Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

Representaciones tipo fórmula de Tanaka del tiempo local de superprocesos

Tesis que presenta:

José Villa Morales

para obtener el grado de Doctor en Ciencias
con orientación en Probabilidad y Estadística

Director de tesis:

Profesor José Alfredo López Mimbela

Junio del 2002, Guanajuato, Gto., México

La tesis es dedicada a mi esposa

Nora Nelly

por su comprensión y constante apoyo; a mis hijos

José Ramón y José Miguel

como un modesto ejemplo de superación; a mi papá

Palermo

por su aliento; y a la memoria de mi abuela

María Sánchez Basave (Mita).

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento al Doctor José Alfredo López Mimbela por haberme iniciado en los temas que se investigan en esta tesis y por su orientación durante el desarrollo de la misma.

También agradezco a la Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA) por haberme apoyado en la obtención de la beca UAAGS-99-04 de PROMEP, con la cual me fue posible llevar a cavo esta meta, y al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por los diversos apoyos brindados.

José Villa Morales

El presente trabajo es parte del proyecto de CONACyT No. 32401E, dirigido por el Profesor José Alfredo López Mimbela.

Contenido

1

Introducción general

El fin de este capítulo es introducir los resultados del presente trabajo. El concepto de superproceso, los enunciados precisos de los resultados y sus demostraciones aparecen en los capítulos subsecuentes.

1.1 El concepto de tiempo local del movimiento browniano

El propósito de la presente sección es motivar algunas nociones de tiempo local que estudiaremos para una clase de superprocesos.

Una definición heurística del tiempo local L_t^0 (en $0 \in \mathbb{R}$) del movimiento browniano real $B = \{B_t : t \geq 0\}$ está dada por

$$L_t^0 = \int_0^t \delta_0(B_s)ds, \tag{1.1}$$

donde δ_0 es la delta de Dirac en 0 (ver [54]). Nótese que (1.1) no es una definición rigurosa debido a que δ_0 no es propiamente una función. En la búsqueda de un significado riguroso de esta magnitud, P. Lévy [40] introduce la noción fundamental de tiempo local. Lévy consideró la sucesión de funciones $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ definida por

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon}1_{(-\epsilon,\epsilon)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

la cual converge a δ_0 en sentido distribucional cuando $\epsilon \to 0$. Entonces el tiempo local del movimiento browniano se define como el límite en L^2

$$L_t^0 = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^t \varphi_\epsilon(B_s)ds = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t 1_{(-\epsilon,\epsilon)}(B_s)ds. \tag{1.2}$$

La integral $\int_0^t 1_{(-\epsilon,\epsilon)}(B_s)ds$ da una medida de la cantidad de tiempo en el intervalo $[0,t]$ que el movimiento browniano B pasa en la vecindad $(-\epsilon,\epsilon)$ de 0. De esta manera el tiempo local L_t^0 es una medida de la cantidad de tiempo que el movimiento browniano "pasa en la vecindad del punto 0", de hecho este fue el nombre que originalmente Lévy le dio al tiempo local, "mesure du voisinage" [36]. La demostración dada por Lévy de la existencia de L_t^0 se basó en un estudio delicado de la estructura de los ceros de B (ver la monografía de F. Knight [37]). Por otra parte, el desarrollo del cálculo estocástico, y en particular la fórmula de Itô, permitió a H. Tanaka [59] concebir una demostración más directa de la existencia del tiempo local, dando además una fórmula para esté, a saber

$$L_t^0 = |B_t| - |B_0| - M_t, \quad \text{c.s.},$$

donde M_t es una martingala definida como la integral estocástica

$$M_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)dB_s,$$

con

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ -1, & x \leq 0. \end{cases}$$

Otra forma de definir el tiempo local es a través del tiempo de ocupación del movimiento browniano (estudiado en forma extensa en [24]), el cual se define por

$$Y_t(C) = \int_0^t 1_C(B_s)ds = \lambda\{s \in [0,t] : B_s \in C\}, \quad t \geq 0,$$

donde λ denota a la medida de Lebesgue y C pertenece a la familia $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de Borelianos de $\mathbb{R}$. El tiempo local, $\mathfrak{L}_t^x$, se define, cuando existe, como la densidad del tiempo de ocupación con respecto a la medida de Lebesgue. De esta definición del tiempo local se sigue ([12], Teorema (11.7), [53], Teorema (5.9), [51], Corolario (1.6)) que para cualquier función g Borel-medible acotada y $t > 0$,

$$\int_0^t g(B_s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathfrak{L}_t^x dx, \quad \text{c.s.} \tag{1.3}$$

L. C. G. Rogers y D. Williams [54] dan una prueba de la equivalencia entre los tiempos locales L_t^x y $\mathfrak{L}_t^x$ del movimiento browniano.

1.2 Tiempo local del superbrowniano

Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ el superbrowniano continuo en $\mathbb{R}^d$ (también llamado proceso de Dawson-Watanabe, ver la Sección 2.8).

Al igual que en la sección anterior comenzamos con una definición intuitiva del tiempo local en $0 \in \mathbb{R}^d$ del superbrowniano en $\mathbb{R}^d$,

$$L_t^0 = \int_0^t X_s(\delta_0)ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \delta_0(x)X_s(dx)ds. \tag{1.4}$$

Con el propósito de darnos idea del significado de este concepto recordemos lo siguiente. Si μ es una medida en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, el soporte de μ es el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^d$ tales que $\mu(B(x,\epsilon)) > 0$ para toda bola abierta $B(x,\epsilon)$ con centro en x y radio $\epsilon > 0$. Tomemos la sucesión $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, definida por

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{c_\epsilon} 1_{B(0,\epsilon)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.5}$$

donde c_ϵ es el volumen de $B(0,\epsilon)$. Nótese φ_ϵ converge en sentido distribucional a δ_0 cuando $\epsilon \to 0$ y por lo tanto podemos definir a L_t^0 como

$$L_t^0 = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^t X_s(\varphi_\epsilon)ds = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{c_\epsilon} \int_0^t X_s(B(0,\epsilon))ds. \tag{1.6}$$

Así, en analogía con (1.2), el límite (1.6) es una medida de la cantidad de tiempo, en el intervalo $[0,t]$, en el que 0 está en el soporte del superbrowniano X. I. Iscoe [32] empleó la sucesión (1.5) para demostrar la convergencia débil de $\{c_\epsilon^{-1} \int_0^t X_s(B(0,\epsilon))ds\}$ al tiempo local L_t^0. Más tarde, R. J. Adler y M. Lewin [3] toman una sucesión $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de funciones "suaves" que convergen en sentido distribucional a δ_0 y definen los tiempos locales aproximantes

$$L_t^{0,\epsilon} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(x)X_s(dx)ds, \quad t > 0, \ \epsilon > 0. \tag{1.7}$$

Adler y Lewin demuestran que $\left\{L_t^{0,\epsilon}\right\}_{\epsilon>0}$ converge en L^2 cuando $\epsilon \to 0$ si $d \leq 3$. Al límite, L_t^0, le llaman tiempo local del superbrowniano X. Este es el enfoque que adoptaremos para definir el tiempo local del superbrowniano y del superproceso discontinuo (α, d, β).

Otra forma de abordar el tiempo local del superbrowniano es a través de su tiempo de ocupación, concepto que fue introducido por I. Iscoe [31] en el contexto de superprocesos (α, d, β). El tiempo de ocupación de X se define como un proceso a valores medidas dado por

$$Y_t(B) = \int_0^t X_s(B)ds, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ t \geq 0. \tag{1.8}$$

En este contexto el tiempo local se define como la densidad $\mathfrak{L}_t^x$, cuando ésta existe, de $Y_t(dx)$ con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. Así

$$\int_0^t X_s(B)ds = \int_B \mathfrak{L}_t^x dx, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \tag{1.9}$$

Este concepto de tiempo local fue estudiado por S. Sugitani [58] y S. M. Krone [38].

Mencionamos además que E. B. Dynkin introdujo en [14] otro concepto de tiempo local al cual denotaremos por l_t^x. Sus resultados de existencia de tiempo local se aplican a una clase general de superprocesos continuos, que incluye al superbrowniano en $\mathbb{R}^d$.

R. E. Feldman y S. K. Iyer [19] demostraron que las nociones de tiempo local L_t y l_t son equivalentes. Por lo tanto para demostrar la equivalencia entre los tres conceptos de tiempos locales para el superbrowniano es suficiente mostrar la equivalencia de L_t y $\mathfrak{L}_t$. Este es precisamente nuestro primer resultado (ver el Teorema 3.2). La demostración de la equivalencia de los tiempos locales se basa en la siguiente representación del tiempo local:

Sean $a > 0$, $z \in \mathbb{R}^d$ y $t > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} L_t^z \;=\; & \int_{\mathbb{R}^d} G^a(x-z)\mu(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} G^a(x-z)X_t(dx) + a\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G^a(x-z)X_s(dx)ds \\ & + M_t(G^a(\cdot - z)), \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde G^a es la función de Green del movimiento browniano y M es una martingala continua con proceso creciente

$$\langle M(G^a(\cdot - z))\rangle_t = 2\int_0^t X_s((G^a(\cdot - z))^2)ds, \quad t \geq 0.$$

Usando esta representación generalizaremos la fórmula (1.9) a

$$\int_0^t X_s(f)ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)L_t^x dx, \quad \text{c.s., } t \geq 0, \tag{1.11}$$

para toda función f medible y acotada, es decir, probaremos que L_t^x es una versión de $\mathfrak{L}_t^x$ de donde se sigue la equivalencia de los tiempos locales. La representación (1.10) del tiempo local es muy similar a la obtenida por R. J. Adler y M. Lewin en [3], sin embargo, nuestra deducción de (1.10) es diferente y más simple (ver el Lema 3.1). En [4], [61] y [5] se dan otras representaciones del tiempo local.

Una aplicación más de la fórmula (1.11) está relacionada con el estudio del límite

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_0^r X_s(\psi)ds, \tag{1.12}$$

donde ψ es una función continua con soporte compacto. El método de los "cumulantes" les permite a J. T. Cox y D. Griffeath [8] demostrar que, cuando $d = 2$ y $X_0 = \lambda$, existe una variable aleatoria no degenerada, ξ, tal que el límite en (1.12) converge en distribución a $\xi \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x)dx$. Cabe destacar que este método, aparte de ser muy elaborado, no permite obtener mucha información acerca de ξ, no obstante que Cox y Griffeath lograron probar que $\mathrm{Var}(\xi) = (\ln 2)/\pi$. En el contexto de superprocesos (α, d, β) K. Fleischmann y J. Gärtner [21] demostraron que, cuando $d = \alpha/\beta$ y $X_0 = \lambda$, el límite en (1.12) converge en distribución a $\xi \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x)dx$. Su demostración se basa en un estudio del funcional de Laplace del tiempo de ocupación $\{Y_t : t > 0\}$ definido en (1.8). El método de Fleischmann y Gärtner permite determinar la función característica de ξ ([21], fórmula (6.7)). En el caso del superbrowniano daremos una demostración corta de este resultado (Teorema 3.4) y además probaremos que $\xi = L_1^0$ c.s., donde L_1^0 es el tiempo local del superbrowniano en $0 \in \mathbb{R}^d$ al tiempo 1. Nuestro resultado es consistente con lo obtenido por I. Iscoe [32], quien para obtener el límite en (1.12) estudia, también, el funcional de Laplace del tiempo de ocupación.

A fin de motivar nuestro estudio del tiempo local de autointersección (TLAI) del superproceso bi-tipo que llevaremos a cabo en la Sección 1.4, introducimos a continuación el TLAI del superbrowniano en $\mathbb{R}^d$. El TLAI del superbrowniano se define heurísticamente por

$$TLAI(B) = \int_B \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \delta_0(x-y)X_s(dx)X_r(dy)dsdr, \tag{1.13}$$

donde B es un subconjunto medible de $[0,t] \times [0,t]$ que no intersecta a la diagonal $D = \{(s,r) \in [0,\infty) \times [0,\infty) : s = r\}$. Al igual que en el caso del tiempo local, para definir rigurosamente este concepto se toma una sucesión $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de funciones suaves que se aproximen a δ_0 en sentido distribucional cuando $\epsilon \to 0$, y se considera el tiempo local de autointersección aproximante

$$TLAI_\epsilon(B) = \int_B \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(x-y) X_s(dx) X_r(dy) ds dr.$$

Se sabe [1] que el TLAI del superbrowniano existe si $d \leq 7$; la convergencia de $\{TLAI_\epsilon(B)\}_{\epsilon>0}$ es en L^2.

1.3 Tiempo local del superproceso (α, d, β)

Ahora hablaremos del tiempo local del superproceso (α, d, β). Sea X un superproceso (α, d, β). Iniciamos, al igual que antes, con la definición heurística del tiempo local (1.4). Con el propósito de formalizar el concepto de tiempo local en este caso, notamos lo siguiente:

Sea G_α^a, $a > 0$, la función de Green del proceso estable simétrico de exponente $\alpha \in (0,2]$, el cual tiene como generador infinitesimal al laplaciano fraccionario Δ_α. Sean Φ un molificador y $\Phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\Phi(\epsilon^{-1}x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\epsilon > 0$, una sucesión de funciones suaves que converge en sentido distribucional a δ_0. Consideremos la sucesión de funciones $\{\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a\}_{\epsilon>0}$, con $\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a = G_\alpha^a * \Phi_\epsilon$, donde $*$ es la convolución. Debido a que Δ_α es un operador continuo y $\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a$ converge en sentido distribucional a G_α^a cuando $\epsilon \to 0$ se obtiene que

$$f_\epsilon(x) = (-\Delta_\alpha + a)\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

converge en sentido distribucional a δ_0 cuando $\epsilon \to 0$. Esto se sigue de que la función G_α^a es solución de la ecuación distribucional

$$(-\Delta_\alpha + a)v = \delta_0.$$

Así, es razonable definir al tiempo local aproximante como

$$L_t^{0,\epsilon} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f_\epsilon(x) X_s(dx) ds, \quad t > 0,\ \epsilon > 0. \tag{1.14}$$

(Ver la expresión (1.7)). Esta manera de definir al tiempo local aproximante fue motivada por [2], en donde Adler y Lewin introducen una idea similar para definir el tiempo local de autointersección aproximante de superprocesos $(\alpha, d, 1)$, que son superprocesos continuos que poseen momentos finitos de cualquier orden.

Un inconveniente que comparten los enfoques conocidos del tiempo local de superprocesos (siendo la excepción el trabajo de M. Lewin [41]) es en el requerimiento de que el superproceso bajo consideración posea momentos finitos de cualquier orden.

Dicho requerimiento circunscribe la aplicabilidad de esos enfoques al ámbito de superprocesos continuos, excluyendo al superproceso (α, d, β) con $\beta < 1$, el cual es un superproceso discontinuo que posee momentos finitos sólamente de orden $1+\gamma$, con $0 \leq \gamma < \beta$.

Como consecuencia, no podemos esperar que los tiempos locales aproximantes $\{L_t^{0,\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ definidos en (1.14) converjan en L^2. En lugar de ello mostraremos que tal sucesión converge en L^1 a lo que llamaremos tiempo local del superproceso (α, d, β). Veremos que esto es posible cuando $d < \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\alpha$ y $X_0 = \mu$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y con densidad acotada (ver el Teorema 3.1).

Por otra parte, K. Fleischmann demuestra en [22] que para dimensiones $d < \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\alpha$ la medida de ocupación $Y(\cdot) = \{\int_0^t X_s(\cdot)ds : t \geq 0\}$ del superproceso (α, d, β) X tiene densidad con respecto a la medida de Lebesgue. El método de Fleischmann se basa en el estudio de la ecuación de evolución

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) = \Delta_\alpha v(t,x) - v^{1+\beta}(t,x) + \theta(x) \tag{1.15}$$

donde $v(0,x) = \phi(x) \geq 0$ y $\theta \geq 0$ es una función generalizada.

Una ventaja de nuestro trabajo con respecto al enfoque de [22] es que damos una representación tipo fórmula de Tanaka del tiempo local. Dicha representación tiene la particularidad de incluir un término en el cual se incorpora la discontinuidad del superproceso (α, d, β) si $\beta < 1$. Además, creemos que esta técnica de demostración de existencia del tiempo local nos permitirá abordar casos más generales generales, como por ejemplo el de superprocesos que poseen únicamente primer momento finito.

Cabe mencionar que nuestro resultado extiende el trabajo de M. Lewin [41], quien demuestra la existencia del tiempo local en el caso $d = 1$ y $\alpha = 2$. Queda pendiente demostrar que la densidad de la medida de ocupación obtenida por K. Fleischmann [22] coincide o es una versión del tiempo local obtenido como límite de tiempos locales aproximantes.

1.4 Tiempo local y tiempo local de autointersección del superproceso bi-tipo

Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ el superproceso bi-tipo (ver la Sección 2.8). X es un superproceso con espacio de estados las medidas de Borel finitas en $\{1,2\} \times \mathbb{R}^d$, con proceso básico $\xi = \{\xi_t : t \geq 0\}$. Sean $J_s((k,x),(j,y))$, $s > 0$, las densidades de transición de ξ. Nótese que la definición (1.13) del TLAI del superbrowniano involucra una diferencia de vectores. Por lo tanto, no tendría sentido tratar de definir el TLAI para el superproceso bi-tipo igual que en (1.13) debido a que en nuestro espacio $\{1,2\} \times \mathbb{R}^d$ no se tiene una estructura de espacio vectorial. A fin de motivar las subsecuentes definiciones veamos las siguientes relaciones.

Sea δ_z la función delta de Dirac en $z \in \mathbb{R}^d$. Por la propiedad de tamización de δ tenemos, para $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada, que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta_z(x) f(x) dx = f(z),$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \delta_0(x-y) f(x,y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \delta_x(y) f(x,y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x,x) dx. \end{aligned}$$

Siguiendo el enfoque de [14] se definen los funcionales lineales $\delta_{(i,z)}$ y δ^2 por

$$\int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d} \delta_{(i,z)}(k,x) f(k,x) m(d(k,x)) = f(i,z),$$

y

$$\begin{aligned} &\int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d}\int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d} \delta^2((k,x),(j,y)) f((k,x),(j,y)) m(d(k,x)) m(d(j,y)) \\ &\qquad = \int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d} f((k,x),(k,x)) m(d(k,x)), \end{aligned}$$

donde m es una medida en $\{1,2\} \times \mathbb{R}^d$ que especificaremos más adelante y respecto a la cual las probabilidades de transición $P(\xi_s \in \cdot \,|\xi_0 = (k,x))$ son absolutamente continuas con densidades $J_s((k,x),\cdot)$, $s > 0$, $(k,x) \in \{1,2\} \times \mathbb{R}^d$.

En analogía con (1.4) y (1.13) se define heurísticamente el tiempo local de X en (i,z) por la fórmula

$$L_t^{(i,z)} = \int_0^t \int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d} \delta_{(i,z)}(k,x) X_s(dm(k,x)) ds, \tag{1.16}$$

y el TLAI por la fórmula

$$(TLAI)(B) = \int_B \int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d} \int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d} \delta^2((k,x),(j,y)) X_r(dm(k,x)) X_s(dm(j,y)) dr ds, \tag{1.17}$$

donde $B \in \mathcal{B}([0,t]^2)$. En [14] Dynkin da un significado riguroso a las expresiones (1.16) y (1.17) basándose en representaciones de funcionales de superprocesos por medio de integrales estocásticas múltiples (ver la Sección 2.9 de esta tesis). Sea $\Lambda = [0,u]$ un intervalo fijo y

$$\begin{aligned} G(s,(j,y);(i,z)) &= \int_\Lambda J_{t-s}((j,y),(i,z)) dt, \\ H((i,z),(l,\zeta)) &= \int_{\Lambda\times(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)} G(s,(j,y);(i,z)) G(s,(j,y);(l,\zeta)) m(d(j,y)) ds. \end{aligned}$$

Los siguientes resultados se demuestran en [14].

Teorema 1.1 *Supongamos que*
(a) ξ es un proceso derecho.
(b) La medida inicial $X_0 = \mu$ tiene densidad con respecto a m acotada.
(c) Existe $c < \infty$ tal que $\int J_s((j,y),(j',y')) m(d(j,y)) \leq c$ para cualesquiera $s \in \Lambda$, $(j',y') \in \{1,2\} \times \mathbb{R}^d$.
Si $H((i,z),(i,z)) < \infty$, entonces el tiempo local $L^{(i,z)}$ existe.

Teorema 1.2 *Supóngase que además de las condiciones (a)-(b) del Teorema 1.1 se cumple:*
(d) Para toda $r > 0$ existe una constante $c < \infty$ tal que $J_s((k,x),(j,y)) \leq c$ para cualesquiera $(k,x),(j,y) \in \{1,2\} \times \mathbb{R}^d$ y $s \in \Lambda$ tales que $s > r$.
(e) Existe $r > 0$ tal que $B \subset \{(t_1,t_2) \in \Lambda^2 : |t_1 - t_2| \geq r\}$.
Si

$$\sup_{s,(j,y)} \int_{(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)^2} G(s,(j,y);(i,z)) G(s,(j,y);(l,\zeta)) H((i,z),(l,\zeta)) m(d(i,z)) m(d(l,\zeta)) < \infty$$

entonces existe el tiempo local de autointersección $TLAI(B)$ de X.

Valiéndonos del Teorema 1.1 mostraremos que el tiempo local del superproceso bi-tipo existe si $d < 2\min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ (ver el Teorema 5.1) y además daremos una representación tipo fórmula de Tanaka del tiempo local (ver el Teorema 6.1). Hay una característica de esta representación que vale la pena subrayar. La representación del tiempo local en el caso monotipo (ver (3.7)) involucra al parámetro $a > 0$ y dicha representación es cierta para cualquier $a > 0$. En contraste, en la representación del tiempo local del superproceso bi-tipo (ver (5.2)) aparece un operador, $\vartheta^{(i)}$, y éste queda especificado de manera única.

Finalmente, haremos uso del Teorema 1.2 para demostrar que el tiempo local de autointersección del superproceso bi-tipo existe si $d < 4\min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ (ver el Teorema 5.3).

1.5 Organización de la tesis

En el Capítulo 2 introducimos notaciones y, a fin de facilitar la lectura, enunciamos algunos resultados conocidos de Análisis de los cuales haremos uso frecuente. En la penúltima sección de ese capítulo presentamos una breve descripción de los distintos tipos de superprocesos que consideramos en este trabajo.

En el Capítulo 3 se obtiene una representación del tiempo local del superbrowniano, y esta representación se emplea para demostrar que $\int_0^t X_s(f)ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)L_t^x dx$, c.s. Como una aplicación de este resultado mostraremos la equivalencia entre las distintas definiciones mencionadas del tiempo local del superbrowniano. También demostramos que si $X_0 = \lambda$ y $d = 2$, entonces $r^{-1}\int_0^{rt} X_s(\psi(\cdot - r^{1/2}y))ds$ converge en distribución a $L_t^y \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x)dx$ cuando $r \to \infty$.

El Capítulo 4 lo iniciamos notando que la función de Green, G_α^a, de un movimiento estable simétrico de exponente α, está en $L^{1+\beta}(\mathbb{R}^d, dx)$ si $d < (1 + 1/\beta)\alpha$. Luego usamos una descomposición tipo Lévy-Itô del superproceso (α, d, β) para demostrar que su tiempo local existe si $G_\alpha^a \in L^{1+\beta}(\mathbb{R}^d, dx)$.

En la Sección 5.1 enunciamos los resultados referentes al tiempo local, fórmula de Tanaka y al tiempo local de autointersección del superproceso bi-tipo. En la Sección 5.2 obtenemos una expresión para las densidad de transición del proceso básico $\xi = \{\xi_t : t > 0\}$ y derivamos algunas fórmulas que relacionan las densidades α-estables de distintos exponentes. Dichas fórmulas permiten verificar algunas de las condiciones requeridas en los teoremas 1.1 y 1.2, de los cuales se sigue la existencia

del tiempo local y del tiempo local de autointersección del superproceso bi-tipo. Estas condiciones las verificamos en las subsecciones 5.3 y 5.5 respectivamente. Finalmente, en la subsección 5.4 demostramos la representación tipo fórmula de Tanaka del tiempo local del superproceso bi-tipo.

2

Información Preliminar

El propósito del presente capítulo es introducir notación y enunciar algunos resultados relevantes para el desarrollo de la tesis.

2.1 El espacio de estados de los superprocesos

Sea E un espacio polaco, es decir, E es un espacio métrico, separable y completo.

Denotaremos por $\mathcal{B}(E)$ a la σ-álgebra de Borel en E, y por $M_f(E)$ al espacio de las medidas finitas en $(E, \mathcal{B}(E))$ dotado de la topología de convergencia débil.

La integral de una función medible f con respecto a una medida μ la denotaremos por $\mu(f)$, es decir,

$$\mu(f) \doteq \int f(x)\mu(dx),$$

donde $\doteq$ significa "por definición".

Casos particulares de E, con los cuales trabajaremos, son los siguientes: el espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$ de dimensión d con el producto interno

$$x \cdot y \doteq \sum_{i=1}^{d} x_i y_i, \quad x = (x_1, ..., x_d),\ y = (y_1, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d,$$

y norma $|x| \doteq (x \cdot x)^{1/2}$. Denotaremos por $\lambda(dx) = dx$ a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. Otro espacio que consideraremos es el espacio $\{1,2\} \times \mathbb{R}^d = \{(i,x) : i = 1,2,\ x \in \mathbb{R}^d\}$ con la distancia $d((k,x),(j,y)) \doteq \max\{|k-j|, |x-y|\}$.

2.2 Espacios de funciones

La norma supremo de una función $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ se define por

$$||\varphi||_\infty \doteq \sup\{|\varphi(x)| : x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Consideraremos los siguientes espacios de funciones:

$$\begin{aligned} B(\mathbb{R}^d) &\doteq \{\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \varphi \text{ Borel medible}\}, \\ B_b(\mathbb{R}^d) &\doteq \{\varphi \in B(\mathbb{R}^d) : ||\varphi||_\infty < \infty\}, \\ C(\mathbb{R}^d) &\doteq \{\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \varphi \text{ es continua}\}, \\ C_b(\mathbb{R}^d) &\doteq \{\varphi \in C(\mathbb{R}^d) : ||\varphi||_\infty < \infty\}, \\ L^p(\mathbb{R}^d, dx) &\doteq \left\{\varphi \in B(\mathbb{R}^d) : ||f||_{L^p} \doteq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty\right\}. \end{aligned}$$

Por $\mathcal{S}_d$ denotamos al espacio de Schwartz de las funciones rápidamente decrecientes en el infinito.

