Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

CIMAT

Vértices de la función Beta y órbitas periódicas para flujos magnéticos

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Carlos Osvaldo Osuna Castro

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Gonzalo Contreras B.

12 de Noviembre de 2004 Guanajuato, Gto. México

Agradecimientos.

A mis padres: Juan y Bertha, así como a mis hermanos: Juan, Rocio, Jorge, Irma y Martha. A Nadia, les agradezco por todo el apoyo y amor con que han llenado mi vida.

Agradezco al director de tesis Dr. Gonzalo Contreras el haberme sugerido este trabajo de investigación. Deseo agradecer también a mis sinodales: Dr. Daniel Massart, Dr. Renato Iturriaga, Dr. Xavier Gómez-mont y Dr. Hector Sánchez-Morgado, por todas sus observaciones que fueron muy útiles para mejorar el trabajo de tesis.

Agradezco al **CIMAT** como institución, a los investigadores que contribuyeron a mi formación, al personal del centro por su invaluable ayuda, así como a todos mis amigos y compañeros por hacer de éste un lugar más agradable.

Agradezco al **CONACYT** por la beca para estudio de doctorado que me otorgó.

Índice General

Introducción.

En este trabajo de tesis M denotará una variedad conexa y cerrada. La función $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ será un Lagrangiano periódico (o $L : TM \to \mathbb{R}$ denotará un Lagrangiano autónomo) que satisface las condiciones de convexidad y superlinealidad; además, en el caso periódico pediremos también que cumpla con la hipótesis de completez.

Asociado con el Lagrangiano L tenemos un flujo $\varphi_t : TM \times \mathbb{S}^1 \to TM \times \mathbb{S}^1$ llamado el flujo de Euler-Lagrange. Entre los muchos aspectos interesantes de la dinámica del flujo de Euler-Lagrange, destacan aquellos relacionados con órbitas y medidas invariantes que satisfacen propiedades variacionales globales y no sólo de caracter local. Así los conjuntos invariantes por este flujo son principalmente construidos mediante el uso sistemático de métodos variacionales. Esta teoría fue motivada en sus orígenes por problemas en mecánica, en particular, el problema de estabilidad para sistemas dinámicos. En el caso de sistemas de dos grados de libertad, la teoría de estabilidad está basada sobre la construcción de toros invariantes bidimensionales (teoría KAM). El entendimiento de estos fenómenos fue posible mediante el estudio de sistemas dinámicos discretos, es decir de los iterados de mapas que preservan área, llamados mapas twist monótonos (Mather [24]). Al mismo tiempo, y de forma independiente, Aubry en [2] estudió modelos simples para el movimiento unidimensional del electrón en un cristal. Las configuraciones de energía mínima que encontró Aubry corresponden a las órbitas sobre conjuntos invariantes para mapas twist monótonos encontrados por Mather.

Aubry y Mather encontraron una interesante familia de conjuntos minimales para mapas twist exactos del cilindro, pero esta teoría está restringida estrictamente a mapas sobre espacios 1 o 2 dimensionales, ambos sistemas corresponden a sistemas Hamiltonianos de dos grados de libertad; sin embargo, Mather en [22] fue capaz de generalizar esta teoría en el contexto de Lagrangianos Convexos y superlineales.

Él trabajó algunos métodos variacionales para encontrar medidas invariantes por el flujo φ_t con una posición homológica dada. Además, Moser en ([25]) probó que cualquier mapa twist exacto sobre el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ puede ser considerado como el mapa tiempo uno $\varphi_1 : T\mathbb{S}^1 \to T\mathbb{S}^1$ del flujo $\varphi_t : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ generado por un Lagrangiano periódico $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces Mather usando este resultado mostró cómo recuperar los conjuntos minimales de Aubry-Mather, así como también sus propiedades principales como un caso especial de su teoría general. En dicha generalización Mather definió dos funciones importantes en la teoría de sistemas Lagrangianos, que en cierto sentido codifican información sobre la dinámica del conjunto de medidas invariantes con una homología dada, éstas son conocidas como la *función Beta y la función Alfa*, y su estudio será parte central de este trabajo de tesis. Para motivar algunos de nuestros resultados hagamos primero algunas consideraciones.

Lagrangianos Convexos y Superlineales.

Sea M una variedad cerrada, conexa y TM su haz tangente. Un *Lagrangiano Periódico* L sobre M es una función C^∞, $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es periódica en la variable tiempo t. Diremos que el Lagrangiano es convexo y superlineal si el Hessiano calculado en coordenadas lineales sobre la fibra T_xM es positivo definido uniformemente $\forall\ (x, v, t) \in TM \times \mathbb{S}^1$, y la superlinealidad significa que para alguna métrica Riemanniana se tiene

$$\lim_{|v|\to\infty} \frac{L(x, v, t)}{|v|} = \infty,$$

uniformemente sobre x y t.

Recordemos que, asociadas al Lagrangiano, tenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange, la cuales están dadas en coordenadas locales por las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t), t)\right) = 0.$$

Estas ecuaciones generan un flujo, llamado el flujo de Euler-Lagrange (E-L), que supondremos completo i.e., $\varphi_t : TM \times \mathbb{S}^1 \to TM \times \mathbb{S}^1$ definido de la siguiente manera

$$\varphi_t(x_0, v_0, t_0) := (x(t + t_0), \dot{x}(t + t_0), (t + t_0) \bmod \mathbb{Z}),$$

donde $x : \mathbb{R} \to M$ es la solución de la ecuación de Euler-Lagrange que satisface $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$.

De manera análoga llamamos *Lagrangiano autónomo* a una función suave $L : TM \to \mathbb{R}$ que satisface las condiciones de convexidad y superlinealidad. Definimos la función *Energía* $E : TM \to \mathbb{R}$ como

$$E(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \cdot v - L.$$

Dado que el Lagrangiano es autónomo esta función es una primera integral del flujo de Euler-Lagrange, así el valor de la función energía $E(x, v)$ es constante a lo largo de las órbitas del flujo. Además la condición de superlinealidad implica que los conjuntos de nivel de la función energía tienen velocidad acotada y, por lo tanto, éstos son compactos. Esto a su vez, implica que el flujo asociado es completo.

Recordemos ahora los principales conceptos introducidos por Mather en [22]. Sea $\mathcal{M}(L)$ el conjunto de medidas de probabilidad μ sobre la σ -álgebra de Borel de $TM \times \mathbb{S}^1$ las cuales son invariantes por el flujo de L y que tienen soporte compacto. Sea $H_1(M, \mathbb{R})$ el primer grupo real de homología de M. Dada una 1-forma cerrada ω sobre M y $\rho \in H_1(M, \mathbb{R})$, denotamos por $\langle[\omega], \rho\rangle$ la integral de ω sobre cualquier curva cerrada en la clase de homología ρ. Si $\mu \in \mathcal{M}(L)$ definimos su homología como la única $\rho(\mu) \in H_1(M, \mathbb{R})$ tal que

$$\langle[\omega], \rho(\mu)\rangle = \int_{TM\times\mathbb{S}^1} \omega d\mu,$$

para cualquier 1-forma cerrada ω sobre M, siendo $[\omega]$ su clase de cohomología. La integral de la derecha es con respecto a μ considerando a ω como una función sobre $TM \times \mathbb{S}^1$.

Dada $\mu \in \mathcal{M}(L)$ definimos su acción por:

$$A_L(\mu) := \int_{TM\times\mathbb{S}^1} L d\mu.$$

Finalmente definimos la *función Beta* $\beta : H_1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como

$$\beta(h) := \inf\{\ A_L(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}(L),\ \rho(\mu) = h\ \}.$$

La función Beta es *convexa* y *superlineal* y además puede probarse que el ínfimo es un *mínimo* (ver [22]) y las medidas donde el mínimo se alcanza se llaman *medidas*

minimizantes, es decir, una medida $\mu \in \mathcal{M}(L)$ es minimizante sí y solo sí

$$\beta(\rho(\mu)) = A_L(\mu).$$

Dado que la función β es convexa y superlineal podemos considerar su *dual convexa* $\alpha : H^1(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la cual está definida como

$$\alpha([\omega]) = \max\{\ \langle [\omega], h\rangle - \beta(h) \mid h \in H_1(M,\mathbb{R})\}.$$

Donde ω es cualquier 1-forma cerrada cuya clase de cohomología es $[\omega]$. La función alfa también es convexa y superlineal.

Consideremos una función cercanamente relacionada a la función Beta. En efecto, recordemos que dada una variedad compacta dotada con una métrica Riemanniana (M,g), definimos la función llamada *Norma Estable* sobre el primer grupo de homología $H_1(M,\mathbb{R})$ de la siguiente manera

$$|h|_s := \inf\{\sum |r_i \mid l(\delta_i)\}, \quad \forall h \in H_1(M,\mathbb{R}),$$

donde δ_i son simplejos, $r_i \in \mathbb{R}$, $\sum r_i\delta_i$ denota un ciclo representando h y $l(\delta_i)$ es el elemento de longitud inducido por la métrica g. Esta función define en efecto una norma sobre $H_1(M,\mathbb{R})$. Además de su interés dinámico la función norma estable proporciona importantes conexiones entre geometría y análisis. La relación entre la función Beta y la norma estable está dada por la siguiente observación.

Consideremos el caso particular que L sea un Lagrangiano métrico i.e. El Lagrangiano definido por

$$L(x,v) = \frac{1}{2} \parallel v \parallel_x^2 .$$

En este caso se cumple la siguiente relación entre la función Beta y la norma estable

$$\frac{1}{2}|h|_s^2 = \beta(h),$$

para toda $h \in H_1(M,\mathbb{R})$.

Es interesante mencionar que la norma estable ha recibido gran atención en años recientes, pues como es de esperarse codifica cierta información de caracter geométrico y dinámico para el flujo geodésico. Además ella da una interpretación geométrica a las posibles preguntas planteadas para la función Beta.

Vertices de la función Beta de Mather.

Dado que la función β es una función convexa y superlineal sobre $H_1(M,\mathbb{R})$ con valores reales podemos considerar su epigrafo, i.e., el conjunto definido de la siguiente manera

$$\{(h,r) \mid h \in H_1(M,\mathbb{R}),\ r \in \mathbb{R},\ \beta(h) \leq r\}.$$

Recordemos que una *función soporte afín* del epigrafo de la función β en el punto $(\rho,\beta(\rho))$ es una función afín $\psi : H_1(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ con $\psi := \langle [\lambda], h\rangle + c$ donde λ es una 1-forma cerrada y c una constante, tal que

$$\beta(\rho) = \psi(\rho) \ \text{ y } \ \beta(h) \geq \psi(h) \ \text{ para todo } \ h \in H_1(M,\mathbb{R}).$$

Decimos que la función soporte afín ψ está representada por la 1-forma cerrada λ.

Definición: Diremos que una homología $\rho \in H_1(M,\mathbb{R})$ es un **vértice** de la función β si existe un conjunto abierto $U \subset H^1(M,\mathbb{R})$ de 1-formas cerradas representando funciones soportes afínes del epigrafo de la función β en el punto $(\rho,\beta(\rho))$.

Muchas propiedades interesantes del flujo de Euler-Lagrange pueden ser deducidas del comportamiento de la función Beta. Por ejemplo, en el caso de que una clase de homología h es un punto extremal de la función Beta i.e. si existen $h_1, h_2 \in H_1(M,\mathbb{R})$, tales que $h = th_1 + (1-t)h_2$ para algún $t \in (0,1)$ se cumple que

$$\beta(th_1 + (1-t)h_2) < t\beta(h_1) + (1-t)\beta(h_2),$$

entonces, puede asegurarse la existencia de medidas invariantes ergódicas para el flujo de Euler-Lagrange con homología h. Es decir, que algunas propiedades de la convexidad de la función Beta se traducen en propiedades dinámicas del flujo de Euler-Lagrange.

Así, es natural preguntarse sobre las propiedades que pueden ocurrir cuando en una homología dada aparece un vértice de la función Beta.

En ese sentido, como parte de nuestro trabajo de tesis en el capítulo 2, obtenemos algunos resultados interesantes relacionando la dimensión de Hausdorff de las medidas invariantes μ con homología h y la estructura algebraica de dicha homología h en un vértice, siendo más precisos probamos el siguiente:

Teorema A. *Sea L un Lagrangiano periódico sobre M y $\rho \in H_1(M,\mathbb{R})$ un vértice de la función Beta, si ρ no es racional entonces $dim_H(\mu) \geq 3$ para toda medida μ con homología ρ.*

Donde $\dim_H(\mu)$ denota la *dimensión de Hausdorff de la medida* μ (para la definición y algunas propiedades ver sección 1.3). El Teorema A puede reescribirse diciendo que, si la homología ρ es un vértice de β y si existe una medida μ con homología ρ tal que $\dim_H(\mu) < 3$, entonces $\rho \in H_1(M,\mathbb{Q})$. Ahora bien como tenemos que $\dim_H(\mu) \leq \dim_H(\mathrm{supp}(\mu))$, el Teorema A implica

Corolario A. *Sea L un Lagrangiano periódico sobre M y $\rho \in H_1(M,\mathbb{R})$ un vértice de la función β. Si $\mathcal{M}_\rho(L)$ contiene una medida μ tal que $dim_H(supp(\mu)) < 3$ entonces $\rho \in H_1(M,\mathbb{Q})$ es decir, es racional.*

Donde $\dim_H(X)$ denota la *dimensión de Hausdorff de un conjunto* X, un resultado análogo fue anunciado en [12] y nunca publicado. Cabe señalar que en el caso de Lagrangianos autónomos, no existen vértices de la función Beta, pues ésta, es siempre diferenciable en la dirección radial ver [13] para una prueba de este hecho. Sin embargo, bajo ciertas condiciones nuestro resultado da información sobre la estrucura de la función Beta en el caso autónomo.

Diferenciabilidad de la función Beta.

Por otro lado, también es de interés el problema de decidir la diferenciabilidad de la función Beta en una clase de homología dada. El problema de diferenciabilidad de la función Beta, fue primeramente estudiado por Aubry en [1] dentro del contexto de mapas twists, su estudio lo realizó en el caso unidimensional, y sus resultados los formuló para la norma estable, sin embargo los resultados obtenidos por Aubry, no fueron plenamente justificados. La proposición de Aubry fue la siguiente:

La norma estable es diferenciable en números de rotación irracionales $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y genéricamente no diferenciable en números de rotación racionales $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Una prueba rigurosa de los resultados de Aubry fue dada por Mather en [23], sin embargo Bangert en [3] da una prueba más geométrica de este hecho. Es interesante observar que nuestros resultados implican resultados respecto a la diferenciabilidad de la función Beta, en particular recuperamos el resultado de diferenciabilidad de Mather enunciado anteriormente, es decir, probamos

Corolario B. *Sea L un Lagrangiano periódico o autónomo sobre $\mathbb{S}^1$ entonces, la función β es diferenciable en cualquier $\rho \in H_1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ que es irracional.*

Observemos que cualquier resultado acerca de la diferenciabilidad de la función Beta implica un resultado acerca de la diferenciabilidad de la norma estable.

Órbitas periódicas para flujos magnéticos débilmente exactos.

