone una técnica iterativa de elección del parámetro de estabilización. Con esta técnica ha sido posible aproximar en mallas gruesas la solución del problema con convección dominante reflejado en los altos números de Péclet. La técnica es natural en el contexto de elementos finitos. La elección del parámetro en dimensión uno es óptima y caracteriza el valor crítico del parámetro de estabilización.

Este trabajo sugiere varios problemas a investigar. Es necesario mejorar el análisis del error del método FIC mediante la búsqueda de una mejor cota en la estimación del error. Explorar el análisis realizado en una dimensión para una mejor elección del parámetro de estabilización en dos dimensiones. Sería deseable una elección sin iterar. Un problema teórico relevante es demostrar la convergencia del método iterativo. De nuestro conocimiento no existen resultados de ésta índole en la literatura. Finalmente, extender lo realizado en este trabajo para el problema transitorio.

Apéndice B

Implantación Computacional del FIC

Los programas fueron implantados en Borland C++ Builder 6 y para realizar el pre y pro proceso se utilizó GID.

B.1. Problema Unidimensional

Sea la ecuación unidimensional de convección-difusión,

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + u \frac{d\phi}{dx} = Q, \text{ en } \Omega = (a, b), \quad (\text{B.1})$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} \text{ en } \Gamma_D \\ -k \frac{d\phi}{dx} &= \bar{q} \text{ en } \Gamma_N, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

donde $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ y Γ_D es no vacío.

Sea

$$r = \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q. \quad (\text{B.3})$$

La formulación de Cálculo de Incremento Finito es

$$r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0, \text{ en } \Omega, \quad (\text{B.4})$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} \text{ en } \Gamma_D \\ -k \frac{d\phi}{dx} + \frac{h}{2} r &= \bar{q} \text{ en } \Gamma_N. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

B.1.1. Formulación Débil del FIC

Para obtener la formulación débil, se considera el espacio de funciones prueba:

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0 \right\}. \quad (\text{B.6})$$

Se multiplica la ecuación (B.4) por una función prueba arbitraria $v \in V$ e integrando sobre el dominio, se obtiene

$$\int_a^b v \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q \right) \right) dx = 0.$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{dv}{dx} \right) \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) dx + \int_{\Omega} uv \frac{d\phi}{dx} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q \right) \frac{d(hv)}{dx} dx \\ & = v \left(k \frac{d\phi}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q \right) \right) \Big|_a^b + \int_a^b Qv dx. \end{aligned}$$

Como $v = 0$ sobre Γ_D y por la condición $-k \frac{d\phi}{dx} + \frac{h}{2} r = \bar{q}$ en Γ_N se tiene

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{dv}{dx} \right) \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) dx + \int_{\Omega} uv \frac{d\phi}{dx} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} + Q \right) \frac{d(hv)}{dx} dx \\ & = \int_a^b Qv dx + v\bar{q}|_{\Gamma_N}, \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{dv}{dx} \right) \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) dx + \int_{\Omega} uv \frac{d\phi}{dx} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} \right) \frac{d(hv)}{dx} dx \\ & = \int_a^b Qv dx + \frac{1}{2} \int_a^b Q \frac{d(hv)}{dx} dx + v\bar{q}|_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Se define la forma bilineal

$$\begin{aligned} a_h(\phi, v) &= \int_a^b \left(\frac{dv}{dx} \right) \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) dx + \int_{\Omega} uv \frac{d\phi}{dx} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - u \frac{d\phi}{dx} \right) \frac{d(hv)}{dx} dx, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

donde $v \in V$ y $\phi \in H^2(\Omega)$ y el funcional

$$l_h(v) = \int_a^b Qv dx + \frac{1}{2} \int_a^b Q \frac{d(hv)}{dx} dx + v\bar{q}|_{\Gamma_N}, \quad v \in V. \quad (\text{B.8})$$

Así, una formulación débil del problema (B.4)-(B.5) es:

Encontrar $\phi \in H^2(\Omega)$ tal que $\phi - \bar{\phi} \in V$ y

$$a_h(\phi, v) = l_h(v), \quad \forall v \in V, \quad (\text{B.9})$$

donde a_h y l_h están definidos por (B.7) y (B.8) respectivamente.