Sea Λ un intervalo en $\mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$. Por $D_\Lambda(E)$ denotamos al espacio de todas las funciones $\omega : \Lambda \to E$ continuas por la derecha con límites por la izquierda (funciones càdlàg) dotado de la topología de Skorohod.

Si $F(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de funciones $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, definimos

$$F(\{1,2\} \times \mathbb{R}^d) \doteq \{\varphi : \{1,2\} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \varphi(i, \cdot) \in F(\mathbb{R}^d),\ i = 1, 2\}.$$

Si $E = \mathbb{R}^d$ o $E = \{1,2\} \times \mathbb{R}^d$ y $F(E)$ es un espacio de funciones real-valuadas definidas en E, denotaremos

$$\begin{aligned} F(E)_\pm &\doteq \{\varphi \in F(E) : \pm\varphi \geq 0\}, \\ F(E)_c &\doteq \{\varphi \in F(E) : \varphi \text{ tiene soporte compacto}\}. \end{aligned}$$

2.3 El proceso estable simétrico de exponente α

Sea $\xi = \{\xi_t : t \geq 0\}$ un proceso estable simétrico en $\mathbb{R}^d$ de exponente $0 < \alpha \leq 2$ (ver K. Itô y H. P. McKean [33] o W. Feller [20]). ξ es un proceso de Markov espacialmente homogéneo con densidades de transición $q_t^{(\alpha)}$, $t > 0$, dadas por

$$q_t^{(\alpha)}(x,y) \doteq q_t^{(\alpha)}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(iz \cdot (x-y) - t|z|^\alpha) dz, \quad x, y \in \mathbb{R}^d. \qquad (2.1)$$

Cuando $\alpha = 2$ la expresión (2.1) se reduce a

$$q_t(x,y) \doteq q_t^{(2)}(x,y) = q_t^{(2)}(x-y) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x-y|^2/4t},$$

que son las densidades de transición de un movimiento browniano con varianza 2. La función característica de $q_t^{(\alpha)}$ es

$$\widehat{q_t^{(\alpha)}}(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y} q_t^{(\alpha)}(y) dy = e^{-t|x|^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \qquad (2.2)$$

A continuación enunciamos algunas propiedades de las densidades de transición $q_t^{(\alpha)}$. La densidad $q_t^{(\alpha)}$ es autosimilar de índice α [55], esto significa que

$$q_t^{(\alpha)}(x) = t^{-d/\alpha} q_1^{(\alpha)}(t^{-1/\alpha} x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \qquad (2.3)$$

Se cumple además la desigualdad (ver [7] o [48])

$$q_1^{(\alpha)}(x) \leq \text{cte. } (1 + |x|)^{-d-\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \qquad (2.4)$$

De la propiedad de autosimilaridad de las densidades estables y (2.4) obtenemos

$$\begin{aligned} q_t^{(\alpha)}(x) &\leq \text{cte. } t^{-d/\alpha}(1 + |t^{-1/\alpha} x|)^{-d-\alpha} \\ &= \text{cte. } t^{-d/\alpha}(1 + t^{-1/\alpha}|x|)^{-d-\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

En ciertas estimaciones de densidades α-estables usaremos el siguiente teorema, cuya demostración aparece en [6] como el Teorema 2.1.

Teorema 2.1 *Sea $q_t^{(\alpha)}(x)$ una densidad α-estable simétrica en $\mathbb{R}^d$. Entonces*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{d+\alpha} q_1^{(\alpha)}(x) = \alpha 2^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{d/2+1} sen\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

donde Γ es la función gamma.

Las densidades estables tienen la propiedad de ser radialmente decrecientes (propiedad (5.1) en [6]), es decir

$$q_t^{(\alpha)}(x) \geq q_t^{(\alpha)}(y), \quad \text{si } |x| \leq |y|. \qquad (2.6)$$

2.4 El laplaciano fraccionario

Por Δ denotamos al laplaciano en $\mathbb{R}^d$, definido como el operador diferencial

$$\Delta \doteq \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

El laplaciano fraccionario (o laplaciano α), Δ_α, se define por $\Delta_\alpha \doteq -(-\Delta)^{\alpha/2}$, $0 < \alpha \leq 2$, (ver [64], [33] o [50]). Si $\alpha = 2$, por Δ_2 entenderemos a Δ. En general, si A es un operador $D(A)$ denotará su dominio.

Para cada $0 < \alpha \leq 2$, el laplaciano fraccionario Δ_α genera un semigrupo de contracción $(S_t^{(\alpha)})$, el cual está dado por

$$(S_t^{(\alpha)}\varphi)(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) q_t^{(\alpha)}(x-y)dy = (\varphi * q_t^{(\alpha)})(x), \quad \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d), \quad t > 0, \tag{2.7}$$

con $q_t^{(\alpha)}$ definida en (2.1).

Es conocido que, para $0 < \alpha < 2$, Δ_α tiene la expresión ([64], pág. 260)

$$\Delta_\alpha \varphi = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha/2)} \int_0^\infty t^{-1-\alpha/2}(S_t^{(2)} - I)\varphi dt, \quad \varphi \in D(\Delta), \tag{2.8}$$

donde I es el operador identidad. En particular, se sigue que $D(\Delta) \subset D(\Delta_\alpha)$. (Nótese que en la expresión (2.8) se usa la función gamma generalizada, ver [60], pág. 262 o [28]).

Es conocido ([3], fórmula (2.18)) que para $\varphi \in \mathcal{S}_d$,

$$\widehat{(\Delta_\alpha \varphi)}(y) = -|y|^\alpha \widehat{\varphi}(y). \tag{2.9}$$

En vista de la relación (2.9) es natural, como veremos, pensar en una generalización del operador Δ_α. Para ello recordamos que por medio de la desigualdad de Hausdorff-Young es posible definir la transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 \leq p \leq 2$ ([43], Capítulo 5). Así, para $1 \leq p \leq 2$ el operador $(-\Delta)^{\alpha/2}$ (originalmente definido en $\mathcal{S}_d$, como se indicó antes) se puede definir en $L^p(\mathbb{R}^d)$ mediante la expresión [60]

$$((-\Delta)^{\alpha/2}u)\widehat{\ }(y) \doteq |y|^\alpha \widehat{u}(y).$$

El operador $\Delta_\alpha \doteq -(-\Delta)^{\alpha/2}$ tiene la siguiente propiedad.

Lema 2.2 *Sean* $1 \leq p \leq 2$, $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *y* $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Entonces*

$$\Delta_\alpha(\varphi * \psi) = (\Delta_\alpha \varphi) * \psi.$$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned}
(\Delta_\alpha(\varphi * \psi))\widehat{\ }(y) &= -|y|^\alpha \widehat{(\varphi * \psi)}(y) \\
&= -|y|^\alpha \widehat{\varphi}(y)\widehat{\psi}(y) \\
&= (-|y|^\alpha \widehat{\varphi}(y))\widehat{\psi}(y) \\
&= \widehat{\Delta_\alpha \varphi}(y)\widehat{\psi}(y) = ((\Delta_\alpha \varphi) * \psi)\widehat{\ }(y).
\end{aligned}$$

Así, el resultado se sigue de la unicidad de la trasformada de Fourier. ■

Otra forma de demostrar el lema anterior es usando la continuidad de Δ_α, la densidad de $\mathcal{S}_d$ y que el resultado se cumple trivialmente en $\mathcal{S}_d$ (ver [29]).

2.5 Funciones de Green y molificadores

Para $a > 0$, $0 < \alpha \leq 2$ y $\epsilon \geq 0$, definamos

$$G_{\alpha,\epsilon}^a(x,y) \doteq \int_0^\infty e^{-at} q_{t+\epsilon}^{(\alpha)}(x,y)dt, \quad x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.10}$$

Establezcamos la siguiente notación

$$\begin{aligned}
G_\alpha^a &\doteq G_{\alpha,0}^a \quad 0 < \alpha < 2, \\
G_\epsilon^a &\doteq G_{2,\epsilon}^a \quad 0 < \epsilon, \\
G^a &\doteq G_{2,0}^a.
\end{aligned}$$

G_α^a es la función de Green de un proceso estable simétrico de exponente $0 < \alpha < 2$ y G^a es la función de Green del movimiento browniano. Claramente se ve que $G_{\alpha,\epsilon}^a(x,y) = G_{\alpha,\epsilon}^a(|x-y|)$.

Lema 2.3 *Si* $\epsilon \geq 0$, *entonces* $G_{\alpha,\epsilon}^a \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ *y* $\widehat{G_{\alpha,\epsilon}^a}(z) = (a + |z|^\alpha)^{-1}\exp(-\epsilon|z|^\alpha)$. *Más aún* $G_{\alpha,\epsilon}^a \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ *para* $d < 2\alpha$.

Demostración. Es claro que $G_{\alpha,\epsilon}^a \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$. Usando (2.2)

$$\begin{aligned}
\widehat{G_{\alpha,\epsilon}^a}(z) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{iz\cdot x} G_{\alpha,\epsilon}^a(x)dx \\
&= \int_0^\infty dt e^{-at} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iz\cdot x} q_{t+\epsilon}^{(\alpha)}(x)dx
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty e^{-at} e^{-(t+\epsilon)|z|^\alpha} dt = \frac{e^{-\epsilon|z|^\alpha}}{a+|z|^\alpha}.$$

Veamos que $G^a_{\alpha,\epsilon} \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$. Como consecuencia del teorema de Plancherel ([64], pág. 154, Corolario 2), basta verificar que $\widehat{G^a_{\alpha,\epsilon}} \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$. Así

$$\begin{aligned}
||\widehat{G^a_{\alpha,\epsilon}}||_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{e^{-\epsilon|z|^\alpha}}{a+|z|^\alpha} \right)^2 dz \\
&= \text{cte.} \int_0^\infty r^{d-1} \left(\frac{e^{-\epsilon r^\alpha}}{a+r^\alpha} \right)^2 dr \\
&\leq \text{cte.} \int_0^\infty r^{d-1} \left(\frac{1}{a+r^\alpha} \right)^2 dr \\
&\leq \text{cte.} \left\{ \int_0^1 r^{d-1} \left(\frac{1}{a+r^\alpha} \right)^2 dr + \int_1^\infty r^{d-1-2\alpha} dr \right\} \doteq \text{cte.}\ (I+II).
\end{aligned}$$

La integral I es finita ya que la función $r \to r^{d-1}(a+r^\alpha)^{-2}$ es continua en $[0,1]$, y la integral II es convergente si $d < 2\alpha$. ■

Lema 2.4 *Si G^a es la función de Green del movimiento browniano, entonces $\Delta G^a_\epsilon = aG^a_\epsilon - q_\epsilon$.*

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}
-aG^a_\epsilon(x) &= -a \int_0^\infty e^{-at} q_{t+\epsilon}(x) dt \\
&= \int_0^\infty q_{t+\epsilon}(x) d(e^{-at}) \\
&= q_{t+\epsilon}(x) e^{-at}|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-at} \frac{d}{dt}(q_{t+\epsilon}(x)) dt.
\end{aligned}$$

De la igualdad

$$\frac{d}{dt}(q_{t+\epsilon}(x)) = q_{t+\epsilon}(x) \left(\frac{|x|^2}{4(t+\epsilon)^2} - \frac{d}{2(t+\epsilon)} \right) = \Delta q_{t+\epsilon}(x),$$

obtenemos

$$-aG^a_\epsilon(x) = -q_\epsilon(x) - \int_0^\infty e^{-at} \Delta q_{t+\epsilon}(x) dt.$$

El resultado se sigue del teorema de la convergencia dominada. ■

Recordemos que la función de Green G^a_α es solución de la ecuación distribucional

$$(-\Delta_\alpha + a)v = \delta,$$

donde por δ entenderemos δ_0. Es decir, que si $v = G^a_\alpha$ entonces para toda función de prueba $\varphi \in \mathcal{S}_d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} [(-\Delta_\alpha + a)G^a_\alpha](x)\varphi(x)dx = \varphi(0). \tag{2.11}$$

Sea $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x)dx = a$. Para cada $\epsilon > 0$ definimos la función Φ_ϵ por

$$\Phi_\epsilon(x) \doteq \frac{1}{\epsilon^d}\Phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Tenemos el siguiente teorema ([23], Teorema (0.13))

Teorema 2.5 *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d, dx)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $f * \Phi_\epsilon \to af$ en $L^p(\mathbb{R}^d, dx)$ cuando $\epsilon \to 0$.*

Si además de $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ la función Φ es no negativa, continua, simétrica, con soporte compacto contenido en la bola unitaria $\{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| < 1\}$ y tal que $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x)dx = 1$, entonces Φ se llama molificador y las funciones Φ_ϵ se llaman aproximaciones de la unidad (es decir, de δ, [49]). Dichas aproximaciones cumplen

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_\epsilon(x)\varphi(x)dx \to \varphi(0), \quad \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d), \tag{2.12}$$

cuando $\epsilon \to 0$. Supondremos, como es usual, que nuestros molificadores cumplen $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, [1].

Para cada $\epsilon > 0$ definimos las funciones

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x) &\doteq \int_{\mathbb{R}^d} G^a_\alpha(x,z)\Phi_\epsilon(z)dz \\
&= (G^a_\alpha * \Phi_\epsilon)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Las funciones $\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}$ son una aproximación suave de la función de Green G^a_α ([23], Teorema (0.14)).

2.6 Algunos resultados de Análisis

Recordaremos a continuación algunos resultados de análisis que usaremos frecuentemente. Iniciamos con el siguiente teorema, que corresponde al Teorema (0.13) de [23]:

Teorema 2.6 *Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^d, dx)$, entonces $\lim_{x\to 0} ||f(\cdot - x) - f||_{L^p} = 0$.*

Teorema 2.7 (De Lieb) *Sea $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, $1 \leq p < \infty$ y $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\} \subset L^p(E, \mathcal{B}, \mu)$. Si $\sup\{||f_n||_{L^p} : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ y $f_n \to f$ en medida (o casi donde quiera), entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int \big|\, |f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|\, \big|\, d\mu = 0,$$

y $||f_n - f||_{L^p} \to 0$ si $||f_n||_{L^p} \to ||f||_{L^p}$.

Teorema 2.8 (Cambio a coordenadas polares) *Si f es una función medible no-negativa en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{(0,\infty)} r^{d-1} \left(\int_{S^{d-1}} f(rw) \lambda_{S^{d-1}}(dw) \right) dr,$$

donde $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ y $\lambda_{S^{d-1}}$ es la medida de superficie en S^{d-1}.

El teorema de Lieb y el teorema de cambio a coordenadas polares son los teoremas (6.2.4) y (5.2.2) de [57], respectivamente. El siguiente teorema se demuestra en [43], teorema (2.4).

Teorema 2.9 (Desigualdad de Minkowski para integrales) *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y $(\Gamma, \mathcal{G}, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos. Sea $f(x, y)$ una función real valuada definida en $\Omega \times \Gamma$ que es $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ -medible. Si $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$\left(\int_\Omega \left| \int_\Gamma f(x, y) d\nu(y) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_\Gamma \left(\int_\Omega |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y), \tag{2.14}$$

en el sentido de que la finitud del lado derecho implica la finitud del lado izquierdo y se verifica la desigualdad.

Haremos uso de la identidad ([28], fórmula 3.251-(11))

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}(1 + \beta x^p)^{-\nu} dx = p^{-1}\beta^{-\mu/p} B\left(\mu/p, \nu - \mu/p\right), \tag{2.15}$$

donde $|\arg \beta| < \pi$, $p > 0$, $0 < \mathrm{Re}\,\mu < p\,\mathrm{Re}\,\nu$ y B es la función Bessel. También emplearemos que ([28], fórmula 3.478-(1))

$$\int_0^\infty x^{v-1} \exp(-\mu x^p) dx = p^{-1}\mu^{-v/p}\Gamma\left(v/p\right), \tag{2.16}$$

donde $\mathrm{Re}\,\mu > 0$, $\mathrm{Re}\,v > 0$, $p > 0$ y Γ es la función gamma.

2.7 Desigualdad de Doob

Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ un intervalo y $p > 1$. Sea $\mathcal{H}^p$ la colección de las martingalas càdlàg, N, tales que

$$||N||_{\mathcal{H}^p} \doteq \left(E\left[\sup_{t\in\Lambda} |N_t|^p \right] \right)^{1/p} < \infty.$$

El espacio vectorial normado $(\mathcal{H}^p, ||\cdot||_{\mathcal{H}^p})$ es un espacio de Banach. Además, se cumple la desigualdad de Doob (ver [11] o [62])

$$E\left[\sup_{t\in\Lambda} |N_t|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{t\in\Lambda} E[|N_t|^p].$$

En particular si $\Lambda = [0, u]$, entonces

$$E\left[\sup_{t\leq u} |N_t|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p E[|N_u|^p].$$

2.8 Superprocesos

Sea $\xi = \{\xi_t : t \geq 0\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E, donde E es un espacio polaco. Supondremos que las trayectorias de ξ son continuas por la derecha con límites por la izquierda (es decir, ξ es un proceso càdlàg).

Denotaremos por A al generador infinitesimal de ξ y por (T_t) al semigrupo de operadores de contracción generado por A. Sea Π_x la distribución de ξ cuando $\xi_0 = x$. Suponemos que el mapeo $x \mapsto \Pi_x$ es medible. Definamos la función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) \doteq \tilde{a}\, x + \tilde{b}\, x^2 + \int (e^{-rx} - 1 + rx)\tilde{\pi}(dr),$$

donde $\tilde{a} \geq 0$, $\tilde{b} \geq 0$ y $\tilde{\pi}$ es una medida σ-finita en $(0, \infty)$ tal que $\int (r \wedge r^2)\tilde{\pi}(dr) < \infty$.

Un proceso càdlàg de Markov $X = \{X_t : t \geq 0\}$ con espacio de estados $M_f(E)$ se llama (ξ, ψ)-superproceso ([10], [15], [17], [39]) si para cada $t > 0$, X_t tiene funcional de Laplace dado por

$$\begin{aligned} E_\mu\left[e^{-X_t(f)}\right] &\doteq E[e^{-X_t(f)} | X_0 = \mu] \\ &= e^{-\mu(u_t(\cdot))}, \quad f \in B_b^+(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

donde $u = u_t(\cdot)$ es la única solución no negativa de la ecuación de evolución

$$u_t(x) = T_t f(x) - \int_0^t T_s \psi(u_{t-s})(x) ds, \quad t \geq 0,\, x \in E. \tag{2.17}$$

La fórmula del funcional de Laplace de X_t nos permite calcular los momentos de $X_t(f)$, cuando éstos existen (ver [39]). Así, para cada $f \in B_b(E)$,

$$E_\mu[X_t(f)] = e^{-\tilde{a}t} \mu(T_t f). \tag{2.18}$$

En general los momentos de orden mayor no son finitos. Sin embargo, cuando $\psi(x) = \tilde{b}x^2$ los momentos de X de cualquier orden son finitos. En tal caso,

$$E_\mu[X_t(f)X_s(g)] = \mu(T_t f)\mu(T_s g) + 2\tilde{b} \int_0^{s \wedge t} \mu\left(T_r\left((T_{t-r}f)(T_{s-r}g)\right)\right) dr, \tag{2.19}$$

para cualesquiera $s, t \geqslant 0$ y $f, g \in B_b(E)$.

El (ξ, ψ)-superproceso tiene la propiedad de que para cada $f \in D(A)_+$, la variable aleatoria real $X_t(f)$ se puede expresar como [16]

$$\begin{aligned} X_t(f) &= X_0(f) + \sum_{s \leq t} 1_{\{|(X_s - X_{s-})(f)| > 1\}} (X_s - X_{s-})(f) + M_t^c(f) + M_t^d(f) \\ &\quad + \int_0^t X_s(Af + \tilde{a}f) ds, \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde $\{M_t^c(f) : t \geq 0\}$ es una martingala local continua con proceso creciente

$$\langle M^c(f) \rangle_t = 2\tilde{b} \int_0^t X_s(f^2) ds, \quad t \geq 0,$$

y $\{M_t^d(f) : t \geq 0\}$ es una martingala puramente discontinua. Nótese que por la identidad de polarización obtenemos

$$\langle M^c(f), M^c(g) \rangle_t = 2\tilde{b} \int_0^t X_s(fg) ds.$$

Otra propiedad importante del (ξ, ψ)-superproceso es que éste tiene una versión continua si y sólo si $\tilde{\pi} = 0$ [16].

En la presente tesis trabajaremos con los siguientes tres casos de superprocesos.

- El *superbrowniano* en $\mathbb{R}^d$, corresponde al caso $E = \mathbb{R}^d$, ξ es el movimiento browniano en $\mathbb{R}^d$ y $\psi(x) = x^2$. Este superproceso también es conocido bajo el nombre de superproceso de Dawson-Watanabe. El semigrupo (T_t) es el semigrupo de contracciones (S_t) generado por el laplaciano Δ.

- El *superproceso* (α, d, β) resulta de tomar $E = \mathbb{R}^d$, ξ es un proceso α-estable en $\mathbb{R}^d$ esféricamente simétrico, $0 < \alpha \leq 2$, y ψ es tal que $\tilde{a} = \tilde{b} = 0$, $\tilde{\pi}(dr) = \frac{\beta(\beta+1)}{\Gamma(1-\beta)} r^{-\beta-2} dr$, donde $0 < \beta < 1$ y Γ es la función gamma. En este caso (T_t) es el semigrupo de contracciones $(S_t^{(\alpha)})$ con generador infinitesimal el laplaciano fraccionario Δ_α.

- El *superproceso bi-tipo* que consideraremos en este trabajo se obtiene tomando $E = \{1, 2\} \times \mathbb{R}^d$, $\psi(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Sean $V = (V_1, V_2)$, $0 < V_i$, $0 < \alpha_i \leq 2$, $i = 1, 2$, y $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ una matriz que cumple $m_{ij} \geq 0$ y $\sum_{j=1}^2 m_{ij} = 1$, es decir, M es una matriz estocástica. ξ es el proceso càdlàg de Markov cuyo generador infinitesimal es dado por

$$Af(i, x) \doteq \Delta_{\alpha_i} f(i, x) + \sum_{j=1}^2 V_i(m_{ij} - \delta_{ij}) f(j, x), \quad f(i, \cdot) \in D(\Delta_{\alpha_i}), \tag{2.21}$$

con $(i, x) \in \{1, 2\} \times \mathbb{R}^d$. Debido a que M es una matriz estocástica, (2.21) se puede escribir como

$$Af(i, x) = \Delta_{\alpha_i} f(i, x) + \sum_{j \neq i} V_i m_{ij} [f(j, x) - f(i, x)].$$

Observaciones:

1. El superbrowniano fue introducido por S. Watanabe [63] e independientemente por D. A. Dawson [9]. Algunas referencias generales donde se estudian diferentes tipos de superprocesos son [10], [15], [17] y [39].

2. El superproceso multitipo que consideramos fue introducido por L. G. Gorostiza y J. A. López-Mimbela en [25] (ver también [26]). Una definición más general de superprocesos multitipo fue propuesta por Z. H. Li en [42].

3. En [46] se da una construcción de los superprocesos (α, d, β) como límites de difusión de sistemas de partículas ramificadas.

4. S. Roelly-Coppoletta [52] caracterizó a los superprocesos de varianza finita através de un problema de martingala. Esta caracterización fue generalizada mas tarde por N. El-Karoui y S. Roelly en [16], quienes aplican este enfoque a superprocesos discontinuos. Nosotros emplearemos los resultados de [16] para estudiar la existencia del tiempo local de superprocesos (α, d, β).

2.9 Construcción de L^2-funcionales de superprocesos

En esta sección introduciremos las integrales estocásticas múltiples de E. B. Dynkin [14]. Para este fin vamos a considerar la clase particular de superprocesos $X = \{X_t : t \geq 0\}$ que se obtienen tomando a E como un espacio polaco, $\psi(x) = x^2$ y $\xi = \{\xi_t : t \geq 0\}$ como un proceso càdlàg de Markov con espacio de estados E con función de transición $p_t(x, dy)$ (ver la sección 2.8). El semigrupo correspondiente a la función de transición p_t es

$$T_t f(x) \doteq \int f(y) p_t(x, dy), \quad t > 0,\ f \in B_b(E).$$

La construcción de Dynkin de una familia de L^2-funcionales para esta clase de superprocesos se basa en el hecho de que para toda medida finita μ, tiempos $t_1, \ldots, t_n \in [0, u]$ y funciones medibles acotadas $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i =, 1\ldots, n$, la variable aleatoria

$$X_{t_1}(f_1) \cdots X_{t_n}(f_n) \tag{2.22}$$

pertenece a $L^2(P_\mu)$, donde P_μ es la distribución de X cuando $X_0 = \mu$, y la esperanza de (2.22) está dada por

$$E_\mu[X_{t_1}(f_1) \cdots X_{t_n}(f_n)] = \int \left(\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(s_i, y_i) \right) \gamma_n(ds_1, dy_1; \ldots; ds_n, dy_n), \tag{2.23}$$

donde

$$\varphi(s, x) \doteq T_{t-s} f(x), \tag{2.24}$$

$[0, u]$ es un intervalo fijo y γ_n es una medida en $([0, u] \times E)^n$. La definición general de γ_n es complicada (ver las fórmulas (1.28) y (1.29) de [14]) y no haremos uso de ésta; tan sólo usaremos las medidas γ_1 y γ_2, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_1(A_1 \times B_1) &\doteq 1_{A_1}(0)\mu(B_1), \\ \gamma_2(A_1 \times B_1 \times A_2 \times B_2) &\doteq 1_{A_1}(0)\mu(B_1) 1_{A_2}(0)\mu(B_2) \\ &\quad + 2\int 1_{A_1}(s) 1_{B_1}(y) 1_{A_2}(s) 1_{B_2}(y) p_s(x, dy)\mu(dx) ds. \end{aligned} \tag{2.25}$$

De estas expresiones y de (2.23) obtenemos, en particular, los momentos (2.18) y (2.19).