En otro orden de ideas, en el capítulo 3 estudiamos la existencia de órbitas periódicas para flujos magnéticos débilmente exactos. A continuación introducimos el marco teórico en el cual trabajaremos, y establecemos nuestros principales resultados. Dada (M,g) una variedad Riemanniana, denotamos por ω_0 la forma simpléctica sobre TM dada por la imagen de la forma simpléctica canónica de T^*M definida por la métrica Riemanniana. Tomemos ahora una 2-forma cerrada Ω sobre M y consideramos la nueva forma simpléctica ω, definida como

$$\omega := \omega_0 + \pi^*\Omega,$$

donde $\pi : TM \to M$ es la proyección canónica. Esta forma simpléctica se llama una *estructura simpléctica torcida*. Sea $F : TM \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x,v) = \frac{1}{2}g_x(v,v).$$

El *Flujo magnético* de una pareja (g,Ω) es el flujo Hamiltoniano de F con respecto a ω.

Diremos que un flujo magnético es *Débilmente exacto* si la 2-forma cerrada Ω sobre M satisface que $\Omega|_{\pi_2(M)} = 0$. Ahora, no es difícil probar que un flujo magnético es débilmente exacto sí y sólo sí el levantamiento de Ω a la cubierta universal $\widetilde{M}$ de M es una forma exacta.

Observemos que si la 2-forma $\widetilde{\Omega}$ es una forma exacta i.e. existe una 1-forma suave θ tal que $\widetilde{\Omega} = d\theta$. Podemos consider el Lagrangiano sobre $\widetilde{M}$ dado por

$$L(x,v) = \frac{1}{2}g_x(v,v) + \theta_x(v).$$

en tal caso tendremos que las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange de L coinciden con los levantamientos a $\widetilde{M}$ de las órbitas del flujo magnético de (g,Ω).

Notemos que como el flujo magnético es completo entonces el flujo de Euler-Lagrange φ_t es un flujo completo. La ventaja de expresar el flujo magnético como un flujo Lagrangiano es que esto nos permitirá usar técnicas variacionales para derivar resultados para tales flujos. Los flujos magnéticos, al igual que los flujos geodésicos, tienen la propiedad de dejar invariantes los niveles de energía (en este caso los conjuntos de nivel de F). Podemos definir un valor crítico $c(L)$ de los niveles de energía en el cual existe un cambio decisivo del comportamiento del flujo, éste está dado por

$$c(L) := \inf\{\, k \in \mathbb{R} \mid S_{L+k}(\gamma) \geq 0 \,\},$$

donde γ es cualquier curva cerrada, absolutamente continua definida sobre cualquier intervalo cerrado [a,b]. Es bien conocido que

$$c(L) \geq e_0 := \min\{\, k \in \mathbb{R} \mid \pi(E^{-1}(k)) = \widetilde{M}\}.$$

En el caso del Lagrangiano asociado al flujo magnético tenemos $e_0 = 0$.

Consideremos un flujo magnético débilmente exacto asociado al par (g, Ω), y el Lagrangiano asociado de la forma

$$L(x, v) = \frac{1}{2}|v|_x^2 + \theta_x(v).$$

Las técnicas usadas para probar nuestros resultados son métodos variacionales para el *funcional de acción*, sin embargo existe un problema con tal funcional y es que este puede dejar de satisfacer la *condición de Palais-Smale*. Sin embargo es posible probar que el funcional acción posee un *paso de montaña*, (nos restringiremos a niveles de energía bajos) en forma más precisa probaremos

Teorema B. *Dado $k > e_0 = 0$. Existe $c > 0$ tal que si $\Gamma : [0,1] \to \Lambda_0$ es una trayectoria que une una curva constante $\Gamma(0) = x_0 : [0,T] \to x_0 \subset M$ con una curva cerrada $\Gamma(1)$ con (L+k)-acción negativa entonces*

$$\sup_{s\in[0,1]} S_{L+k}(\Gamma(s)) > c > 0,$$

donde Λ_0 denota el conjunto de curvas cerradas sobre M con homotopía trivial.

Ahora una adaptación de un argumento de Struwe de la geometría del paso de montaña nos dará sucesiones convergentes de Palais-Smale para casi todos los

niveles de energía (ver [28], [27] y [17]). Así la teoría estandard de puntos críticos nos dará la existencia de órbitas periódicas contraibles no triviales sobre cualquier nivel de energía donde se satisface la condición de Palais-Smale. En forma más precisa probaremos

Teorema C. *Un flujo magnético débilmente exacto asociado a una métrica a Riemanniana g y una 2-forma cerrada Ω sobre M, puede levantarse a un Lagrangiano, sobre $\widetilde{M}$. Consideramos el Lagrangiano asociado*

$$L(x, v) = \frac{1}{2}|v|_x^2 + \theta_x(v),$$

entonces existe un subconjunto de medida de Lebesgue total $A \subset (e_0, c(L))$ tal que para todo $k \in A$, el nivel de energía $E^{-1}(k)$ contiene una órbita periódica no trivial con $(L+k)$-acción positiva. En particular el correspondiente conjunto de nivel para el flujo magnético posee una órbita periódica contraible no trivial.

Además, el teorema se cumple para un nivel de energía específico $k \in (e_0, c(L))$ si el nivel de energía k satifisface la condición de Palais-Smale.

Quedan una gran variedad de problemas nuevos e interesantes por perseguir y resolver después. Además de los diversos problemas de caracter dinámico que se pueden plantear, se tienen una gran cantidad de problemas de naturaleza geométrica, el hecho es que aún estamos lejos de obtener una comprensión satisfactoria de la función beta así como de el estudio de las órbitas periódicas de flujos magnéticos y sus consecuencias dinámicas. Finalmente en un intento de hacer más autocontenidas estas notas hemos incluido un capítulo sobre preliminares.

Capítulo 1

Preliminares.

Uno de nuestros objetivos al redactar este trabajo es que sea lo más autocontenido posible, por lo que en este capítulo damos una rápida revisión de resultados básicos sobre Lagrangianos. El material contenido en este capítulo introductorio es clásico, éste proporciona los conceptos y resultados necesarios para el resto de las notas. Para un tratamiento más completo del material introductorio ver los siguientes libros [8], [18], [15]. Hacemos también referencias sobre algunos artículos, los cuales serán citados donde resulten apropiados a lo largo de estas notas, para continuar una lectura específica o dar los correspondientes créditos.

1.1 Resultados básicos sobre Lagrangianos.

Sea M una variedad cerrada conexa y TM su haz tangente. Un Lagrangiano L sobre M es una función C^∞

$$L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

que satisface las siguientes condiciones:

I.- Periodicidad: La función tiene periodo 1 en la variable tiempo, i.e.

$$L(\theta, t+1) = L(\theta, t) \quad \forall (\theta, t) \in TM \times \mathbb{R}.$$

II.- Superlinealidad: Para alguna métrica Riemanniana

$$\lim_{|v|\to\infty} \frac{L(x,v,t)}{|v|} = \infty,$$

uniformemente sobre x y t. Equivalentemente, para toda $A \in \mathbb{R}$ existe $B \in \mathbb{R}$ tal que

$$L(x,v) = A|v| - B \text{ para toda } (x,v,t) \in TM \times S^1.$$

III.- Convexidad: El Hessiano

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x,v,t)\right),$$

calculado en coordenadas lineales sobre la fibra T_xM es positivo definido uniformemente $\forall\ (x,v,t) \in TM \times \mathbb{S}^1$. i.e., existe $A > 0$ tal que

$$w \cdot L_{vv}(x,v,t) \cdot w \geq A|w|^2 \text{ para toda } (x,v,t) \in TM \times S^1 \text{ y } w \in T_xM.$$

IV.- Completez: El flujo de Euler-Lagrange (E-L) asociado al Lagrangiano es completo, el cual está generado en coordenadas locales por las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t), t)\right) = 0. \tag{1.1}$$

Estas ecuaciones generan un flujo de difeomorfismos $\varphi_t : TM \times \mathbb{S}^1 \to TM \times \mathbb{S}^1$ definido de la siguiente manera

$$\varphi_t(x_0, v_0, t_0) := (x(t+t_0), \dot{x}(t+t_0), (t+t_0) \bmod \mathbb{Z}),$$

donde $x : \mathbb{R} \to M$ es la solución de (1.1) que satisface $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$. Ésta se llama *la solución asociada.*

De manera análoga, llamamos *Lagrangiano autónomo* a una función suave $L : TM \to \mathbb{R}$ que satisface las condiciones de convexidad y superlinealidad. Definimos la función *Energía* $E : TM \to \mathbb{R}$ como

$$E(x,v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\cdot v - L.$$

Obsérvese que si $x(t)$ es una solución de la ecuación de Euler-Lagrange, entonces

$$\frac{d}{dt}E(x,\dot{x}) = (\frac{d}{dt}L_v - L_x)\cdot \dot{x} = 0.$$

Por lo tanto la función energía es una primera integral del flujo de Euler-Lagrange, así el valor de la función energía $E(x,v)$ es constante a lo largo de las órbitas del flujo. Además la condición de superlinealidad implica que los conjuntos de nivel de la función energía también llamados *niveles de energía* tienen velocidad acotada y por lo tanto éstos son compactos. Esto a su vez, implica que las soluciones de Euler-Lagrange están definidas para todos los valores de $t \in \mathbb{R}$, en otras palabras el flujo asociado a un Lagrangiano autónomo es completo.

Por otro lado, la convexidad implica que

$$\frac{d}{ds}E(x,sv)|_{s=1} = v\cdot L_{vv}(x,v)\cdot v > 0.$$

Por lo que tenemos

$$\min_{v\in T_xM} E(x,v) = E(x,0) = -L(x,0).$$

Escribimos ahora

$$e_0 := \max_{x\in M} E(x,0) = -\min_{x\in M} L(x,0) > -\infty.$$

La última desigualdad es consecuencia de la superlinealidad. Ahora tenemos

$$e_0 = \min\{\, k\in\mathbb{R} \,|\pi : E^{-1}(k) \to M \text{ es sobreyectiva}\}.$$

Nota: A través de estas notas cuando consideremos un Lagrangiano periódico implícitamente estaremos suponiendo que es completo en el caso autónomo como fue argumentado antes, la completez es consecuencia de la compacidad de los niveles de energía.

Sistemas Hamiltonianos.

Consideremos T^*M el cotangente de M. Definimos la 1-forma canónica θ sobre el cotangente como

$$\theta_p(\xi) = p(d\pi\xi) \text{ para } \xi\in T_p(T^*M),$$

donde $\pi : T^*M \to M$ denota la proyección canónica. Se define entonces la *forma simpléctica canónica* sobre T^*M como $\omega = -d\theta$.

Un *Hamiltoniano* es una función suave $H : T^*M \to \mathbb{R}$. El *campo vectorial Hamiltoniano* asociado a H y denotado por X_H se define como

$$\omega(X_H,\cdot) = dH(\cdot).$$

Los Hamiltonianos que son de particular interés en nuestro caso son lo que provienen de un Lagrangiano convexo. En forma más precisa dado un Lagrangiano L superlineal y convexo podemos considerar el Hamiltoniano asociado $H(x,p)$ esto es, la función $H : T^*M \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(x,p) := \max_{v\in T_xM}\{pv - L(x,v)\},$$

es bien conocido que esta función es convexa y superlineal en cada fibra T_x^*M.

Obsérvese que en el caso autónomo el flujo de Euler-Lagrange preserva los niveles de energía $E^{-1}\{k\}$. Denotamos por $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ la transformada de Legendre la cual es definida por

$$(x,v) \to \frac{\partial L}{\partial v}(x,v).$$

Nuestras hipótesis sobre L nos garantizan que $\mathcal{L}$ es un difeomorfismo. Sea $H : T^*M \to \mathbb{R}$ el Hamiltoniano asociado a L. Si θ denota la 1-forma canónica sobre T^*M, entonces el flujo de Euler-Lagrange de L puede ser obtenido como el flujo Hamiltoniano de E con respecto a la forma simpléctica $-\mathcal{L}^*d\theta$ sobre TM. Si X denota el campo vectorial asociado con el flujo de Euler-Lagrange entonces tenemos la siguiente relación

$$i_X\mathcal{L}^*d\theta = -dE.$$

En otras palabras, la función energía satisface $E = H\circ\mathcal{L}$, por lo tanto los niveles de energía para L son enviados a conjutos de niveles de H. Así mismo, el flujo de Euler-Lagrange de L y el flujo Hamiltoniano de H son conjugados mediante la transformada de Lagrange $\mathcal{L}$.

En el caso de Lagrangianos Periódicos podemos definir la función energía de manera similar al caso autónomo como la función $E : TM\times\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$E(x,v,t) = \frac{\partial L}{\partial v}(x,v,t)\cdot v - L.$$

Sin embargo en este caso esta función no es una primera integral del flujo Lagrangiano, en forma más precisa tenemos que si x es una solución de L entonces

$$\frac{d}{dt}E(x(t),\dot{x}(t),t) = -\frac{\partial L}{\partial t}(x(t),\dot{x}(t),t).$$

Podemos sin embargo definir la transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \times \mathbb{S}^1 \to T^*M \times \mathbb{S}^1$ en forma totalmente análoga al caso autónomo

$$(x,v,t) \to \frac{\partial L}{\partial v}(x,v,t).$$

Más aún, si consideramos el Hamiltoniano asociado $H(x,p,t)$ a L esto es, la función $H : T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(x,p,t) := \max_{v \in T_xM}\{pv - L(x,v,t)\}.$$

Tenemos de nuevo que la transformada de Legendre es una conjugación entre el flujo Lagrangiano y el flujo Hamiltoniano.

Ejemplos de Lagrangianos.

Ahora consideramos algunos ejemplos básicos de Lagrangianos y algunas de sus propiedades:

Lagrangiano Métrico.

Dada una métrica Riemanniana $<,>_x$ sobre TM, el Lagrangiano métrico sobre M está dado por la *energía Cinética*, es decir, se define como

$$L(x,v) = \frac{1}{2} \parallel v \parallel_x^2 .$$

No es difícil ver que su flujo de Euler-Lagrange es precisamente el flujo geodésico para la métrica dada. i.e., la ecuación de E-L es la ecuación de las geodésicas para la métrica Riemanniana $<,>_x$:

$$\frac{D}{dt}\dot{x} = 0.$$

Nótese que el Hamiltoniano asociado está dado por $H(x,p) = \frac{1}{2} \parallel p \parallel_x^2$.

Lagragianos Mecánicos.

El Lagrangiano mecánico está definido por *energía cinética menos energía potencial* más concretamente dada una función suave $V : M \to \mathbb{R}$ consideramos entonces la función

$$L(x,v) = \frac{1}{2} \parallel v \parallel_x^2 - V(x),$$

ésta define un Lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange para este Lagrangiano vienen dadas por la siguiente expresión

$$\frac{D}{dt}\dot{x} = -\nabla V(x),$$

donde $\frac{D}{dt}$ denota la derivada covariante y ∇V representa el gradiente de la función V con respecto a la métrica Riemanniana. En este caso el Hamiltoniano asociado está dado por:

$$H(x,p) = \frac{1}{2} \parallel p \parallel_x^2 + V(x).$$

Obsérvese que también podemos considerar el lagrangiano periódico, para ello tomamos la *energía potencial* como una función suave $V : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ y definimos el lagrangiano en forma análoga a la anterior, es decir

$$L(x,v,t) = \frac{1}{2} \parallel v \parallel_x^2 - V(x,t).$$

Flujos Encajados.

Esta clase de ejemplos debidos a Mañé proporcionan un método de encajar sistemas dinámicos arbitrarios como sistemas Lagrangianos, esto por supuesto muestra la riqueza y complicaciones dinámicas que pueden aparecer en el estudio de sistemas Lagrangianos. A continuación definimos este proceso.