B.1.2. Método de Cálculo de Incrementos Finitos en Espacios de Dimensión Finita

Aproximación Lineal

Se considera una discretización finita $\tau_h = \{K_1, K_2, \dots, K_N\}$ del dominio $\Omega = (a, b)$. Se definen los elementos $K_i = (x_i, x_{i+1})$, con $i = 1, \dots, N$, donde

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b,$$

son los nodos y la longitud de cada elemento es $h_{K_i} = x_{i+1} - x_i$.

Se definen las funciones base por elemento como

$$\begin{aligned} N_1^{(i)}(x) &= \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \\ N_2^{(i)}(x) &= \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \end{aligned} \tag{B.10}$$

donde $x \in [x_i, x_{i+1}]$, con $i = 1, \dots, N$, graficamente,

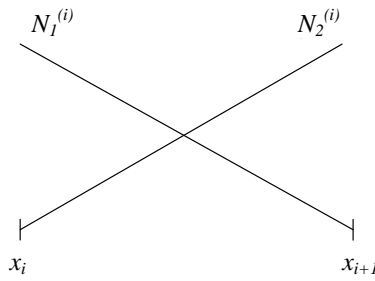


Figura 34. Funciones base por elemento.

y para cada nodo interior x_i estas funciones se combinan para obtener la función base global

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} N_2^{(i-1)}(x) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ N_1^{(i)}(x) & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases},$$

con $i = 2, \dots, N$, como se muestra en la siguiente figura.

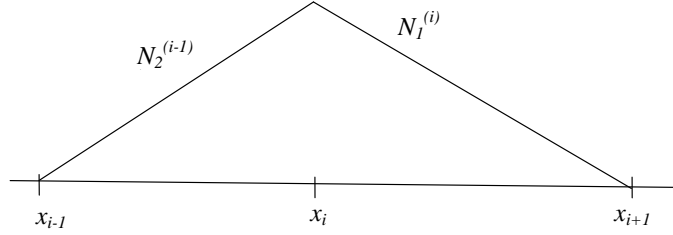


Figura 35. Funcion base global.

En el intervalo $[a, x_2]$ se define $\Psi_1(x) = N_1^{(1)}(x)$ y en $[x_N, b]$ la función $\Psi_{N+1}(x) = N_2^{(N)}(x)$. Con la convención de que $\Psi_i(x)$ es cero fuera del intervalo donde está definida se tiene que

$$V_h = \left\{ v(x) = \sum c_j \Psi_j(x) : v|_{\Gamma_D} = 0 \right\}.$$

Entonces se reescribe la forma bilineal (B.7) y el funcional (B.8) por

$$\begin{aligned} a_h(\phi_h, v_h) &= \int_a^b \left(\frac{dv_h}{dx} \right) \left(k \frac{d\phi_h}{dx} \right) dx + \int_{\Omega} uv_h \frac{d\phi_h}{dx} dx \quad (\text{B.11}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^b u \frac{d\phi_h}{dx} \frac{d(hv_h)}{dx} dx, \end{aligned}$$

$$l_h(v_h) = \int_a^b Qv_h dx + \frac{1}{2} \int_a^b Q \frac{d(hv_h)}{dx} dx + v\bar{q}|_{\Gamma_N}. \quad (\text{B.12})$$

Se tiene el problema:

Encontrar $\phi_h = \sum \phi_j \Psi_j(x)$ tal que $\phi_h - \bar{\phi} \in V_h$ y

$$a_h(\phi_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

donde a_h y l_h están definidos por (B.11) y (B.12) respectivamente.

La formulación Galerkin-MEF se obtiene tomando $v_h = N_i$, esto es, encontrar $\phi_h = \sum \phi_j \Psi_j(x)$ tal que $\phi_h - \bar{\phi} \in V_h$ y

$$a_h(\phi_h, N_i) = l_h(N_i), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

donde a_h y l_h están definidos por (B.11) y (B.12) respectivamente.