Sea L_n^2 el mínimo subespacio cerrado de $L^2(P_\mu)$ que contiene a todos los productos (2.22). Denotamos por K a la colección de todas las funciones de la forma (2.24) con $f : E \to \mathbb{R}$ medible y acotada, y por χ_n^0 al espacio de funciones $\varphi : ([0, u] \times E)^n \to \mathbb{R}$ que cumplen $(|\varphi|, |\varphi|)_n < \infty$, donde

$$(\varphi, \psi)_n \doteq \int \varphi(s_1, y_1; \ldots; s_n, y_n)\psi(s_{n+1}, y_{n+1}; \ldots; s_{2n}, y_{2n})\ \gamma_{2n}(ds_1, dy_1; \ldots; ds_{2n}, dy_{2n}). \tag{2.26}$$

En particular ([14], (3.1)), poniendo $n = 1$ en (2.26) y empleando la expresión de γ_2 dada por (2.25) el producto interno $(\varphi, \psi)_1$ se expresa por

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi)_1 &= \int \varphi(t_1, z_1)\psi(t_2, z_2) d\gamma_2 \\ &= \int \varphi(0, z)\mu(dz) \int \psi(0, z)\mu(dz) + \int \varphi(s, y)\psi(s, y)\tilde{\Lambda}(ds, dy), \end{aligned} \tag{2.27}$$

donde $\tilde{\Lambda}$ es la medida en $[0, u] \times E$ dada por

$$\tilde{\Lambda}(C) = 2\int 1_C(s, y) p_s(x, dy)\mu(dx) ds. \tag{2.28}$$

Por lo tanto, una función φ pertenece a χ_1^0 si y sólo si $\tilde{\Lambda}(\varphi^2) < \infty$ y $\mu(|\varphi(0, \cdot)|) < \infty$.

Las integrales múltiples se definen como sigue ([14], teoremas 1.2 y 1.3):

(a) Para $\varphi \in K$ se define $I_1(\varphi)$ por

$$I_1(\varphi) \equiv \int \varphi(s, x) dZ_{s,x} \doteq X_t(f), \tag{2.29}$$

para todo $t > 0$.
Sea χ_1 el conjunto de las clases de equivalencia de χ_1^0 módulo $(\cdot, \cdot)_1$. Existe una única isometría I_1 del espacio de Hilbert χ_1 sobre L_1^2, tal que (2.29) se cumple. Más aún, para toda $\varphi \in \chi_1^0$, $M_t^\varphi \doteq I_1(\varphi) = \int \varphi(s, x) 1_{s \leq t} dZ_{s,x}$ es una martingala y todas las martingalas L_1^2-valuadas se pueden describir de esta manera.

(b) Existe un único mapeo I_n de χ_n^0 a L_n^2 tal que

$$\begin{aligned} I_n(\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n) &= I_1(\varphi_1) \cdots I_1(\varphi_n), \\ E_\mu[I_n(\varphi) I_n(\psi)] &= (\varphi, \psi)_n, \end{aligned}$$

para cualesquiera $\varphi_i, \varphi, \psi \in \chi_n^0$. El conjunto $I_n(\chi_n^0)$ es denso en L_n^2.

Observación. Denotemos por δ_z, $z \in E$ a la delta de Dirac. Como se mencionó en el Capítulo 1, el tiempo local en el punto z se define heurísticamente como

$$L^z(B) \doteq \int_B X_s(\delta_z)ds, \quad B \in \mathcal{B}([0,u]).$$

Supongamos que existe una medida m tal que $p_t(x,dy)$ es absolutamente continua con respecto a m para cualesquiera t y x. Sean

$$p_t(x,z) \doteq \frac{p_t(x,dy)}{dm} \quad \text{y} \quad K_{z,B}(s,x) \doteq \int_B p_{t-s}(x,z)dt.$$

Escribiendo *formalmente* el tiempo local en términos de las integrales estocásticas múltiples, resulta

$$\begin{aligned} l^z(B) &= \int_B \int T_{t-s}\delta_z(x)dZ_{s,x}dt \\ &= \int_B \int \int \delta_z(y)p_{t-s}(x,dy)dZ_{s,x}dt \\ &= \int \left(\int_B p_{t-s}(x,z)dt \right) dZ_{s,x} \\ &= \int K_{z,B}(s,x)dZ_{s,x} = I_1(K_{z,B}). \end{aligned}$$

Así, la definición de Dynkin del tiempo local l^z tiene sentido si $K_{z,B} \in \chi_1^0$.

2.10 Lista de notaciones

$\doteq$ por definición.
c.s. casi seguramente.
$*$ convolución.
càdlàg continuo por la derecha con límite por la izquierda

E espacio polaco.
$\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel de E.
$M_f(E)$ espacio de las medidas finitas en $(E, \mathcal{B}(E))$.
$D_{[0,\infty)}(E)$ espacio de Skorohod de funciones $w : [0,\infty) \to E$ càdlàg.

$\mathbb{R}^d$ espacio euclidiano de dimensión d.
$x \cdot y$ producto interno usual de $\mathbb{R}^d$.

$|x|$ norma en $\mathbb{R}^d$.

$||\varphi||_\infty$ norma supremo de φ.
$||\varphi||_{L^p}$ norma L^p de φ.
$B(\mathbb{R}^d)$ funciones Borel-medibles.
$B_b(\mathbb{R}^d)$ funciones Borel-medibles acotadas.
$C(\mathbb{R}^d)$ funciones continuas.
$C_b(\mathbb{R}^d)$ funciones continuas acotadas.
$L^p(\mathbb{R}^d, dx)$ funciones L^p integrables.
$\mathcal{S}_d$ espacio de Schwartz de funciones de prueba en $\mathbb{R}^d$.

Sea $E = \mathbb{R}^d$ o $E = \{1,2\} \times \mathbb{R}^d$ y $F(E)$ un espacio de funciones reales definidas en E. Denotamos:
$F(E)_+$ funciones en $F(E)$ que son no negativas.
$F(E)_c$ funciones en $F(E)$ que tienen soporte compacto.

$D(A)$ dominio del operador A.
Δ laplaciano en $\mathbb{R}^d$.
$\Delta_\alpha = -(-\Delta)^{\alpha/2}$ laplaciano fraccionario en $\mathbb{R}^d$, $0 < \alpha \leq 2$.
$S^{(\alpha)} = (S_t^{(\alpha)})$ semigrupo generado por Δ_α.
I operador identidad.
G^a función de Green del movimiento browniano.
G_α^a función de Green del proceso α-estable esfericamente simétrico.

$\mu \ll \nu$ continuidad absoluta de la medida μ con respecto a la medida ν.
$\frac{d\mu}{d\nu}$ densidad de Radon-Nikodym.
$\mu(f)$ integral de f con respecto a la medida μ.
$\lambda = dx$ medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$.

δ_x delta de Dirac en x.
δ delta de Dirac en 0.
δ_{ij} delta de Kronecker.

$t \wedge s$ mínimo del conjunto $\{s,t\}$.
$t \vee s$ máximo del conjunto $\{s,t\}$.

1_A indicadora del conjunto A.

sgn función signo.
Γ función gamma.
B función Bessel.
Φ molificador.

$G^a_{\alpha,\varepsilon}$ definida en la pág. 27.
$\mathcal{G}^{(i,0)}$ definida en la pág. 63.
$\vartheta^{(i)}$ definida en la pág. 63.
$\mathcal{G}^a_{\alpha,\varepsilon}$ definida en la pág. 29.
$\mathcal{G}^{(i,0)}_\varepsilon$ definida en la pág. 86.
$g^{(i)}_\varepsilon$ definida en la pág. 90.

L^x_t definido en la pág. 13.
$\mathfrak{L}^x_t$ definido en la pág. 14.
l^x_t definido en la pág. 14.

$||\cdot||_{\mathcal{H}^p}$ definido en la pág. 31.
$\mathcal{H}^p$ la colección de las martingalas càdlàg con $||\cdot||_{\mathcal{H}^p} < \infty$.

γ_n definida en la pág. 34.
L^2_n definido en la pág. 35.
K definido en la pág. 35.
χ^0_n definido en la pág. 35.
I_n integral estocástica múltiple de Dynkin.

3

Aplicaciones de la fórmula tipo Tanaka del tiempo local del superbrowniano

3.1 Enunciado de los resultados

Es bien conocida la existencia del tiempo local del superbrowniano para dimensiones $d \leq 3$, así como la representación de semimartingala del tiempo local; remitimos al trabajo de Adler [1] para un relato panorámico de estos tópicos. En lo que sigue denotamos por L^x_t al tiempo local en $x \in \mathbb{R}^d$ del superbrowniano hasta el tiempo $t > 0$, por $\mathfrak{L}^x_t$ a la densidad del tiempo de ocupación del superbrowniano definida por (1.8), y por l_t al tiempo local introducido en [14]. A continuación mostramos la equivalencia entre estos tres conceptos de tiempo local, es decir, probaremos que $L_t = \mathfrak{L}_t = l_t$ c.s.

Teorema 3.1 *Sea X el superbrowniano en $\mathbb{R}^d$ tal que $X_0 = \mu$, $d\mu/dx \in B_b(\mathbb{R}^d)_+$ y $d \leq 3$. Los tiempos locales L_t, $\mathfrak{L}_t$ y l_t existen y son equivalentes en el sentido de que $L_t = \mathfrak{L}_t = l_t$ para toda $t > 0$ c.s.*

Teorema 3.2 *Sea X el superbrowniano en $\mathbb{R}^d$ y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función Borel-medible. Si $X_0 = \mu$, $d\mu/dx \in B_b(\mathbb{R}^d)_+$, $d \leq 3$ y $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx) \cap L^2(\mathbb{R}^d, dx)$, entonces*

$$\int_0^t X_s(f)ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)L^x_t dx, \quad c.s. \tag{3.1}$$

La expresión anterior también es cierta si f es acotada.

Cuando la medida inicial X_0 es una medida infinita, I. Iscoe [31] demostró la existencia del superbrowniano X. En este caso X es un proceso $M_p(\mathbb{R}^d)$-valuado, donde

$$M_p(\mathbb{R}^d) = \left\{ m \in M_f(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^p)^{-1} m(dx) < \infty \right\}.$$

Nótese que $\lambda \in M_p(\mathbb{R}^d)$ si $p > d$.

Teorema 3.3 *Sea X el superbrowniano $M_p(\mathbb{R}^d)$-valuado, $p > d$, y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función Borel-medible. Si $X_0 = \lambda$, $d \leq 3$ y $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, entonces*

$$\int_0^t X_s(f)ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) L_t^x dx, \quad c.s.$$

Teorema 3.4 *Sea X el superbrowniano $M_p(\mathbb{R}^d)$-valuado tal que $X_0 = \lambda \in M_p(\mathbb{R}^2)$, $p > 2$. Para cada $y \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ y $\psi \in C_c(\mathbb{R}^2)$,*

$$\frac{1}{r}\int_0^{rt} X_s(\psi(\cdot - r^{1/2}y))ds \xrightarrow[r\to\infty]{d} \lambda(\psi)L_t^y, \tag{3.2}$$

donde L_t^y es el tiempo local de X. Además $Var(L_t^y) = (t^2 \ln 2)/2\pi$.

Observaciones:

1. Considérese la sucesión de procesos $\{L^\epsilon\}_{\epsilon>0}$, donde $L^\epsilon \doteq \{L_t^{\epsilon,0},\ t > 0\}$, con $L_t^{\epsilon,0} \doteq \int_0^t X_s(q_\epsilon)ds$. Sea $\{\epsilon_n\}_n$ una sucesión de números no negativos que converge a cero y sean $t_1, ..., t_k$ números no negativos. Entonces por el Lema 3.6, obtenemos $E[|(L_{t_1}^{\epsilon_n}, ..., L_{t_k}^{\epsilon_n}) - (L_{t_1}^0, ..., L_{t_k}^0)|] \leq k\sum_{i=1}^k E[|L_{t_i}^{\epsilon_n} - L_{t_i}^0|] \to 0$ cuando $\epsilon_n \to 0$. Es decir, las distribuciones finito dimensionales de $\{L^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ convergen a aquellas de L^0. Por otra parte, la demostración de la tensión de $\{L^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ en $D_{[0,u]}(\mathbb{R})$ se sigue tal cual de la demostración dada en [41], pág. 80. De esta forma, $\{L^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ converge a L^0 en distribución [18].

2. Notando que nuestro movimiento browniano tiene varianza 2, se verifica que la varianza de L_1^0 concuerda con la obtenida en [8]. El cálculo de la varianza de L_t^y es de interés debido a que Cox y Griffeath emplean un método distinto para obtenerla.

3. Debido a que $\int_0^{rt} X_s(\psi(\cdot - r^{1/2}y))ds$ es infinitamente divisible [21], se sigue del Teorema 3.4 que L_t^y también es infinitamente divisible.

4. La transformada de Laplace de L_t^x, en el caso del superbrowniano, está dada por [41], [32],

$$E_\lambda[\exp(-\theta L_t^x)] = \exp(-\lambda(v(t,x,\theta))),$$

donde v es la única solución "mild" de la ecuación diferencial parcial

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} &= \Delta v(t) - v^2 + \theta\delta_x \\ v(0) &= 0. \end{cases}$$

En [21] se estudia el límite (3.2) en el caso del superproceso (α, d, β) y se calcula la transformada de Laplace de L_t^x para este caso.

3.2 Algunos resultados preliminares

Denotemos por (S_t) al semigrupo de contracciones generado por el laplaciano Δ y supongamos que $X_0 = \mu \in M_f(\mathbb{R}^d)$ tiene densidad acotada con respecto a la medida de Lebesgue dx. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx) \cap L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ es no negativa, entonces

$$\begin{aligned}
\mu(S_t f) &= \int_{\mathbb{R}^d} (S_t f)(x)\frac{d\mu}{dx}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)q_t(x,y)dy\frac{d\mu}{dx}(x)dx \\
&\leq ||d\mu/dx||_\infty \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\int_{\mathbb{R}^d} q_t(x,y)dxdy \\
&= ||d\mu/dx||_\infty ||f||_{L^1}.
\end{aligned}$$

Empleando esta desigualdad, después la desigualdad de Jensen y luego la ecuación de Chapman-Kolmogorov, resulta

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mu(S_r((S_{t-r}f)^2))ds \\
&\leq ||d\mu/dx||_\infty \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} (S_r((S_{t-r}f)^2))(x)dxds \\
&= ||d\mu/dx||_\infty \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} S_r(S_{t-r}f^2)(x)dxds \\
&= ||d\mu/dx||_\infty \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} (S_{t-r}f^2)(x)dxds \\
&= ||d\mu/dx||_\infty \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^2(y)q_{t-r}(x,y)dydxds
\end{aligned}$$

$$= ||d\mu/dx||_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f^2(y)dyds = t||d\mu/dx||_\infty ||f||_{L^2}^2.$$

Así, de (2.18) y (2.19) se sigue que

$$E[X_t(f)] \leq ||d\mu/dx||_\infty ||f||_{L^1}, \quad (3.3)$$
$$E[(X_t(f))^2] \leq \text{cte.}\ (||f||_{L^1}^2 + ||f||_{L^2}^2). \quad (3.4)$$

Recordemos que $G_\epsilon^a \doteq G_{2,\epsilon}^a$, $\epsilon > 0$, siendo $G_{2,\epsilon}^a$ definida por (2.10), y que $G^a \doteq G_{2,0}^a$.

Lema 3.5 *La sucesión $\{G_\epsilon^a\}_{\epsilon>0}$ converge a G^a en $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ cuando $\epsilon \to 0$ y la convergencia es en $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ si $d \leq 3$.*

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned}
|G^a(x) - G_\epsilon^a(x)| &= \left| \int_0^\infty e^{-at} q_t(x)dt - \int_\epsilon^\infty e^{-a(t-\epsilon)} q_t(x)dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^\infty e^{-at} q_t(x)dt - e^{a\epsilon} \int_0^\infty e^{-at} q_t(x)dt \right| \\
&\quad + \left| e^{a\epsilon} \int_0^\infty e^{-at} q_t(x)dt - e^{a\epsilon} \int_\epsilon^\infty e^{-at} q_t(x)dt \right| \\
&= |1 - e^{a\epsilon}| \int_0^\infty e^{-at} q_t(x)dt + e^{a\epsilon} \int_0^\epsilon e^{-at} q_t(x)dt.
\end{aligned}$$

La convergencia en L^1 es consecuencia de la estimación

$$\begin{aligned}
||G^a - G_\epsilon^a||_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^d} |G^a(x) - G_\epsilon^a(x)|dx \\
&\leq |1 - e^{a\epsilon}| \int_0^\infty e^{-at} \int_{\mathbb{R}^d} q_t(x)dxdt \\
&\quad + e^{a\epsilon} \int_0^\epsilon e^{-at} \int_{\mathbb{R}^d} q_t(x)dxdt \\
&= |1 - e^{a\epsilon}| a^{-1} + e^{a\epsilon}(1 - e^{-a\epsilon})a^{-1} \\
&= 2a^{-1}(e^{a\epsilon} - 1).
\end{aligned}$$

Si $d \leq 3$ entonces $G_\epsilon^a \in L^2$ debido al Lema 2.3. Ahora veamos la convergencia en L^2. Por el teorema de Plancherel,

$$\begin{aligned}
||G^a - G_\epsilon^a||_{L^2}^2 &= ||(G^a - G_\epsilon^a)\hat{}\,||_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{a + |z|^2} - \frac{e^{-\epsilon|z|^2}}{a + |z|^2} \right)^2 dz \\
&= \text{cte.} \int_0^\infty r^{d-1} \left(\frac{1 - e^{-\epsilon r^2}}{a + r^2} \right)^2 dr \\
&\leq \text{cte.}\ \{(1 - e^{-\epsilon})^2 \int_0^1 r^{d-1} \left(\frac{1}{a + r^2} \right)^2 dr \\
&\quad + \int_1^\infty r^{d-5} \left(1 - e^{-\epsilon r^2} \right)^2 dr\}.
\end{aligned}$$

Usando que $1 - e^{-x} \leq x^{1/8}$ para $x \geq 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
||G^a - G_\epsilon^a||_{L^2}^2 &\leq \text{cte.} \left\{ (1 - e^{-\epsilon})^2 \int_0^1 r^{d-1} \left(\frac{1}{a + r^2} \right)^2 dr + \epsilon^{1/4} \int_1^\infty r^{d-9/2} dr \right\} \\
&\doteq \text{cte.}\ \{(1 - e^{-\epsilon})^2 I + \epsilon^{1/4} II\}.
\end{aligned}$$

La integral I ya fue considerada en la demostración del Lema 2.3 (con $\alpha \leq 2$), mientras que la integral II es finita puesto que $d \leq 3$. De esta forma obtenemos la convergencia requerida. ∎

3.3 Demostraciones de los resultados principales

Recordemos que, según (2.20)

$$M_t(f) \doteq X_t(f) - \mu(f) - \int_0^t X_s(\Delta f)ds, \quad f \in D(\Delta) \cap C_b(\mathbb{R}^d), \quad (3.5)$$

es una martingala continua con proceso creciente determinado por

$$\langle M(f), M(g) \rangle_t = 2 \int_0^t X_s(fg)ds. \quad (3.6)$$

Iniciamos con un resultado sobre existencia y representación tipo fórmula de Tanaka del tiempo local del superbrowniano. Esta representación juega un papel importante en las demostraciones de los resultados principales de este capítulo. Remitimos al trabajo de Adler y Lewin [3] para resultados de existencia y representaciones tipo fórmula de Tanaka similares a las dadas aquí.

Lema 3.6 *Sea X el superbrowniano tal que $X_0 = \mu \in M_f(\mathbb{R}^d)$, $\mu \ll dx$ y $d\mu/dx \in B_b(\mathbb{R}^d)_+$. Si $d \leq 3$ entonces el tiempo local L_t^0 existe y para cada $t > 0$ y $a > 0$ tiene la representación:*

$$L_t^0 = \mu(G^a) - X_t(G^a) + a\int_0^t X_s(G^a)ds + M_t(G^a, \quad c.s., \tag{3.7}$$

donde $\{M_t(G^a) : t \geq 0\}$ es una martingala continua. El tiempo local en $x \in \mathbb{R}^d$, L_t^x, tiene la representación

$$L_t^x = \mu(G^a(\cdot - x)) - X_t(G^a(\cdot - x)) + a\int_0^t X_s(G^a(\cdot - x))ds + M_t(G^a(\cdot - x)) \quad c.s.$$

Demostración. Usando la relación $\Delta G_\epsilon^a = aG_\epsilon^a - q_\epsilon$, probada en el Lema 2.4, y el problema de martingala (3.5) obtenemos

$$\int_0^t X_s(q_\epsilon)ds = \mu(G_\epsilon^a) - X_t(G_\epsilon^a) + a\int_0^t X_s(G_\epsilon^a)ds + M_t(G_\epsilon^a). \tag{3.8}$$

Vamos a mostrar que la sucesión de variables aleatorias $\{\int_0^t X_s(q_\epsilon)ds\}_{\epsilon>0}$ es convergente en L^2 cuando $\epsilon \to 0$. Recuérdese que $G_\epsilon^a \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ si $d \leq 3$. Para probar la convergencia es suficiente verificar que el lado derecho de (3.8) converge en L^2 cuando $\epsilon \to 0$. Usando la desigualdad de Jensen, (3.3) y (3.4) obtenemos

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t X_s(G_\epsilon^a)ds - \int_0^t X_s(G^a)ds\right)^2\right] &= E\left[\left(\int_0^t X_s(G_\epsilon^a - G^a)ds\right)^2\right] \\ &\leq t\int_0^t E[(X_s(G_\epsilon^a - G^a))^2]ds \\ &\leq \text{cte. } (||G_\epsilon^a - G^a||_{L^1}^2 + ||G_\epsilon^a - G^a||_{L^2}^2), \end{aligned}$$

y por (3.6)

$$\begin{aligned} E[(M_t(G_\epsilon^a) - M_t(G^a))^2] &= E[(M_t(G_\epsilon^a - G^a))^2] \\ &= 2\int_0^t E[X_s((G_\epsilon^a - G^a)^2)]ds \\ &\leq 2t||d\mu/dx||_\infty ||G_\epsilon^a - G^a||_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Los términos restantes se trabajan de forma similar. De esta manera la primera parte del resultado es consecuencia del Lema 3.5. La última afirmación del lema se sigue de la invarianza bajo traslaciones de la medida de Lebesgue. ■

Demostración del Teorema 3.2. Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx) \cap L^2(\mathbb{R}^d, dx)$. Para trabajar con el tiempo local en un punto arbitrario $z \in \mathbb{R}^d$ es necesario considerar la expresión (3.8) en la forma

$$\begin{aligned} \int_0^t X_s(q_\epsilon(\cdot - z))ds &= \mu(G_\epsilon^a(\cdot - z)) - X_t(G_\epsilon^a(\cdot - z)) \\ &\quad + a\int_0^t X_s(G_\epsilon^a(\cdot - z))ds + M_t(G_\epsilon^a(\cdot - z)). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de la expresión anterior por $f(z)$ e integrando con respecto a la variable z, resulta

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\int_0^t X_s(q_\epsilon(\cdot - z))dsdz &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)[\mu(G_\epsilon^a(\cdot - z)) - X_t(G_\epsilon^a(\cdot - z)) \\ &\quad + a\int_0^t X_s(G_\epsilon^a(\cdot - z))ds + M_t(G_\epsilon^a(\cdot - z))]dz, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \int_0^t X_s\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)q_\epsilon(\cdot - z)dz\right)ds &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)[\mu(G_\epsilon^a(\cdot - z)) - X_t(G_\epsilon^a(\cdot - z)) \\ &\quad + a\int_0^t X_s(G_\epsilon^a(\cdot - z))ds + M_t(G_\epsilon^a(\cdot - z))]dz. \end{aligned}$$

Abordaremos primero la convergencia

$$\int_0^t X_s\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)q_\epsilon(\cdot - z)dz\right)ds \to \int_0^t X_s(f)ds, \tag{3.9}$$

en $L^2(P)$ cuando $\epsilon \to 0$. Por la desigualdad de Jensen y (3.4)

$$\begin{aligned} &E\left[\left(\int_0^t X_s\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)q_\epsilon(\cdot - z)dz\right)ds - \int_0^t X_s(f)ds\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\int_0^t X_s\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)q_\epsilon(\cdot - z)dz - f(\cdot)\right)ds\right)^2\right] \\ &\leq t\int_0^t E\left[\left(X_s\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)q_\epsilon(\cdot - z)dz - f(\cdot)\right)\right)^2\right]ds \\ &\leq \text{cte. } \left(\left\|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)q_\epsilon(\cdot - z)dz - f(\cdot)\right\|_{L^1}^2 + \left\|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)q_\epsilon(\cdot - z)dz - f(\cdot)\right\|_{L^2}^2\right). \end{aligned}$$

Para demostrar (3.9) probaremos que cada sumando en el lado derecho de la última desigualdad converge a cero. Usando la propiedad de autosimilaridad (2.3)

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_{\mathbb{R}^d} f(z) q_\epsilon(\cdot - z)dz - f(\cdot) \right\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z) q_\epsilon(x-z)dz - f(x) \right| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-z) q_\epsilon(z)dz - f(x) \right| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-z) q_1(\epsilon^{-1/2}z)\epsilon^{-d/2}dz - f(x) \right| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-\epsilon^{1/2}z) q_1(z)dz - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) q_1(z)dz \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} q_1(z) \left| f(x-\epsilon^{1/2}z) - f(x) \right| dzdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} q_1(z) || f(\cdot - \epsilon^{1/2}z) - f(\cdot) ||_{L^1} dz.
\end{aligned}
$$

Ya que $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$, del Teorema 2.6 se sigue que $||f(\cdot - \epsilon^{1/2}z) - f(\cdot)||_{L^1} \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$. Notando que $q_1(z)||f(\cdot - \epsilon^{1/2}z) - f(\cdot)||_{L^1} \leq 2||f||_{L^1} q_1(z)$, y que $q_1 \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$, el teorema de la convergencia dominada implica que

$$
\lim_{\epsilon \to 0} \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f(z) q_\epsilon(\cdot - z)dz - f(\cdot) \right\|_{L^1} = 0.
$$

Para el otro término usamos de nuevo la desigualdad de Jensen,

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_{\mathbb{R}^d} f(z) q_\epsilon(\cdot - z)dz - f(\cdot) \right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) q_\epsilon(x-z)dz - f(x) \right)^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (f(x-\epsilon^{1/2}z) - f(x)) q_1(z)dz \right)^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\epsilon^{1/2}z) - f(x)|^2 q_1(z)dzdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} q_1(z) ||f(\cdot - \epsilon^{1/2}z) - f(\cdot)||_{L^2}^2 dz.
\end{aligned}
$$

De aquí se procede como antes pero ahora se usa el hecho de que $f \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$.