Dado X_t un campo vectorial C^∞ dependiente del tiempo sobre M, con periodo 1 en la variable t.

Entonces definimos el Lagrangiano $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ como

$$L(x,v,t) = \parallel v - X_t(x) \parallel^2 .$$

Obsérvese que las soluciones del sistema dinámico $\dot{x} = X_t(x)$ son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Medidas Minimizantes.

Recordemos ahora los principales conceptos introducidos por Mather en [22]. Sea $\mathcal{M}(L)$ el conjunto de medidas de probabilidad μ sobre la σ -álgebra de Borel de $TM \times \mathbb{S}^1$ las cuales son invariantes por el flujo de L y que tienen soporte compacto (el cual denotaremos por $\text{supp}(\mu)$).

Dada $\mu \in \mathcal{M}(L)$ definimos la acción de μ como

$$A_L(\mu) := \int_{TM\times\mathbb{S}^1} L d\mu.$$

Sea $H_1(M,\mathbb{R})$ el primer grupo real de homología de M. Dada una 1-forma cerrada ω sobre M y $\rho \in H_1(M,\mathbb{R})$, denotamos por $\langle[\omega],\rho\rangle$ la integral de ω sobre cualquier curva cerrada en la clase de homología ρ. Si $\mu \in \mathcal{M}(L)$ definimos su homología como la única $\rho(\mu) \in H_1(M,\mathbb{R})$ tal que

$$\langle[\omega],\rho(\mu)\rangle = \int_{TM\times\mathbb{S}^1} \omega d\mu,$$

para cualquier 1-forma cerrada ω sobre M y $[\omega]$ es la clase de cohomología. La integral de la derecha es con respecto a μ considerando a ω como una función sobre $TM \times \mathbb{S}^1$. Nótese que el teorema ergódico de Birkhoff implica que $\int_{TM\times\mathbb{S}^1} df d\mu$ para cualquier función $C^1, f : M \to \mathbb{R}$, por lo que parte derecha de la ecuación está bien definida. Para una prueba de la existencia y unicidad de la homología $\rho(\mu)$ ver [22].

Caso ergódico: Como un ejemplo en el caso que $\mu \in \mathcal{M}(L)$ es ergódica podemos dar una interpretación más geométrica de su homología de rotación. En efecto, tomemos γ una órbita genérica γ del flujo de L sobre μ y sea x su solución asociada. Entonces, para cada $T > 0$ tomamos un arco cerrado γ_T obtenido de la siguiente manera; unimos $x(T)$ con $x(0)$ por una geodésica con longitud menor que el diámetro de M. Ahora, denotamos por $[\gamma_T] \in H_1(M,\mathbb{R})$ la clase de homología de este arco cerrado. Entonces por el teorema de ergódico de Birkhoff tenemos

$$\int f d\mu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\gamma(t))dt$$

para cualquier función continua $f : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$. Por lo que se tiene

$$\langle[\omega],\rho(\mu)\rangle = \int_{TM\times\mathbb{S}^1} \omega d\mu = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \omega_{x(t)}(\dot{x}(t))dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\gamma_T}\omega,$$

lo cual nos implica que

$$\frac{1}{T}[\gamma_T] \to \rho(\mu),$$

para μ- casi cualquier órbita γ.

Dado $h \in H_1(M,\mathbb{R})$ decimos que μ es una medida minimizante de L con homología h si $\rho(\mu) = h$ y

$$A_L(\mu) = \min\{A_L(v) \mid v \in \mathcal{M}(L),\ \rho(v) = \rho(\mu)\}.$$

Consideremos también el conjunto

$$\mathcal{M}_h(L) = \{\mu \in \mathcal{M}(L)\ :\ \mu \text{ es minimizante con } \rho(\mu) = h\}.$$

Dada una 1-forma ω cerrada sobre M consideramos $\mathcal{M}^\omega(L)$ el conjunto de $\mu \in \mathcal{M}(L)$ tal que:

$$A_{L-\omega}(\mu) = \min\{A_{L-\omega}(\nu)\ :\ \nu \in \mathcal{M}(L)\}.$$

Sea $x : [a,b] \to M$ una curva solución de la ecuación de Euler-Lagrange, entonces la acción de x esta dada por la siguiente integral

$$A_L(x) := \int_a^b L(x(t),\dot{x}(t),t)dt.$$

En forma más general, es conveniente para muchos fines considerar la acción del Lagrangiano no sólo en espacios de curvas suaves, si no también sobre espacios de curvas más amplios, por ejemplo, sobre curvas absolutamente continuas. Es interesante observar que algunos resultados tienen versiones más fuertes cuando consideramos la acción en este espacio. Recordemos que una curva absolutamente continua es una función $x : [a,b] \to M$, la cual satisface que, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si (a_i, b_i) son intervalos disjuntos contenidos en $[a,b]$ y $\sum(b_i - a_i) < \delta$ entonces

$$\sum d(x(b_i) - x(a_i)) < \epsilon.$$

Si U es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces la curva $x : [a, b] \to U$ es absolutamente continua sí y sólo sí la derivada $\dot{x}(t)$ existe para casi todo $t \in [a, b]$, $\dot{x}(t)$ es integrable y se tiene

$$x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)ds \quad \forall a \leq t_0 < t_1 \leq b.$$

Dado un Lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ tiene sentido definir la acción $A_L(x)$ de L sobre una curva absolutamente continua $x : [t_0, t_1] \to M$, $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ como

$$A_L(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt.$$

Diremos que una curva absolutamente continua $x : [t_0, t_1] \to M$, con $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ es *minimizante* para L uniendo $(x(t_0), t_0)$ con $(x(t_1), t_1)$ si

$$A_L(x) \leq A_L(y),$$

para todas las curvas absolutamente continuas $y : [t_0, t_1] \to M$ tal que $y(t_0) = x(t_0)$ y $y(t_1) = x(t_1)$.

Decimos que x es un *minimizante estricto* si la desigualdad estricta en la ecuación anterior se satisface siempre que $y \neq x$.

El siguiente teorema debido a Weierstrass proporciona un criterio de existencia local de minimizantes y los relaciona con soluciones del Euler-Lagrange, para una prueba de este hecho ver por ejemplo [18].

Teorema. *(Weierstrass) Sea $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano convexo y superlineal, entonces para todo $x_0 \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$ y $C > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $t_0 < t_1 < t_0 + \epsilon$ y $x_1 \in M$ son tales que $d(x_0, x_1) \leq C(t_1 - t_0)$, entonces existe un minimizante estricto $x : [t_0, t_1] \to M$ que une $(x(t_0), t_0)$ con $(x(t_1), t_1)$. Además x es una solución de Euler-Lagrange de L.*

Es de interés señalar que el soporte de cualquier medida minimizante está contenido en el conjunto de trayectorias minimizantes i.e. que minimizan la acción anterior para todo intervalo, y viceversa, si una medida ergódica está soportada

sobre el conjunto de trayectorias minimizantes, entonces ésta es una medida minimizante. Con el propósito de comprender el comportamiento de las curvas y medidas minimizantes en el caso de Lagrangianos autónomos, Mañé introdujo la noción de potencial de acción, el cual estudiamos en seguida.

Dados dos puntos $x_1, x_2 \in M$ y algún $T > 0$ denotamos $\mathcal{C}(x_1, x_2)$ el conjunto de curvas absolutamente continuas $\gamma : [0, T] \to M$ con $\gamma(0) = x_1$ y $\gamma(T) = x_2$. Para cada $k \in \mathbb{R}$ definimos

$$\Phi_k(x_1, x_2; T) := \inf\{A_{L+k}(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(x_1, x_2)\}.$$

El *Potencial de acción* $\Phi_k : M \times M \to \mathbb{R} \cup \infty$ de L se define como

$$\Phi_k(x_1, x_2) := \inf_{T>0} \Phi_k(x_1, x_2; T).$$

Definición (Mañé): El valor crítico $c(L)$ del Lagrangiano L es definido por

$$c(L) := \inf\{k \in \mathbb{R} \mid \Phi_k(x, x) > -\infty \text{ para algún } x \in M\}.$$

Notemos que si $k \geq c(L)$ realmente se tiene $\Phi_k(x, x) > -\infty$ para todo $x \in M$. El siguiente resultado nos da varias propiedades básicas del valor crítico $c(L)$:

Teorema. *El valor crítico $c(L) \in \mathbb{R}$ satisface las siguiente propiedades*

i) Si $k < c(L)$, entonces $\Phi_k(x_1, x_2) = -\infty$ para todo $x_1, x_2 \in M$.

ii) Si $k \geq c(L)$, entonces $\Phi_k(x_1, x_2) > -\infty$ para todo $x_1, x_2 \in M$ y el potencial de acción Φ_k es una función Lipschitz.

iii) Si $k \geq c(L)$, entonces $\Phi_k(x_1, x_3) \leq \Phi_k(x_1, x_2) + \Phi_k(x_2, x_3)$, además

$$\Phi_k(x_1, x_2) + \Phi_k(x_2, x_1) \geq 0,$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in M$.

iv) Si $k > c(L)$, entonces para $x_1 \neq x_2$ tenemos

$$\Phi_k(x_1, x_2) + \Phi_k(x_2, x_1) > 0.$$

Observemos que en general el potencial de acción Φ_k no es simétrico, sin embargo si definimos $d_k : M \times M \to \mathbb{R}$ por

$$d_k(x_1, x_2) = \Phi_k(x_1, x_2) + \Phi_k(x_2, x_1).$$

El teorema anterior nos dice que d_k es una métrica si $k > c(L)$ y una pseudométrica para $k = c(L)$. Usando el teorema anterior podemos considerar el valor crítico del levantamiento del Lagrangiano L a una cubierta de la variedad compacta M. Supongamos que $p : N \to M$ es una cubierta y consideremos el Lagrangiano $\mathbb{L} \to \mathbb{R}$ dado por $\mathbb{L} := L \circ dp$. Para cada $k \in \mathbb{R}$ podemos definir el potencial de acción Φ_k en $N \times N$ como lo hicimos antes y análogamente obtenemos un valor crítico $c(\mathbb{L})$ para $\mathbb{L}$. No es difícil probar que si N_1 y N_2 son cubiertas de M tales que N_1 cubre a N_2 entonces se tiene

$$c(\mathbb{L}_1) \leq c(\mathbb{L}_2),$$

donde $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ denotan respectivamente los levantamientos del Lagrangiano denote L a N_1 y N_2.

Entre todas las posibles cubiertas de M existen dos cubiertas distinguidas, la cubierta universal la cual denotamos por $\widetilde{M}$, y la cubierta abeliana la cual denotamos por $\overline{M}$. Esta última es definida como la cubierta de M cuyo grupo fundamental es el kernel del homomorfismo de Hurewicz $\pi_1(M) \to H_1(M, \mathbb{R})$. Estas cubiertas dan origen a los siguiente valores críticos

$$c_u(L) := c(\widetilde{L}) \text{ y } c_a(L) = c_0(L) := c(\overline{L}),$$

donde $\widetilde{L}$ y $\overline{L}$ denotan los levantamientos del Lagrangiano L a $\widetilde{M}$ y $\overline{M}$ respectivamente.

Mañé estableció la siguiente caracterización de $c(L)$ (ver [9]),

$$c(L) = -\min\{ \int_{TM} L d\mu \mid \mathcal{M}(L) \}.$$

$c_0(L)$ es también llamado *el valor crítico estricto*, es posible probar que $c_0(L)$ es el nivel de energía más pequeño el cual contiene soportes de medidas minimizantes.

Para Lagrangianos autónomos, los valores críticos puntualizan los niveles de energía en los cuales existe un cambio decisivo en el comportamiento del flujo de Euler-Lagrange.

1.2 Función Beta.

Como ya fue mencionado en la introducción Mather en [22] generalizó los resultados sobre conjuntos minimales de Aubry-Mather, así como también sus propiedades principales en el contexto de Lagrangianos convexos y superlineales. En dicha generalización Mather definió dos funciones importantes en la teoría de sistemas Lagrangianos, que en cierto sentido codifican información sobre la dinámica del conjunto de medidas invariantes con una homología dada, éstas son conocidas como la *función Beta y la función Alfa.*

Siguiendo a Mather ([22]) definimos la *función Beta* asociada al Lagrangiano L y la cual denotamos por β como la función $\beta : H_1(M, R) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\beta(h) := \inf\{ A_L(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}(L),\ \rho(\mu) = h \}.$$

No es difícil probar que la función Beta de Mather es una función convexa y superlineal. Además puede probarse que el ínfimo en la definición en realidad es un *mínimo* (ver [22]) y las medidas donde el mínimo se alcanza se llaman medidas minimizantes, es decir una medida $\mu \in \mathcal{M}(L)$ es una medida minimizante para la acción sí y sólo sí

$$\beta(\rho(\mu)) = A_L(\mu).$$

Dado que la función β es convexa y superlineal podemos considerar su *dual convexa* $\alpha : H^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la cual está definida como

$$\alpha([\omega]) = \max\{ \langle [\omega], h \rangle - \beta(h) \mid h \in H_1(M, \mathbb{R}) \},$$

donde ω es cualquier 1-forma cerrada cuya clase de cohomología es $[\omega]$. La función alfa también es convexa y superlineal. No es difícil probar que

$$\alpha([\omega]) = -\min\{ \int (L - \omega) d\mu \mid \mu \in \mathcal{M}(L) \}.$$

Mañé en [19] estableció una interesante conexión entre los valores críticos de un Lagrangiano y la función alfa. El probó que

$$c(L) = -\min\{ \int L d\mu \mid \mu \in \mathcal{M}(L) \}.$$

En particular resulta la siguiente igualdad

$$c(L-\omega)=\alpha([\omega]),$$

para cualquier 1-forma cerrada ω cuya clase de cohomología es $[\omega]$.

Definición: El Conjunto

$$\{(h,r)\mid h\in H_1(M,\mathbb{R}),\ r\in\mathbb{R},\ \beta(h)\leq r\}$$

se llama el epigrafo de la función β.

Resulta de interés en sistemas Lagrangianos el estudio de la función beta, pues las propiedades de convexidad de esta función en una clase de homología h están fuertemente correlacionadas con la naturaleza dinámica de la medidas pertenecientes al conjunto de medidas minimizantes con homolgía h, $\mathcal{M}_h(L)$. Como ejemplo de estas afirmaciones tenemos los siguientes resultados bien conocidos:

I) Si h es un punto extremal de la función β i.e. si existen $h_1,h_2\in H_1(M,\mathbb{R})$, tales que $h=th_1+(1-t)h_2$ para algún $t\in(0,1)$ se cumple que

$$\beta(th_1+(1-t)h_2)<t\beta(h_1)+(1-t)\beta(h_2).$$

En este caso se tiene que $\mathcal{M}_h(L)$ contiene probabilidades ergódicas, para una prueba de este hecho ver [20].

II) Si h es un punto extremal estricto i.e. si el epigrafo de la función β posee un hiperplano soporte que intersecta a este únicamente en $(h,\beta(h))$, entonces el conjunto $\mathcal{M}_h(L)$ contiene medidas cuyo soporte es un conjunto minimal respecto al flujo de Euler-Lagrange.