Una importante simplificación resulta al descomponer las integrales sobre cada elemento. en este caso sólo se consideran las interacciones de las funciones base (B.10) con la finalidad de definir una matriz de rigidez por elemento de tamaño 2×2 :

$$K_{\alpha, \beta}^e = a_h(N_\beta^{(j)}, N_\alpha^{(e)}).$$

Las derivadas de $N_1^{(e)}$ y $N_2^{(e)}$ son las constantes, $\mp \frac{1}{h_{K_e}}$, y además se tienen las integrales

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN_\beta^{(e)}}{dx} \frac{dN_\alpha^{(e)}}{dx} dx = \frac{(-1)^{\alpha+\beta}}{h_{K_e}},$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN_\beta^{(e)}}{dx} N_\alpha^{(i)} dx = \frac{1}{2} (-1)^\beta$$

y

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_\beta^{(e)} N_\alpha^{(e)} dx = \frac{1}{6} (1 + \delta_{\alpha, \beta}) h_{K_e}.$$

De esta forma, la matriz de rigidez por elemento es

$$(K_{\alpha, \beta}^e) = \frac{d}{h_{K_e}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{u}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{h^{(e)}}{2} \frac{u}{h_{K_e}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La combinación, a través de la adición de las entradas correspondientes, de las matrices de rigidez de dos elementos vecinos es llamado el proceso de ensamble de la matriz y nos lleva a la matriz de rigidez global. En este punto se deben considerar las condiciones de frontera.

B.2. Problema Bidimensional

Una característica de los métodos de elemento finito que los distingue de los métodos de diferencias finitas es que su derivación e implementación se enfoca sobre cálculos en un elemento individual. Un sistema coordenado local se establece en cada elemento y todas las contribuciones para el sistema completo de ecuaciones que se derivan de cada elemento son calculadas en las coordenadas locales; el ensamble de estas contribuciones en el sistema completo requiere información que se determina con el mapeo del sistema coordenado local al global para mantener una estructura de datos apropiada.

Se considerarán mallas triangulares y rectangulares con lados rectos; y parte de la definición de una triangulación regular es que cada lado es completamente compartido por dos triángulos vecinos.

B.2.1. Mapeo local para un triángulo

Se mapeará cada triángulo de la malla sobre un triángulo recto unitario por una transformación de coordenadas cartesianas globales $\mathbf{r} = (x, y)$ a coordenadas locales (ξ, η) . Se denotará con $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)$, $j = 1, 2, 3$ a los vértices del triángulo que serán mapeados a $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente en el sistema coordenado local. Es claro que el mapeo está dado por

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)\mathbf{r}_1 + \xi\mathbf{r}_2 + \eta\mathbf{r}_3.$$

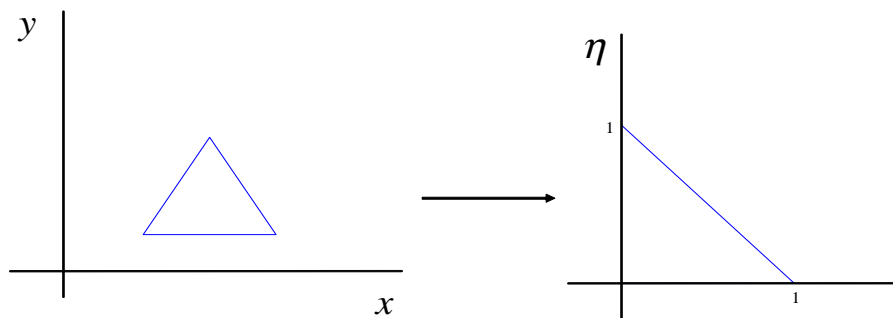


Figura 36. Mapeo a un elemento triangular recto unitario.

Se definen las funciones base por elemento

$$\begin{aligned}v_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, \\v_2(\xi, \eta) &= \xi\end{aligned}$$

y

$$v_3(\xi, \eta) = \eta.$$

De esta manera,

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^3 v_j(\xi, \eta) \mathbf{r}_j.$$

El jacobiano de la transformación es

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix},$$

el cual es constante sobre el triángulo y

$$\det \mathbf{J} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Observe que para cada elemento el área A_{123} es el área del triángulo $\Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \equiv \Delta_{123}$ y

$$A_{123} = \int_{\Omega^e} 1 d\Omega^e = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \det J d\xi d\eta = \det J \int_0^1 (1 - \eta) d\eta = \frac{1}{2} \det J.$$

De esta manera $\det \mathbf{J} = 2A_{123}$. El jacobiano es no singular. Además se tiene que

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \xi} \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} \end{pmatrix},$$

esto es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \xi} \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} \end{pmatrix},$$

dado que

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \left((y_3 - y_1) \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + (y_1 - y_2) \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \right)$$

y

$$\frac{\partial v_i}{\partial y} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \left((x_1 - x_3) \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + (x_2 - x_1) \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \right),$$

para $i = 1, 2, 3$, es decir

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} (y_2 - y_3), \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} (x_3 - x_2),$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} (y_3 - y_1), \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} (x_1 - x_3),$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} (y_1 - y_2), \quad \frac{\partial v_3}{\partial y} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} (x_2 - x_1).$$