Probemos ahora que

$$
\int_{\mathbb{R}^d} f(z)[\mu(G^a_\epsilon(\cdot - z)) - X_t(G^a_\epsilon(\cdot - z)) + a\int_0^t X_s(G^a_\epsilon(\cdot - z))ds + M_t(G^a_\epsilon(\cdot - z))]dz
$$

converge a

$$
\int_{\mathbb{R}^d} f(z)[\mu(G^a(\cdot - z)) - X_t(G^a(\cdot - z)) + a\int_0^t X_s(G^a(\cdot - z))ds + M_t(G^a(\cdot - z))]dz,
$$

en $L^2(P)$ cuando $\epsilon \to 0$. Esto se sigue de las siguientes estimaciones y del Lema 3.5.

Usando la desigualdad de Jensen, (3.6) y (3.3),

$$
\begin{aligned}
& E\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) M_t(G^a_\epsilon(\cdot - z))dz - \int_{\mathbb{R}^d} f(z) M_t(G^a(\cdot - z))dz \right)^2 \right] \\
&= E\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) M_t(G^a_\epsilon(\cdot - z) - G^a(\cdot - z))dz \right)^2 \right] \\
&\leq E\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|dz \right) \int_{\mathbb{R}^d} (M_t(G^a_\epsilon(\cdot - z) - G^a(\cdot - z)))^2 |f(z)|dz \right] \\
&= ||f||_{L^1} \int_{\mathbb{R}^d} E[(M_t(G^a_\epsilon(\cdot - z) - G^a(\cdot - z)))^2] |f(z)|dz \\
&= ||f||_{L^1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t E[X_s((G^a_\epsilon(\cdot - z) - G^a(\cdot - z))^2)]ds |f(z)|dz \\
&\leq \text{cte. } ||f||_{L^1} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) ||G^a_\epsilon(\cdot - z) - G^a(\cdot - z)||_{L^2}^2 dz \\
&= \text{cte. } ||f||_{L^1}^2 ||G^a_\epsilon - G^a||_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Usando, de nuevo, la desigualdad de Jensen y (3.4)

$$
\begin{aligned}
& E\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) \int_0^t X_s(G^a_\epsilon(\cdot - z))dsdz - \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \int_0^t X_s(G^a(\cdot - z))dsdz \right)^2 \right] \\
&= E\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) \int_0^t X_s(G^a_\epsilon(\cdot - z) - G^a(\cdot - z))dsdz \right)^2 \right] \\
&\leq ||f||_{L^1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t E[X_s(G^a_\epsilon(\cdot - z) - G^a(\cdot - z))^2] ds |f(z)|dz \\
&\leq \text{cte. } ||f||_{L^1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t (||(G^a_\epsilon - G^a)(\cdot - z)||_{L^1}^2 + ||(G^a_\epsilon - G^a)(\cdot - z)||_{L^2}^2) ds |f(z)|dz \\
&= \text{cte. } t||f||_{L^1}^2 (||G^a_\epsilon - G^a||_{L^1}^2 + ||G^a_\epsilon - G^a||_{L^2}^2).
\end{aligned}
$$

Las convergencias en $L^2(P)$ de los términos restantes se trabajan de forma similar.

Así, hemos demostrado que

$$\int_0^t X_s(f)ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)[\mu(G^a(\cdot - z)) - X_t(G^a(\cdot - z)) + a\int_0^t X_s(G^a(\cdot - z))ds + M_t(G^a(\cdot - z))]dz \quad \text{c.s.,} \tag{3.10}$$

para cada $t > 0$, y del Lema 3.6 obtenemos que

$$\int_0^t X_s(f)ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)L_t^z dz \quad \text{c.s.}$$

Ahora supongamos que f es una función Borel-medible acotada. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L^1(\mathbb{R}^d, dx) \cap L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ con $||f_n||_\infty \leq ||f||_\infty$ para toda n, y tal que f_n converge puntualmente a f. Entonces debido a (3.10) tenemos para cada n,

$$\int_0^t X_s(f_n)ds = \int_{\mathbb{R}^d} f_n(z)[\mu(G^a(\cdot - z)) - X_t(G^a(\cdot - z)) + a\int_0^t X_s(G^a(\cdot - z))ds + M_t(G^a(\cdot - z))]dz. \tag{3.11}$$

Mostraremos que

$$\int_0^t X_s(f_n)ds \to \int_0^t X_s(f)ds \quad \text{en } L^2(P) \text{ cuando } n \to \infty. \tag{3.12}$$

Esto se sigue de los siguientes argumentos. Por la desigualdad de Jensen, (2.19) y la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^t X_s(f_n)ds - \int_0^t X_s(f)ds\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\int_0^t X_s(f_n - f)ds\right)^2\right] \\
&\leq t\int_0^t E[(X_s(f_n - f))^2]ds \\
&= t\int_0^t [(\mu(S_s(f_n - f)))^2 + 2\int_0^s \mu(S_r(S_{s-r}(f_n - f))^2)dr]ds \\
&\leq t\int_0^t [\mu(1)\int_{\mathbb{R}^d} (S_s(f_n - f))^2(x)\mu(dx) + 2\mu\left(\int_0^s S_r(S_{s-r}(f_n - f))^2 dr\right)]ds \\
&\leq \text{cte. } t\int_0^t \mu((S_s(f_n - f))^2 + 2\int_0^s S_r(S_{s-r}(f_n - f))^2 dr)ds.
\end{aligned}$$

Nótese que $|(f_n - f)(y)|q_s(x, y) \leq 2||f||_\infty q_s(x, y)$ implica $S_s(f_n - f)(x) \to 0$, $n \to \infty$. Además $|S_s(f_n - f)(x)| \leq 2||f||_\infty$, y así

$$\left|(S_s(f_n - f)(x))^2 + 2\int_0^s S_r(S_{s-r}(f_n - f))^2(x)dr\right| \leq 8||f||_\infty^2(1 + s),$$

de lo cual se deduce que

$$(S_s(f_n - f)(x))^2 + 2\int_0^s S_r(S_{s-r}(f_n - f))^2(x)dr \to 0, \quad n \to \infty.$$

La convergencia (3.12) se sigue del teorema de la convergencia dominada.

Para demostrar la convergencia del lado derecho de (3.11) probaremos la convergencia de dos de sus sumandos; las convergencias de los dos restantes se trabajan de forma similar. Usando (3.3) y (3.6)

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f_n(z)M_t(G^a(\cdot - z))dz - \int_{\mathbb{R}^d} f(z)M_t(G^a(\cdot - z))dz\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(z) - f(z))M_t(G^a(\cdot - z))dz\right)^2\right] \\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(z) - f(z))M_t(G^a(\cdot - z))dz \int_{\mathbb{R}^d} (f_n(w) - f(w))M_t(G^a(\cdot - w))dw\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(z) - f(z))(f_n(w) - f(w))E\left[M_t(G^a(\cdot - z))M_t(G^a(\cdot - w))\right]dzdw \\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(z) - f(z))(f_n(w) - f(w))2\int_0^t X_s(G^a(\cdot - z)G^a(\cdot - w))dsdzdw\right] \\
&= 2E\left[\int_0^t X_s\left(\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(z) - f(z))G^a(\cdot - z)dz\right)^2\right)ds\right] \\
&= 2\int_0^t \mu\left(S_s\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(z) - f(z))G^a(\cdot - z)dz\right)^2\right)ds.
\end{aligned}$$

Ya que $|(f_n(z) - f(z))G^a(\cdot - z)| \leq 2||f||_\infty G^a(\cdot - z)$ y $G^a \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ debido al Lema 2.3, resulta

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(z) - f(z))G^a(\cdot - z)dz \to 0, \quad n \to \infty,$$

y por tanto

$$S_s\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(z) - f(z))G^a(\cdot - z)dz\right)^2(x) \to 0, \quad n \to \infty,$$

de donde el resultado se sigue aplicando el teorema de la convergencia dominada, puesto que

$$\left|S_s\left(\int_{\mathbb{R}^d}(f_n(z)-f(z))G^a(\cdot-z)dz\right)^2(x)\right| \leq 4||f||_\infty^2||G^a||_{L^1}^2.$$

Finalmente, la otra convergencia se obtiene del siguiente modo. Por (3.4),

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f_n(z)\int_0^t X_s(G^a(\cdot-z))dsdz - \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\int_0^t X_s(G^a(\cdot-z))dsdz\right)^2\right]\\
&= E\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d}(f_n(z)-f(z))\int_0^t X_s(G^a(\cdot-z))dsdz\right)^2\right]\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t\int_0^t (f_n(z)-f(z))(f_n(w)-f(w))\\
&\quad \cdot E[X_s(G^a(\cdot-z))X_r(G^a(\cdot-w))]drdsdzdw\\
&= \left(\mu\left(\int_0^t (f_n(z)-f(z))S_sG^a(\cdot-z)dzds\right)\right)^2\\
&\quad + 2\mu\Big(\int_0^t\int_0^t\Big\{\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}(f_n(z)-f(z))(f_n(w)-f(w))\\
&\quad \cdot\int_0^{r\wedge s} S_v(S_{r-v}G^a(\cdot-z)S_{s-v}G^a(\cdot-w))dvdwdz\Big\}drds\Big).
\end{aligned}$$

Para probar la convergencia basta verificar que la sucesión $(I_n)_n$, donde

$$\begin{aligned}
I_n &\doteq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}(f_n(z)-f(z))(f_n(w)-f(w))\\
&\quad\cdot\int_0^{r\wedge s} S_v(S_{r-v}G^a(\cdot-z)S_{s-v}G^a(\cdot-w))dvdwdz, \quad n=1,2,...
\end{aligned}$$

es acotada y converge a cero. En efecto,

$$\begin{aligned}
I &\leq 4||f||_\infty^2\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^{r\wedge s} S_v(S_{r-v}G^a(\cdot-z)S_{s-v}G^a(\cdot-w))(x)dvdwdz\\
&= 4||f||_\infty^2\int_0^{r\wedge s}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} S_{r-v}G^a(\cdot-z)(y)dz\\
&\quad\cdot\int_{\mathbb{R}^d} S_{s-v}G^a(\cdot-w)(y)dwq_v(y,x)dydv.
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\int_{\mathbb{R}^d} S_{s-v}G^a(\cdot-w)(y)dw = ||G^a||_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} S_{r-v}G^a(\cdot-z)(y)dz,$$

se sigue que $I \leq 4t||f||_\infty^2||G^a||_{L^1}^2$ y la convergencia buscada es consecuencia de que

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^{r\wedge s} S_v(S_{r-v}G^a(\cdot-z)S_{s-v}G^a(\cdot-w))(x)dvdwdz$$

es acotado.

Así, hemos probado que si f es una función Borel-medible y acotada entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^t X_s(f)ds &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\{\mu(G^a(\cdot-z)) - X_t(G^a(\cdot-z)) + a\int_0^t X_s(G^a(\cdot-z))ds\\
&\quad + M_t(G^a(\cdot-z))\}dz,
\end{aligned}$$

c.s. para toda $t>0$. La segunda afirmación del Teorema 3.2 se sigue del Lema 3.6. ■

Demostración del Teorema 3.1. La existencia de los tiempos locales $\mathfrak{L}_t$, l_t, y L_t se demuestra en [58], [14] y Lema 3.6, respectivamente. La equivalencia entre L_t y l_t se prueba en [19]. Si $f = 1_B$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, entonces, debido a (3.1),

$$Y_t(B) = \int_0^t X_s(1_B)ds = \int_B L_t^z dz, \quad \text{c.s.},$$

lo cual significa que $Y_t(\cdot) \ll dx$ y que la densidad es precisamente el tiempo local, es decir, $\mathfrak{L}_t^z = dY_t(\cdot)/dx = L_t^z$ c.s. para toda $t>0$. ■

Demostración del Teorema 3.3. Usando el problema de martingala de la Proposición 1.7 de [52] concluimos que el Lema 3.6 se sigue cumpliendo. Se procede ahora como en la demostración del Teorema 3.2. ■

Demostración del Teorema 3.4. Sabemos [52] que si $d=2$ y $X_0=\lambda$ entonces para toda $R>0$, $\{R^{-2}X_t(\varphi(\cdot/R))\} \stackrel{d}{=} \{X_{t/R^2}(\varphi)\}$. En particular poniendo $R = r^{-1/2}$ y $t = r^{-1}s$ con $r>0$, $s>0$ resulta

$$\{rX_{s/r}(\varphi(r^{1/2}\cdot))\} \stackrel{d}{=} \{X_s(\varphi)\}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{r}\int_0^{rt} X_s(\psi(\cdot - r^{1/2}y))ds \stackrel{d}{=} \frac{1}{r}\int_0^{rt} rX_{s/r}(\psi(r^{1/2}\cdot - r^{1/2}y))ds.$$

Además, debido al Teorema 3.3,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\int_0^{rt} rX_{s/r}(\psi(r^{1/2}\cdot - r^{1/2}y))ds &= \frac{1}{r}\int_0^t rX_s(\psi(r^{1/2}(\cdot-y)))rds\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} r\psi(r^{1/2}(x-y))L_t^x dx \quad \text{c.s.}\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\psi(x)L_t^{y+x/r^{1/2}}dx.
\end{aligned}$$

Puesto que L_t^x es un proceso continuo en x, de hecho bi-continuo [58], y ψ es una función continua con soporte compacto, entonces por el teorema de la convergencia dominada

$$\int_{\mathbb{R}^2} \psi(x) L_t^{y+x/r^{1/2}} dx \underset{r\to\infty}{\overset{\text{c.s.}}{\to}} \lambda(\psi) L_t^y,$$

de donde se sigue (3.2).

Para calcular $\mathrm{Var}(L_t^y)$ sea

$$L_t^{y,\epsilon} \doteq \int_0^t X_s(q_\epsilon(\cdot - y))ds, \quad \epsilon > 0.$$

Demostramos en el Lema 3.6 que $E[(L_t^y)^2] = \lim_{\epsilon\to 0} E[(L_t^{y,\epsilon})^2]$. Por otra parte, debido a (2.19) y a que λ es una medida invariante del movimiento browniano,

$$\begin{aligned} E[(L_t^{y,\epsilon})^2] &= \int_0^t \int_0^t E[X_u(q_\epsilon(\cdot - y))X_v(q_\epsilon(\cdot - y))]dudv \\ &= (\int_0^t \lambda(S_u(q_\epsilon(\cdot - y)))du)^2 \\ &\quad +2\int_0^t\int_0^t\int_0^{u\wedge v} \lambda(S_w(S_{u-w}(q_\epsilon(\cdot - y))S_{v-w}(q_\epsilon(\cdot - y))))dwdudv \\ &= (\int_0^t \lambda(q_\epsilon(\cdot - y))du)^2 \\ &\quad +2\int_0^t\int_0^t\int_0^{u\wedge v} \lambda(S_{u-w}(q_\epsilon(\cdot - y))S_{v-w}(q_\epsilon(\cdot - y)))dwdudv. \end{aligned}$$

Por la ecuación de Chapman-Kolmogorov,

$$\begin{aligned} \lambda(S_{u-w}(q_\epsilon(\cdot - y))S_{v-w}(q_\epsilon(\cdot - y))) &= \lambda((q_{\epsilon+u-w}(\cdot - y))(q_{\epsilon+v-w}(\cdot - y))) \\ &= \frac{1}{4\pi(2\epsilon + u + v - 2w)}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} E[(L_t^{y,\epsilon})^2] &= t^2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^t\int_0^{u\wedge v} \frac{1}{2\epsilon + u + v - 2w} dwdudv \\ &= t^2 + \frac{1}{4\pi}\{2t^2\ln(\epsilon + t) + 2t^2 \ln 2 - 2t^2\ln(2\epsilon + t) \\ &\quad +6\epsilon t + 4\epsilon t \ln 2 + 4\epsilon t \ln(\epsilon + t) - 8\epsilon t \ln(2\epsilon + t) \\ &\quad +8\epsilon^2 \ln 2 + 6\epsilon^2 \ln\epsilon + 2\epsilon^2 \ln(\epsilon + t) - 8\epsilon^2 \ln(2\epsilon + t)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $E[(L_t^y)^2] = t^2 + (t^2 \ln 2)/2\pi$. El resultado lo obtenemos notando que $E[L_t^{y,\epsilon}] = t$ para todo $\epsilon > 0$. ∎

4

Tiempo local y fórmula tipo Tanaka del superproceso (α, d, β)

4.1 Enunciado del resultado

Denotaremos por $M_f^{\pm}(\mathbb{R}^d)$ al conjunto de todas las medidas de Borel signadas en $\mathbb{R}^d$ de variación finita.

Al superproceso (α, d, β) càdlàg X le asociamos la medida aleatoria con valores enteros, N, definida en $\mathbb{R}_+ \times M_f^{\pm}(\mathbb{R}^d)$ por

$$N(dt, d\mu) = \sum_{s>0} 1_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \delta_{(s,\Delta X_s)}(ds, d\mu),$$

donde δ es la medida de Dirac y $\Delta X_s \doteq X_s - X_{s-}$. Existe una medida aleatoria $\hat{N}(ds, d\mu)$ (ver [34], Ejemplo (3.22)), llamada compensador o sistema de Lévy del proceso X, tal que $\tilde{N}(ds, d\mu) \doteq N(ds, d\mu) - \hat{N}(ds, d\mu)$ es una medida martingala (ver [16], pág. 109). El sistema de Lévy de un superproceso (α, d, β) está dado por ([10], pág. 111)

$$\hat{N}(ds, d\mu) = \tfrac{\beta(\beta+1)}{\Gamma(1-\beta)} ds X_s(dx) dz\, z^{-(\beta+2)} \delta_{z\delta_x}(d\mu). \tag{4.1}$$

Sea $[0, u]$ un intervalo fijo. Demostraremos el siguiente resultado:

Teorema 4.1 *Sea X un superproceso (α, d, β) cuyo valor inicial $X_0 = \mu \in M_f(\mathbb{R}^d)$ es absolutamente continuo con respecto a la medida de Lebesgue dx y tal que $d\mu/dx \in B_b(\mathbb{R}^d)_+$. Sea $L_t^{0,\epsilon}$ el tiempo local aproximante definido en (1.14). Si $d < \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\alpha$*

entonces para cada $t \in [0,u]$, $L_t^{0,\epsilon}$ *converge en* $L^1(P)$ *al límite* L_t^0 *cuando* $\epsilon \to 0$. L_t^0 *es independiente de la elección del molificador* Φ *y para cada* $a > 0$ *tiene la representación*

$$\begin{aligned} L_t^0 &= \mu(G_\alpha^a) - X_t(G_\alpha^a) + a\int_0^t X_s(G_\alpha^a)ds \\ &+ \int_0^t \int_{M_f(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}} 1_{\{|\mu(G_\alpha^a)|>1\}}\mu(G_\alpha^a)N(ds,d\mu) \\ &+ \int_0^t \int_{M_f(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}} 1_{\{|\mu(G_\alpha^a)|\leq 1\}}\mu(G_\alpha^a)\tilde{N}(ds,d\mu), \end{aligned} \tag{4.2}$$

para casi toda $t \in [0,u]$, *c.s.*

Observaciones:

1. Sustituyendo G_α^a por $G_\alpha^a(z-\cdot)$ en (4.2) se obtiene una representación para el tiempo local L_t^z, a saber

$$\begin{aligned} L_t^z &= \mu(G_\alpha^a(\cdot - z)) - X_t(G_\alpha^a(\cdot - z)) + a\int_0^t X_s(G_\alpha^a(\cdot - z))ds \\ &+ \int_0^t \int_{M_f(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}} 1_{\{|\mu(G_\alpha^a(\cdot - z))|>1\}}\mu(G_\alpha^a(\cdot - z))N(ds,d\mu) \\ &+ \int_0^t \int_{M_f(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}} 1_{\{|\mu(G_\alpha^a(\cdot - z))|\leq 1\}}\mu(G_\alpha^a(\cdot - z))\tilde{N}(ds,d\mu). \end{aligned}$$

2. R. J. Adler y M. Lewin en [3] desarrollan una representación del tiempo local de superprocesos $(\alpha, d, 1)$. Dicha representación del tiempo local es similar a la representación del tiempo local del superbrowniano (3.7). La deducción de Adler y Lewin del tiempo local se basa en el hecho de que el superproceso $(\alpha, d, 1)$ tiene momentos finitos de cualquier orden. Por otra parte, en la representación (4.2) del tiempo local del superproceso (α, d, β) aparece una integral que está relacionada con la discontinuidad del superproceso (α, d, β), la cual no aparece en la representación del tiempo local de los superprocesos $(\alpha, d, 1)$, que son procesos continuos. Ver por ejemplo la representación (3.7).

3. Con las modificaciones pertinentes la Observación 1 de la Sección 3.1 se sigue cumpliendo.

4.2 Algunos resultados preliminares

Iniciamos probando el siguiente resultado, esencial para esta parte del trabajo.

Lema 4.2 *Si* $d < \left(1+\frac{1}{\beta}\right)\alpha$, *entonces* $G_\alpha^a \in L^{1+\beta}(\mathbb{R}^d, dx)$.

Demostración. Necesitamos estimar

$$\begin{aligned} ||G_\alpha^a||_{L^{1+\beta}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |G_\alpha^a(x)|^{1+\beta}dx\right)^{1/(1+\beta)} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\int_0^\infty e^{-at}q_t^{(\alpha)}(x)dt\right|^{1+\beta} dx\right)^{1/(1+\beta)}. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.9 y (2.5),

$$\begin{aligned} ||G_\alpha^a||_{L^{1+\beta}} &\leq \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|e^{-at}q_t^{(\alpha)}(x)\right|^{1+\beta} dx\right)^{1/(1+\beta)} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-at}\left(\int_{\mathbb{R}^d} (q_t^{(\alpha)}(x))^{1+\beta}dx\right)^{1/(1+\beta)} dt \\ &\leq \text{cte.} \int_0^\infty e^{-at}t^{-d/\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+t^{-1/\alpha}|x|)^{-(1+\beta)(d+\alpha)}dx\right)^{1/(1+\beta)} dt. \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares en la integral (ver el Teorema 2.8),

$$\begin{aligned} ||G_\alpha^a||_{L^{1+\beta}} &\leq \text{cte.} \int_0^\infty e^{-at}t^{-d/\alpha}\left(\int_0^\infty r^{d-1}(1+t^{-1/\alpha}r)^{-(1+\beta)(d+\alpha)}dr\right)^{1/(1+\beta)} dt \\ &= \text{cte.} \int_0^\infty e^{-at}t^{-d/\alpha}\left((t^{-1/\alpha})^{-d}B(d,(1+\beta)(d+\alpha)-d)\right)^{1/(1+\beta)} dt, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la identidad (2.15), aquí B es la función de Bessel. De esta forma, debido a la identidad (2.16) obtenemos que la integral

$$\int_0^\infty e^{-at}t^{-d\beta(\alpha(1+\beta))^{-1}}dt,$$

es convergente si $1 - d\beta(\alpha(1+\beta))^{-1} > 0$. Además

$$||G_\alpha^a||_{L^{1+\beta}} \leq \text{cte.}\ (B(d,\alpha+\beta(d+\alpha)))^{1/(1+\beta)}a^{-(1-d\beta(\alpha(1+\beta))^{-1})}\ \Gamma\left(1-\frac{d\beta}{\alpha(1+\beta)}\right),$$

donde Γ es la función gamma. ■

Lema 4.3 *Si* $d < \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\alpha$, *entonces*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \, |G^a_\alpha(x)|^{1+\beta} - |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{1+\beta} \right| dx = 0. \tag{4.3}$$

Demostración. Comencemos por mostrar que $\lim_{\epsilon \to 0} ||G^a_\alpha - \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}||_{L^{1+\beta}} = 0$. En efecto, de la definición (2.13) y la desigualdad de Minkowski para integrales tenemos

$$\begin{aligned}
||G^a_\alpha - \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}||_{L^{1+\beta}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x) - G^a_\alpha(x)|^{1+\beta} dx \right)^{1/(1+\beta)} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} G^a_\alpha(\epsilon y + x)\Phi(y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} G^a_\alpha(x)\Phi(y)dy \right|^{1+\beta} dx \right)^{1/(1+\beta)} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (G^a_\alpha(\epsilon y + x) - G^a_\alpha(x))\Phi(y)dy \right|^{1+\beta} dx \right)^{1/(1+\beta)} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |(G^a_\alpha(\epsilon y + x) - G^a_\alpha(x))\Phi(y)|^{1+\beta} dx \right)^{1/(1+\beta)} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |G^a_\alpha(\epsilon y + x) - G^a_\alpha(x)|^{1+\beta} dx \right)^{1/(1+\beta)} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(y)| \; ||G^a_\alpha(\epsilon y + \cdot) - G^a_\alpha(\cdot)||_{L^{1+\beta}} \, dy.
\end{aligned}$$

Debido al Lema 4.2, $(G^a_\alpha)^{1+\beta} \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$, lo cual implica, según el Teorema 2.6, que $\lim_{\epsilon \to 0} ||G^a_\alpha(\epsilon y + \cdot) - G^a_\alpha(\cdot)||_{L^{1+\beta}} = 0$. Además

$$\begin{aligned}
|\Phi(y)| \; ||G^a_\alpha(\epsilon y + \cdot) - G^a_\alpha(\cdot)||_{L^{1+\beta}} &\leq |\Phi(y)| \; (||G^a_\alpha(\epsilon y + \cdot)||_{L^{1+\beta}} + ||G^a_\alpha||_{L^{1+\beta}}) \\
&= 2||G^a_\alpha||_{L^{1+\beta}} \, |\Phi(y)|.
\end{aligned}$$

Así, la afirmación se sigue del teorema de la convergencia dominada.