Por otro lado, consideremos una función cercanamente relacionada a la función Beta. En efecto, recordemos que dada una variedad compacta dotada con una métrica Riemanniana (M,g), definimos la función llamada *Norma Estable* sobre el primer grupo de homología $H_1(M,\mathbb{R})$ de la siguiente manera

$$|h|_s:=\inf\{\sum|r_i\mid l(\delta_i)\},\quad \forall h\in H_1(M,\mathbb{R}),$$

donde δ_i son simplejos, $r_i\in\mathbb{R}$, $\sum r_i\delta_i$ denota un ciclo representando h y $l(\delta_i)$ es el elemento de longitud inducido por la métrica g. Esta función define en efecto una

norma sobre $H_1(M,\mathbb{R})$. Además de su interés dinámico la función norma estable proporciona importantes conexiones entre geométria y análisis. La relación entre la función Beta y la norma estable esta dada por la siguiente observación.

Consideremos el caso particular que L sea un Lagrangiano métrico i.e. El Lagrangiano definido por

$$L(x,v)=\frac{1}{2}\parallel v\parallel_x^2.$$

En este caso se cumple la siguiente relación entre la función Beta y la norma estable

$$\frac{1}{2}|h|_s^2=\beta(h),$$

para toda $h\in H_1(M,\mathbb{R})$.

Es interesante mencionar que la norma estable ha recibido gran atención en años recientes, pues como es de esperarse codifica cierta información de caracter geométrico y dinámico para el flujo geodésico. Además ella da una interpretación geométrica a las posibles preguntas planteadas para la función Beta.

La propiedad de grafo.

Para enunciar el próximo resultado necesitamos el concepto de dominio soporte de la función β. *Un mapa soporte afín* de la función β en ρ es un mapa afín $\psi(h)=l(h)+c$ donde $l:H_1(M,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ es lineal y $c\in\mathbb{R}$, tal que

$$\beta(\rho)=\psi(\rho)\ \text{ y }\ \beta(h)\geq\psi(h)\ \text{ para toda }\ h\in H_1(M,\mathbb{R}).$$

Dado un mapa soporte afín ψ diremos que el conjunto $S:=\{h\in H_1(M,\mathbb{R})\ :\ \beta(h)=\psi(h)\}$, es un *Dominio soporte* para la función β.

Sea S un dominio soporte para la función β y consideremos el conjunto

$$\Delta(S):=\overline{\bigcup_{\substack{\mu\in\mathcal{M}_\gamma(L)\\ \gamma\in S}}\operatorname{supp}(\mu)}.$$

Existen versiones más fuertes de la propiedad del grafo; sin embargo, para nuestros propósitos la siguiente es suficiente

Teorema. *(Teorema del grafo [18].) Sea S un dominio soporte para la función β entonces existe $B > 0$ tal que*

$$d(\pi(\theta_1), \pi(\theta_2)) \geq B d_T(\theta_1, \theta_2) \text{ para toda } \theta_1, \theta_2 \in \Delta(S),$$

donde $\pi : TM \times \mathbb{S}^1 \to M \times \mathbb{S}$ es la proyección canónica y $d_T(\cdot, \cdot)$ denota la distancia Riemanniana en TM.

Obsérvese que, en particular, la proyección canónica π es inyectiva sobre el soporte de cualquier medida minimizante μ.

1.3 Dimensión de Hausdorff.

El principal objetivo de esta sección es introducir algunos conceptos y resultados básicos sobre la dimensión de Hausdorff de un conjunto y la dimensión de Haussdorff de una medida, los cuales serán necesarios para enunciar nuestros resultados.

Dado un espacio métrico (X, d), una δ-cubierta de un subconjunto $Y \subseteq X$ es una sucesión finita o numerable de subconjuntos $\{U_i\}$ la cual satisface

$$Y \subseteq \bigcup_{Y=1}^{\infty} U_i \quad \text{y} \quad 0 < \operatorname{diam} U_i < \delta \quad (i \geq 1).$$

Ahora consideremos la siguiente definición

$$\mathcal{H}^s_\delta(Y) := \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (diam\ U_i)^s,$$

donde s es un número real no negativo y el ínfimo se toma sobre todas las posibles δ-cubiertas de Y.

Ésta se llama la medida δ-dimensional de Hausdorff y cuando fijamos Y, ésta es una función monótona decreciente respecto a s. En efecto si $s < t$ para cualquier δ -cubierta $\{U_i\}$ de Y tenemos que

$$\sum (diam\ U_i)^t = \sum_{Y=1} (diam\ U_i)^s (diam\ U_i)^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} (diam\ U_i)^s,$$

y por lo tanto $\mathcal{H}^t_\delta(Y) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(Y)$.

Cuando permitimos tomar el valor ∞ en estos valores tenemos que el siguiente límite siempre existe

$$\mathcal{H}^s(Y) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(Y).$$

En particular, para $s < t$ si $\mathcal{H}^s(Y) < \infty$ tenemos que $\mathcal{H}^t(Y) = 0$ y si $\mathcal{H}^t(Y) > 0$ obtenemos que $\mathcal{H}^s(Y) = \infty$.

Definición: Definimos la dimensión de Hausdorff de $Y \subseteq X$ como

$$\dim_H(Y) = \sup_s \{\mathcal{H}^s(Y) = \infty\} = \inf_s \{\mathcal{H}^s(Y) = 0\}$$

y por lo tanto se tiene

$$\mathcal{H}^s(Y) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_H(Y) \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(Y). \end{cases}$$

Definición: Dada una medida μ sobre $\mathbb{R}^n$, definimos la dimensión de Hausdorff de la medida μ como

$$\dim_H(\mu) := \inf\{\ \dim_H(Z) \mid \mu(Z) = 1\ \}.$$

Un procedimiento directo para calcular la dimensión Hausdorff regularmente requiere de manipulaciones complicadas, por lo que es deseable contar con métodos para estimar tal dimensión. El siguiente resultado da una técnica básica para obtener cotas inferiores de la dimensión de Hausdorff

Lema. *([29], Theorem 7.1) Sea μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}^n$. Si para μ-casi cualquier punto z se tiene*

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\log \mu(B_r(z))}{\log r} \geq \alpha,$$

para alguna constante $\alpha > 0$ entonces $dim_H(\mu) \geq \alpha$.

Capítulo 2

Vértices de la función Beta de Mather.

En este capítulo estudiamos la estructura de la función Beta. Como ya fue mencionado, varias propiedades dinámicas del flujo de Euler-Lagrange pueden deducirse del comportamiento de la función Beta, la cual es una función convexa y superlineal. Así por ejemplo, se han estudiado los puntos extremales, puntos extremales estrictos. Por lo que es de interés entonces, el estudio de las propiedades que pueden ocurrir en el caso que la función beta posea un vértice en una homología dada.

Más concretamente, uno de los problemas que nos planteamos abordar aquí es el siguiente: ¿deben de aparecer los vértices de la función Beta sólo en homologías racionales?

Una segunda cuestión de interés es el estudio de las propiedades de diferenciabilidad de la función beta.

En ese sentido, cabe señalar que nuestros resultados dan origen a resultados respecto a la diferenciabilidad de la función β, en particular, recuperamos algunos criterios de diferenciabilidad conocidos y en consecuencia estos nos dan información en el caso específico de la función Norma estable. Sin embargo, con fines de claridad en la exposición estudiaremos estas consecuencias sobre la diferenciabilidad en la sección 2.4.

2.1 Planteamiento del problema.

Comenzamos con una rápida revisión de algunos conceptos necesarios para enunciar nuestros resultados.

Recordemos que un *función soporte afín* del epigrafo de la función β en el punto $(\rho, \beta(\rho))$ es una función afín $\psi : H_1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ con $\psi := \langle [\lambda], h \rangle + c$ donde λ es una 1-forma cerrada y c una constante, tal que

$$\beta(\rho) = \psi(\rho) \ \text{ y } \ \beta(h) \geq \psi(h) \ \text{ para toda } \ h \in H_1(M, \mathbb{R}).$$

Decimos que la función soporte afín está representada por la 1-forma cerrada λ.

Definición: Diremos que una homología $\rho \in H_1(M, \mathbb{R})$ es un **vértice** de la función β si existe un conjunto abierto $U \subset H^1(M, \mathbb{R})$ de 1-formas cerradas representando funciones soportes afines del epigrafo de la función β en el punto $(\rho, \beta(\rho))$.

Es claro que un vértice ρ de la función β es un punto extremal para esta función. Por lo tanto, el conjunto de medidas minimizantes con homología ρ, $\mathcal{M}_\rho(L)$ contiene elementos ergódicos.

Fijando una base $h_1, h_2, \ldots h_m$ del factor libre de $H_1(M, \mathbb{Z})$ ésta inducirá una base para $H_1(M, \mathbb{R})$ (las imagenes en $H_1(M, \mathbb{R})$ de clases de homología entera).

Definición: Diremos que una clase de homología $\rho \in H_1(M, \mathbb{R})$ es racional y escribiremos $\rho \in H_1(M, \mathbb{Q})$ si $\rho = \sum_{i=1}^{m} \rho_i h_i$ con $\rho_i \in \mathbb{Q}$ para cualquier $i = 1, \ldots, m$.

Obsérvese que en el caso que $dim H_1(M, \mathbb{R}) = 1$, tenemos que la función Beta es diferenciable en un elemento $\rho \in H_1(M, \mathbb{R})$ sí y sólo sí ρ no es un vértice para la función Beta.

En el caso $M = \mathbb{S}^1$ Mather en [23] y Bangert en [3] en probaron resultados más fuertes relativos a la diferenciabilidad de la función Beta, en forma más precisa tenemos que:

a).- β_L es diferenciable en cualquier número irracional $\rho \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$.

b).- Si $\rho \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ es un vértice de β, entonces ρ es racional y las medidas ergódicas en $\mathcal{M}_\rho(L)$ están soportadas sobre órbitas periódicas.

Motivados por los resultados anteriores, a continuación son enunciados y probados algunos de los principales resultados de este trabajo de tesis.

Teorema A. *Sea L un Lagrangiano periódico sobre M y $\rho \in H_1(M,\mathbb{R})$ un vértice de la función β, si ρ no es racional entonces $dim_H(\mu) \geq 3$ para toda medida μ con homología ρ.*

Donde $\dim_H(\mu)$ denota la *dimensión de Hausdorff de la medida* μ (para la definición y algunas propiedades ver sección 1.3). El Teorema A puede reescribirse diciendo que, si la homología ρ es un vértice de β y existe una medida μ con homología ρ tal que $\dim_H(\mu) < 3$ entonces $\rho \in H_1(M,\mathbb{Q})$. Ahora bien como tenemos que $\dim_H(\mu) \leq \dim_H(\mathrm{supp}(\mu))$, el Teorema A implica

Corolario A. *Sea L un Lagrangiano periódico sobre M y $\rho \in H_1(M,\mathbb{R})$ un vértice de la función β. Si $\mathcal{M}_\rho(L)$ contiene una medida μ tal que $dim_H(supp(\mu)) < 3$, entonces $\rho \in H_1(M,\mathbb{Q})$ es decir, es racional.*

Un resultado análogo fue anunciado en [12] y nunca publicado. En la sección 2.4 discutiremos cómo nuestros resultados implican resultados sobre la diferenciabilidad de la función β, en particular, recuperamos algunos criterios de diferenciabilidad conocidos y en consecuencia estos nos dan información en el caso específico de la función norma estable.

2.2 Prueba del Teorema A.

En esta sección damos una prueba del teorema A, para ello consideremos un Lagrangiano L, ρ y μ tales que satisfacen las hipótesis del teorema A.

Obsérvese que como la homología ρ es un vértice, entonces es un punto extremal estricto para la función β, por lo tanto por el teorema de descomposición ergódica podemos suponer que la medida μ es ergódica ver [18].

Ahora, dado que ρ es un vértice de la función β podemos encontrar un conjunto abierto $U \in H^1(M,\mathbb{R})$ tal que

$$\beta(\rho) = \langle [\lambda], \rho\rangle + c(\lambda) \quad \text{y} \quad \beta(h) \geq \langle [\lambda], h\rangle + c(\lambda),$$

para todo $h \in H_1(M,\mathbb{R})$ y cualquier $[\lambda] \in U$. Tomando el Lagrangiano $L_0(x,v,t) := L(x,v,t) - \langle \omega, v\rangle - k$ en lugar de L con $[\omega] \in U$, podemos suponer (contrayendo U de ser necesario) que U es un conjunto abierto simétrico, es decir, que $[\lambda] \in U$ sí y solo sí $-[\lambda] \in U$. Además podemos probar que tenemos

$$\beta(\rho) = 0 \ \text{ y } \ \beta \geq 0.$$

Es claro que el nuevo Lagrangiano será convexo y superlineal, además tendrá las mismas soluciones y minimizantes que el original.

Para probar que $\dim_H(\mu) \geq 3$ probaremos que existe una constante $k > 0$, que sólo depende de μ y L, tal que si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño entonces

$$\mu(B_\epsilon(z)) \leq k\epsilon^3, \tag{2.1}$$

para cualquier ϵ-bola centrada en $z \in \mathrm{supp}(\mu)$. Ahora el Teorema A se sigue aplicando el siguiente resultado

Lema 1. *([29], Theorem 7.1) Sea μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}^n$. Si para μ-casi cualquier punto z se tiene*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu(B_r(z))}{\log r} \geq \alpha,$$

para alguna constante $\alpha > 0$ entonces $dim_H(\mu) \geq \alpha$.

Para probar la ecuación (2.1) primero consideramos la medida de probabilidad $\widehat{\mu}$ inducida por μ sobre la σ-algebra de Borel de $TM \times \{0\} \simeq TM$ definida como

$$\widehat{\mu}(A) := \mu(\varphi_{[0,1]}(A \times \{0\})),$$

para todo conjunto Borel medible $A \subset TM$. Es claro que la medida $\widehat{\mu}$ es invariante bajo $\psi := \varphi_1$ i.e., el mapa tiempo uno del flujo de Euler-Lagrange asociado a L. Ahora tenemos

Afirmación: Para cualquier $\theta \in supp(\mu) \cap TM \times \{0\} =: supp(\widehat{\mu})$, se satisface

$$\widehat{\mu}(B_\epsilon(\theta)) \leq C\epsilon^2, \tag{2.2}$$

para alguna constante $C > 0$ (donde $B_\epsilon(\theta)$ es la ϵ-bola alrededor de θ en TM).

No es difícil ver que esta Afirmación implica la ecuación (2.1).

Prueba de la afirmación: Para probar la afirmación comenzamos tomando un punto μ-genérico $\theta = (x, v, 0) \in supp(\mu) \cap TM \times 0$ el cual tiene una órbita positiva densa $O^+(\theta)$ en $supp(\mu)$. Es suficiente probar la ecuación (2.2) para los puntos $\theta_1 = (x_1, v_1, 0) \in O^+(\theta) \cap TM \times 0$.