De aquí es fácil ver que

$$(\det \mathbf{J})^2 |\nabla v_i|^2 = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \right)^2 + |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial \eta} \right)^2 + 2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \frac{\partial v_i}{\partial \xi} \frac{\partial v_i}{\partial \eta}.$$

B.2.2. Mapeo local para un cuadrilátero

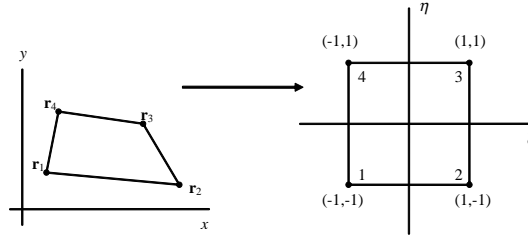


Figura 37. Mapeo a un cuadrilátero canónico.

Se mapeará cada cuadrilátero de la malla sobre un cuadrilátero canónico por una transformación de coordenadas cartesianas globales $\mathbf{r} = (x, y)$ a coordenadas locales (ξ, η) . Por conveniencia al usar la fórmula de cuadratura gaussiana este cuadrilátero se toma como $\{(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]\}$. Así, se tiene

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^4 v_j(\xi, \eta) \mathbf{r}_j,$$

donde

$$\begin{aligned} v_1(\xi, \eta) &:= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), & v_2(\xi, \eta) &:= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta), \\ v_3(\xi, \eta) &:= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta), & v_4(\xi, \eta) &:= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta). \end{aligned}$$

De esta manera

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^3 v_j(\xi, \eta) \mathbf{r}_j.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4} (1 - \eta), & \frac{\partial v_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{4} (1 - \eta), \\ \frac{\partial v_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{4} (1 + \eta), & \frac{\partial v_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4} (1 + \eta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1 - \xi), & \frac{\partial v_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1 + \xi), \\ \frac{\partial v_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1 + \xi), & \frac{\partial v_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1 - \xi).\end{aligned}$$

El jacobiano de la transformación es

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} & (B.13) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (x_3 - x_4)(1 + \eta) & (y_3 - y_4)(1 + \eta) \\ + (x_2 - x_1)(1 - \eta) & + (y_2 - y_1)(1 - \eta) \\ (x_3 - x_2)(1 + \xi) & (y_3 - y_2)(1 + \xi) \\ + (x_4 - x_1)(1 - \xi) & + (y_4 - y_1)(1 - \xi) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

el cual es variable a lo largo del elemento.

Si se considera una malla cuadrada, constante y uniforme de lado h . En cada elemento, la matriz jacobiana \mathbf{J} es constante con $\det \mathbf{J} = \frac{1}{4}h^2$. Además si

$$\phi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \sum_{j=1}^4 v_j(\xi, \eta) \phi_j$$

entonces

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{pmatrix},$$

con $\mathbf{J} = \frac{1}{2}h\mathbf{I}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} -\phi_1(1-\eta) + \phi_2(1-\eta) + \phi_3(1+\eta) - \phi_4(1+\eta) \\ -\phi_1(1-\xi) - \phi_2(1+\xi) + \phi_3(1+\xi) + \phi_4(1-\xi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} (\phi_3 - \phi_4)(1+\eta) + (\phi_2 - \phi_1)(1-\eta) \\ (\phi_3 - \phi_2)(1+\xi) + (\phi_4 - \phi_1)(1-\xi) \end{pmatrix},$$

además

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{pmatrix} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{h} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(\xi, \eta)}{\partial x} &= -\frac{1}{2h}(1-\eta), & \frac{\partial v_2(\xi, \eta)}{\partial x} &= \frac{1}{2h}(1-\eta), \\ \frac{\partial v_3(\xi, \eta)}{\partial x} &= \frac{1}{2h}(1+\eta), & \frac{\partial v_4(\xi, \eta)}{\partial x} &= -\frac{1}{2h}(1+\eta), \\ \frac{\partial v_1(\xi, \eta)}{\partial y} &= -\frac{1}{2h}(1-\xi), & \frac{\partial v_2(\xi, \eta)}{\partial y} &= -\frac{1}{2h}(1+\xi), \\ \frac{\partial v_3(\xi, \eta)}{\partial y} &= \frac{1}{2h}(1+\xi), & \frac{\partial v_4(\xi, \eta)}{\partial y} &= \frac{1}{2h}(1-\xi). \end{aligned}$$