Por otra parte, de la desigualdad de Minkowski para integrales resulta

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{1+\beta} dx \right)^{1/(1+\beta)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} G^a_\alpha(\epsilon y + x)\Phi(y)dy \right|^{1+\beta} dx \right)^{1/(1+\beta)} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |G^a_\alpha(\epsilon y + x)\Phi(y)|^{1+\beta} dx \right)^{1/(1+\beta)} dy \\
&= ||G^a_\alpha||_{L^{1+\beta}}.
\end{aligned}$$

Debido a que $\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}$ converge en $L^{1+\beta}$ a G^a_α cuando $\epsilon \to 0$, las condiciones del Teorema 2.7 se cumplen y así

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \, |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{1+\beta} - |G^a_\alpha(x)|^{1+\beta} - |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x) - G^a_\alpha(x)|^{1+\beta} \, \right| dx = 0.$$

Finalmente, de la desigualdad

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left| \, |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{1+\beta} - |G^a_\alpha(x)|^{1+\beta} \, \right| dx \\
\leq\; &\int_{\mathbb{R}^d} \left| \, |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{1+\beta} - |G^a_\alpha(x)|^{1+\beta} - |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x) - G^a_\alpha(x)|^{1+\beta} \, \right| dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x) - G^a_\alpha(x)|^{1+\beta} dx,
\end{aligned}$$

se obtiene (4.3). ∎

4.3 Demostración del Teorema 4.1

Para $\varphi \in D(\Delta_\alpha)$ y $\beta < 1$ el proceso $X_t(\varphi)$, $t > 0$, es una semimartingala discontinua. Usando la medida puntual aleatoria $N(ds, d\mu)$ es posible dar la siguiente representación integral de $X_t(\varphi)$ ([30], Secciones 1.9 y 2.4, ver también [10], [16]):

$$\begin{aligned}
X_t(\varphi) &= \mu(\varphi) + \int_0^t X_s(\Delta_\alpha \varphi)ds + \int_0^t \int_{M_f^{\pm}(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}} f_1^{(\varphi)}(s, \mu)N(ds, d\mu) \\
&\quad + \int_0^t \int_{M_f^{\pm}(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}} f_2^{(\varphi)}(s, \mu)\tilde{N}(ds, d\mu),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde

$$f_1^{(\varphi)}(s, \mu) = 1_{\{|\mu(\varphi)| > 1\}}\mu(\varphi) \quad \text{y} \quad f_2^{(\varphi)}(s, \mu) = 1_{\{|\mu(\varphi)| \leq 1\}}\mu(\varphi).$$

Nótese que la representación (4.4) de la semimartingala $X_t(\varphi)$ difiere de la dada por Dawson en [10] en que para nosotros los saltos "grandes" son aquellos que son mayores que 1, mientras que en [10] son aquellos saltos que son más grandes que $||\varphi||_\infty$. Ver la representación general de semimartingalas en [44], fórmula (4.1.9).

Podemos sustituir $M_f^{\pm}(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}$ por $M_f(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}$ en la representación (4.4) de $X_t(\varphi)$ debido a que, con la métrica de variación finita en $M_f^{\pm}(\mathbb{R}^d)$, los saltos del proceso X son medidas positivas casi seguramente [16].

Según el Lema 4.2 $G^a_\alpha \in L^{1+\beta}(\mathbb{R}^d, dx)$ si $d < \left(1+\frac{1}{\beta}\right)\alpha$. Se sigue del Teorema 2.3 en [3] que para casi todo $t \in [0,u]$, $G^a_\alpha \in L^{1+\beta}(\mathbb{R}^d, X_t)$ casi seguramente. Así, los términos en el lado derecho de (4.2) están bien definidos para casi todo $t \in [0,u]$ c.s.

Nótese que sustituyendo $\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}$ en lugar de φ en la representación (4.4) y sumando $-a\int_0^t X_s(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})ds$ en ambos lados de (4.4) se obtiene, después de reagrupar,

$$\begin{aligned} L^{0,\epsilon}_t &= \int_0^t X_s(f_\epsilon)ds = \int_0^t X_s((-\Delta_\alpha + a)(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}))ds \\ &= \mu(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}) - X_t(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}) + a\int_0^t X_s(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{M_f(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}} f_1^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}(s,\mu)N(ds,d\mu) \\ &\quad + \int_0^t \int_{M_f(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}} f_2^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}(s,\mu)\tilde{N}(ds,d\mu). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Así, para demostrar el teorema basta probar que los términos en el lado derecho de la expresión (4.5) convergen en $L^1(P)$ a los correspondientes términos en el lado derecho de la expresión (4.2).

Usando la hipótesis de que μ tiene densidad acotada,

$$\begin{aligned} |\mu(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}) - \mu(G^a_\alpha)| &\le \mu(|\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon} - G^a_\alpha|) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x) - G^a_\alpha(x)|\frac{d\mu}{dx}dx \\ &\le \left\|\frac{d\mu}{dx}\right\|_\infty ||\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon} - G^a_\alpha||_{L^1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Haciendo un cambio de variable y aplicando el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon} - G^a_\alpha||_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} G^a_\alpha(y)\Phi_\epsilon(x-y)dy - \int_{\mathbb{R}^d}\Phi(y)G^a_\alpha(x)dy\right|dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} G^a_\alpha(\epsilon y + x)\Phi(y)dy - \int_{\mathbb{R}^d}\Phi(y)G^a_\alpha(x)dy\right|dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d}|\Phi(y)|\int_{\mathbb{R}^d}|G^a_\alpha(\epsilon y + x) - G^a_\alpha(x)|dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|\Phi(y)|\ ||G^a_\alpha(\epsilon y + \cdot) - G^a_\alpha(\cdot)||_{L^1}dy. \end{aligned}$$

Ya que $G^a_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ debido al Lema 2.3, se sigue del Teorema 2.6 que $||G^a_\alpha(\epsilon y + \cdot) - G^a_\alpha(\cdot)||_{L^1} \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$. En virtud de que

$$\begin{aligned} |\Phi(y)|\ ||G^a_\alpha(\epsilon y + \cdot) - G^a_\alpha(\cdot)||_{L^1} &\le |\Phi(y)|(||G^a_\alpha(\epsilon y + \cdot)||_{L^1} + ||G^a_\alpha||_{L^1}) \\ &= 2||G^a_\alpha||_{L^1}\Phi(y), \end{aligned}$$

se concluye del teorema de la convergencia dominada que $\mu(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}) \to \mu(G^a_\alpha)$ cuando $\epsilon \to 0$.

Usando (2.18) y la propiedad de simetría de las densidades de transición estables

$$\begin{aligned} E[|X_t(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}) - X_t(G^a_\alpha)|] &\le E[X_t(|\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon} - G^a_\alpha|)] \\ &\le \mu(S_t(|\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon} - G^a_\alpha|)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} S_t(|\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon} - G^a_\alpha|)(x)\frac{d\mu}{dx}(x)dx \\ &\le \left\|\frac{d\mu}{dx}\right\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(y) - G^a_\alpha(y)|q^{(\alpha)}_t(x,y)dy \\ &= \left\|\frac{d\mu}{dx}\right\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} dy|\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(y) - G^a_\alpha(y)|\int_{\mathbb{R}^d} q^{(\alpha)}_t(x,y)dx \\ &= \left\|\frac{d\mu}{dx}\right\|_\infty ||\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon} - G^a_\alpha||_{L^1}, \end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned} E\left[\left|\int_0^t X_s(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})ds - \int_0^t X_s(G^a_\alpha)ds\right|\right] &\le \int_0^t E[X_s(|\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon} - G^a_\alpha|)]ds \\ &\le u\left\|\frac{d\mu}{dx}\right\|_\infty ||\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon} - G^a_\alpha||_{L^1}. \end{aligned}$$

La convergencia en L^1 se sigue igual que en el caso anterior.

Faltan dos términos por considerar. Usando propiedades de integrales con respecto a procesos puntuales ([30], Sección 2.3) y (2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} &E\left[\left|\int_0^t\int f_1^{(G^a_\alpha)}(s,\mu)N(ds,d\mu) - \int_0^t\int f_1^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}(s,\mu)N(ds,d\mu)\right|\right] \\ &\le E\left[\int_0^t\int |f_1^{(G^a_\alpha)} - f_1^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}|(s,\mu)N(ds,d\mu)\right] \\ &= E\left[\int_0^t\int |f_1^{(G^a_\alpha)} - f_1^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}|(s,\mu)\hat{N}(ds,d\mu)\right] \end{aligned}$$

$$= \text{cte. } E\left[\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} X_s(dx) \int_0^\infty dz\, z^{-(\beta+2)} |f_1^{(G^a_\alpha)} - f_1^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}|(s, z\delta_x)\right]$$

$$= \text{cte. } E\left[\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} X_s(dx) \int_0^\infty dz\, z^{-(\beta+2)} |1_{\{z|G^a_\alpha(x)|>1\}} z G^a_\alpha(x) - 1_{\{z|\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|>1\}} z \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|\right]$$

$$= \text{cte. } E\left[\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} X_s(dx) \int_0^\infty dz\, z^{-\beta-1} |1_{\{z>|G^a_\alpha(x)|^{-1}\}} G^a_\alpha(x) - 1_{\{z>|\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1}\}} \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|\right].$$

De la igualdad

$$\left|1_{\{z>|G^a_\alpha(x)|^{-1}\}} G^a_\alpha(x) - 1_{\{z>|\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1}\}} \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)\right|$$
$$= (|G^a_\alpha(x)| \vee |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|) 1_{\{(|G^a_\alpha(x)|^{-1} \wedge |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1}) < z \le (|G^a_\alpha(x)|^{-1} \vee |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1})\}}$$
$$+ |G^a_\alpha(x) - \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)| 1_{\{z>(|G^a_\alpha(x)|^{-1} \vee |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1})\}}$$

resulta

$$E\left[\left|\int_0^t \int f_1^{(G^a_\alpha)}(s,\mu) N(ds,d\mu) - \int_0^t \int f_1^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}(s,\mu) N(ds,d\mu)\right|\right]$$
$$\le \text{cte. } E\left[\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} X_s(dx) \{(|G^a_\alpha(x)| \vee |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|) \int_{|G^a_\alpha(x)|^{-1} \wedge |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1}}^{|G^a_\alpha(x)|^{-1} \vee |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1}} z^{-\beta-1} dz\right.$$
$$\left. + |G^a_\alpha(x) - \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)| \int_{|G^a_\alpha(x)|^{-1} \vee |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1}}^\infty z^{-\beta-1} dz\}\right]$$
$$\le \text{cte. } E[\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} X_s(dx) \{(|G^a_\alpha(x)| \vee |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|)((|G^a_\alpha(x)|^{-1} \wedge |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1})^{-\beta}$$
$$- (|G^a_\alpha(x)|^{-1} \vee |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1})^{-\beta}) + |G^a_\alpha(x) - \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)| (|G^a_\alpha(x)|^{-1} \vee |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1})^{-\beta}\}].$$

Recordemos que si a, $b \in \mathbb{R}$, entonces $|a-b| = a \vee b - a \wedge b$ y si además a, $b > 0$, entonces

$$(a \vee b)^{-\beta} = a^{-\beta} \wedge b^{-\beta} \quad \text{y} \quad (a \wedge b)^{-\beta} = a^{-\beta} \vee b^{-\beta}.$$

Se sigue que, para $a > 0$, $b > 0$,

$$(a \vee b)((a^{-1} \wedge b^{-1})^{-\beta} - (a^{-1} \vee b^{-1})^{-\beta}) + |a-b|(a^{-1} \vee b^{-1})^{-\beta}$$
$$= (a \vee b)((a^\beta \vee b^\beta) - (a^\beta \wedge b^\beta)) + |a-b|(a^\beta \wedge b^\beta)$$
$$= (a \vee b)|a^\beta - b^\beta| + |a-b|(a^\beta \wedge b^\beta)$$
$$\le |b^{\beta+1} - a^{\beta+1}|.$$

Así, tomando $a = \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)$ y $b = G^a_\alpha(x)$,

$$E\left[\left|\int_0^t \int f_1^{(G^a_\alpha)}(s,\mu) N(ds,d\mu) - \int_0^t \int f_1^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}(s,\mu) N(ds,d\mu)\right|\right]$$
$$\le \text{cte. } E\left[\int_0^t X_s(|\,|G^a_\alpha|^{1+\beta} - |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}|^{1+\beta}\,|) ds\right]$$
$$\le \text{cte. } \|\,|G^a_\alpha|^{1+\beta} - |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}|^{1+\beta}\,\|_{L^1} \to 0$$

cuando $\epsilon \to 0$ por el Lema 4.3.

Finalmente, usando la desigualdad de Hölder,

$$E\left[\left|\int_0^t \int f_2^{(G^a_\alpha)}(s,\mu) \tilde{N}(ds,d\mu) - \int_0^t \int f_2^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}(s,\mu) \tilde{N}(ds,d\mu)\right|\right]$$
$$\le E\left[\int_0^t \int |f_2^{(G^a_\alpha)} - f_2^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}|(s,\mu) \tilde{N}(ds,d\mu)\right]$$
$$\le \left(E\left[\left(\int_0^t \int |f_2^{(G^a_\alpha)} - f_2^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}|(s,\mu) \tilde{N}(ds,d\mu)\right)^2\right]\right)^{1/2}$$
$$= \left(E\left[\int_0^t \int \left(f_2^{(G^a_\alpha)} - f_2^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}\right)^2 (s,\mu) \hat{N}(ds,d\mu)\right]\right)^{1/2}$$
$$= \left(\text{cte. } E\left[\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} X_s(dx) \int_0^\infty dz\, z^{-(\beta+2)} \left(f_2^{(G^a_\alpha)} - f_2^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}\right)^2 (s, z\delta_x)\right]\right)^{1/2}$$
$$= (\text{cte. } E[\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} X_s(dx) \int_0^\infty dz\, z^{-\beta} (1_{\{z \le |G^a_\alpha(x)|^{-1}\}} G^a_\alpha(x) - 1_{\{z \le |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1}\}}$$
$$\cdot \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x))^2])^{1/2}.$$

Como antes notemos que

$$|1_{\{z \le |G^a_\alpha(x)|^{-1}\}} G^a_\alpha(x) - 1_{\{z \le |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1}\}} \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|$$
$$= (|G^a_\alpha(x)| \wedge |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|) 1_{\{(|G^a_\alpha(x)|^{-1} \wedge |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1}) < z \le (|G^a_\alpha(x)|^{-1} \vee |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1})\}}$$
$$+ |G^a_\alpha(x) - \mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)| 1_{\{z \le (|G^a_\alpha(x)|^{-1} \wedge |\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon}(x)|^{-1})\}}.$$

La desigualdad $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ implica

$$E\left[\left|\int_0^t \int f_2^{(G^a_\alpha)}(s,\mu) \tilde{N}(ds,d\mu) - \int_0^t \int f_2^{(\mathcal{G}^a_{\alpha,\epsilon})}(s,\mu) \tilde{N}(ds,d\mu)\right|\right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\text{cte. } E[\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} X_s(dx)\{(|G_\alpha^a(x)| \wedge |\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x)|)^2 \int_{|G_\alpha^a(x)|^{-1} \wedge |\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x)|^{-1}}^{|G_\alpha^a(x)|^{-1} \vee |\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x)|^{-1}} z^{-\beta} dz \\
&\quad + |G_\alpha^a(x) - \mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x)|^2 \int_0^{|G_\alpha^a(x)|^{-1} \wedge |\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x)|^{-1}} z^{-\beta} dz\}])^{1/2} \\
&= (\text{cte. } E[\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} X_s(dx)\{(|G_\alpha^a(x)| \wedge |\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x)|)^2 \\
&\quad ((|G_\alpha^a(x)|^{-1} \vee |\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x)|^{-1})^{1-\beta} - (|G_\alpha^a(x)|^{-1} \wedge |\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x)|^{-1})^{1-\beta}) \\
&\quad + |G_\alpha^a(x) - \mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x)|^2 (|G_\alpha^a(x)|^{-1} \wedge |\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x)|^{-1})^{1-\beta}\}])^{1/2}.
\end{aligned}$$

Obsérvese que si $a > 0$, $b > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
&(a \wedge b)^2((a^{-1} \vee b^{-1})^{1-\beta} - (a^{-1} \wedge b^{-1})^{1-\beta}) + (a-b)^2(a^{-1} \wedge b^{-1})^{1-\beta} \\
&= (a^2 \wedge b^2)((a^{\beta-1} \vee b^{\beta-1}) - (a^{\beta-1} \wedge b^{\beta-1})) + (a-b)^2(a^{\beta-1} \wedge b^{\beta-1}) \\
&= (a^2 \wedge b^2)|a^{\beta-1} - b^{\beta-1}| + (a-b)^2(a^{\beta-1} \wedge b^{\beta-1}) \\
&\leq 2|b^{1+\beta} - a^{1+\beta}|.
\end{aligned}$$

En efecto, si $a \leq b$,

$$\begin{aligned}
&(a^2 \wedge b^2)|a^{\beta-1} - b^{\beta-1}| + (a-b)^2(a^{\beta-1} \wedge b^{\beta-1}) \\
&\leq a^2(a^{\beta-1} - b^{\beta-1}) + b^{\beta-1}(a-b)^2 \\
&= a^{1+\beta} - 2ab^\beta + b^{1+\beta} \\
&\leq b^{1+\beta} - 2aa^\beta + b^{1+\beta} = 2(b^{1+\beta} - a^{1+\beta}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando como antes $a = \mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a(x)$ y $b = G_\alpha^a(x)$,

$$\begin{aligned}
&E\left[\left|\int_0^t \int f_2^{(G_\alpha^a)}(s,\mu)\tilde{N}(ds,d\mu) - \int_0^t \int f_2^{(\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a)}(s,\mu)\tilde{N}(ds,d\mu)\right|\right] \\
&\leq \text{cte. } \|\, |G_\alpha^a|^{1+\beta} - |\mathcal{G}_{\alpha,\epsilon}^a|^{1+\beta} \,\|_{L^1}^{1/2} \to 0,
\end{aligned}$$

cuando $\epsilon \to 0$ debido al Lema 4.3.

5

Tiempo local, fórmula tipo Tanaka y TLAI del superproceso bi-tipo

5.1 Enunciado de los resultados

Recordemos de la Sección 2.8 que $m_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2$ y que $V_i > 0$, $\sum_{j=1}^2 m_{ij} = 1$, $i = 1, 2$.

Para $i \in \{1, 2\}$ definimos la función $\mathcal{G}^{(i,0)} : \{1,2\} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{G}^{(i,0)}(k,x) \doteq \delta_{ki} G_{\alpha_k}^{V_k(1-m_{kk})}(x)$$

y el operador $\vartheta^{(i)} : L^2(\{1,2\} \times \mathbb{R}^d, m) \to L^2(\{1,2\} \times \mathbb{R}^d, m)$ por

$$(\vartheta^{(i)} f)(k,x) \doteq \delta_{ki'} V_k m_{ki} f(i,x), \tag{5.1}$$

donde $i' \doteq (3 - (-1)^i)/2$.

Sea Λ el intervalo $[0, u]$ y m la medida en $\{1,2\} \times \mathbb{R}^d$ dada por

$$m(B \times C) \doteq \nu(B)\lambda(C), \quad B \subset \{1,2\}, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

donde $\nu(\cdot) \doteq \sum_{j=1}^2 \delta_j(\cdot)$ es la medida de contar en $\{1,2\}$ y λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$.

En los enunciados de los siguientes resultados supondremos que $X = \{X_t : t \in \Lambda\}$ es el superproceso bi-tipo introducido en la Sección 2.8 y que $X_0 = \mu \in M_f(\{1,2\} \times \mathbb{R}^d)$ tiene densidad, con respecto a m, acotada.

Teorema 5.1 *Sea $(i,z) \in \{1,2\} \times \mathbb{R}^d$. Si $d < 2\min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ entonces existe el tiempo local $L_t^{(i,z)}$ del superproceso bi-tipo X.*

Teorema 5.2 *Si $d < 2\min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ entonces el tiempo local $L^{(i,0)}$ de X se expresa como*

$$L_t^{(i,0)} = \mu(\mathcal{G}^{(i,0)}) - X_t(\mathcal{G}^{(i,0)}) + \int_0^t X_s(\vartheta^{(i)}\mathcal{G}^{(i,0)})ds + M_t(\mathcal{G}^{(i,0)}) \quad c.s., \tag{5.2}$$

donde $(i,0) \in \{1,2\} \times \mathbb{R}^d$, $t \in \Lambda$.

Teorema 5.3 *Sea $B \subset \Lambda^2$ con $\overline{B} \cap \{(x,y) \in \Lambda^2 : x = y\} = \emptyset$. Si $d < 4\min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ entonces existe el tiempo local de autointersección, $TLAI(B)$, de X.*

Observaciones:

1. De (5.2) se deduce la siguiente representación para el tiempo local $L_t^{(i,z)}$:

$$L_t^{(i,z)} = \mu(\mathcal{G}^{(i,z)}) - X_t(\mathcal{G}^{(i,z)}) + \int_0^t X_s(\vartheta^{(i)}\mathcal{G}^{(i,z)})ds + M_t(\mathcal{G}^{(i,z)}),$$

   donde $\mathcal{G}^{(i,z)}(k,x) \doteq \delta_{ki} G_{\alpha_k}^{V_k(1-m_{kk})}(x-z)$, $(k,x) \in \{1,2\} \times \mathbb{R}^d$.

2. Es posible obtener una expresión para el tiempo local del proceso de posición W del superproceso bi-tipo X. Esto se hace observando que $\delta_z = \delta_{(1,z)} + \delta_{(2,z)}$ y entonces

$$L_t^z = \mu(\mathcal{G}^z) - X_t(\mathcal{G}^z) + \int_0^t X_s(\vartheta\mathcal{G}^z)ds + M_t(\mathcal{G}^z),$$

   donde $\mathcal{G}^z \doteq \mathcal{G}^{(1,z)} + \mathcal{G}^{(2,z)}$ y $\vartheta \doteq \vartheta^{(1)} + \vartheta^{(2)}$.

3. Usando el criterio de continuidad de Kolmogorov es posible probar que para toda $\varphi \in L^1(\{1,2\} \times \mathbb{R}^d) \cap L^2(\{1,2\} \times \mathbb{R}^d)$, $X_.(\varphi)$ tiene una versión continua. De esto es factible mostrar la existencia de una versión continua de L_t^0 (ver [3] y [10]).

5.2 Algunos resultados preliminares

En el caso multitipo, el "movimiento de las partículas" es un proceso de Markov $\{1,2\} \times \mathbb{R}^d$-valuado, $\xi = \{(\eta_t, W_t) : t \geq 0\}$, cuyo generador infinitesimal es el operador A definido en (2.21). Este proceso se llama *proceso básico* [26]. La componente η es

el *proceso de tipos* y la componente W es el *proceso de posición*. El proceso η es una cadena de Markov con tiempo continuo y su Q-matriz está dada por $Q \doteq (\text{Diag } V)(M - I)$.

Sea P_i^η la medida construida en $D_{[0,\infty)}(\{1,2\})$ a partir de las matrices de transición $\exp(s(\text{Diag } V)(M-I))$, $s \geq 0$, y de la medida inicial δ_i, es decir, P_i^η es la distribución del proceso η cuando $\eta_0 = i$. A su vez, $P_{(i,x)}^{(\eta,W)}$ es la distribución del proceso básico (η, W) cuando $(\eta_0, W_0) = (i,x)$, la cual es una medida de probabilidad en $D_{[0,\infty)}(\{1,2\} \times \mathbb{R}^d)$.

Por $L_i(s,\eta)$ denotamos a la cantidad de tiempo que una trayectoria η del proceso de tipos pasa en el tipo i durante el intervalo $[0,s]$.

En las estimaciones que daremos enseguida usaremos el siguiente resultado, el cual se sigue, como veremos, de la conmutatividad de la convolución y de la ecuación de Chapman-Kolmogorov (ver la Proposición 3.1 en [26]).