Tomemos $T > 0$ tal que $\theta_2 := \psi^T(\theta_1) \in B_\epsilon(\theta_1)$. Es claro que este número es necesariamente un entero. Denotemos por $x : \mathbb{R} \to M$ la solución asociada de Euler-Lagrange que satisface las condiciones iniciales $x(0) = x_1$ y $\dot{x}(0) = v_1$. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que si $d(z_1, z_2) < \epsilon$ entonces z_1, z_2 pertenecen a la misma carta coordenada de M. Ahora escogemos una constante $0 < \tau < T$ tal que el punto $x(\tau)$ satisface que $d(x(\tau), x(T)) < \frac{\epsilon}{2}$. trabajando en una carta coordenada consideramos la curva $y(t) := x(t) + \frac{(t-\tau)}{(T-\tau)}(x(0) - x(T))$ si $t \in [\tau, T]$. Despues modificamos la curva $x(t)$, definiendo una curva cerrada $y_T : [0, T] \to M$ de la siguiente manera

$$y_T(t) := \begin{cases} x(t) \text{ si } t \in [0, \tau] \\ y(t) \text{ si } t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Una parte central en la prueba de la ecuación 2.2 es el siguiente lema, el cual es interesante por derecho propio, pues esencialmente dice, que la acción sobre curvas solución cuyos puntos extremos están a una distancia $\delta > 0$ (pequeña) la acción es de orden δ^2. En forma más precisa tenemos

Lema 2. *Sea y_T la curva definida anteriormente, entonces existe una constante $C > 0$, que sólo depende de L, μ y no depende de θ_1, además se satisface*

$$A_L(y_T) \leq C\epsilon^2.$$

Supongamos por un momento válido el Lema 2 (el cual probaremos en la sección 2.3), entonces veremos cómo usando este resultado podemos dar un prueba de la afirmación. En efecto, de este lema tenemos que

$$\beta(\frac{1}{T}[y_T]) \leq \frac{C\epsilon^2}{T}, \tag{2.3}$$

donde $[y_T] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ denota la clase de homología entera asociada a la curva cerrada $y_T([0, T]) \subset M$.

Recordemos que como hemos modificado el Lagrangiano L por $L_0(x, v, t) := L(x, v, t) - \langle \omega, v \rangle - k$ con $[\omega] \in U$, podemos suponer que U es un conjunto abierto simétrico (contrayendo U de ser necesario), es decir que $[\lambda] \in U$ sí y solo sí $-[\lambda] \in U$. Así tenemos que

$$|\langle [\lambda], h - \rho \rangle| \leq \beta(h) \ \ \forall h \in H_1(M, \mathbb{R}). \tag{2.4}$$

Entonces de las ecuaciones (2.3) y (2.4) tenemos que

$$\left| \left\langle [\lambda], \frac{1}{T}[y_T] - \rho \right\rangle \right| \leq \frac{C\epsilon^2}{T}. \tag{2.5}$$

Como estamos suponiendo que ρ tiene algún coeficiente irracional, usando de nuevo el hecho que el conjunto U es abierto. Podemos encontrar una 1-forma cerrada sobre M con $[\lambda_0] \in H^1(M, \mathbb{Z})$ y un entero positivo N_0 tal que $[\lambda_0]/N_0 \in U$ y además se satisface que

$$\langle [\lambda_0], h \rangle \in \mathbb{Z} \text{ para toda } h \in H_1(M, \mathbb{Z}) \text{ y } \langle [\lambda_0], \rho \rangle \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}.$$

Por otro lado, definiendo $m_T := \langle [\lambda_0], [y_T] \rangle$ y $\xi := \langle [\lambda_0]; \rho \rangle$ entonces de la ecuación (2.5) tenemos

$$|m_T - T \cdot \xi| \leq N_0 C\epsilon^2. \tag{2.6}$$

Consideremos ahora la rotación irracional $R_\xi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, esto es, la función dada de la siguiente manera

$$R_\xi(z) := z \cdot \exp(2\pi i \xi).$$

Levantamos esta función a la cubierta $\tilde{R}_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{R}_\xi(z) := t + \xi.$

Dado que R_ξ es unívocamente ergódica respecto a la medida de Lebesgue m sobre $\mathbb{S}^1$, entonces tomando la bola $B_{N_0 C\epsilon^2}(1) \subset \mathbb{S}^1$ y usando el teorema ergódico de Birkhoff, tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
2N_0C\epsilon^2 &= m(B_{N_0C\epsilon^2}(1)) = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N}\#\{\, T \in [0,N]\cap\mathbb{Z} \mid d(R_\xi^T(1),1) \le N_0C\epsilon^2 \,\} \\
&= \lim_{N\to\infty}\tfrac{1}{N}\#\{\, T \in [0,N]\cap\mathbb{Z} \mid \left|k - \tilde{R}_\xi^T(0)\right| \le N_0C\epsilon^2 \text{ para alguna } k \in \mathbb{Z} \,\} \\
&\ge \lim_{N\to\infty}\tfrac{1}{N}\#\{\, T \in [0,N]\cap\mathbb{Z} \mid |m_T - T\xi| \le N_0C\epsilon^2 \,\} \quad \text{por} \quad (2.6) \\
&\ge \lim_{N\to\infty}\tfrac{1}{N}\#\{\, T \in [0,N]\cap\mathbb{Z} \mid \psi^T(\theta_1) \in B_\epsilon(\theta_1) \,\} \\
&= \hat{\mu}(B_\epsilon(\theta_1)).
\end{aligned}
$$

Esto prueba (2.2) para el punto genérico θ_1 y por lo tanto la afirmación.

Así solo resta probar el Lema 2, esto lo haremos en la sección 2.3.

2.3 Prueba del Lema 2.

En esta sección damos un prueba del Lema 2, pero primero consideramos algunas generalizaciones a Lagrangianos periódicos de varios resultados sobre soluciones KAM débiles, siendo nuestro tratamiento cercano a [11]. Comenzaremos revisando algunas definiciones y resultados sobre el potencial de acción y el valor crítico de Mañé para Lagrangianos periódicos (ver sección 1.1 para el caso autónomo).

Dado k en $\mathbb{R}$ definimos la acción del Lagrangiano $(L+k)$ sobre una curva absolutamente continua de $\gamma : [a,b] \to M$ como

$$A_{L+k}(\gamma) = \int_a^b (L+k)(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau), \tau)d\tau.$$

Para t en $\mathbb{R}$ denotamos por $[t]$ el correspondiente punto en $\mathbb{S}^1$. Dado dos puntos $(x,[s]),(y,[t])$ sobre $M\times\mathbb{S}^1$ y un entero no negativo n definimos $C((x,[s]),(y,[t];n))$ como el conjunto de curvas absolutamente continuas $\gamma : [a,b] \to M$ tal que; $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ y que se cumple además $[a] = [s]$, $[b] = [t]$ y la parte entera de $b-a$ es n.

Consideremos la función real Φ_k^n definida sobre $M\times\mathbb{S}^1\times M\times\mathbb{S}^1$ como

$$\Phi_k^n((x,[s]),(y,[t])) = \min_{\gamma\in C((x,[s]),(y,[t];n))}\{A_{L+k}(\gamma)\}.$$

Definimos entonces el potencial de acción de la siguiente manera

$$\Phi_k = \inf_n \Phi_k^n.$$

En [11] se prueba la siguiente proposición.

Proposición 1. *Existe un valor crítico $c(L)$ tal que cumple*

a).- para todo $(x,[s]),(y,[t])$ sobre $M\times\mathbb{S}^1$ tenemos

$$\Phi_k((x,[s]),(y,[t])) = \begin{cases} -\infty, \ si\ k < c(L) \\ > -\infty \ si\ k \ge c(L). \end{cases}$$

b).- $c(L) = min\{k : \int L + k \ge 0$ para todas las curvas cerradas $\gamma\}$.

c).- $c(L) = \alpha(0)$.

Ahora revisaremos algunos aspectos de la teoría de soluciones KAM débiles. Cabe señalar que solo escribiremos los resultados en el caso de Lagrangianos periódicos, pues la teoría para el caso autónomo es bastante conocida.

Siguiendo a Fathi ver [14] y [11] diremos que $u : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es una solución KAM débil hacia el futuro si:

- u es $L + c$ dominada, i.e.

$$u(y, [t]) - u(x, [s]) \leq \Phi_c((x, [s]), (y, [t])),$$

- para cualquier $(x, [s]) \in M \times \mathbb{R}$ existe una curva $\gamma : (s, \infty) \to M$ tal que

$$u(\gamma(t), [t]) - u(x, [s]) = A_{L+c}(\gamma|_{[s,t]}),$$

  en este caso diremos que γ *calibra* u.

Análogamente decimos que $u : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es una solución KAM débil desde el pasado si es dominada y para cualquier $(x, [s]) \in M \times \mathbb{S}^1$ existe una curva $\gamma : (-\infty, s)$ tal que

$$u(x, [s]) - u(\gamma(t), [t]) = A_{L+c}(\gamma|_{[s,t]}).$$

Diremos que un punto $(x, v, [s]) \in TM \times \mathbb{S}^1$ es *semiestático* si la solución $\gamma = \gamma_{(x,v,s)}$ de Euler-Lagrange con condiciones iniciales $(x, v, [s])$ satisface para toda t la ecuación

$$A_{L+c}(\gamma|_{[s,t]}) = \Phi_c\left((x, [s]), (\gamma(t), [t])\right).$$

Diremos también que un punto $(x, v, [s]) \in TM \times \mathbb{S}^1$ es *estático* si éste es un punto semiestático y satisface la ecuación

$$A_{L+c}(\gamma|_{[s,t]}) = -\Phi_c\left((\gamma(t), [t]), (\gamma(s), [s])\right).$$

Denotaremos por $\sum^+$ el conjunto de puntos semiestáticos, por $\widehat{\sum}$ el conjunto de puntos estáticos y por $\mathcal{A}_0 := \pi(\widehat{\sum})$ donde $\pi : TM \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{S}^1$ es la proyección canónica.

Tenemos el siguiente resultado sobre las soluciones KAM débiles.

Proposición 2. *([11]) Si $u : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es una solución KAM débil, entonces:*

i) u es Lipschitz.

ii) u es diferenciable sobre $\mathcal{A}_0$.

iii) Sea $(x, t) \in \mathcal{A}_0$, γ una curva que calibra u y tal que $\gamma(t) = x$ entonces

$$\partial_x u_{(x,t)} = L_v(x, \dot{\gamma}(t), t).$$

En particular tenemos que u es diferenciable sobre $\pi(supp(\mu)) \subseteq \mathcal{A}_0$ para cualquier medida minimizante μ.

Prueba del Lema 2: Recordemos que hemos definido la curva cerrada $y_T : [0, T] \to M$ de la siguiente manera

$$y_T(t) := \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [0, \tau] \\ y(t) & \text{si } t \in [\tau, T], \end{cases}$$

donde (trabajando en una carta local) la curva $y(t)$ esta dada como

$$y(t) := x(t) + \frac{(t - \tau)}{(T - \tau)}(x(0) - x(T)) \quad \text{si } t \in [\tau, T].$$

Consideremos una solución KAM-débil $u : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, como tenemos que $\beta \geq 0$ y $\beta(\rho) = 0$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c = 0$ (ver caracterización del valor crítico c dada en la proposición 1, c)). Ahora por calibración tenemos

$$\int_0^T L(x(t), \dot{x}(t), t)dt = u(x(T), 0) - u(x(0), 0). \tag{2.7}$$

Del resultado de regularidad de Fathi ([15], Theorem 4.5.1) tenemos que

$$u(x(T), 0) - u(x(0), 0) \leq \partial_x u_{(x(T),T)}(x(T) - x(0)) + K_0\|x(T) - x(0)\|^2, \tag{2.8}$$

donde K_0 sólo depende de la carta coordenada y de L.

Ahora la L-acción de y_T esta dada por

$$\begin{aligned} A_L(y_T) &= \int_0^T L(x(t),\dot{x}(t),t)dt + \int_\tau^T L(y(t),\dot{y}(t),t)dt \\ &= A_L(x|_{[0,T]}) + \{ \int_\tau^T L(y(t),\dot{y}(t),t)dt - \int_\tau^T L(x(t),\dot{x}(t),t)dt \}. \end{aligned}$$

Para estimar la diferencia entre llaves, tenemos que

$$\begin{aligned} L(y(t),\dot{y}(t),t) &\leq L(x(t),\dot{x}(t),t) + \partial_x L_{(x(t),\dot{x}(t),t)}(y(t)-x(t)) \\ &+ \partial_v L_{(x(t),\dot{x}(t),t)}(\dot{y}(t)-\dot{x}(t)) + K_1\|x(T)-x(0)\|^2. \end{aligned}$$

Para alguna constante positiva K_1, notemos que como las $x(t)$ están en el suppμ), entonces las velocidades $\dot{x}(t)$ están acotadas. Ahora por integración, y tomando en cuenta que las ecuaciones de Euler-Lagrange se satisfacen, tenemos que la diferencia entre llaves es menor o igual a

$$\partial_v L_{(x(t),\dot{x}(t),t)}(x(0)-x(T)) + K_1(T-\tau)\|x(0)-x(T)\|^2. \tag{2.9}$$

Pero como tenemos (Prop. 2) $\partial_v L_{(x(t),\dot{x}(t),t)} = \partial_x u_{(x(t),t)}$. Por lo tanto sumando las ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} A_L(y_T) &\leq K_0\|x(T)-x(0)\|^2 + \partial_x u_{(x(T),0)}(x(T)-x(0)) \\ &+ \partial_x u_{(x(T),0)}(x(0)-x(T)) + K_1(T-\tau)\|x(0)-x(T)\|^2. \end{aligned}$$

Lo cual es el estimado deseado, esto prueba el Lema 2.

2.4 Diferenciabilidad de la función Beta.

Es de interés el problema de decidir la diferenciabilidad de la función Beta en una clase de homología dada, pues como fue comentado en la introducción, esta cuestión está relacionada a problemas de interés físico y por la siguiente observación también es interesante desde un punto de vista geométrico. Definimos a continuación una función, relacionada con la función Beta, para ello consideremos g una métrica Riemanniana sobre M

Definición: Definimos la norma estable sobre $H_1(M,\mathbb{R})$ como la función

$$|h|_s := \inf\{\sum |r_i| l(\delta_i)\}, \quad \forall h \in H_1(M,\mathbb{R})$$

donde δ_i son simplejos, $r_i \in \mathbb{R}, \sum r_i\delta_i$ es un ciclo representando h y $l(\delta_i)$ es la longitud de δ_i respecto a la métrica g.

Puede probarse que esta función en efecto define una norma en $H_1(M,\mathbb{R})$, llamada la *norma estable*, ver por ejemplo [16] para más detalles de esta construcción y algunas propiedades de esta función. Cabe señalar que la norma estable ha recibido gran atención en años recientes. Una de las principales preguntas estudiadas acerca de esta norma es

¿Qué normas en $H_1(M,\mathbb{R})$ pueden obtenerse como normas estables de métricas Riemmannianas?

En nuestro contexto ésta es interesante por la relación entre la norma estable y la función Beta, como se verá a continuación

Consideremos el caso particular de que L sea un Lagrangiano métrico i.e. el Lagrangiano definido por

$$L(x,v) = \frac{1}{2} \| v \|_x^2 .$$

En este caso la función Beta asociada con L es un medio del cuadrado de la norma estable, para una prueba de este hecho ver por ejemplo [4]. Como fue señalado, un problema de interés es decidir la diferenciabilidad de la función Beta, por lo anterior cualquier resultado acerca de la diferenciabilidad de la función β implica un resultado acerca de la diferenciabilidad de la norma estable. Además, la idea de estudio es que la norma estable representa la interpretación geométrica de las múltiples preguntas originadas en el marco de Lagrangianos correspondientes a la función Beta.