B.2.3. Método de Cálculo de Incrementos Finitos sobre espacios de dimensión finita

Se considera una discretización finita $\tau_h = \{K_1, K_2, \dots, K_N\}$ del dominio Ω . Sea V_h el subespacio de dimensión finita definido como

$$V_h = \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_k(K) \text{ para todo } K \in \tau_h, v|_{\Gamma_D} = 0 \right\},$$

donde $P_k(K)$ denota al conjunto de polinomios de grado k sobre $K \in \tau_h$.

Supondremos que la matriz \mathbf{D} es igual a una función escalar $d(x) = d > 0$ que multiplica a la matriz identidad, $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}\nabla\phi)$ en la condición de frontera de Neumann se reemplaza por la derivada normal $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ y que $\bar{q} = 0$.

Suponga que \mathbf{h} es constante en cada elemento de τ_h de la forma

$$\mathbf{h}^{(e)} = \alpha^{(e)} h_{K_e} \mathbf{P},$$

tal que, para $v_h, \phi_h \in V_h$, se tienen la forma bilineal

$$\begin{aligned} a_h(\phi_h, v_h) &= \int_{\Omega} (\nabla v_h) \cdot (d\nabla\phi_h) dx + \int_{\Omega} v_h (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi_h) dx \quad (\text{B.14}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{K_e} (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi_h) (\mathbf{h}^{(e)} \cdot \nabla v_h) dx, \end{aligned}$$

y el funcional

$$l_h(v_h) = \int_{\Omega} Qv_h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q\nabla \cdot (v_h \mathbf{h}) dx, \quad v_h \in V_h. \quad (\text{B.15})$$

Se considera el siguiente problema:

Encontrar $\phi_h \in V_h$ tal que

$$a_h(\phi_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (\text{B.16})$$

La función ϕ_h se escribe como

$$\phi_h(x, y) = \sum_{i=1}^m v_i ((\xi(x, y), \eta(x, y))) \phi_i,$$

donde ϕ_i son los valores de la aproximación en los nodos y $v_i \in V_h$ son las funciones base globales donde $v_i(x_j, y_j) = \delta_{ji}$ son lineales en cada triángulo.

La formulación Galerkin-FEM se obtiene tomando $v_h = v_i$, esto es

Encontrar $\phi_h = \sum_{i=1}^m v_i \phi_i \in V_h$ tal que

$$a_h(\phi_h, v_i) = l_h(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

donde a_h y l_h están definidos por (2.19) y (2.20) respectivamente.

El primer paso para formar éstas ecuaciones es calcular la matriz de rigidez de 3×3 por elemento para cada triángulo definida por

$$K_{\alpha, \beta}^e = a_h(v_\beta, v_\alpha),$$

para $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Usando una malla triangular

La matriz de rigidez por elemento para cada triángulo esta dada por

$$(K_{\alpha, \beta}^e) = K_1 + K_2 + K_3,$$

donde

$$K_1 = \frac{d}{2 \det J} \begin{pmatrix} \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|^2 & (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) & (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) & \|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|^2 & (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) & (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) & \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2 \end{pmatrix},$$

y

$$K_2 = \frac{1}{6} u_1 \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} (1, 1, 1) + \frac{1}{6} u_2 \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} (1, 1, 1)$$

$$K_3 = \left(\frac{1}{2 \det J} \right) (K_3^1, K_3^2, K_3^3),$$

con

$$K_3^1 = \begin{pmatrix} (u_1 (y_2 - y_3) + u_2 (x_3 - x_2)) \left(h_1^{(e)} (y_2 - y_3) + h_2^{(e)} (x_3 - x_2) \right) \\ (u_1 (y_3 - y_1) + u_2 (x_1 - x_3)) \left(h_1^{(e)} (y_2 - y_3) + h_2^{(e)} (x_3 - x_2) \right) \\ (u_1 (y_1 - y_2) + u_2 (x_2 - x_1)) \left(h_1^{(e)} (y_2 - y_3) + h_2^{(e)} (x_3 - x_2) \right) \end{pmatrix},$$