Proposición 5.4 *Las probabilidades de transición J_t, $t > 0$, del proceso básico $\{(\eta_t, W_t) : t \geq 0\}$ están dadas por*

$$J_t((k,x), \{i\} \times C) = \int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})} 1_{\{\eta_0 = k,\ \eta_t = i\}}(\eta) \int_C (q_{L_1(t,\eta)}^{(\alpha_1)} * q_{L_2(t,\eta)}^{(\alpha_2)})(x,z)dz P_k^\eta(d\eta),$$

donde $k, i \in \{1,2\}$, $x \in \mathbb{R}^d$ y $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Por la conmutatividad de la convolución, $*$, tenemos que

$$\begin{aligned} J_t((k,x), \{i\} \times C) &= \int_C \int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})} 1_{\{\eta_0 = k,\ \eta_t = i\}}(\eta)(q_{L_k(t,\eta)}^{(\alpha_k)} * q_{L_{k'}(t,\eta)}^{(\alpha_{k'})})(x,z) P_k^\eta(d\eta)dz \\ &= \int_C E^{P_k^\eta}\left[(q_{L_k(t,\eta)}^{(\alpha_k)} * q_{L_{k'}(t,\eta)}^{(\alpha_{k'})})(x,z)1_{\{\eta_0 = k,\ \eta_t = i\}}(\eta)\right] dz, \end{aligned}$$

donde $k' \doteq \{1,2\} \backslash \{k\}$ y $E^{P_k^\eta}$ es la esperanza con respecto a la medida P_k^η. Sea $N(t,\eta)$ el número de saltos de la cadena de Markov η en el intervalo $[0,t]$. Así, por la ley de probabilidad total

$$\begin{aligned} J_t((k,x), \{i\} \times C) &= \int_C \sum_{n=0}^{\infty} E^{P_k^\eta}[(q_{L_k(t,\eta)}^{(\alpha_k)} * q_{L_{k'}(t,\eta)}^{(\alpha_{k'})})(x,z)1_{\{\eta_0 = k,\ \eta_t = i\}}(\eta) | N(t,\eta) = n] \\ &\quad \cdot P_k^\eta[N(t,\eta) = n]dz \end{aligned}$$

Debido al contexto bi-tipo tenemos que

$$1_{\{\eta_0=k,\ \eta_t=i\}}(\eta) = \begin{cases} 1_{2\mathbb{N}-1}(N(t,\eta)), & k \neq i, \\ 1_{2\mathbb{N}}(N(t,\eta)), & k = i, \end{cases}$$

donde $2\mathbb{N}-1 \doteq \{2n-1 : n = 1,2,...\}$ y $2\mathbb{N} \doteq \{2n : n = 0,1,2,...\}$. Supongamos que $k \neq i$, el otro caso es similar. Sea C_j el j-ésimo salto de la cadena de tipos η y sea $S_j \doteq C_j - C_{j-1}$, $j = 1,2,...$, con $C_0 = 0$. Es decir, S_j es el tiempo entre el salto $j-1$ y el salto j de la cadena de tipos η. Entonces

$$\begin{aligned}(q^{(\alpha_k)}_{L_k(t,\eta)} * q^{(\alpha_{k'})}_{L_{k'}(t,\eta)})(x,z)1_{\{\eta_0=k,\ \eta_t=i\}}(\eta)& \\ = (q^{(\alpha_k)}_{S_1+S_3+\cdots+S_{N(t,\eta)-1}} * q^{(\alpha_{k'})}_{S_2+S_4+\cdots+S_{N(t,\eta)}})(x,z)1_{2\mathbb{N}-1}(N(t,\eta)),&\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
&J_t((k,x),\{i\}\times C)\\
&= \int_C \sum_{n=0}^{\infty} E^{P_k^\eta}[(q^{(\alpha_k)}_{S_1+S_3+\cdots+S_{N(t,\eta)-1}} * q^{(\alpha_{k'})}_{S_2+S_4+\cdots+S_{N(t,\eta)}})(x,z)1_{2\mathbb{N}-1}(N(t,\eta))|\\
&\quad N(t,\eta)=n]P_k^\eta[N(t,\eta)=n]dz\\
&= \int_C \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} E^{P_k^\eta}[(q^{(\alpha_k)}_{S_1+S_3+\cdots+S_{N(t,\eta)-1}} * q^{(\alpha_{k'})}_{S_2+S_4+\cdots+S_{N(t,\eta)}})(x,z)|N(t,\eta)=n]\\
&\quad \cdot P_k^\eta[N(t,\eta)=n]dz\\
&= \int_C \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} \int_{t_1+\cdots+t_n=t} E^{P_k^\eta}[(q^{(\alpha_k)}_{S_1+S_3+\cdots+S_{N(t,\eta)-1}} * q^{(\alpha_{k'})}_{S_2+S_4+\cdots+S_{N(t,\eta)}})(x,z)|\\
&\quad N(t,\eta)=n, S_1=t_1, S_2=t_2,...,S_n=t_n]\\
&\quad \cdot P_k^\eta[S_1\in dt_1, S_2\in dt_2,...,S_n\in dt_n|N(t,\eta)=n]P_k^\eta[N(t,\eta)=n]dz\\
&= \int_C \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} \int_{t_1+\cdots+t_n=t} (q^{(\alpha_k)}_{t_1+t_3+\cdots+t_{n-1}} * q^{(\alpha_{k'})}_{t_2+t_4+\cdots+t_n})(x,z)\\
&\quad \cdot P_k^\eta[S_1\in dt_1, S_2\in dt_2,...,S_n\in dt_n|N(t,\eta)=n]P_k^\eta[N(t,\eta)=n]dz\\
&= \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} \int_{t_1+\cdots+t_n=t} \int_C (q^{(\alpha_k)}_{t_1+t_3+\cdots+t_{n-1}} * q^{(\alpha_{k'})}_{t_2+t_4+\cdots+t_n})(x,z)dz\\
&\quad \cdot P_k^\eta[S_1\in dt_1, S_2\in dt_2,...,S_n\in dt_n|N(t,\eta)=n]P_k^\eta[N(t,\eta)=n]\\
&= \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} \int_{t_1+\cdots+t_n=t} \int_C (q^{(\alpha_k)}_{t_1} * q^{(\alpha_{k'})}_{t_2} * \cdots * q^{(\alpha_i)}_{t_n})(x,z)dz\\
&\quad \cdot P_k^\eta[S_1\in dt_1, S_2\in dt_2,...,S_n\in dt_n|N(t,\eta)=n]P_k^\eta[N(t,\eta)=n]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} \int_{t_1+\cdots+t_n=t} \int_C \int_{\mathbb{R}^d}\cdots\int_{\mathbb{R}^d} q^{(\alpha_k)}_{t_1}(x,z_1)q^{(\alpha_{k'})}_{t_2}(z_1,z_2)\cdots q^{(\alpha_i)}_{t_n}(z_n,z)dz_1\\
&\quad \cdots dz_n dz\ P_k^\eta[S_1\in dt_1, S_2\in dt_2,...,S_n\in dt_n|N(t,\eta)=n]P_k^\eta[N(t,\eta)=n]\\
&= \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} \int_{t_1+\cdots+t_n=t} P^{(\eta,W)}_{(k,x)}[W(t)\in C|N(t,\eta)=n, S_1=t_1, S_2=t_2,...,S_n=t_n]\\
&\quad P_k^\eta[S_1\in dt_1, S_2\in dt_2,...,S_n\in dt_n|N(t,\eta)=n]P_k^\eta[N(t,\eta)=n].
\end{aligned}$$

Considerando a S_j y $N(t,\eta)$ como variables aleatorias en el espacio $D_{[0,\infty)}(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)$ y usando la propiedad de homogeneidad del proceso de posición obtenemos, por la ley de probabilidad total, que

$$\begin{aligned}
&J_t((k,x),\{i\}\times C)\\
&= \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} \int_{t_1+\cdots+t_n=t} P^{(\eta,W)}_{(k,x)}[W(t)\in C|N(t,\eta)=n, S_1=t_1,...,S_n=t_n]\\
&\quad \cdot P^{(\eta,W)}_{(k,x)}[S_1\in dt_1,...,S_n\in dt_n|N(t,\eta)=n]P^{(\eta,W)}_{(k,x)}[N(t,\eta)=n]\\
&= \sum_{n\in 2\mathbb{N}-1} P^{(\eta,W)}_{(k,x)}[W(t)\in C|N(t,\eta)=n]P^{(\eta,W)}_{(k,x)}[N(t,\eta)=n]\\
&= P^{(\eta,W)}_{(k,x)}[W(t)\in C,\ 1_{2\mathbb{N}-1}(N(t,\eta))]\\
&= P^{(\eta,W)}_{(k,x)}[W(t)\in C,\ 1_{\{i\}}(\eta(t))]\\
&= P^{(\eta,W)}_{(k,x)}[(\eta(t),W(t))\in\{i\}\times C]\\
&= P^{(\eta,W)}[(\eta(t),W(t))\in\{i\}\times C|(\eta(0),W(0))=(k,x)].
\end{aligned}$$

Como se quería probar. ■

Así,

$$\begin{aligned}
J_t((k,x),d(i,z)) &= J_t((k,x),\{i\}\times dz) = J_t((k,x),(i,z))dz\\
&= \int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})} (q^{(\alpha_1)}_{L_1(t,\eta)} * q^{(\alpha_2)}_{L_2(t,\eta)})(x,z)1_{\{\eta_0=k,\ \eta_t=i\}}(\eta)dzP_k^\eta(d\eta),
\end{aligned}$$

donde

$$J_t((k,x),(i,z)) = \int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})} (q^{(\alpha_1)}_{L_1(t,\eta)} * q^{(\alpha_2)}_{L_2(t,\eta)})(x,z)1_{\{\eta_0=k,\ \eta_t=i\}}(\eta)P_k^\eta(d\eta) \tag{5.3}$$

es la densidad de J_t con respecto a la medida $m = \sum_{j=1}^2(\delta_j\otimes\lambda)$. Nótese la relación

$$L_2(t,\eta) = t - L_1(t,\eta), \quad t > 0, \tag{5.4}$$

y que las densidades de transición del proceso básico satisfacen

$$\begin{aligned}
&\int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d} \frac{dJ_t((j,y),\cdot)}{dm}(i,z)dm(j,y) \\
&= \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d} J_t((j,y),(i,z))dy \\
&= \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})} (q^{(\alpha_1)}_{L_1(t,\eta)} * q^{(\alpha_2)}_{L_2(t,\eta)})(y,z)1_{\{\eta_0=j,\ \eta_t=i\}}(\eta)P^{\eta}_j(d\eta)dy \\
&= \sum_{j=1}^{2}\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})} 1_{\{\eta_0=j,\ \eta_t=i\}}(\eta)P^{\eta}_j(d\eta) \leq 2, \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema de Fubini para obtener la tercera igualdad.

En ocasiones denotaremos a $q_t^{(\alpha_i)}$ por $q_t^{(i)}$.

Usando un argumento de renovación obtenemos [27]

$$\begin{aligned}
J_t((i,x),(i,y)) &= e^{-V_i(1-m_{ii})t}q_t^{(i)}(x,y) \qquad (5.6)\\
&\quad + \int_0^t V_i(1-m_{ii})e^{-V_i(1-m_{ii})s}\int_{\mathbb{R}^d} q_s^{(i)}(x,z)J_{t-s}((j,z),(j,y))dzds,
\end{aligned}$$

con $j \neq i$.

Proposición 5.5 *La densidad de transición del proceso básico $J_t((i,x),(i,y))$ es continua en las variables t y x.*

Demostración. La continuidad de J en las variables t y x se sigue de la ecuación (5.6) y de la Proposición 5.4, respectivamente. ■

Lema 5.6 *Sea $q_t^{(i)}(x)$ la densidad de transición del proceso α_i-estable simétrico en $\mathbb{R}^d$, $i=1,2$. Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$, entonces existe $K \geq 1$ tal que para cualesquier $t>0$ y $x \in \mathbb{R}^d$*

$$q_t^{(2)}(x) \leq K q^{(1)}_{t^{\alpha_1/\alpha_2}}(x). \qquad (5.7)$$

Si además $t \geq 1$ entonces

$$q_t^{(2)}(x) \leq K t^{d(1/\alpha_1 - 1/\alpha_2)} q_t^{(1)}(x) \leq K t^{d/\alpha_1} q_t^{(1)}(x), \qquad (5.8)$$

para toda $x \in \mathbb{R}^d$.

Demostración. Debido al Teorema 2.1 tenemos que para cierta constante C_{α_i}, $q_1^{(i)}(x) \sim C_{\alpha_i}|x|^{-d-\alpha_i}$ cuando $|x| \to \infty$ (es decir, $\lim_{|x|\to\infty} C_{\alpha_i}^{-1}|x|^{d+\alpha_i}q_1^{(i)}(x) = 1$), $i=1,2$. Entonces, si $\alpha_1 < \alpha_2$,

$$\frac{q_1^{(2)}(x)}{q_1^{(1)}(x)} \sim \frac{C_{\alpha_2}}{C_{\alpha_1}}|x|^{\alpha_1-\alpha_2} \to 0 \quad \text{cuando } |x| \to \infty.$$

Se sigue que existe $c>0$ tal que

$$\frac{q_1^{(2)}(x)}{q_1^{(1)}(x)} \leq 1, \quad \text{para toda } |x| > c.$$

Por otra parte, la continuidad de $q_1^{(2)}(x)/q_1^{(1)}(x)$ en el compacto $\{y \in \mathbb{R}^d : |y| \leq c\}$ implica que existe una constante $M>0$ tal que

$$\frac{q_1^{(2)}(x)}{q_1^{(1)}(x)} \leq M, \quad \text{para toda } |x| \leq c.$$

Así, $q_1^{(2)}(x) \leq Kq_1^{(1)}(x)$ con $K = \max\{1, M\}$. Finalmente, valiéndonos de la propiedad de autosimilaridad de las densidades estables obtenemos

$$\begin{aligned}
q_t^{(2)}(x) &= t^{-d/\alpha_2}q_1^{(2)}(t^{-1/\alpha_2}x) \\
&\leq t^{-d/\alpha_2}Kq_1^{(1)}(t^{-1/\alpha_2}x) \qquad (5.9)\\
&= t^{-d/\alpha_2}K(t^{\alpha_1/\alpha_2})^{d/\alpha_1}((t^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}q_1^{(1)}((t^{\alpha_1/\alpha_2})^{-1/\alpha_1}x)) \\
&= t^{-d/\alpha_2}K(t^{\alpha_1/\alpha_2})^{d/\alpha_1}q^{(1)}_{t^{\alpha_1/\alpha_2}}(x) \\
&= Kq^{(1)}_{t^{\alpha_1/\alpha_2}}(x).
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que $q_1^{(i)}$ es radialmente decreciente (propiedad (2.6)) y la desigualdad (5.9), resulta para $t \geq 1$:

$$\begin{aligned}
q_t^{(2)}(x) &\leq t^{-d/\alpha_2}Kq_1^{(1)}(t^{-1/\alpha_1}x) \\
&= Kt^{d(1/\alpha_1-1/\alpha_2)}(t^{-d/\alpha_1}q_1^{(1)}(t^{-1/\alpha_1}x)) \\
&= Kt^{d(1/\alpha_1-1/\alpha_2)}q_t^{(1)}(x),
\end{aligned}$$

que es la primera desigualdad en (5.8). La segunda desigualdad en (5.8) es evidente para $t \geq 1$. ■

Para $i \in \{1,2\}$ y $x,y \in \mathbb{R}^d$ definimos la función

$$p_t^{(i)}(x,y)dy \doteq P[W_t \in dy|(\eta_0, W_0) = (i,x)].$$

Por la ley de probabilidad total,

$$
\begin{aligned}
p_t^{(i)}(x,y)dy &= \sum_{j=1}^{2} P[W_t \in dy, \eta_t = j | (\eta_0, W_0) = (i,x)] \\
&= \sum_{j=1}^{2} J_t((i,x),(j,y))dy. \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

Las funciones $p_t^{(i)}$ son las densidades de transición de la componente de posición W del proceso básico [27].

Ahora estimaremos a $p^{(i)}$. Denotamos por $\theta_t^i(dr)$ a la distribución condicional de $L_i(s,\eta)$ dado que hay cambio de tipo en el intervalo $(0,t]$. Debido a que la convolusión de densidades es conmutativa podemos suponer que primero ocurren todos los movimientos α_j y luego todos los movimientos $\alpha_{(3-(-1)^j)/2}$, sobre el evento de que existe cambio de tipo en $(0,t]$. En consecuencia (ver en [27] el Lema 5.9)

$$
p_t^{(j)}(x,y) = e^{-V_j(1-m_{jj})t} q_t^{(j)}(x,y) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} q_r^{(1)}(x,z) q_{t-r}^{(2)}(z,y) dz \theta_t^j(dr), \quad j=1,2. \qquad (5.11)
$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha_1 = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Si $0 < t < 1$, entonces de (5.11), (5.7) y de la ecuación de Chapman-Kolmogorov obtenemos

$$
\begin{aligned}
p_t^{(j)}(x,y) &\leq e^{-V_j(1-m_{jj})t} K q_{t^{\alpha_1/\alpha_j}}^{(1)}(x,y) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} q_r^{(1)}(x,z) K q_{(t-r)^{\alpha_1/\alpha_2}}^{(1)}(z,y) dz \theta_t^j(dr) \\
&\leq K[q_{t^{\alpha_1/\alpha_j}}^{(1)}(x,y) + \int_0^t (q_r^{(1)} * q_{(t-r)^{\alpha_1/\alpha_2}}^{(1)})(x,y) \theta_t^j(dr)] \\
&\leq 2K[q_{t^{\alpha_1/\alpha_j}}^{(1)}(x,y) + \int_0^t q_{r+(t-r)^{\alpha_1/\alpha_2}}^{(1)}(x,y) \theta_t^j(dr)]. \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

Si $t \geq 1$, entonces de (5.11), (5.8) y de la ecuación de Chapman-Kolmogorov resulta

$$
\begin{aligned}
p_t^{(j)}(x,y) &\leq e^{-V_j(1-m_{jj})t} K t^{d/\alpha_1} q_t^{(1)}(x,y) + \left(\int_0^{t-1} + \int_{t-1}^t\right) \\
&\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^d} q_r^{(1)}(x,z) q_{t-r}^{(2)}(z,y) dz \theta_t^j(dr) \\
&\leq K t^{d/\alpha_1} q_t^{(1)}(x,y) + \int_0^{t-1} \int_{\mathbb{R}^d} q_r^{(1)}(x,z) \\
&\quad \cdot K(t-r)^{d/\alpha_1} q_{t-r}^{(1)}(z,y) dz \theta_t^j(dr) \\
&\quad + \int_{t-1}^t \int_{\mathbb{R}^d} q_r^{(1)}(x,z) K q_{(t-r)^{\alpha_1/\alpha_2}}^{(1)}(z,y) dz \theta_t^j(dr)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K[t^{d/\alpha_1} q_t^{(1)}(x,y) + q_t^{(1)}(x,y) \int_0^{t-1} (t-r)^{d/\alpha_1} \theta_t^j(dr) \\
&\quad + \int_{t-1}^t q_{r+(t-r)^{\alpha_1/\alpha_2}}^{(1)}(x,y) \theta_t^j(dr)], \\
&\leq K[t^{d/\alpha_1} q_t^{(1)}(x,y) + t^{d/\alpha_1} q_t^{(1)}(x,y) \int_0^t \theta_t^j(dr) \\
&\quad + \int_{t-1}^t q_{r+(t-r)^{\alpha_1/\alpha_2}}^{(1)}(x,y) \theta_t^j(dr)] \\
&\leq 2K[t^{d/\alpha_1} q_t^{(1)}(x,y) + \int_{t-1}^t q_{r+(t-r)^{\alpha_1/\alpha_2}}^{(1)}(x,y) \theta_t^j(dr)]. \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

En las estimaciones anteriores no se aprecia la conveniencia de considerar los casos $0 < t \leq 1$ y $1 < t$. Esto se verá más adelante en la estimación de $H((i,z),(l,\zeta))$. Por el momento mencionamos que algunas de las expresiones que resultarán son integrales de la forma

$$
\int_0^u \int_0^{u-s} \int_0^{u-s} (t_1^{\alpha_1/\alpha_2} + t_2^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1} dt_1 dt_2 ds,
$$

que son difíciles de evaluar. Sin embargo, si $0 < t \leq 1$, entonces $t \leq t^{\alpha_1/\alpha_2}$ y la integral anterior, con $u \leq 1$, es mayorada por

$$
\int_0^u \int_0^{u-s} \int_0^{u-s} (t_1 + t_2)^{-d/\alpha_1} dt_1 dt_2 ds,
$$

que es mas fácil de calcular.

A continuación demostraremos algunos resultados que son una generalización de resultados conocidos.

Si $f : \{1,2\} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ es una función medible, entonces

$$
E\left[\int_0^t X_s(f) ds\right] = \int_0^t \mu(T_s f) ds \qquad (5.14)
$$

(ver [31], Lema 5.1). Usando (5.3) obtenemos las siguientes estimaciones, que emplearemos más adelante.

Lema 5.7 *Sea $f : \{1,2\} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ una función medible. Entonces*

$$
\begin{aligned}
E[X_t(f)] &\leq cm(f), \qquad (5.15) \\
E\left[\int_0^t X_s(f) ds\right] &\leq ctm(f), \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X_t(f)^2] &\leq c(m(f)^2 + tm(f^2)), && (5.17)\\
E\left[\left(\int_0^t X_s(f)ds\right)^2\right] &\leq c(m(f)^2 + tm(f^2)), && (5.18)
\end{aligned}
$$

donde c es una constante positiva genérica que puede depender de t.

Demostración. De (2.18), (5.3), (5.5) y de las hipótesis sobre $X_0 = \mu$, resulta

$$
\begin{aligned}
E[X_t(f)] &= \int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d} T_t f(k,x)\frac{d\mu}{dm}(k,x)m(d(k,x))\\
&\leq c\sum_{k=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d} T_t f(k,x)dx\\
&= c\sum_{k=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(j,y)J_t((k,x),(j,y))dydx\\
&= c\sum_{k=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(j,y)\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})}(q^{(\alpha_1)}_{L_1(t,\eta)} * q^{(\alpha_2)}_{L_2(t,\eta)})(x,y)\\
&\quad \cdot 1_{\{\eta_0=k,\ \eta_t=j\}}(\eta)P^{\eta}_k(d\eta)dydx\\
&= c\sum_{k=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(j,y)\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(\alpha_1)}_{L_1(t,\eta)}(x,w)\\
&\quad \cdot q^{(\alpha_2)}_{L_2(t,\eta)}(w,y)dw1_{\{\eta_0=k,\ \eta_t=j\}}(\eta)P^{\eta}_k(d\eta)dydx\\
&= c\sum_{k=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d} f(j,y)\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})} 1_{\{\eta_0=k,\ \eta_t=j\}}(\eta)P^{\eta}_k(d\eta)dy\\
&\leq 2c\sum_{k=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d} f(j,y)dy = 2cm(f),
\end{aligned}
$$

lo cual prueba (5.15). La desigualdad (5.16) se sigue directamente de (5.14) y (5.15). De (5.15), la desigualdad de Jensen y (5.5), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \mu(T_s((T_{t-s}f)^2))ds &\leq 2c\int_0^t m((T_{t-s}f)^2)ds\\
&= 2c\int_0^t\sum_{k=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d}(\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d} f(j,y)J_{t-s}((k,x),(j,y))dy)^2dxds\\
&\leq 4c\int_0^t\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d}(f(j,y))^2\sum_{k=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d} J_{t-s}((k,x),(j,y))dxdyds
\end{aligned}
$$

$$
\leq 8c\int_0^t\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d}(f(j,y))^2dyds \leq 8ctm(f^2).
$$

Así, de (2.18) y (2.19) resulta

$$
E[X_t(f)^2] \leq 4c^2m(f)^2 + 16ctm(f^2), \tag{5.19}
$$

y de esto (5.17) se sigue fácilmente. Por otra parte, de (5.19)

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^t X_s(f)ds\right)^2\right] &= E\left[\int_0^t X_r(f)dr\int_0^t X_s(f)ds\right]\\
&= \int_0^t\int_0^t E[X_r(f)X_s(f)]dsdr\\
&\leq \int_0^t\int_0^t (E[X_r(f)^2]E[X_s(f)^2])^{1/2}dsdr\\
&\leq t^2\sup_{0\leq r\leq t} E[X_r(f)^2]\\
&\leq t^2\sup_{0\leq r\leq t} c(m(f)^2 + rm(f^2))\\
&\leq c(m(f)^2 + tm(f^2)),
\end{aligned}
$$

que es justamente la desigualdad (5.18). ∎

Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ el superproceso bi-tipo. Se dice que un conjunto $A \in \mathcal{B}(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)$ es *cargado* por $X(\omega)$ si $X_t(\omega)(A) > 0$ para alguna $t > 0$. Como consecuencia de que X es continuo [16] se demuestra en [48], Sección 3.5, que si $m(A) \doteq (\sum_i^2(\delta_i\otimes\lambda))(A) = 0$, entonces X no carga a A casi seguramente. Este hecho lo emplearemos en la demostración del siguiente:

Teorema 5.8 *Sean $p \geq 1$ y $\varphi \in L^p(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d), m)$. Entonces para casi toda $t \in [0,u]$*

$$
P\{X_t(|\varphi|^p) < \infty\} = 1. \tag{5.20}
$$

Demostración. Supongamos que φ es no negativa. Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de funciones no negativas en $C_c(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)$ tal que φ_n converge a φ en $L^p(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d, m)$. Ya que $\{\varphi_n\}$ es de Cauchy en $L^p(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d, m)$, entonces $\{\varphi_n\}$ contiene una subsucesión, denotada también por $\{\varphi_n\}$, tal que $\{\varphi_n\}$ converge a φ m-c.d. Por lo tanto el conjunto $\{(i,x) : \varphi_n(i,x) \nrightarrow \varphi(i,x)\}$ no es cargado c.s. por el superproceso bi-tipo X (ver la Observación 2 de la Sección 2.8), es decir,

$$
X_t(\omega)\{(i,x) : \varphi_n(i,x) \nrightarrow \varphi(i,x)\} = 0
$$

para toda $t \in [0,u]$, P-casi seguramente. Aplicando el Lema de Fatou y usando (5.15) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^u E[X_s(\varphi^p)]ds &= \int_0^u E\left[X_s(\liminf_{n\to\infty} (\varphi_n)^p)\right] ds \\
&\leq \int_0^u \liminf_{n\to\infty} E[X_s((\varphi_n)^p)]ds \\
&\leq u \liminf_{n\to\infty} cm((\varphi_n)^p) \\
&= cum(\varphi^p) < \infty.
\end{aligned}$$

Así, para casi toda $t \in [0,u]$, $E[X_t(\varphi^p)] < \infty$, es decir, para casi toda $t \in [0,u]$,

$$1 = P\{X_t(\varphi^p) < \infty\} = P\{\varphi \in L^p(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d), X_t)\}.$$

El caso general se sigue de observar que $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. ■

5.3 Demostración del Teorema 5.1

Usaremos los resultados de E. B. Dynkin [14] para demostrar el Teorema 5.1, es decir, aplicaremos el Teorema 1.1 de esta tesis.