El problema de diferenciabilidad de la función Beta fue primeramente estudiado por Aubry en [1] dentro del contexto de mapas twists. Su estudio lo realizó en el caso unidimensional, y sus resultados fueron formulados para la norma estable, sin embargo, los resultados obtenidos por Aubry no fueron plenamente justificados, la proposición anunciada por Aubry fue la siguiente

La norma estable es diferenciable en números de rotación irracionales $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y genéricamente no diferenciable en números de rotación racionales $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Una prueba rigurosa de los resultados de Aubry fue dada por Mather en [23], sin embargo Bangert en ([3]) da una prueba más geométrica de este hecho. Bangert probó en el caso del toro que la norma estable es diferenciable en cualquier punto irracional de $\mathbb{R}^2$ (i.e que sus coeficientes sean linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$), y además es diferenciable en cualquier punto racional sí y sólo sí el toro es foliado por geodésicas cerradas con dicha homología racional. En [21] Massart generalizó el resultado de Bangert para un Lagrangiano autónomo sobre una superficie cerrada orientable. Es de interés también observar que en el trabajo [6] se da una generalización parcial al resultado de Bangert. En el siguiente sentido se prueba que si p es un punto irracional, entonces la norma estable es diferenciable en p en alguna dirección no radial, esto significa que el cono tangente a la norma estable en p escinde como un producto métrico de $\mathbb{R}$ con otro cono.

Ahora bien, por nuestros resultados sobre vértices podemos recuperar el resultado de diferenciabilidad para lagrangianos en $\mathbb{S}^1$, es decir, probamos

Corolario B. *Sea L un Lagrangiano periódico o autónomo sobre $\mathbb{S}^1$ entonces, la función β_L es diferenciable en cualquier $\rho \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ irracional.*

Demostración: Obsérvese que cuando $M = \mathbb{S}^1$, todas las medidas minimizantes del Lagrangiano L tienen soporte con dimensión de Hausdorff menor o igual que la dimensión de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ por el teorema del grafo.

Entonces, un ρ-irracional no puede ser vértice por el corolario A y la observación anterior, por lo tanto éste es un punto de diferenciabilidad para la función Beta pues $dim H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) = 1$. ■

Capítulo 3

Órbitas periódicas para flujos magnéticos.

Este capítulo lo dedicamos al estudio del problema de existencia de órbitas periódicas para flujos magnéticos débilmente exactos. A continuación introducimos el marco teórico en el cual trabajaremos, y establecemos nuestros principales resultados. Dada (M, g) una variedad Riemanniana, denotamos por ω_0 la forma simpléctica sobre TM dada por la imagen de la forma simpléctica canónica de T^*M definida por la métrica Riemanniana. Tomemos ahora una 2-forma cerrada Ω sobre M y consideramos la nueva forma simpléctica ω, definida como

$$\omega := \omega_0 + \pi^*\Omega,$$

donde $\pi : TM \to M$ es la proyección canónica. Esta forma simpléctica se llama una *estructura simpléctica torcida.* Sea $F : TM \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x, v) = \frac{1}{2} g_x(v, v).$$

El *Flujo magnético* de una pareja (g, Ω) es el flujo Hamiltoniano de F con respecto a la forma simpléctica torcida ω.

El flujo magnético modela el movimiento de una partícula de masa y carga unidad bajo los efectos de un campo magnético, cuya fuerza de Lorentz $Y : TM \to TM$ es el mapa de fibrados definido por:

$$\Omega_x(u, v) = g_x(Y_x(u), v),$$

para todo $x \in M$ y todo $u, v \in T_xM$. En otras palabras, la curva $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in TM$ es una órbita del flujo Hamiltoniano sí y sólo sí

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = Y_\gamma(\dot{\gamma}),$$

donde D denota la derivada covariante respecto a g.

Diremos que un flujo magnético es *Débilmente exacto* si la 2-forma cerrada Ω sobre M satisface que $\Omega|_{\pi_2(M)} = 0$. No es difícil probar que un flujo magnético es débilmente exacto sí y sólo sí el levantamiento de Ω a la cubierta universal $\widetilde{M}$ de M es una forma exacta.

Observemos que si la 2-forma $\widetilde{\Omega}$ es una forma exacta i.e. existe una 1-forma suave θ tal que $\widetilde{\Omega} = d\theta$. Consideramos el Lagrangiano sobre $\widetilde{M}$ dado por

$$L(x, v) = \frac{1}{2} g_x(v, v) + \theta_x(v).$$

Las extremales de L, i.e., las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange de L, coinciden con los levantamientos a $\widetilde{M}$ de las órbitas del flujo magnético de (g, Ω). Note que como el flujo magnético es completo, entonces el flujo de Euler-Lagrange φ_t es un flujo completo. La ventaja de expresar el flujo magnético como un flujo Lagrangiano es que esto nos permitirá usar técnicas variacionales para derivar resultados para tales flujos. Los flujos magnéticos, al igual que los flujos geodésicos, tienen la propiedad de dejar invariantes los niveles de energía, en este caso los conjuntos de nivel de F.

Sea $x : [a, b] \to \widetilde{M}$ una curva absolutamente continua, entonces en este capítulo denotamos y definimos la acción de x respecto a L como

$$S_L(x) := \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))dt.$$

Como hemos visto en el capítulo 1, podemos definir un valor crítico $c(L)$ de los niveles de energía en el cual ocurre un cambio decisivo del comportamiento del flujo, éste está dado por

$$c(L) := \inf\{\ k \in \mathbb{R} \mid S_{L+k}(\gamma) \geq 0\ \},$$

donde γ es cualquier curva cerrada absolutamente continua en $\widetilde{M}$ definida sobre cualquier intervalo cerrado [a,b]. Es bien conocido que

$$c(L) \geq e_0 := \min\{\ k \in \mathbb{R} \mid \pi(E^{-1}(k)) = \widetilde{M}\}.$$

En el caso del Lagrangiano asociado al flujo magnético tenemos $e_0 = 0$.

Consideremos un flujo magnético débilmente exacto asociado al par (g, Ω), con Lagrangiano asociado de la forma

$$L(x, v) = \frac{1}{2}|v|_x^2 + \theta_x(v).$$

El prototipo de tal situación es el Lagrangiano $L : T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$L((x, y), v) = \frac{1}{2}|v|^2 + xdy.$$

Note que $\theta = xdy$ no es acotada, pero $d\theta$ es la forma de área la cual es acotada.

Las técnicas usadas para probar nuestros resultados son métodos variacionales para el *funcional de acción*, sin embargo existe un problema con tal funcional y es que éste puede dejar de satisfacer la *condición de Palais-Smale*. Sin embargo, es posible probar que el funcional de acción posee un *paso de montaña*, nos restringiremos a niveles de energía bajos, en forma más precisa probaremos

Teorema B. *Dado $k > e_0 = 0$. Existe $c > 0$ tal que si $\Gamma : [0, 1] \to \Lambda_0$ es una trayectoria que une una curva constante $\Gamma(0) = x_0 : [0, T] \to x_0 \subset M$ con una curva cerrada $\Gamma(1)$ con (L+k)-acción negativa entonces*

$$\sup_{s \in [0,1]} S_{L+k}(\Gamma(s)) > c > 0,$$

donde Λ_0 denota el conjunto de curvas cerradas sobre M con homotopía trivial.

Ahora una adaptación de un argumento de Struwe de la geometría del paso de montaña nos dará sucesiones convergentes de Palais-Smale para casi todos los niveles de energía (ver [28], [27] y [17]). Así la teoría estandard de puntos críticos nos dará la existencia de órbitas periódicas contraibles no triviales sobre cualquier nivel de energía donde se satisface la condición de Palais-Smale. En forma más precisa probaremos

Teorema C. *Un flujo magnético débilmente exacto asociado a una métrica Riemanniana g y una 2-forma cerrada Ω sobre M, puede levantarse a un Lagrangiano, sobre $\widetilde{M}$. Consideramos el Lagrangiano asociado*

$$L(x,v) = \frac{1}{2}|v|_x^2 + \theta_x(v),$$

entonces existe un subconjunto de medida de Lebesgue total $A \subset (e_0, c(L))$ tal que para todo $k \in A$, el nivel de energía $E^{-1}(k)$ contiene una órbita periódica no trivial con $(L+k)$-acción positiva. En particular el correspondiente conjunto de nivel para el flujo magnético posee una órbita periódica contraible no trivial.

Además el teorema se cumple para un nivel de energía específico $k \in (e_0, c(L))$ si el nivel de energía k satisface la condición de Palais-Smale. Por otro lado, en el ejemplo particular del Lagrangiano $L : T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$L((x,y),v) = \frac{1}{2}|v|^2 + xdy,$$

tenemos que $c(L) = \infty$, por lo tanto el teorema B es válido en $(0,\infty)$, porque $e_0 = 0$. De hecho en general si la 1-forma θ no es acotada entonces $c(L) = +\infty$.

Los métodos usados para probar nuestros resultados son una adaptación directa en el contexto de flujos magnéticos débilmente exactos de los métodos usados en [7]. La diferencia es que la variedad donde trabajamos $\widetilde{M}$ no necesariamente es compacta y la 1-forma no necesariamente es acotada.

3.1 Marco variacional.

Denotemos por $\mathcal{H}^1(\widetilde{M})$ el conjunto de curvas absolutamente continuas $x : [0,1] \to \widetilde{M}$ tales que

$$\int_0^1 |\dot{x}(s)|_{x(s)}^2 ds < \infty.$$

Entonces $\mathcal{H}^1(\widetilde{M})$ es una variedad Hilbert y su espacio tangente en la curva $x(s)$ está dado por campos vectoriales débilmente diferenciables a lo largo de $x(s)$, con derivada covariante en $\mathcal{L}^2$. Consideramos en la variedad $\mathcal{H}^1(\widetilde{M}) \times \mathbb{R}^+$ la métrica Riemanniana

$$\langle(\xi,\alpha),(\eta,\beta)\rangle_{(x,T)} := \alpha\beta + f^2(T)\langle\xi(0),\eta(0)\rangle + f(T)\int_0^1 \langle\frac{D}{ds}\xi(s), \frac{D}{ds}\eta(s)\rangle_{x(s)}\, ds,$$

donde $\frac{D}{ds}$ es la derivada covariante a lo largo de $x(s)$ y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es función suave, positiva, definida como

$$f(T) := \begin{cases} T & \text{si } T \leq 1 \\ 1 & \text{si } T \geq 10. \end{cases}$$

Observemos que esta métrica es localmente equivalente a la métrica obtenida cuando $f \equiv 1$. En particular el conjunto de funciones sobre $\mathcal{H}^1(\widetilde{M}) \times \mathbb{R}^+$ es el mismo para las dos métricas.

Denotamos por $\Lambda_{\widetilde{M}}$ el conjunto de curvas cerradas en $\mathcal{H}^1(\widetilde{M}) \times \mathbb{R}^+$. Este conjunto es una subvariedad Hilbert de $\mathcal{H}^1(\widetilde{M}) \times \mathbb{R}^+$ y su espacio tangente en (x,T) está dado por:

$$T_{(x,T)}\Lambda_{\widetilde{M}} := \{(\xi,\alpha) \in \mathcal{H}^1(\widetilde{M}) \times \mathbb{R} \mid \xi(0) = \xi(1)\}.$$

Dado $k \in \mathbb{R}$ definimos la *funcional de acción* $\widehat{\mathcal{S}}_k : \mathcal{H}^1(\widetilde{M}) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como sigue para $(x,T) \in \mathcal{H}^1(\widetilde{M}) \times \mathbb{R}^+$ consideremos

$$\widehat{\mathcal{S}}_k(x,T) := \int_0^1 [\, L(x(s), \frac{\dot{x}(s)}{T}) + k \,]T\, ds = \int_0^1 [\, \frac{1}{2T}|\dot{x}(s)|^2 + \theta_{x(s)}(\dot{x}(s)) + kT \,]\, ds.$$

Observe que si $y(t) := x(\frac{t}{T})$ para $0 \leq t \leq T$ entonces

$$\widehat{\mathcal{S}}_k(x,T) = S_{L+k}(y).$$

Un teorema debido a Smale [26] implica que $\widehat{\mathcal{S}}_k$ es C^2 sobre $\mathcal{H}^1(\widetilde{M}) \times \mathbb{R}^+$. La derivada de $\widehat{\mathcal{S}}_k$ esta dada por

$$\begin{aligned} d_{(x,T)}\widehat{\mathcal{S}}_k(\xi,\alpha) &= \textstyle\int_0^1 T\,[L_x(x,\frac{t}{T})\xi + L_v(x,\frac{t}{T})\frac{\dot{\xi}}{T}] + \alpha\int_0^1[k - E(x,\frac{t}{T})]ds \\ &= \zeta \cdot L_v(y,\dot{y})|_0^T + \textstyle\int_0^T \zeta \cdot [\frac{d}{dt}L_v - L_x]_{(y,\dot{y})}ds + \frac{\alpha}{T}\int_0^T[k - E(y,\dot{y})]ds, \end{aligned}$$

donde $y(t) := x(\frac{t}{T}), \zeta(t) := \xi(\frac{t}{T})$, para $0 \leq t \leq T$ y $E : T\widetilde{M} \to \mathbb{R}$,

$$E(x,v) = vL_v(x,v) - L(x,v) = \frac{1}{2}|v|_x^2.$$

De la segunda expresión, en un punto crítico el segundo término se anula, lo cual implica que $y(t)$ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Por lo tanto $y(t)$ tiene energía constante y del tercer término deducimos que dicha constante es igual a k.

Ahora observemos que si $(x_1, T) \in \Lambda_{\widetilde{M}}$ y h es una transformación de cubierta, si consideramos $x_2 := h \circ x_1$, entonces tendremos $\widehat{\mathcal{S}}_k(x_1, T) = \widehat{\mathcal{S}}_k(x_2, T)$. En efecto si $p : \widetilde{M} \to M$ es la proyección canónica, entonces $\widetilde{\Omega} = p^*\Omega$ y $p = p \circ h$ implican $\widetilde{\Omega} = h^*\widetilde{\Omega}$. Como $\widetilde{M}$ es simplemente conexo las curvas cerradas x_i pueden extenderse a mapas suaves $\phi_i : \mathbb{D}^2 \to \widetilde{M}$ tales que $\phi_i|_{\partial\mathbb{D}^2} = x_i$ respectivamente para $i = 1, 2$. Para cualquier tal extensión ϕ_i tenemos que

$$\int_{\mathbb{D}^2} \phi_i^*(\widetilde{\Omega}) = \int_{x_i} \theta.$$

En particular tomando $\phi_2 := h \circ \phi_1$ tenemos

$$\int_{x_2} \theta = \int_{x_1} \theta.$$

Tomando $\widetilde{g}$ sobre $\widetilde{M}$ tal que $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ es cubierta Riemmanniana de (M, g), tendremos que las transformaciones de cubierta son isométrias, por esto y las anteriores observaciones se tiene $\widehat{\mathcal{S}}_k(x_1, T) = \widehat{\mathcal{S}}_k(x_2, T)$.

Denotemos por Λ_0 el conjunto de curvas cerradas sobre M con homotopía trivial. Entonces, para $k \in \mathbb{R}$ definimos la acción $\mathcal{S}_k : \Lambda_0 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como sigue: dada $(x, T) \in \Lambda_0 \times \mathbb{R}^+$ consideramos un levantamiento $\widetilde{x}$ de x a la cubierta universal $\widetilde{M}$ y tomamos

$$\mathcal{S}_k(x, T) := \widehat{\mathcal{S}}_k(\widetilde{x}, T).$$

Por las observaciones anteriores la acción está bien definida.