$$K_3^2 = \begin{pmatrix} (u_1 (y_2 - y_3) + u_2 (x_3 - x_2)) \left(h_1^{(e)} (y_3 - y_1) + h_2^{(e)} (x_1 - x_3) \right) \\ (u_1 (y_3 - y_1) + u_2 (x_1 - x_3)) \left(h_1^{(e)} (y_3 - y_1) + h_2^{(e)} (x_1 - x_3) \right) \\ (u_1 (y_1 - y_2) + u_2 (x_2 - x_1)) \left(h_1^{(e)} (y_3 - y_1) + h_2^{(e)} (x_1 - x_3) \right) \end{pmatrix}$$

y

$$K_3^3 = \begin{pmatrix} (u_1 (y_2 - y_3) + u_2 (x_3 - x_2)) \left(h_1^{(e)} (y_1 - y_2) + h_2^{(e)} (x_2 - x_1) \right) \\ (u_1 (y_3 - y_1) + u_2 (x_1 - x_3)) \left(h_1^{(e)} (y_1 - y_2) + h_2^{(e)} (x_2 - x_1) \right) \\ (u_1 (y_1 - y_2) + u_2 (x_2 - x_1)) \left(h_1^{(e)} (y_1 - y_2) + h_2^{(e)} (x_2 - x_1) \right) \end{pmatrix}.$$

Usando una malla rectangular

La matriz de rigidez por elemento para cada rectangulo en donde la malla es cuadrada, constante y uniforme de lado h esta dada por

$$(K_{\alpha,\beta}^e) = K_1 + K_2 + K_3,$$

con

$$K_1 = \frac{d}{6} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \frac{1}{12}h \begin{pmatrix} -2u_1 - 2u_2 & 2u_1 - u_2 & u_1 + u_2 & -u_1 + 2u_2 \\ -2u_1 - u_2 & 2u_1 - 2u_2 & u_1 + 2u_2 & -u_1 + u_2 \\ -u_1 - u_2 & u_1 - 2u_2 & 2u_1 + 2u_2 & -2u_1 + u_2 \\ -u_1 - 2u_2 & u_1 - u_2 & 2u_1 + u_2 & -2u_1 + 2u_2 \end{pmatrix}$$

y

$$K_3 = (K_3^1, K_3^2, K_3^3, K_3^4),$$

donde

$$K_3^1 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4h_1u_1 + 3h_1u_2 + 3h_2u_1 + 4h_2u_2 \\ -4h_1u_1 - 3h_1u_2 + 3h_2u_1 + 2h_2u_2 \\ -2h_1u_1 - 3h_1u_2 - 3h_2u_1 - 2h_2u_2 \\ 2h_1u_1 + 3h_1u_2 - 3h_2u_1 - 4h_2u_2 \end{pmatrix},$$

$$K_3^2 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -4h_1u_1 + 3h_1u_2 - 3h_2u_1 + 2h_2u_2 \\ 4h_1u_1 - 3h_1u_2 - 3h_2u_1 + 4h_2u_2 \\ 2h_1u_1 - 3h_1u_2 + 3h_2u_1 - 4h_2u_2 \\ -2h_1u_1 + 3h_1u_2 + 3h_2u_1 - 2h_2u_2 \end{pmatrix},$$

$$K_3^3 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -2h_1u_1 - 3h_1u_2 - 3h_2u_1 - 2h_2u_2 \\ 2h_1u_1 + 3h_1u_2 - 3h_2u_1 - 4h_2u_2 \\ 4h_1u_1 + 3h_1u_2 + 3h_2u_1 + 4h_2u_2 \\ -4h_1u_1 - 3h_1u_2 + 3h_2u_1 + 2h_2u_2 \end{pmatrix}$$

y

$$K_3^4 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2h_1u_1 - 3h_1u_2 + 3h_2u_1 - 4h_2u_2 \\ -2h_1u_1 + 3h_1u_2 + 3h_2u_1 - 2h_2u_2 \\ -4h_1u_1 + 3h_1u_2 - 3h_2u_1 + 2h_2u_2 \\ 4h_1u_1 - 3h_1u_2 - 3h_2u_1 + 4h_2u_2 \end{pmatrix}.$$

B.2.4. Suavización de la derivada

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$ base de V_h . Se considera

$$\hat{\phi}_h = \sum_{i=1}^{k+1} v_i \hat{\phi}_i,$$

la solución obtenida con FEM.