Recordemos que la función de transición $J_t((j,y), \cdot \times \cdot)$ del proceso básico es absolutamente continua respecto a m con densidad dada por

$$\begin{aligned}
J_t((i,x),(j,y))dy &= J_t((i,x);\{j\}\times dy) \\
&= P[W_t \in dy, \eta_t = j | W_0 = x, \eta_0 = i].
\end{aligned}$$

Definamos la función (ver la pág. 19)

$$G(s,(j,y);(i,z)) = \int_0^u J_{t-s}((j,y),(i,z))dt$$

donde $J_{t-s} = 0$ si $t < s$, y

$$H((i,z),(l,\zeta)) = \int_0^u \int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d} G(s,(j,y);(i,z))G(s,(j,y);(l,\zeta))m(d(j,y))ds.$$

De (5.10) resulta

$$G(s,(j,y);(i,z)) = \int_s^u J_{t-s}((j,y),(i,z))dt \leq \int_0^{u-s} p_t^{(j)}(y,z)dt \tag{5.21}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
&H((i,z),(l,\zeta)) \\
&= \sum_{j=1}^2 \int_0^u \int_{\mathbb{R}^d} G(s,(j,y);(i,z))G(s,(j,y);(l,\zeta))dyds \\
&\leq \sum_{j=1}^2 \int_0^u \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{u-s} p_{t_1}^{(j)}(y,z)dt_1\right)\left(\int_0^{u-s} p_{t_2}^{(j)}(y,\zeta)dt_2\right) dyds \\
&= \sum_{j=1}^2 \left(\int_0^{(u-1)_+} + \int_{(u-1)_+}^u\right) \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{u-s} p_{t_1}^{(j)}(y,z)dt_1\right)\left(\int_0^{u-s} p_{t_2}^{(j)}(y,\zeta)dt_2\right) dyds \\
&= \sum_{j=1}^2 \int_0^{(u-1)_+} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 p_{t_1}^{(j)}(y,z)dt_1 + \int_1^{u-s} p_{t_1}^{(j)}(y,z)dt_1\right) \\
&\quad \cdot \left(\int_0^1 p_{t_2}^{(j)}(y,\zeta)dt_2 + \int_1^{u-s} p_{t_2}^{(j)}(y,\zeta)dt_2\right) dyds \\
&\quad + \sum_{j=1}^2 \int_{(u-1)_+}^u \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{u-s} p_{t_1}^{(j)}(y,z)dt_1\right)\left(\int_0^{u-s} p_{t_2}^{(j)}(y,\zeta)dt_2\right) dyds.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Así, usando (5.12) y (5.13), en el primer sumando de (5.22) queda

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^2 \int_0^{(u-1)_+} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 p_{t_1}^{(j)}(y,z)dt_1 + \int_1^{u-s} p_{t_1}^{(j)}(y,z)dt_1\right) \\
&\cdot \left(\int_0^1 p_{t_2}^{(j)}(y,\zeta)dt_2 + \int_1^{u-s} p_{t_2}^{(j)}(y,\zeta)dt_2\right) dyds \\
\leq\ & \sum_{j=1}^2 \int_0^{(u-1)_+} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_0^1 2K(q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z) + \int_0^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1))dt_1 \\
&+ \int_1^{u-s} 2K(t_1^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_1}(y,z) + \int_{t_1-1}^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1))dt_1\Big) \\
&\cdot\Big(\int_0^1 2K(q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta) + \int_0^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2))dt_2 \\
&+ \int_1^{u-s} 2K(t_2^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_2}(y,\zeta) + \int_{t_2-1}^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2))dt_2\Big)dyds \\
\leq\ & 4K^2 \sum_{j=1}^2 \int_0^{(u-1)_+} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_0^1 q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)dt_1 + \int_0^1 \int_0^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_1^{u-s} t_1^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_1}(y,z)dt_1+\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1)\\
&\cdot(\int_0^1 q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dt_2+\int_0^1\int_0^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_2\\
&+\int_1^{u-s} t_2^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_2}(y,\zeta)dt_2+\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_2)dyds\\
\leq\ & 4K^2\sum_{j=1}^{2}\int_0^{(u-1)_+}\int_{\mathbb{R}^d}(\int_0^1 q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)dt_1\int_0^1 q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dt_2\\
&+\int_0^1 q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)dt_1\int_0^1\int_0^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_2\\
&+\int_0^1 q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)dt_1\int_1^{u-s} t_2^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_2}(y,\zeta)dt_2\\
&+\int_0^1 q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)dt_1\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1\int_0^1 q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1\int_0^1 q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1\int_0^1\int_0^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1\int_1^{u-s} t_2^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_2}(y,\zeta)dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1\\
&\cdot\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_2\\
&+\int_1^{u-s} t_1^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_1}(y,z)dt_1\int_0^1 q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dt_2\\
&+\int_1^{u-s} t_1^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_1}(y,z)dt_1\int_0^1\int_0^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_2\\
&+\int_1^{u-s} t_1^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_1}(y,z)dt_1\int_1^{u-s} t_2^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_2}(y,\zeta)dt_2\\
&+\int_1^{u-s} t_1^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_1}(y,z)dt_1\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1\int_0^1 q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1\\
&\cdot\int_0^1\int_0^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1\int_1^{u-s} t_2^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{t_2}(y,\zeta)dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1\\
&\cdot\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_2)dyds\\
\leq\ & 4K^2\sum_{j=1}^{2}\int_0^{(u-1)_+}(\int_0^1\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dydt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1 t_2^{d/\alpha_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)q^{(1)}_{t_2}(y,\zeta)dydt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_{t_2-1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)\\
&\cdot dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_0^{t_1} t_2^{d/\alpha_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)q^{(1)}_{t_2}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_{t_2-1}^{t_2}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_1}(dr_1)\\
&\cdot\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s} t_1^{d/\alpha_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{t_1}(y,z)q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dydt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}\int_0^{t_2} t_1^{d/\alpha_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{t_1}(y,z)q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s} t_1^{d/\alpha_1}t_2^{d/\alpha_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{t_1}(y,z)q^{(1)}_{t_2}(y,\zeta)dydt_1dt_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2} t_1^{d/\alpha_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{t_1}(y,z)q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{1}\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{1}\int_1^{u-s}\int_0^{t_2}\int_{t_1-1}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_1}(dr_1)\\
&\cdot\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1} t_2^{d/\alpha_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)q^{(1)}_{t_2}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2}\int_{t_1-1}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)dy\\
&\cdot\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2)ds.
\end{aligned}
$$

Para el segundo sumando de (5.22) se tiene

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^2\int_{(u-1)_+}^{u}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^{u-s}p^{(j)}_{t_1}(y,z)dt_1\right)\left(\int_0^{u-s}p^{(j)}_{t_2}(y,\zeta)dt_2\right)dyds\\
\leq\ &\sum_{j=1}^2\int_{(u-1)_+}^{u}\int_{\mathbb{R}^d}(\int_0^{u-s}2K(q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)+\int_0^{t_1}q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1))dt_1)\\
&\cdot(\int_0^{u-s}2K(q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)+\int_0^{t_2}q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2))dt_2)dyds\\
\leq\ &4K^2\sum_{j=1}^2\int_{(u-1)_+}^{u}\int_{\mathbb{R}^d}(\int_0^{u-s}q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)dt_1\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{t_1}q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1)\\
&\cdot(\int_0^{u-s}q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dt_2+\int_0^{u-s}\int_0^{t_2}q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_2)dyds\\
\leq\ &4K^2\sum_{j=1}^2\int_{(u-1)_+}^{u}(\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_{\mathbb{R}^d}q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dydt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d}q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)dy\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d}q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)dy
\end{aligned}
$$

$$
\cdot\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2)ds.
$$

Usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov se obtiene, para el primer sumando de (5.22),

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^2\int_0^{(u-1)_+}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^{1}p^{(j)}_{t_1}(y,z)dt_1+\int_1^{u-s}p^{(j)}_{t_1}(y,z)dt_1\right)\\
&\cdot\left(\int_0^{1}p^{(j)}_{t_2}(y,\zeta)dt_2+\int_1^{u-s}p^{(j)}_{t_2}(y,\zeta)dt_2\right)dyds\\
\leq\ &4K^2\sum_{j=1}^2\int_0^{(u-1)_+}(\int_0^1\int_0^1 q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(z,\zeta)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_2}q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(z,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1 t_2^{d/\alpha_1}q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+t_2}(z,\zeta)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_{t_2-1}^{t_2}q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(z,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_1}q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(z,\zeta)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(z,\zeta)\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_0^{t_1}t_2^{d/\alpha_1}q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2}(z,\zeta)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_{t_2-1}^{t_2}\int_0^{t_1}q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(z,\zeta)\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}t_1^{d/\alpha_1}q^{(1)}_{t_1+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(z,\zeta)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}\int_0^{t_2}t_1^{d/\alpha_1}q^{(1)}_{t_1+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(z,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}t_1^{d/\alpha_1}t_2^{d/\alpha_1}q^{(1)}_{t_1+t_2}(z,\zeta)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2}t_1^{d/\alpha_1}q^{(1)}_{t_1+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(z,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1}q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(z,\zeta)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1\int_1^{u-s}\int_0^{t_2}\int_{t_1-1}^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(z,\zeta)\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1} t_2^{d/\alpha_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2}(z,\zeta)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2}\int_{t_1-1}^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(z,\zeta)\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)\\
&\cdot dt_1dt_2)ds,
\end{aligned}
$$

mientras que para el segundo sumando de (5.22),

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{2}\int_{(u-1)_+}^{u}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^{u-s} p^{(j)}_{t_1}(y,z)dt_1\right)\left(\int_0^{u-s} p^{(j)}_{t_2}(y,\zeta)dt_2\right)dyds\\
\leq\ & 4K^2\sum_{j=1}^{2}\int_{(u-1)_+}^{u}(\int_0^{u-s}\int_0^{u-s} q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(z,\zeta)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_2} q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(z,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(z,\zeta)\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(z,\zeta)\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)\\
&\cdot dt_1dt_2)ds.
\end{aligned}
$$

Para demostrar el Teorema 5.1 mostraremos únicamente que $H((i,z),(i,z))<\infty$ pues las otras condiciones requeridas por el Teorema 1.1 se verifican fácilmente: la condición (c) coincide con la desigualdad (5.5) y la condición (a) se sigue de la Proposición 5.5.

Por autosimilaridad y la desigualdad $t\leq t^{\alpha_1/\alpha_j}$ válida para $0<t\leq 1$, resulta

$$
\begin{aligned}
&H((i,z),(i,z))\\
\leq\ & 4K^2 q^{(1)}_1(0)(\sum_{j=1}^{2}\int_0^{(u-1)_+}(\int_0^1\int_0^1 (t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_2}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1 t_2^{d/\alpha_1}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_{t_2-1}^{t_2}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\\
&\cdot\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_0^{t_1} t_2^{d/\alpha_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_{t_2-1}^{t_2}\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\\
&\cdot\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s} t_1^{d/\alpha_1}(t_1+t_2^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}\int_0^{t_2} t_1^{d/\alpha_1}(t_1+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s} t_1^{d/\alpha_1}t_2^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2} t_1^{d/\alpha_1}(t_1+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}\int_0^{t_2}\int_{t_1-1}^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\\
&\cdot\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1} t_2^{d/\alpha_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2}\int_{t_1-1}^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}\\
&+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2)ds\\
&+\sum_{j=1}^{2}\int_{(u-1)_+}^{u}(\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_2}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\\
&\cdot\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2)ds)\\
\leq\ & 4K^2q_1^{(1)}(0)(\sum_{j=1}^{2}\int_0^{(u-1)_+}(\int_0^1\int_0^1(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_2}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1 t_2^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_{t_2-1}^{t_2}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_0^{t_1}t_2^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1\int_{t_2-1}^{t_2}\int_0^{t_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}t_1^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}\int_0^{t_2}t_1^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}t_1^{d/\alpha_1}t_2^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2}t_1^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}\int_0^{t_2}\int_{t_1-1}^{t_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_1-1}^{t_1}t_2^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}\int_{t_2-1}^{t_2}\int_{t_1-1}^{t_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2)ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{2}\int_{(u-1)_+}^{u}(\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_2}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2)ds)\\
\leq\ & 4K^2q_1^{(1)}(0)(\sum_{j=1}^{2}\int_0^{(u-1)_+}(\int_0^1\int_0^1(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_0^{t_2}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1 u^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_{t_2-1}^{t_2}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_0^{t_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_0^1(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_0^{t_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\int_0^{t_2}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1 u^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_0^{t_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_0^1(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_0^{t_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\int_{t_2-1}^{t_2}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}u^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}u^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_0^{t_2}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}u^{2d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}u^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_{t_2-1}^{t_2}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^1\int_1^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_{t_1-1}^{t_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1\int_1^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_{t_1-1}^{t_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\int_0^{t_2}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}u^{d/\alpha_1}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_{t_1-1}^{t_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_{t_1-1}^{t_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\int_{t_2-1}^{t_2}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2)ds\\
&+\sum_{j=1}^{2}\int_{(u-1)_+}^{u}(\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_0^{t_2}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_0^{t_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}\int_0^{t_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\int_0^{t_2}\theta^j_{t_2}(dr_2)dt_1dt_2)ds).
\end{aligned}
$$

De esta manera,

$$
\begin{aligned}
H((i,z),(i,z)) &\le 4K^2q_1^{(1)}(0)\max\{u^{2d/\alpha_1},1\}\\
&\quad\cdot(\sum_{j=1}^{2}\int_0^{(u-1)_+}4(\int_0^1\int_0^1(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&\quad+\int_1^{u-s}\int_0^1(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&\quad+\int_0^1\int_1^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2\\
&\quad+\int_1^{u-s}\int_1^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2)ds\\
&\quad+\sum_{j=1}^{2}\int_{(u-1)_+}^{u}4\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2ds)\\
&= 16K^2q_1^{(1)}(0)\max\{u^{2d/\alpha_1},1\}\\
&\quad\cdot(\sum_{j=1}^{2}\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2ds\\
&\quad+\sum_{j=1}^{2}\int_{(u-1)_+}^{u}\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2ds).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
H((i,z),(i,z)) \le 32K^2q_1^{(1)}(0)\max\{u^{2d/\alpha_1},1\}\int_0^u\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2ds.
$$

En caso de que $1-d/\alpha_1=0$ resulta

$$
\begin{aligned}
\int_0^u\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1+t_2)^{-1}dt_1dt_2ds &= \int_0^u\int_0^{u-s}(\ln(u-s+t_2)-\ln t_2)dt_2ds\\
&= \int_0^u(2u\ln 2-2s\ln 2)ds\\
&= u^2\ln 2.
\end{aligned}
$$

Para el caso $1-d/\alpha_1\neq 0$ se obtiene

$$
\int_0^u\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}(t_1+t_2)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2ds = C\int_0^u((u-s+t_2)^{2-d/\alpha_1}-t_2^{2-d/\alpha_1})|_0^{u-s}ds.
$$

Así, esta última integral es finita si $2\alpha_1>d$. Por lo tanto en ambos casos tenemos que $2\alpha_1>d$ es suficiente para que $H((i,z),(i,z))<\infty$, con lo cual se demuestra el Teorema 5.1.

5.4 Demostración del Teorema 5.2

De lo expuesto en la Sección 2.8 se sabe que

$$
M_t(\varphi)\doteq X_t(\varphi)-\mu(\varphi)-\int_0^t X_s(A\varphi)ds,\quad \varphi\in C_b(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)\cap D(A), \tag{5.23}
$$

es una martingala continua con proceso creciente

$$
\langle M(\varphi)\rangle_t = 2\int_0^t X_s(\varphi^2)ds. \tag{5.24}
$$

Con el fin de extender el dominio de la representación (5.23) consideremos el mapeo lineal $(C_0^\infty(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d),||\cdot||_{L^2(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)})\to\mathcal{H}^2$, definido por

$$
\varphi\mapsto M_\cdot(\varphi).
$$

Usando (5.16) y la desigualdad de Doob (ver la Sección 2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} ||M_.(\varphi)||^2_{\mathcal{H}^2} &= E\left[\sup_{t\leq u}(M_t(\varphi))^2\right] \leq 4E[(M_u(\varphi))^2] \\ &= 8E\left[\int_0^u X_s(\varphi^2)ds\right] \leq cum(\varphi^2) = cu||\varphi||^2_{L^2(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que dicho mapeo es continuo. Puesto que $C_0^\infty(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^2(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)$ podemos extender el mapeo a $L^2(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)$. La extensión del dominio de la representación (5.23) esta relacionado con un resultado obtenido por S. Mèlèar y S. Roelly en [45], ver la Proposición I-3.

Definamos las funciones $\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}:\{1,2\}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, como

$$\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}(k,x) \doteq \delta_{ki}\mathcal{G}_{\alpha_k,\epsilon}^{V_k(1-m_{kk})}(x),$$

con $\mathcal{G}_{\alpha_k,\epsilon}^{V_k(1-m_{kk})}$ definida en (2.13). De la definición anterior se sigue de inmediato que

$$\begin{aligned} &(-A+\vartheta^{(i)})(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})(k,x) \\ &= \delta_{ki}(-\Delta_{\alpha_k}\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}(k,x)+V_k(1-m_{kk})\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}(k,x)) \\ &= \delta_{ki}(-\Delta_{\alpha_k}\mathcal{G}_{\alpha_k,\epsilon}^{V_k(1-m_{kk})}(x)+V_k(1-m_{kk})\mathcal{G}_{\alpha_k,\epsilon}^{V_k(1-m_{kk})}(x)). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Debido a que $\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}\in C^\infty(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)$ tenemos que

$$M_t(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}) = X_t(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}) - \mu(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}) - \int_0^t X_s(A\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})ds$$

es una martingala. Sumando a ambos lados de la expresión anterior el término $\int_0^t X_s(\vartheta^{(i)}\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})ds$ resulta

$$\int_0^t X_s((-A+\vartheta^{(i)})\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})ds = \mu(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}) - X_t(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}) + \int_0^t X_s(\vartheta^{(i)}\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})ds + M_t(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}). \tag{5.26}$$

Ya que $\vartheta^{(i)}\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}\in L^2(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d,m)$, se sigue del Teorema 5.8 que la representación anterior está definida c.s.

A continuación vamos a mostrar que los términos en el lado derecho de (5.26) convergen a los correspondientes términos del lado derecho de (5.2). Nótese que

$$\begin{aligned} (\mu(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})-\mu(\mathcal{G}^{(i,0)}))^2 &= (\mu(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}^{(i,0)}))^2 \\ &\leq \mu(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)\mu((\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}^{(i,0)})^2) \\ &\leq cm((\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}^{(i,0)})^2) \\ &= c||\mathcal{G}_{\alpha_i,\epsilon}^{V_i(1-m_{ii})}-\mathcal{G}_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}||_2^2 \\ &= c||G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}*\Phi_\epsilon - G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}||_2^2. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Debido a que $d<2\alpha_i$ tenemos, por el Lema 2.3, que la función $G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}\in L^2(\mathbb{R}^d)$, y así la convergencia a cero cuando $\epsilon\to 0$ en (5.27) se sigue del Teorema 2.5. La convergencia de $X_t(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})$ a $X_t(\mathcal{G}^{(i,0)})$ se prueba de forma análoga (hay que emplear (5.17) en este caso).

Usando la linealidad de $\vartheta^{(i)}$ y (5.18),

$$\begin{aligned} &E\left[\left(\int_0^t X_s(\vartheta^{(i)}\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})ds - \int_0^t X_s(\vartheta^{(i)}\mathcal{G}^{(i,0)})ds\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\int_0^t X_s(\vartheta^{(i)}(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}^{(i,0)}))ds\right)^2\right] \\ &\leq E\left[\left(\int_0^t X_s(|\vartheta^{(i)}(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}^{(i,0)})|)ds\right)^2\right] \\ &\leq c(||\vartheta^{(i)}(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}^{(i,0)})||_1^2 + ||\vartheta^{(i)}(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}^{(i,0)})||_2^2). \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} ||\vartheta^{(i)}(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}^{(i,0)})||_1 &= \sum_{j=1}^2\int_{\mathbb{R}^d}|\vartheta^{(i)}(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}^{(i,0)})(j,y)|dy \\ &= V_{i'}m_{i'i}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathcal{G}_{\alpha_i,\epsilon}^{V_i(1-m_{ii})}(x)-G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}(x)|dx \\ &= V_{i'}m_{i'i}\int_{\mathbb{R}^d}|(G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}*\Phi_\epsilon)(x)-G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}(x)|dx \end{aligned}$$

lo cual, debido al Teorema 2.5, converge a cero cuando $\epsilon\to 0$ puesto que $G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}\in L^1(\mathbb{R}^d,dx)$. El término $||\vartheta^{(i)}(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}^{(i,0)})||_2^2$ se trabaja de forma similar a como se procedió con (5.27).

De (5.16) resulta

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(M_t(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})-M_t(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})\right)^2\right]&=E\left[\left(M_t(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})\right)^2\right]\\
&\leq cm((\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}-\mathcal{G}^{(i,0)})^2),
\end{aligned}
$$

que tiende a cero cuando $\epsilon\to 0$ como en (5.27).

Veamos la convergencia que falta. Es decir, vamos a demostrar que el lado izquierdo de (5.26) converge al tiempo local. Para llevar a cavo esto expresaremos el lado derecho de (5.26) como la integral estocástica $I_1(F_\epsilon)$. Así, veremos que la integral está bien definida, y la convergencia buscada será consecuencia de la propiedad de isometría de I_1. Remitimos a la Sección 2.9 para notaciones y definiciones de las integrales estocásticas que aparecen abajo.

De (2.29) tenemos que

$$
X_t((-A+\vartheta^{(i)})(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}))=\int T_{t-s}(-A+\vartheta^{(i)})(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})(k,x)dZ_{s,(k,x)}.
$$

Por el Teorema de Fubini nos queda

$$
\begin{aligned}
\int_0^r X_t((-A+\vartheta^{(i)})(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}))dt&=\int_0^r\int T_{t-s}(-A+\vartheta^{(i)})(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})(k,x)dZ_{s,(k,x)}dt\\
&=\int\left(\int_0^r T_{t-s}(-A+\vartheta^{(i)})(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})(k,x)dt\right)dZ_{s,(k,x)}\\
&\doteq\int F_\epsilon(s,(k,x))dZ_{s,(k,x)}=I_1(F_\epsilon).
\end{aligned}
$$

Veamos que la integral $I_1(F_\epsilon)$ está bien definida, es decir, que $F_\epsilon\in\chi_1^0$. Para esto hay que verificar que $(|F_\epsilon|,|F_\epsilon|)_1<\infty$. De (2.27)

$$
(|F_\epsilon|,|F_\epsilon|)_1=\left(\int F_\epsilon(0,(k,x))d\mu(k,x)\right)^2+\int(F_\epsilon(s,(j,y)))^2\tilde{\Lambda}(ds,d(j,y)),
$$

donde $\tilde{\Lambda}$ es una medida en $[0,u]\times(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)$ dada por la expresión (ver (2.28))

$$
\tilde{\Lambda}(C)=2\int 1_C(s,(j,y))J_s((l,x),d(j,y))\mu(d(l,x))ds.
$$

El siguiente paso es ver que la función F_ϵ es acotada. De la expresión (5.25) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&F_\epsilon(s,(k,x))\\
&=\int_0^r\int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d}(-A+\vartheta^{(i)})(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})(j,z)J_{t-s}((k,x),d(j,z))dt\\
&=\int_0^r\int_{\mathbb{R}^d}(-\Delta_{\alpha_i}(G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}*\Phi_\epsilon)(z)+V_i(1-m_{ii})(G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}*\Phi_\epsilon)(z))\\
&\quad\cdot J_{t-s}((k,x),(i,z))dzdt.
\end{aligned}
$$

Usando las propiedades de la convolución y que $\Phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ se obtiene que la función $\Phi_\epsilon * J_{t-s}((k,x),(i,\cdot))\in\mathcal{S}_d$ (ver el Teorema (0.14) de [23]). Así, por el Lema 2.2 y (2.11),

$$
\begin{aligned}
&F_\epsilon(s,(k,x))\\
&=\int_0^r\int_{\mathbb{R}^d}((-\Delta_{\alpha_i}G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}+V_i(1-m_{ii})G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})})*\Phi_\epsilon)(z)J_{t-s}((k,x),(i,z))dzdt\\
&=\int_0^r\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}(-\Delta_{\alpha_i}G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}+V_i(1-m_{ii})G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})})(w)\Phi_\epsilon(w-z)dw\\
&\quad\cdot J_{t-s}((k,x),(i,z))dzdt\\
&=\int_0^r\int_{\mathbb{R}^d}(\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_\epsilon(w-z)J_{t-s}((k,x),(i,z))dz)(-\Delta_{\alpha_i}G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}+V_i(1-m_{ii})\\
&\quad\cdot G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})})(w)dwdt\\
&=\int_0^r\int_{\mathbb{R}^d}(\Phi_\epsilon*J_{t-s}((k,x),(i,\cdot)))(w)(-\Delta_{\alpha_i}G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}+V_i(1-m_{ii})G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})})(w)\\
&\quad\cdot dwdt\\
&=\int_0^r(\Phi_\epsilon*J_{t-s}((k,x),(i,\cdot)))(0)dt=\int_0^r\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_\epsilon(w)J_{t-s}((k,x),(i,w))dwdt\\
&\leq\ ||\Phi_\epsilon||_\infty\int_0^r\int_{\mathbb{R}^d}J_{t-s}((k,x),(i,w))dwdt\leq r||\Phi_\epsilon||_\infty.
\end{aligned}
$$

Ya que F_ϵ es acotada y μ es una medida finita, entonces F_ϵ es μ-integrable. De igual forma, para ver que $F_\epsilon\in L^2(\tilde{\Lambda})$ es suficiente con mostrar que $\tilde{\Lambda}$ es una medida finita. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}([0,u]\times(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d))&=2\int_0^r\int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d}\int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d}J_s((l,x),d(j,y))\\
&\quad\cdot 1_{[0,u]\times(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)}(s,(j,y))\mu(d(l,x))ds\\
&=2\int_0^r\int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d}J_s((l,x),\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)\mu(d(l,x))ds\\
&=2\int_0^r\mu(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)ds=2r\mu(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)<\infty.
\end{aligned}
$$

Ahora bien (ver la página 35)

$$
L^{(i,0)}([0,r])=\int K_{(i,0),[0,r]}(s,(k,x))dZ_{s,(k,x)}=I_1(K_{(i,0),[0,r]}),
$$

donde

$$
K_{(i,0),[0,r]}(s,(k,x))=\int_0^r J_{t-s}((k,x),(i,0))dt.
$$

En consecuencia hay que demostrar que

$$I_1(F_\epsilon) \to I_1(K_{(i,0),[0,r]}) \quad \text{en } L^2(P) \text{ cuando } \epsilon \to 0.$$

Ya que I_1 es una isometría de χ_1^0 sobre L_1^2, basta ver que cuando $\epsilon \to 0$, $F_\epsilon \to K_{(i,0),[0,r]}$ en χ_1^0. Nótese que $K_{(i,0),[0,r]} \in \chi_1^0$ debido a que por el Teorema 5.1 el tiempo local de X existe (ver la página 36).