3.2 Paso de Montaña.

En esta sección probaremos que para niveles de energía bajos $0 = e_0 < k < c(L)$, el funcional de acción $\mathcal{S}_k$ para un Lagrangiano de la forma $L(x, v) = \frac{1}{2}|v|_x^2 + \theta_x(v)$ sobre $\widetilde{M}$ con $d\theta$ acotado, exhibe un paso de montaña sobre el espacio de curvas cerradas sobre M con homotopía trivial. Primero probaremos el siguiente resultado

Lema 3. *Sea θ una 1-forma sobre $\widetilde{M}$, con $d\theta$ acotado, sea $x_0 \in W \subset \widetilde{M}$ una vecindad del punto x_0. Entonces existe una bola abierta $U \subset W$ con centro en x_0 en $\widetilde{M}$ y una constante $c > 0$ tal que si γ es una curva cerrada en U entonces*

$$\left| \int_\gamma \theta_x \right| \leq c \cdot long(\gamma)^2.$$

Prueba: Trabajando en una carta local podemos suponer que W es una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclideana. Además podemos considerar que $\gamma(0) = 0 \in W \in \mathbb{R}^n$. Dado que $d\theta$ es acotada sobre $\widetilde{M}$ sea $c_1 > 0$ tal que $|d_x\theta(u, v)| < c_1|v||u|$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n, x \in W$. Sea $\gamma : [0, T] \to W$ una curva cerrada. Consideramos $F : [0, 1] \times [0, T] \to W$ definida como $F(s, t) := s\gamma(t)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left| \int_\gamma \theta_x \right| &= \left| \int_F d_x\theta \right| \leq \int_0^1 \int_0^T c_1 \left| \tfrac{\partial F}{\partial s} \right| \left| \tfrac{\partial F}{\partial t} \right| dtds \\
&= c_1 \int_0^1 \int_0^T |\gamma(t)| \cdot s\, |\dot{\gamma}(t)|\, dtds \\
&\leq c_1 \int_0^1 \int_0^T l(\gamma) \cdot s\, |\dot{\gamma}(t)|\, dtds \\
&\leq c_1 \int_0^1 l(\gamma) \cdot s\, |l(\gamma)|\, ds = c_1 l(\gamma)^2.
\end{aligned}$$

Ahora el resultado se sigue tomando $U \subset W$ una bola Riemanniana abierta centrada en x_0. ■

Probaremos que existe un paso de montaña cuando consideramos una familia de curvas que van desde una curva constante a una curva con acción negativa.

Teorema B. *Dado $k > e_0 = 0$. Existe $c > 0$ tal que si $\Gamma : [0, 1] \to \Lambda_M$ es una trayectoria que une una curva constante $\Gamma(0) = x_0 : [0, T] \to x_0 \subset M$ con una curva cerrada $\Gamma(1)$ con (L+k)-acción negativa entonces*

$$\sup_{s \in [0,1]} S_{L+k}(\Gamma(s)) > c > 0.$$

Prueba: Sea $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ una cubierta Riemannniana de (M, g) y p la proyección canónica. Sea $\{V_i\}_{i=1}^N$ una cubierta finita de M por bolas abiertas tales que $\cup U_{i_\alpha} = p^{-1}V_i$ donde U_{i_α} es una bola abierta como en el lema 3, con la correspondiente

constante c_{i_α}. Notemos que las constantes c_{i_α} y c_{i_β} sólo dependen de V_i porque U_{i_α} y U_{i_β} son isométricas, así denotamos esta constante común como $c_i > 0$. Sea $r_0 > 0$ con la propiedad de que cualquier bola de radio r_0 en M está contenida en alguna V_i. Consideramos $b := \max_{1\leq i\leq N} c_i$ y sea

$$0 < l_0 < \min\{r_0, \sqrt{\frac{k}{2b^2}}\}.$$

Afirmación: Existe $s_0 \in [0,1]$ tal que la longitud es $\text{long}(\Gamma(s_0)) = l_0$.

Prueba de la Afirmación: Si para alguna $s_1 \in [0,1], \Gamma(s_1)$ no está totalmente contenida en algún V_i, entonces tenemos que $\text{long}(\Gamma(s_1)) > r_0 > l_0$ esto implica que $\text{long}(\widetilde{\Gamma}(s_1)) > r_0 > l_0$ donde $\widetilde{\Gamma}(s_1)$ es el levantamiento de $\Gamma(s_1)$. Por lo tanto la afirmación se sigue de la continuidad de la función $s \to \text{long}(\Gamma(s))$ y del hecho que $\text{long}(\Gamma(0)) = 0$.

Por otra parte, si $\Gamma(s)$ está contenida en algún V_i para todo $s \in [0,1]$, entonces un levantamiento de $\widetilde{\Gamma}(s)$ está contenido en algún U_{i_α} para todo $s \in [0,1]$. Escribiendo $\gamma_1 := \Gamma(1) : [0, T_1] \to M$ y sea $l_1 := \text{long}(\gamma_1)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 > S_{L+k}(\widetilde{\gamma}_1) &\geq \frac{1}{2}\int_0^{T_1} |\dot{\widetilde{\gamma}}_1|^2 - |\int_{\widetilde{\gamma}_1} \theta_x| + kT_1 \\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^{T_1} |\dot{\widetilde{\gamma}}_1|^2 - bl_1^2 + kT_1. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Schwartz

$$l_1^2 = (\int_0^{T_1} |\dot{\widetilde{\gamma}}_1|\, dt)^2 \leq T_1 \cdot \int_0^{T_1} |\dot{\widetilde{\gamma}}_1|^2\, dt.$$

Así tenemos

$$0 > S_{L+k}(\widetilde{\gamma}_1) \geq (\frac{1}{2T_1} - b)l_1^2 + kT_1.$$

Dado que $k > 0$ y $T_1 > 0$, entonces $\frac{1}{2T_1} - b < 0$, i.e., $T_1 > \frac{1}{2b}$. Así

$$l_1^2 > \frac{kT_1}{b - \frac{1}{2T_1}} > \frac{kT_1}{b} > \frac{k}{2b^2} > l_0^2.$$

La afirmación se sigue de la continuidad de $s \to \text{long}(\Gamma(s))$ y que $\text{long}(\Gamma(0)) = 0$. Por lo tanto, esto concluye la prueba de la afirmación.

Ahora continuemos con la prueba del teorema. Sea $g(t) := (\frac{1}{2t} - b)l_0^2 + kt$.

Como $\text{long}(\Gamma(s_0)) = l_0 < r_0$, entonces $\Gamma(s_0)$ es contenida en algún V_i tomando el levantamiento $\widetilde{\Gamma}(s_0)$ contenido en U_{i_α}, podemos aplicar el lema 3. De esta manera, si $\Gamma : [0,1] \to M$, entonces

$$S_{L+k}(\widetilde{\Gamma}(s_0)) \geq g(T_0) \geq \min_{t\in\mathbb{R}^+} g(t) = l_0[\sqrt{2k} - bl_0] =: c > 0.$$

Esto porque

$$l_0 < \sqrt{\frac{k}{2b^2}} < \frac{\sqrt{2k}}{b}.$$

■

3.3 La condición de Palais-Smale.

Decimos que $\mathcal{S}_k$ satisface la *Condición de Palais-Smale* sobre Λ_0 si cualquier sucesión (x_n, T_n) en Λ_0 que satisface que $|\mathcal{S}_k(x_n, T_n)|$ es acotada y $\lim_n \|d_{(x_n,T_n)}\mathcal{S}_k\|_{(x_n,T_n)} = 0$, tiene una subsucesión convergente. Diremos también que $\mathcal{S}_k$ satisface la condición de Palais-Smale en el nivel a (resp. niveles en $[a,b]$) si la condición anterior es válida si nos retringimos a sucesiones (x_n, T_n) con $lim_n \mathcal{S}_k(x_n, T_n) = a$ (resp. $lim_n \mathcal{S}_k(x_n, T_n) \in [a,b]$).

Con el fin de dar condiciones para verificar la validez de la condición de Palais-Smale para $\mathcal{S}_k$ sobre el espacio Λ_0, necesitamos algunos resultados preliminares.

Lema 4. *Sea el Lagrangiano $L(x,v) = \frac{1}{2}|v|_x^2 + \theta_x(v)$. Dado cualquier sistema coordenado, existen numeros positivos δ, B, a y D tales que*

$$a|v-w|^2 \leq (L_v(x,v) - L_v(y,w)) \cdot (v-w) + [B(|v| + |w|) + D]\, |v-w|\, d(x,y)$$

para x, y con $d(x,y) < \delta$.

Prueba: Sea δ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces x, y pertenecen a la misma carta coordenada de M. Así podemos pensar que L esta definida en $\mathbb{R}^{2n}$.

$$\int_0^1 (v-w)\cdot L_{vv}(t(x,v)+(1-t)(y,w))\cdot(v-w)dt$$

$$= (L_v(x,v)-L_v(y,w))\cdot(v-w) - \int_0^1 (v-w)\cdot L_{xv}(t(x,v)+(1-t)(y,w))\cdot(x-y)dt.$$

Ahora, como $L(x,v) = \frac{1}{2}|v|_x^2 + \theta_x(v)$ entonces $|L_{xv}(x,v)| \leq B_1|v|_x + D_1$ para constantes positivas B_1, D_1 y por convexidad de L, existe $a > 0$ tal que

$$u \cdot L_{vv} \cdot u \geq a|u|_x \text{ para todo } u.$$

Así podemos obtener el lema pasando a la carta coordenada dada. ■

Lema 5. *Si $x_n \in \Lambda_0, \mathcal{S}_k(x_n,T_n) < A_1$ y $T_n \leq A_2$ entonces existe $B > 0$ tal que*

$$\frac{l_n^2}{T_n} \leq \int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2 dt = \frac{1}{T_n}\int_0^1 |\dot{x}_n|^2 dt < B,$$

donde $l_n := long(y_n), y_n(t) = x_n(\frac{t}{T_n})$. En particular si $T_n \to 0$, entonces $\lim_n l_n = 0$.

Prueba: Sea $l_n := \text{long}(y_n)$. Por la desigualdad de Schwartz

$$l_n^2 = (\int_0^{T_n} |\dot{y}_n| dt\ )^2 \leq T_n \cdot \int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2 dt,$$

esto prueba la primera desigualdad. Ahora, dado que el lagrangiano $L(x,v) = \frac{1}{2}|v|_x^2 + \theta_x(v)$ es superlineal y las acciones $\mathcal{S}_k(x_n,T_n)$ están acotadas tenemos que la segunda desigualdad se sigue.

Estamos interesados en estudiar la validez de la condición de Palais-Smale para el funcional de acción $\mathcal{S}_k$, el siguiente resultado nos da algunas condiciones que implican dicha condición.

Proposición 3. *Si una sucesión $(x_n,T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda_0$ satisface*

$$|\mathcal{S}_k(x_n,T_n)| < A_1, \quad \|d_{(x_n,T_n)}\mathcal{S}_k\| < \frac{1}{n} \quad y \quad 0 < liminf_n T_n < +\infty,$$

entonces existe una subsucesión convergente.

Prueba: Como M es compacta, si $(x_n,T_n) \in \Lambda_0$, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $q_0 := \lim_n x_n(0) = \lim_n x_n(1)$ existe y que $T := \lim_n T_n \in \mathbb{R}^+$ existe. Además también podemos suponer que $d(x_n(0), q_0) < \delta$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeño.

Sea $y_n(t) := x_n(\frac{t}{T_n})$ y sean $\alpha_n : [0,1] \to M$ geodésicas que unen $\alpha_n(0) := q_0, \alpha_n(1) = x_n(0)$ y $\beta_n : [T_n+1, T+3] \to M$ curvas geodésicas tales que $\beta_n(T_n+1) = y_n(T_n), \beta_n(T+3) = q_0$, entonces $|\dot{\alpha}_n| \leq 1$ y $|\dot{\beta}_n| \leq 1$. Definimos

$$w_n(t) := \begin{cases} \alpha_n(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ y_n(t-1) & \text{si } 1 \leq t \leq T_n+1, \\ \beta_n(t) & \text{si } T_n+1 \leq t \leq T+3. \end{cases}$$

Entonces estas curvas cerradas $w_n : [0, T+3] \to M$ están basadas en q_0, y sus acciones est
an uniformente acotadas. Ahora por los mismos argumentos usados en la prueba del teorema de Tonelli's y por el teorema de Arzelá-Ascoli existe una subsucesión convergente de w_n en la topología C^0 (ver [18], [8]). De ahora en adelante trabajaremos con esta subsucesión convergente de $\{x_n\}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el punto límite de la subsucesión $\{x_n\}$ está contenido en una carta coordenada.

Tomando $z_n := \frac{x_n}{T_n}$. Como $T < \infty$ por los argumentos del lema 5 existe $K > 0$ tal que

$$\|x_n\|_{\mathcal{H}^1} \leq K \text{ y } \|z_n\|_{\mathcal{H}^1} \leq K.$$

Como $lim_n \|d_{(x_n,T_n)}\mathcal{S}_k\|_{\mathcal{H}^1\times\mathbb{R}} = 0$. Se tiene que

$$|\int_0^1 [T_n L_x(x_n,\dot{z}_n) - T_m L_x(x_m,\dot{z}_m)](x_n - x_m) + [L_v(x_n,\dot{z}_n) - L_v(x_m,\dot{z}_m)](\dot{x}_n - \dot{x}_m)\ ds| < \frac{\epsilon}{4},$$

para $n, m > N$. Como $L(x,v) = \frac{1}{2}|v|_x^2 + \theta_x(v)$ entonces existe una constante $c > 0$ tal que $\|L_x\| < c|v|_x^2$. Por lo tanto el primer término está acotado por $[T_n + T_m](cK^2)\|x_n - x_m\|_\infty$, así el segundo término es pequeño.

Del lema 4 y las observaciones anteriores tenemos

$$a\int_0^1 |\dot{z}_n - \dot{z}_m|^2\ ds \leq \frac{\epsilon}{2} + B\int_0^1 (|\dot{z}_n| + |\dot{z}_m|)|\dot{z}_n - \dot{z}_m||x_n - x_m| + D|\dot{z}_n - \dot{z}_m||x_n - x_m|\ ds.$$

Lo cual implica

$$a\|\dot{z}_n - \dot{z}_m\|^2_{\mathcal{L}^2} \leq \frac{\epsilon}{2} + (4BK^2 + 2KD)\|x_n - x_m\|_\infty.$$

Dado que x_n converge en la topología C^0, la desigualdad anterior implica que z_n converge en la norma $\mathcal{H}^1$, de aquí que la sucesión x_n también converge en la norma $\mathcal{H}^1 \times \mathbb{R}^+$, pues $T \neq 0$ como deseabamos probar. ■

Obsérvese que, por el lema 5, no es difícil probar que si una sucesión $(x_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda_0$ satisface

$$|\mathcal{S}_k(x_n, T_n)| < A_1, \quad \|d_{(x_n,T_n)}\mathcal{S}_k\| < \frac{1}{n} \quad y \quad \lim_n T_n = 0,$$

entonces $k \leq e_0$.

3.4 Método minimax.

Sea G un conjunto abierto en una variedad Riemánniana y $f : G \to \mathbb{R}$ una función C^2. Dado que el campo vectorial $-\nabla f$ no necesariamente es Lipschitz, entonces el flujo gradiente ψ_s de $-f$ podría estar definido sólo localmente. Dado $p \in G$ definimos

$$\alpha(p) := \sup\{\ t > 0 \mid s \to \psi_s(p) \text{ es definido en } s \in [0,t]\ \}.$$

Diremos que el flujo ψ_s es *relativamente completo* sobre $[a \leq f \leq b]$ si para $a \leq f(p) \leq b$, se tiene que $\alpha(p) = +\infty$ o $f(\psi_s(p)) \leq a$ para algún $0 \leq s < \alpha(p)$.