De la definición de derivada débil se tiene que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{\phi}_h}{\partial x_{\alpha}} v_i dx = - \int_{\Omega} \hat{\phi}_h \frac{\partial v_i}{\partial x_{\alpha}} dx$$

$i = 1, 2, \dots, k + 1$.

Si se expresa $\frac{\partial \hat{\phi}_h}{\partial x_{\alpha}}$ como una combinación lineal de los elementos de la base $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$ se tiene

$$\frac{\partial \hat{\phi}_h}{\partial x_{\alpha}} = \sum_{j=1}^{k+1} v_j \hat{\phi}_{\alpha j}$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{\phi}_h}{\partial x_{\alpha}} v_i dx &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{k+1} v_j \hat{\phi}_{\alpha j} \right) v_i dx \\
 &= \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega} v_i v_j \hat{\phi}_{\alpha j} dx \\
 &= - \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{k+1} v_j \hat{\phi}_j \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_{\alpha}} dx \\
 &= - \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_{\alpha}} v_j \hat{\phi}_j dx,
 \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, k+1$.

En forma matricial es

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \int_{\Omega} v_1 v_1 dx & \cdots & \int_{\Omega} v_1 v_{k+1} dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega} v_{k+1} v_1 dx & \cdots & \int_{\Omega} v_{k+1} v_{k+1} dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{\alpha 1} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{\alpha(k+1)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} - \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x_{\alpha}} v_j \hat{\phi}_j dx \\ \vdots \\ - \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial x_{\alpha}} v_j \hat{\phi}_j dx \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

donde $\hat{\phi}_{\alpha 1}, \dots, \hat{\phi}_{\alpha(k+1)}$ son los coeficientes a determinar, con lo que se tendría la derivada de $\hat{\phi}_h$ como una combinación lineal de la base.

Suavización con malla triangular

Si se considera una malla triangular, entonces el sistema matricial por elemento a resolver es

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \int_{K_e} v_1 v_1 dx & \int_{K_e} v_1 v_2 dx & \int_{K_e} v_1 v_3 dx \\ \int_{K_e} v_2 v_1 dx & \int_{K_e} v_2 v_2 dx & \int_{K_e} v_2 v_3 dx \\ \int_{K_e} v_3 v_1 dx & \int_{K_e} v_3 v_2 dx & \int_{K_e} v_3 v_3 dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{\alpha 1} \\ \hat{\phi}_{\alpha 2} \\ \hat{\phi}_{\alpha 3} \end{pmatrix} \\
 = & - \begin{pmatrix} \int_{K_e} \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} v_1 \hat{\phi}_1 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} v_2 \hat{\phi}_2 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} v_3 \hat{\phi}_3 dx \\ \int_{K_e} \frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} v_1 \hat{\phi}_1 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} v_2 \hat{\phi}_2 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} v_3 \hat{\phi}_3 dx \\ \int_{K_e} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} v_1 \hat{\phi}_1 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} v_2 \hat{\phi}_2 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} v_3 \hat{\phi}_3 dx \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

esto es, con respecto a cada variable se tienen los sistemas

$$(\det J) \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{x1} \\ \hat{\phi}_{x2} \\ \hat{\phi}_{x3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} (y_2 - y_3) (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_3) \\ (y_3 - y_1) (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_3) \\ (y_1 - y_2) (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_3) \end{pmatrix}$$

y

$$(\det J) \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{y1} \\ \hat{\phi}_{y2} \\ \hat{\phi}_{y3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} (x_2 - x_3) (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_3) \\ (x_3 - x_1) (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_3) \\ (x_1 - x_2) (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_3) \end{pmatrix}.$$