Diremos que una función $\tau : G \to [0, +\infty)$ es un *tiempo admisible* si τ es diferenciable y $0 \leq \tau(x) < \alpha(x)$ para todo $x \in G$. Dada una función tiempo admisible τ, y un subconjunto $F \subset G$, definimos

$$F_\tau := \{\ \psi_{\tau(x)}(x) \mid x \in F\ \}.$$

Dado un subconjunto cerrado $B \subset G$, decimos que la función f satisface la condición de Palais-Smale restricta a B en el nivel c, $(PS)_{c,B}$ si cualquier sucesión de Palais-Smale $\{x_n\}_n \subset B$ en el nivel c tiene una subsucesión convergente.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos $F \subset G$. Diremos que $\mathcal{F}$ es *invariante hacia adelante* si $F_\tau \in \mathcal{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}$ y cualquier tiempo admisible τ. Consideramos

$$c(f, \mathcal{F}) := \inf_{F\in\mathcal{F}} \sup_{x\in F}\{f(x)\}.$$

El siguiente teorema nos da un Paso de Montaña, ver [7], corolario 5.5 para una prueba.

Proposición 4. *Sea G una variedad Riemanniana C^2 y $f : G \to \mathbb{R}$ una función C^2. Sea $p, q \in G$ y*

$$c := \inf_{\Gamma\in C(p,q)} \sup_{s\in[0,1]} \{\ f(\Gamma(s))\ \},$$

donde $C(p,q) := \{\ \Gamma : [0,1] \to G \mid \Gamma \in C^0, \Gamma(0) = p, \Gamma(1) = q\ \}$.
Supongamos que

i).- $c \in \mathbb{R}$.

ii).- El flujo gradiente de $-f$ es relativamente completo sobre $|f - c| \leq \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$.

iii).- $max\ \{f(p), f(q)\} < c$.

iv).- Existen subconjuntos cerrados $B \subset A \subset G$ tales que

a).- f satisface la condición de Palais-Smale restricta a A, en el nivel c.

b).- Para algún $\epsilon_1 > 0$, A contiene la ϵ_1-vecindad de B.

c).- Para todo $\epsilon > 0$, Existen $\lambda \in (0, \epsilon)$ y $\Gamma \in C(p,q)$ tales que

$$\Gamma([0,1]) \subset (B \cap [f \leq c + \epsilon]) \cup [f \leq c - \lambda].$$

Entonces c es un valor crítico de f. Además el conjunto

$$K_{c,A} := \{\ x \in G \mid x \in A, df(x) = 0, f(x) = c\ \},$$

contiene un punto el cual no es un minimizante local estricto.

Ahora estudiaremos la condición de completez relativa para el funcional de acción $\mathcal{S}_k$.

Lema 6. *Para todo $k \in \mathbb{R}$, si $0 \notin [a,b] \subset \mathbb{R}$, entonces el flujo gradiente de $-\mathcal{S}_k$ sobre Λ_0 es relativamente completo sobre $[a \leq \mathcal{S}_k \leq b]$.*

Prueba: Denotemos por $f := \mathcal{S}_k : \Lambda_0 \to \mathbb{R}$ y sea ψ_t el flujo gradiente de $-f$. Entonces

$$f(\psi_{t_1}) - f(\psi_{t_2}) = -\int_{t_1}^{t_2} \nabla f(\psi_s(p)) \cdot \nabla f(\psi_s(p))\, ds = \int_{t_1}^{t_2} \| \nabla f(\psi_s(p))\|^2\, ds.$$

Ahora por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos

$$d(\psi_{t_1}(p), \psi_{t_2}(p))^2 \leq (\int_{t_1}^{t_2} \| \nabla f(\psi_s(p))\|\, ds\,)^2 \leq |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} \| \nabla f(\psi_s(p))\|^2\, ds.$$

Así

$$d(\psi_{t_1}(p), \psi_{t_2}(p))^2 \leq |t_2 - t_1||f(\psi_{t_1}) - f(\psi_{t_2})|.$$

Consideremos $[0, \alpha)$ el intervalo maximal de definición de $t \to \psi_t(p)$. Supongamos que $a \leq f(\psi_t(p)) \leq b$ para $0 \leq t < \alpha < +\infty$. Por la desigualdad anterior, para cualquier sucesión $s_n \nearrow \alpha$ tenemos que $(x_{s_n}, T(s_n)) = \psi_{s_n}(p)$ es una sucesión de Cauchy en $\Lambda_0 \cap [a \leq f \leq b]$. Entonces

$$T_0 = \lim_{s \nearrow \alpha} T(s) \in [0, +\infty) \text{ existe.}$$

Si $0 < T_0 < +\infty$, como todas las sucesiones $\{x_n\}$ son de Cauchy, entonces $q = \lim_{s \nearrow \alpha} \psi_s(p) = \psi_\alpha(p)$ existe. Dado que f es C^1, podemos extender la solución $t \to \psi_t(p)$ en $t = \alpha$. Esto contradice la definición de α.

Si $T_0 = 0$, entonces existe una sucesión $s_n \nearrow \alpha$ tal que $\frac{d}{ds}T(s_n) \leq 0$. Escribiendo $T_n := T(s_n)$, $y_n(t) := x_{s_n}(\frac{t}{T_n})$. Entonces

$$0 \geq \frac{d}{ds}T(s_n) = -\frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial T} = -k + \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} E(y_n, \dot{y}_n)\, ds = -k + \frac{1}{2T_n}\int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2\, ds.$$

Como $\lim_n T_n = 0$, tenemos que $\lim_n \int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2\, ds = 0$. Del lema 3 se tiene que

$$|\int_{y_n} \theta| \leq b l_n^2 \leq b \cdot T_n \int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2\, ds,$$

Así

$$|\mathcal{S}_n(x_{s_n}, T_n)| \leq (bT_n + \frac{1}{2})\int_0^{T_n} |\dot{y}_n|^2\, ds + kT_n.$$

Por lo tanto $\lim_n \mathcal{S}_k(x_{s_n}, T_n) = 0$. Lo cual contradice la hipótesis que $\mathcal{S}_k(x_{s_n}, T_n) \in [a, b]$ y $0 \notin [a, b]$. ■

El siguiente resultado nos da la validez genérica de la condición de Palais-Smale como una consecuencia del paso de montaña para $\mathcal{S}_k$.

Proposición 5. *([7], Prop. 6.1) Dadas $\gamma_0, \gamma_1 \in \Lambda_0$, para $k \in \mathbb{R}$, sea*

$$c(k) := \inf_{\Gamma \in \mathcal{C}(\gamma_0, \gamma_1)} \sup_{s \in [0,1]} \{\, \mathcal{S}_k(\Gamma(s))\, \},$$

donde $\mathcal{C}(\gamma_0, \gamma_1) := \{\, \Gamma : [0,1] \to \Lambda_M \mid \Gamma \in C^0, \Gamma(0) = \gamma_0, \Gamma(1) := \gamma_1 \,\}$.

Supongamos que para algún $k_0 \in \mathbb{R}$ tenemos que $\lim_{k \to k_0^+} c(k_0) \neq 0$ y

$$c(k_0) > max\{\, \mathcal{S}_{k_0}(\gamma_0), \mathcal{S}_k(\gamma_1)\, \}.$$

Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para Lebesgue casi todo $k \in (k_0, k_0 + \epsilon)$, $c(k)$ es un valor crítico para $\mathcal{S}_k$ sobre Λ_0, con un punto crítico el cual no es un minimizante local estricto.

Prueba: Dado que la función $k \to c(k)$ es no-decreciente. Como $\mathcal{S}_k$ es continua sobre k existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\max\{\, \mathcal{S}_k(\gamma_0), \mathcal{S}_k(\gamma_1)\, \} < c(k_0) \leq c(k_0) \neq 0 \;\; \forall\, k_0 < k < k_0 + \epsilon. \tag{3.1}$$

Así, por un Teorema de Lebesgue existe un subconjunto de medida total de $k_0 < k < k_0 + \epsilon$ en el cual $c(\cdot)$ es localmente Lipschitz. Dado k en este conjunto y M_k su constante Lipschitz. Sea $B \subset A \subset \Lambda_0$ los subconjuntos cerrados definidos por

$$B := \{\, (x,T) \in \Lambda_0 \mid T \leq M_k + 2\, \}, \quad A := \{\, (x,T) \in \Lambda_0 \mid T \leq M_k + 3\, \}.$$

De la condición (3.1) $c(k) \neq 0$ por la proposición 3 tenemos que $\mathcal{S}_k$ satisface la condición de Palais-Smale restricta a A, en el nivel $c(k)$.

Afirmación: Existe $\Gamma \in \mathcal{C}(\gamma_0, \gamma_1)$, $\epsilon > 0$ y $\lambda > 0$ tal que

$$\Gamma([0,1]) \subset (B \cup (\mathcal{S}_k \leq c(k) - \lambda)) \cap (\mathcal{S}_k \leq c(k) + \epsilon).$$

Suponiendo válida la afirmación de la proposición 4, tenemos que $\mathcal{S}_k$ tiene un punto crítico en A el cual no es un minimizante local estricto, esto prueba la proposición 5.

Prueba de la Afirmación: Fijando k tal que $c(\cdot)$ es localmente Lipschitz en k con constante Lipschitz M_k, tomamos una sucesión $k_n \geq k$ con $k_n \to k$, entonces $\mathcal{S}_{k_n}, \mathcal{S}_k$ tienen un paso de montaña con el mismo conjunto de trayectorias en $\mathcal{C}(\gamma_0, \gamma_1)$. Tomemos $\Gamma_n \in \mathcal{C}(\gamma_0, \gamma_1)$ tal que

$$\max_{s \in [0,1]} \mathcal{S}_{k_n}(\Gamma_n(s)) \leq c(k_n) + (k_n - k).$$

Ahora como $c(\cdot)$ es continua en k y $k \to \mathcal{S}_k(\gamma)$ es creciente, entonces

$$\max_{s\in[0,1]} \mathcal{S}_k(\Gamma_n(s)) \leq \max_{s\in[0,1]} \mathcal{S}_{k_n}(\Gamma_n(s)) \leq c(k_n) + (k_n - k) \to c(k).$$

Si $s \in [0,1]$ es tal que $\mathcal{S}_k(\Gamma_n(s)) > c(k) + (k_n - k)$, entonces $\Gamma_n(s) = (x,T)$ donde

$$T := \frac{\mathcal{S}_{k_n}(\Gamma_n(s)) - \mathcal{S}_k(\Gamma_n(s))}{k_n - k} \leq M_k + 2,$$

para n suficientemente grande. Ahora dado $\epsilon > 0$, sea n tal que $c(k_n) - c(k) + (k_n - k) < \epsilon$, y $\lambda := k_n - k$ entonces tenemos

$$\Gamma_n([0,1]) \subset (B \cup (\mathcal{S}_k \leq c(k) - \lambda)) \cap (\mathcal{S}_k \leq c(k) + \epsilon),$$

lo cual prueba la afirmación.

Finalmente damos la prueba del teorema C.

Prueba del Teorema C: Sea $0 = e_0 < k < c(L)$, por definición de $c(L)$ existe una curva cerrada (x,T) en M con homotopía trivial, tal que $\mathcal{S}_k(x,T) < 0$. Por el Teorema B y proposición 5 tenemos que, para casi todo $k \in (0, c(L))$ existe un punto crítico de $\mathcal{S}_k$ en Λ_0, esto es una órbita periódica con homotopía trivial y de $(L+k)$-acción positiva.

Bibliografía

[1] Aubry S, *The Devil's staircase transformation in incommensurate lattice.* The Riemmann problem, complete Integrability and Aritmetic Applications (lectures Notes in Math., 925). eds chodnovsky and chodnovsky. Springer, Berlin 1982, pp 221-245.

[2] Aubry S, P. Y. Le daeron, The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions, *I. Phys. D.* 8(1983),381-422.

[3] Bangert, Victor, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 2(1994),no.1,49-63.

[4] Bangert, Victor, Minimal Measures and Minimizing closed normal One-Currents *GAFA*. Vol. 9 (1999), 413-427.

[5] Burago D. Yu., Ivanov S. *Riemannian tori without conjugate points are flat*, GAFA 4 (1994) 3, 259-269.

[6] Burago D. Yu., Ivanov S. and Kleiner B. *On the structure of the stable norm of periodic metrics.* Math. Res. Lett. 4(1997), 791-808.

[7] G. Contreras. The Palais-Smale condition on contact type energy levels for convex Lagrangian systems. *Preprint*, arXiv:math.DS/0304238.

[8] G. Contreras, R. Iturriaga. Global minimizers of autonomous lagrangians *22 Coloquio Brasileiro de Matematica*, IMPA, Rio de Janeiro,1999.

[9] G. Contreras, J. Delgado, R. Iturriaga, Lagrangians flows: the dynamics of globally minimizin orbits II, *Bol. Soc. Bras. Mat.* Vol. 28, N.2, (1997) 155-196.

[10] G. Contreras, R. Iturriaga. P. Paternain, M. Paternain. The Palais-Smale condition and Mañé's critical values, *Ann. Henri Poincaré* (2000), 655-684.

[11] G. Contreras, R. Iturriaga and H. Sánchez-Morgado. Weak solutions of the Hamilton-Jacobi equation for time periodic Lagrangians, Preprint CIMAT 2000.

[12] Delgado J. Vertices of the action function of a Lagrangian System. P.h. D. Thesis, IMPA, 1993.

[13] M.J. Dias Carneiro, On the Minimizing Measures of the action of autonomous Lagrangians *Non Linearity*. 8 (1995), 1077-1085.

[14] Fathi, A. Théorème KAM faible et Théorie de Mather sur les Systems Lagrangiens *C.R. Acad. Sci. Paris t.* 324 série (1997) 1043-1046.

[15] Fathi, A. Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics, *Lectures Notes, ENS Lyon,* 1998.

[16] Federer, H. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag (1996).

[17] Jeanjean L. and Toland J., Bounded Palais-Smale mountain-pass sequences, *C. R. Acad. sci. Paris* Ser. I Math. 237 (1998), no. 1, 23-28.

[18] Ricardo Mañe, *Global Variational Methods in Conservative Dynamics*. IMPA.

[19] Ricardo Mañe, Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits. Reimpreso en *Bol. Soc. Bras. Mat.* Vol. 28, N. 2, (1997) 141-153.

[20] Ricardo Mañe, On the Minimizing Measures of Lagrangian Dynamical Systems *Non Linearity*. 5 (1992), 623-638.

[21] Massart, D. On Aubry sets and Mather's Action Functional, *Israel journal of mathematics*, Vol. 134, (2003), 155-171.

[22] Mather, J. Action minimizing measures for positive definite Lagrangian Systems. *Math. Z.* 201 (1991) 169-207.

[23] Mather, J. Differentiability of the Minimal Average Action as a Function of the Rotation Number *Bol. Soc. Bras. Mat.* Vol.21, No.1 (1990) 57-70.

[24] Mather, Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus *Topology*. 21, No.1 (1982) 457-467.

[25] Moser, J. Monotone twist mappings and the Calculus of Variations *Erg. Th. Dyn. Syst.* 6(1986) 401-413.

[26] Steve Smale, Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem, *Ann. of Math.* 80 (1964), 382-396.

[27] Michael Struwe, Existence of periodic solutions of Hamiltonian systems on almost every energy surface, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* (N.S.) 20 (1990), no. 2, 49-58.

[28] M. Struwe, Variational Methods, *Springer-Verlag* third ed., vol. 34, Berlin, 2000, Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.

[29] Yakov B. Pesin, *Dimension Theory in Dynamical Systems*, Chicago Lectures in Math. (1997).