Suavizado con malla cuadrangular

Si se considera una malla cuadrada, constante y uniforme de lado h , por elemento se tiene el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} \int_{K_e} v_1 v_1 dx & \int_{K_e} v_1 v_2 dx & \int_{K_e} v_1 v_3 dx & \int_{K_e} v_1 v_4 dx \\ \int_{K_e} v_2 v_1 dx & \int_{K_e} v_2 v_2 dx & \int_{K_e} v_2 v_3 dx & \int_{K_e} v_2 v_4 dx \\ \int_{K_e} v_3 v_1 dx & \int_{K_e} v_3 v_2 dx & \int_{K_e} v_3 v_3 dx & \int_{K_e} v_3 v_4 dx \\ \int_{K_e} v_4 v_1 dx & \int_{K_e} v_4 v_2 dx & \int_{K_e} v_4 v_3 dx & \int_{K_e} v_4 v_4 dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{\alpha 1} \\ \hat{\phi}_{\alpha 2} \\ \hat{\phi}_{\alpha 3} \\ \hat{\phi}_{\alpha 4} \end{pmatrix} \\
 = - \begin{pmatrix} \int_{K_e} \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} v_1 \hat{\phi}_1 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} v_2 \hat{\phi}_2 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} v_3 \hat{\phi}_3 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} v_4 \hat{\phi}_4 dx \\ \int_{K_e} \frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} v_1 \hat{\phi}_1 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} v_2 \hat{\phi}_2 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} v_3 \hat{\phi}_3 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} v_4 \hat{\phi}_4 dx \\ \int_{K_e} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} v_1 \hat{\phi}_1 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} v_2 \hat{\phi}_2 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} v_3 \hat{\phi}_3 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} v_4 \hat{\phi}_4 dx \\ \int_{K_e} \frac{\partial v_4}{\partial x_\alpha} v_1 \hat{\phi}_1 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_4}{\partial x_\alpha} v_2 \hat{\phi}_2 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_4}{\partial x_\alpha} v_3 \hat{\phi}_3 dx + \int_{K_e} \frac{\partial v_4}{\partial x_\alpha} v_4 \hat{\phi}_4 dx \end{pmatrix}$$

esto es, con respecto a x

$$h^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{x1} \\ \hat{\phi}_{x2} \\ \hat{\phi}_{x3} \\ \hat{\phi}_{x4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2\hat{\phi}_1 - 2\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_3 - \hat{\phi}_4 \\ 2\hat{\phi}_1 + 2\hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_3 + \hat{\phi}_4 \\ \hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 + 2\hat{\phi}_3 + 2\hat{\phi}_4 \\ -\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2 - 2\hat{\phi}_3 - 2\hat{\phi}_4 \end{pmatrix}$$

y con respecto a y

$$h^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{y1} \\ \hat{\phi}_{y2} \\ \hat{\phi}_{y3} \\ \hat{\phi}_{y4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_3 - 2\hat{\phi}_4 \\ -\hat{\phi}_1 - 2\hat{\phi}_2 - 2\hat{\phi}_3 - \hat{\phi}_4 \\ \hat{\phi}_1 + 2\hat{\phi}_2 + 2\hat{\phi}_3 + \hat{\phi}_4 \\ 2\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_3 + 2\hat{\phi}_4 \end{pmatrix}.$$

Bibliografía

- [Adams] R. A. Adams, J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Elsevier (2003).
- [Ciarlet] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, SIAM (2002).
- [Evans] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (1997).
- [Farhat] C. Farhat, I. Kalashnikova, R. Tezaur, *A Higher-Order Discontinuous Enrichment Method for the Solution of High Péclet Advection-Diffusion Problems on Unstructured Meshes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, (2009).
- [Gilbarg] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlang (1977).
- [Knaber] P. Knaber, L. Angermann, *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, Springer-Verlang (2003).
- [Krizek] M. Krizek, Pekka Neittaanmaki, *Mathematical and Numerical Modelling in Electrical Engineering*, Kluwer Academic Publishers (1996).
- [Moreles] M. A. Moreles, S. Botello, M. Castillo: *Weak derivatives and new residuals for computing the stabilization parameter in the FIC method*; WSEAS Transactions on Mathematics; Issue 4, Vol. 4, (2005).
- [Morton] K. W. Morton, *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*, Chapman and Hall, (1996).
- [Oñate 1] E. Oñate, J. García, S. Idelsohn, *Computation of the Stabilization Parameter for the Finite Element Solution of Advective-Diffusive*

Problems, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 25, 1385-1407 (1997).

[Oñate 2] E. Oñate, *Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective-difusive transport and fluid flow problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol. 151, (1998).

[Oñate 3] E. Oñate, *Possibilities of finite calculus in computational mechanics*, Int. J. Num. Meth. in Engng; Vol. 60, pp. 255-281, (2004).

[Turner] D. Z. Turner, K. B. Nakshatrala, K. D. Hjelmstad, *A stabilized formulation for the advection-diffusion equation using the Generalized Finite Element Method*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, (2009).