Por definición

$$\begin{aligned}
&T_{t-s}(-A+\vartheta^{(i)})(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})(j,y)\\
&= \int_{\{1,2\}\times\mathbb{R}^d} (-A+\vartheta^{(i)})(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})(k,z)J_{t-s}((j,y),d(k,z))\\
&= \sum_{k=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^d}(-A+\vartheta^{(i)})(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})(k,z)J_{t-s}((j,y),(k,z))dz\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}(-\Delta_{\alpha_i}\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}(i,z)+V_i(1-m_{ii})\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}(i,z))J_{t-s}((j,y),(i,z))dz\\
&\doteq \int_{\mathbb{R}^d} g_\epsilon^{(i)}(z)J_{t-s}((j,y),(i,z))dz.
\end{aligned}$$

De la Proposición 5.4 se sigue que $J_t((i,x),(j,y))$ es una función que depende de i, j, t y de $|x-y|$, es decir, $J_t((i,x),(j,y)) = J_t((i,0),(j,x-y))$. Así, del cálculo anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
&F_\epsilon(s,(j,y)) - K_{(i,0),[0,r]}(s,(j,y))\\
&= \int_0^r T_{t-s}(-A+\vartheta^{(i)})(\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)})(j,y)dt - \int_0^r J_{t-s}((j,y),(i,0))dt\\
&= \int_0^r (\int_{\mathbb{R}^d} g_\epsilon^{(i)}(z)J_{t-s}((j,y),(i,z))dz - J_{t-s}((j,y),(i,0)))dt\\
&= \int_0^r (\int_{\mathbb{R}^d} g_\epsilon^{(i)}(z)J_{t-s}((j,0),(i,y-z))dz - J_{t-s}((j,0),(i,y)))dt\\
&= \int_0^{r-s}((g_\epsilon^{(i)} * J_v((j,0),(i,\cdot)))(y) - J_v((j,0),(i,y)))dv \doteq R_\epsilon^{(i)}(r-s,(j,y)).
\end{aligned}$$

Tomando luego transformadas de Fourier

$$\widehat{R}_\epsilon^{(i)}(r-s,(j,y)) = (\widehat{g}_\epsilon^{(i)}(y)-1)\int_0^{r-s} J_v((j,0),(i,\cdot))^\frown(y)dv. \tag{5.29}$$

Usando la expresión (2.27) resulta

$$\begin{aligned}
&(F_\epsilon - K_{(i,0),[0,r]}, F_\epsilon - K_{(i,0),[0,r]})_1\\
&= \left(\int R_\epsilon^{(i)}(r,(k,z))d\mu(k,z)\right)^2 + \int (R_\epsilon^{(i)}(r-s,(j,y)))^2\tilde{\Lambda}(ds,d(j,y))\\
&\doteq H_1^{(i)}(\epsilon) + H_2^{(i)}(\epsilon).
\end{aligned}$$

Vamos a ocuparnos de $H_2^{(i)}(\epsilon)$. Por (5.5) y (5.29)

$$\begin{aligned}
H_2^{(i)}(\epsilon) &= 2\int d\mu(k,x)\int_0^u ds \int J_s((k,x),d(j,y))(R_\epsilon^{(i)}(r-s,(j,y)))^2\\
&= 2\int \frac{d\mu}{dm}(k,x)dm(k,x)\int_0^u ds\int \frac{dJ_s((k,x),\cdot)}{dm}(j,y)dm(j,y)\\
&\quad \cdot(R_\epsilon^{(i)}(r-s,(j,y)))^2\\
&\le 2c\int\int_0^u\int J_s((k,x),(j,y))(R_\epsilon^{(i)}(r-s,(j,y)))^2 ds dm(j,y)dm(k,x)\\
&= 2c\int\int_0^u(\int J_s((k,x),(j,y))dm(k,x))(R_\epsilon^{(i)}(r-s,(j,y)))^2 ds dm(j,y)\\
&\le 2c\int_0^u\int(R_\epsilon^{(i)}(r-s,(j,y)))^2 dm(j,y)ds\\
&= 2c\sum_{i=1}^2\int_0^u\int_{\mathbb{R}^d}(R_\epsilon^{(i)}(r-s,(j,y)))^2 dy ds\\
&= 2c\sum_{i=1}^2\int_0^u ||R_\epsilon^{(i)}(r-s,(j,\cdot))||_2^2 ds = 2c\sum_{i=1}^2\int_0^u ||\widehat{R}_\epsilon^{(i)}(r-s,(j,\cdot))||_2^2 ds\\
&\le 2c\sum_{i=1}^2\int_{\mathbb{R}^d}(\widehat{g}_\epsilon^{(i)}(y)-1)^2\int_0^u(\int_0^{r-s}J_v((j,0),(i,\cdot))^\frown(y)dv)^2 ds dy.
\end{aligned}$$

De las definiciones de $\mathcal{G}_\epsilon^{(i,0)}$, $g_\epsilon^{(i)}$ y del Lema 2.2, tenemos que para cada $\varphi \in \mathcal{S}_d$ se cumple

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} g_\epsilon^{(i)}(x)\varphi(x)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}(-\Delta_{\alpha_i}\mathcal{G}_{\alpha_i,\epsilon}^{V_i(1-m_{ii})} + V_i(1-m_{ii})\mathcal{G}_{\alpha_i,\epsilon}^{V_i(1-m_{ii})})(x)\varphi(x)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}((-\Delta_{\alpha_i}G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})} + V_i(1-m_{ii})G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}) * \Phi_\epsilon)(x)\varphi(x)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}((-\Delta_{\alpha_i}G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})} + V_i(1-m_{ii})G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})})(x-w)\Phi_\epsilon(w)dw\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d}\Phi_\epsilon(w)\int_{\mathbb{R}^d}((-\Delta_{\alpha_i}G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}+V_i(1-m_{ii})G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})})(x-w)\varphi(w+(x-w))\\
&\quad\cdot dxdw\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\Phi_\epsilon(w)\varphi(w)dw,
\end{aligned}
$$

y así, de (2.12)

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_\epsilon^{(i)}(x)\varphi(x)dx \to \varphi(0), \quad \text{cuando } \epsilon \to 0.$$

De esta forma se ha demostrado que $g_\epsilon^{(i)}$ converge en sentido distribucional a δ. Entonces, por la continuidad de la transformada de Fourier, tenemos que $\widehat{g}_\epsilon^{(i)} \to 1$ cuando $\epsilon \to 0$ y además que $\widehat{g}_\epsilon^{(i)}$ es acotada pues por (2.3) y (2.9),

$$
\begin{aligned}
|\widehat{g}_\epsilon^{(i)}(x)| &= |-(\Delta_{\alpha_i}\mathcal{G}_{\alpha_i,\epsilon}^{V_i(1-m_{ii})})^\frown(x)+V_i(1-m_{ii})\mathcal{G}_{\alpha_i,\epsilon}^{V_i(1-m_{ii})\frown}(x)|\\
&= |\,|x|^{\alpha_i}\mathcal{G}_{\alpha_i,\epsilon}^{V_i(1-m_{ii})\frown}(x)+V_i(1-m_{ii})\mathcal{G}_{\alpha_i,\epsilon}^{V_i(1-m_{ii})\frown}(x)|\\
&= |(|x|^{\alpha_i}+V_i(1-m_{ii}))\mathcal{G}_{\alpha_i,\epsilon}^{V_i(1-m_{ii})\frown}(x)|\\
&= |(|x|^{\alpha_i}+V_i(1-m_{ii}))(G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})}*\Phi_\epsilon)^\frown(x)|\\
&= |(|x|^{\alpha_i}+V_i(1-m_{ii}))G_{\alpha_i}^{V_i(1-m_{ii})\frown}(x)\widehat{\Phi_\epsilon}(x)|\\
&= |\widehat{\Phi_\epsilon}(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot z}\Phi_\epsilon(z)dz\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot z}\frac{1}{\epsilon^d}\Phi(\frac{z}{\epsilon})dz\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot(\epsilon z)}\Phi(z)dz\right|\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d}|e^{ix\cdot(\epsilon z)}\Phi(z)|dz = \int_{\mathbb{R}^d}\Phi(z)dz = 1.
\end{aligned}
$$

Para demostrar que $H_2^{(i)}(\epsilon) \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$, por el teorema de la convergencia dominada basta probar que

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^u\left(\int_0^{r-s}J_v((j,0),(i,\cdot))^\frown(y)dv\right)^2dsdy$$

es finita si $d < 2(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$.

De (5.3)

$$J_t((k,0),(i,\cdot))^\frown(y) = \int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})}(q^{(1)}_{L_1(t,\eta)} * q^{(2)}_{L_2(t,\eta)})^\frown(y)1_{\{\eta_0=k,\ \eta_t=i\}}(\eta)P_k^\eta(d\eta).$$

Por lo tanto, por las propiedades de la transformada de Fourier, (5.4) y haciendo cambio a coordenadas polares (ver el Teorema 2.8), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^u\left(\int_0^{r-s}J_v((j,0),(i,\cdot))^\frown(y)dv\right)^2dsdy\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^u(\int_0^{r-s}\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})}(q^{(1)}_{L_1(v,\eta)} * q^{(2)}_{L_2(v,\eta)})^\frown(y)1_{\{\eta_0=j,\ \eta_v=i\}}(\eta)P_j^\eta(d\eta)dv)^2dsdy\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^u(\int_0^{r-s}\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})}\widehat{q}^{(1)}_{L_1(v,\eta)}(y)\widehat{q}^{(2)}_{L_2(v,\eta)}(y)1_{\{\eta_0=j,\ \eta_v=i\}}(\eta)P_j^\eta(d\eta)dv)^2dsdy\\
&= \int_0^u\int_{\mathbb{R}^d}(\int_0^{r-s}\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})}e^{-L_1(v,\eta)|y|^{\alpha_1}}e^{-L_2(v,\eta)|y|^{\alpha_2}}1_{\{\eta_0=j,\ \eta_v=i\}}(\eta)P_j^\eta(d\eta)dv)^2dyds\\
&= c\int_0^u\int_0^\infty\xi^{d-1}(\int_0^{r-s}\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})}e^{-L_1(v,\eta)\xi^{\alpha_1}-L_2(v,\eta)\xi^{\alpha_2}}1_{\{\eta_0=j,\ \eta_v=i\}}(\eta)P_j^\eta(d\eta)dv)^2\\
&\quad\cdot d\xi ds\\
&= c\int_0^u\int_0^\infty\xi^{d-1}(\int_0^{r-s}\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})}e^{-L_1(v,\eta)\xi^{\alpha_1}-(v-L_1(v,\eta))\xi^{\alpha_2}}1_{\{\eta_0=j,\ \eta_v=i\}}(\eta)P_j^\eta(d\eta)dv)^2\\
&\quad\cdot d\xi ds.
\end{aligned}
$$

Si $\xi \geq 1$ se cumple $\xi^{\alpha_2} \geq \xi^{\alpha_1}$ y entonces

$$\exp(-L_1(v,\eta)\xi^{\alpha_1}-(v-L_1(v,\eta))\xi^{\alpha_2}) \leq \exp(-v\xi^{\alpha_1}).$$

Así,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^u\left(\int_0^{r-s}J_v((j,0),(i,\cdot))^\frown(y)dv\right)^2dsdy\\
&= c\int_0^u(\int_0^1+\int_1^\infty)\xi^{d-1}(\int_0^{r-s}\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})}e^{-L_1(v,\eta)\xi^{\alpha_1}-(v-L_1(v,\eta))\xi^{\alpha_2}}1_{\{\eta_0=j,\ \eta_v=i\}}(\eta)\\
&\quad\cdot P_j^\eta(d\eta)dv)^2d\xi ds\\
&\leq c(\int_0^u\int_0^1\xi^{d-1}(\int_0^{r-s}\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})}1_{\{\eta_0=j,\ \eta_v=i\}}(\eta)P_j^\eta(d\eta)dv)^2d\xi ds\\
&\quad+\int_0^u\int_1^\infty\xi^{d-1}(\int_0^{r-s}\int_{D_{[0,\infty)}(\{1,2\})}e^{-v\xi^{\alpha_1}}1_{\{\eta_0=j,\ \eta_v=i\}}(\eta)P_j^\eta(d\eta)dv)^2d\xi ds)\\
&\leq c(\int_0^u\int_0^1\xi^{d-1}(\int_0^{r-s}dv)^2d\xi ds+\int_0^u\int_1^\infty\xi^{d-1}(\int_0^{r-s}e^{-v\xi^{\alpha_1}}dv)^2d\xi ds)\\
&= c(\int_0^u\int_0^1\xi^{d-1}(r-s)^2d\xi ds+\int_0^u\int_1^\infty\xi^{d-1}(\frac{1-e^{-(r-s)\xi^{\alpha_1}}}{\xi^{\alpha_1}})^2d\xi ds).
\end{aligned}
$$

Ya que $(1-e^{-(r-s)\xi^{\alpha_1}})^2 \leq 1$, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^u \left(\int_0^{r-s} \widehat{J_v((j,0),(i,\cdot))}(y)dv\right)^2 dsdy &\leq c+c\int_0^u\int_1^\infty \xi^{d-1-2\alpha_1}d\xi ds\\
&= c+cu\,\frac{\xi^{d-2\alpha_1}}{d-2\alpha_1}\bigg|_1^\infty,
\end{aligned}
$$

y por tanto el lado izquierdo de la desigualdad anterior es convergente si $d-2\alpha_1<0$.

Falta analizar la integral $H_1^{(i)}(\epsilon)$. De la desigualdad de Jensen es inmediato que

$$
\begin{aligned}
H_1^{(i)}(\epsilon) &\leq \mu(\{1,2\}\times\mathbb{R}^d)\int (R_\epsilon^{(i)}(r,(k,z)))^2 d\mu(k,z)\\
&\leq c\int (R_\epsilon^{(i)}(r,(k,z)))^2 dm(k,z)\\
&= c\sum_{k=1}^2 \|R_\epsilon^{(i)}(r,(k,\cdot))\|_2^2.
\end{aligned}
$$

De esta forma podemos proceder como lo hicimos con $H_2^{(i)}$.

5.5 Demostración del Teorema 5.3

Partiendo de (5.22) obtenemos

$$
\begin{aligned}
H((i,z),(l,\zeta)) \leq \sum_{j=1}^2 \Big(&\int_0^{(u-1)_+}\int_0^1\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_1^{u-s_1}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_0^1\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_1^{u-s_1}\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\\
&+\int_{(u-1)_+}^u\int_0^{u-s_1}\int_0^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\Big).
\end{aligned}
$$

Para demostrar el Teorema 5.3 aplicaremos el Teorema 1.2 según el cual basta probar que

$$
\sup_{s,y}\int\int G(s,(j,y);(i,z))G(s,(j,y);(l,\zeta))H((i,z),(l,\zeta))m(d(i,z))m(d(l,\zeta))<\infty.
$$

Sin pérdida de generalidad supondremos que $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Iniciemos notando que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} G(s,(j,y);(i,z))G(s,(j,y);(l,\zeta))H((i,z),(l,\zeta))dzd\zeta\\
\leq &\sum_{j=1}^2\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_0^{(u-s)\wedge 1}+\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\Big)p_{t_3}^{(j)}(y,z)dt_3\\
&\cdot\Big(\int_0^{(u-s)\wedge 1}+\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\Big)p_{t_4}^{(j)}(y,\zeta)dt_4\\
&\cdot\Big(\int_0^{(u-1)_+}\int_0^1\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_1^{u-s_1}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_0^1\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_1^{u-s_1}\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\\
&+\int_{(u-1)_+}^u\int_0^{u-s_1}\int_0^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\Big)dzd\zeta\\
= &\sum_{j=1}^2\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_0^{(u-s)\wedge 1} p_{t_3}^{(j)}(y,z)dt_3\int_0^{(u-s)\wedge 1} p_{t_4}^{(j)}(y,\zeta)dt_4\\
&+\int_0^{(u-s)\wedge 1} p_{t_3}^{(j)}(y,z)dt_3\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s} p_{t_4}^{(j)}(y,\zeta)dt_4\\
&+\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s} p_{t_3}^{(j)}(y,z)dt_3\int_0^{(u-s)\wedge 1} p_{t_4}^{(j)}(y,\zeta)dt_4\\
&+\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s} p_{t_3}^{(j)}(y,z)dt_3\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s} p_{t_4}^{(j)}(y,\zeta)dt_4\Big)\\
&\cdot\Big(\int_0^{(u-1)_+}\int_0^1\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_1^{u-s_1}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_0^1\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1\\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_1^{u-s_1}\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{(u-1)_+}^{u}\int_0^{u-s_1}\int_0^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)dwdt_1dt_2ds_1)dzd\zeta \\
=\ & \sum_{j=1}^{2}(\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^1\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_1^{u-s_1}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^1\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_1^{u-s_1}\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_{(u-1)_+}^{u}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^{u-s_1}\int_0^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^1\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_1^{u-s_1}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^1\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_1^{u-s_1}\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_{(u-1)_+}^{u}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^{u-s_1}\int_0^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^1\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_1^{u-s_1}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^1\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_1^{u-s_1}\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_{(u-1)_+}^{u}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^{u-s_1}\int_0^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^1\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^1\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^1\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_0^{(u-1)_+}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_1^{u-s_1}\int_1^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&+\int_{(u-1)_+}^{u}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_{(u-s)\wedge 1}^{u-s}\int_0^{u-s_1}\int_0^{u-s_1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}) \\
&\cdot p_{t_1}^{(j)}(w,z)p_{t_2}^{(j)}(w,\zeta)p_{t_3}^{(j)}(y,z)p_{t_4}^{(j)}(y,\zeta)dwdzd\zeta dt_1dt_2dt_3dt_4ds_1 \\
\doteq\ & \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{20} I_i(j).
\end{aligned}
$$

Las integrales $I_i(j)$ se estiman de forma similar. Como ejemplo estimaremos la integral $I_1(j)$:

$$
\begin{aligned}
I_1(j)\ \leq\ & 8K^4\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^1\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \\
&\cdot(q^{(1)}_{t_1^{\alpha_1/\alpha_j}}(w,z)+\int_0^{t_1} q^{(1)}_{r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}}(w,z)\theta^j_{t_1}(dr_1)) \\
&\cdot(q^{(1)}_{t_2^{\alpha_1/\alpha_j}}(w,\zeta)+\int_0^{t_2} q^{(1)}_{r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}}(w,\zeta)\theta^j_{t_2}(dr_2)) \\
&\cdot(q^{(1)}_{t_3^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,z)+\int_0^{t_3} q^{(1)}_{r_3+(t_3-r_3)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,z)\theta^j_{t_3}(dr_3)) \\
&\cdot(q^{(1)}_{t_4^{\alpha_1/\alpha_j}}(y,\zeta)+\int_0^{t_4} q^{(1)}_{r_4+(t_4-r_4)^{\alpha_1/\alpha_2}}(y,\zeta)\theta^j_{t_4}(dr_4))dwdzd\zeta \\
&\cdot dt_1dt_2dt_3dt_4ds_1.
\end{aligned}
$$

Aplicando tres veces la ecuación de Chapman-Kolmogorov, usando la propiedad de autosimilaridad y la desigualdad $t\leq t^{\alpha}$, valida para $0<t\leq 1$, nos queda

$$
\begin{aligned}
I_1(j)\ \leq\ & 8K^4 q_1^{(1)}(0)\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^1\int_0^1 \\
&((t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}+t_3^{\alpha_1/\alpha_j}+t_4^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1} \\
&+\int_0^{t_4}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}+t_3^{\alpha_1/\alpha_j}+r_4+(t_4-r_4)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_4}(dr_4) \\
&+\int_0^{t_3}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}+r_3+(t_3-r_3)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_4^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_3}(dr_3)
\end{aligned}
$$

$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_3}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}+r_3+(t_3-r_3)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_4+(t_4-r_4)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}$$
$$\cdot\theta^j_{t_3}(dr_3)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_2}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_3^{\alpha_1/\alpha_j}+t_4^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_2}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_3^{\alpha_1/\alpha_j}+r_4+(t_4-r_4)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_2}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_3^{\alpha_1/\alpha_j}+r_4+(t_4-r_4)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}$$
$$\cdot\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_3+(t_3-r_3)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_4^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}$$
$$\cdot\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_3}(dr_3)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}(t_1^{\alpha_1/\alpha_j}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_3+(t_3-r_3)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_4$$
$$+(t_4-r_4)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_3}(dr_3)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}+t_3^{\alpha_1/\alpha_j}+t_4^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}+t_3^{\alpha_1/\alpha_j}+r_4+(t_4-r_4)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}$$
$$\cdot\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_3}\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}+r_3+(t_3-r_3)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_4^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}$$
$$\cdot\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_3}(dr_3)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_3}\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_2^{\alpha_1/\alpha_j}+r_3+(t_3-r_3)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_4$$
$$+(t_4-r_4)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_3}(dr_3)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_3^{\alpha_1/\alpha_j}+t_4^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}$$
$$\cdot\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}+t_3^{\alpha_1/\alpha_j}+r_4$$
$$+(t_4-r_4)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_3+(t_3-r_3)^{\alpha_1/\alpha_2}$$

$$+t_4^{\alpha_1/\alpha_j})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_3}(dr_3)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(r_1+(t_1-r_1)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_2+(t_2-r_2)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_3$$
$$+(t_3-r_3)^{\alpha_1/\alpha_2}+r_4+(t_4-r_4)^{\alpha_1/\alpha_2})^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_3}(dr_3)\theta^j_{t_4}(dr_4))$$
$$\cdot dt_1dt_2dt_3dt_4ds_1$$
$$\leq\ 8K^4q_1^{(1)}(0)\int_0^{(u-1)+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^1\int_0^1$$
$$((t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}$$
$$+\int_0^{t_4}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_3}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_3}(dr_3)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_3}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_3}(dr_3)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_2}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_2}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_3}(dr_3)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_3}(dr_3)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_1}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_1}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_3}\int_0^{t_1}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_3}(dr_3)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_3}\int_0^{t_1}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_3}(dr_3)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)$$
$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_4}(dr_4)$$
$$+\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_3}(dr_3)$$

$$+\int_0^{t_4}\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}\theta^j_{t_1}(dr_1)\theta^j_{t_2}(dr_2)\theta^j_{t_3}(dr_3)\theta^j_{t_4}(dr_4))$$
$$\leq 128K^4 q_1^{(1)}(0)\int_0^{(u-1)_+}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^{(u-s)\wedge 1}\int_0^1\int_0^1(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}$$
$$\cdot dt_1dt_2dt_3dt_4ds_1.$$

Obtenemos así,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}G(s,(j,y);(i,z))G(s,(j,y);(l,\zeta))H((i,z),(l,\zeta))dzd\zeta$$
$$\leq C\int_0^u\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{u-s_1}\int_0^{u-s_1}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2dt_3dt_4ds_1,$$

donde C es una constante positiva.

Igual que con el caso del tiempo local, basta considerar las posibilidades $1-d/\alpha_1\neq 0$, $2-d/\alpha_1\neq 0$ y $3-d/\alpha_1\neq 0$, pues de lo contrario el $TLAI$ existe. De esta manera, si $4-d/\alpha_1>0$, entonces

$$\int_0^u\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{u-s_1}\int_0^{u-s_1}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2dt_3dt_4ds_1$$
$$=C(4(3u-s)^{5-d/\alpha_1}+2(u-s)^{5-d/\alpha_1}+u(2u-2s)^{4-d/\alpha_1}+2u^{5-d/\alpha_1}$$
$$-(2u)^{5-d/\alpha_1}-2u(u-s)^{4-d/\alpha_1}-(4u-2s)^{5-d/\alpha_1}-4(2u-s)^{5-d/\alpha_1}$$
$$-(2u-2s)^{5-d/\alpha_1}).$$

En consecuencia

$$\sup_s\int_0^u\int_0^{u-s}\int_0^{u-s}\int_0^{u-s_1}\int_0^{u-s_1}(t_1+t_2+t_3+t_4)^{-d/\alpha_1}dt_1dt_2dt_3dt_4ds_1$$
$$\leq C(4(3u)^{5-d/\alpha_1}+2u^{5-d/\alpha_1}+u(2u)^{4-d/\alpha_1}+2u^{5-d/\alpha_1})<\infty.$$

De lo cual la existencia del $TLAI$ se sigue si $4-d/\alpha_1>0$.

Referencias

[1] R. J. Adler (1993). *Superprocess local and intersection local times and their corresponding particle pictures*, Seminar on Stochastic Processes 1992, Birkhäuser, 1-42.

[2] R. J. Adler y M. Lewin (1991). *An evolution equation for the intersection local times of superprocesses*, M. T. Barlow y N. H. Bingham, eds., Stochastic Analysis, 1-22.

[3] R. J. Adler y M. Lewin (1992). *Local time and Tanaka formulae for super Brownian motion and super stable processes*, Stochastic Processes and their Applications, Vol. 41, 45-67.

[4] M. T. Barlow, S. N. Evans y E. A. Perkins (1991). *Collision local times and measure-valued processes*, Cand. J. Math., Vol. 43(5), 897-938.

[5] D. Blount y A. Bose (2000). *Hilbert space regularity of the $(\alpha, d, 1)$-superprocess and its occupation time*, Ann. Prob., Vol. 28, No. 1, 104-131.

[6] R. M. Blumental y R. K. Getoor (1960). *Some theorems on stable processes*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 95, 263-276.

[7] R. M. Blumental y R. K. Getoor (1968). Markov processes and potential theory, Academic Press.

[8] J. T. Cox y D. Griffeath (1985). *Occupation times for critical branching brownian motions*, Ann. Prob., Vol. 13, No. 4, 1108-1132.

[9] D. A. Dawson (1977). *The critical measure diffusion*, Z. Wahr. verw Geb., Vol. 40, 125-145.

[10] D. A. Dawson (1993). Measure-valued Markov processes, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1541, Springer.

[11] C. Dellacherie y P-A. Meyer (1980). Probabilitiés et potentiel, Théorie des martingales, Hermann.

[12] R. Durrett (1996). Stochastic calculus, a practical introduction, CRC Press.

[13] E. B. Dynkin (1965). Markov processes I, Springer-Verlag.

[14] E. B. Dynkin (1988). *Representation for functionals of superprocesses by multiple stochastic integrals, with applications to self-intersection local times*, Astérisque, No. 157-158, 147-171.

[15] E. B. Dynkin (1994). An introduction to Branching Measure-Valued processes, AMS-CRM Monograph series, Vol. 6.

[16] N. El-Karoui y S. Roelly (1991). *Propriétés demartingales, explosion et représentation de Lévy-Khintchine dune classedeproces sus de branchement à valeurs mesures*, Stochastic Processes and their Applications, Vol. 38, 239-266.

[17] A. M. Etheridge (2000), An introduction to Superprocesses, AMS, University Lecture Series, Vol. 20.

[18] S. N. Ethier y T. G. Kurtz (1986). Markov processes: characterization and convergence, John Willey and Sons.

[19] R. E. Feldmand y S. K. Iyer (1996). *A representation for functionals of superprocesses via particle picture*, Stochastic Processes and their Appl., Vol. 64, 173-186.

[20] W. Feller (1978). An introduction to probability theory and its applications, Wile, Vol. 2.

[21] K. Fleischmann y J. Gärtner (1986). *Occupation time processes at a critical point*, Math. Nachr., Vol. 125, 275-290.

[22] K. Fleischmann (1986). *Critical behavior of some measure-valued processes*, Math. Nachr., Vol. 135, 131-147.

[23] G. B. Folland (1995). *Introduction to partial differential equations*, second edition, Princeton University Press.

[24] D. Geman y J. Horowitz (1980), *Occupation densities*, Ann. Prob., Vol. 8, No. 1, 1-67.

[25] L. G. Gorostiza y J. A. López-Mimbela (1990). *The multitype measure branching process*, Adv. Appl. Prob., Vol. 22, 49-67.

[26] L. G. Gorostiza, S. Roelly y A. Wakolbinger (1992). *Persistence of critical multitype particle and measure branching processes*, Probab. Theory Relat. Fields, Vol. 92, 313-335.

[27] L. G. Gorostiza y E. Todorova (1999). *Self-intersection local time of an $S'(R^d)$-valued process involving motions of two types*, Stochastic Processes and their applications, Vol. 81, 271-298.

[28] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik (1980). Table of integrals, series and products, Academic Press.

[29] L. Hörmander (1985). The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Springer-Verlag.

[30] N. Ikeda y S. Watanabe (1989). Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, second edition, North-Holland.

[31] I. Iscoe (1986). *A weighted occupation time for a class of measure-valued branching processes*, Probab. Th. Rel. Fields, Vol. 71, 85-116.

[32] I. Iscoe (1986). *Ergodic Theory and Local Occupation time for measure-valued critical branching Brownian motion*, Stochastics, Vol. 18, 197-243.

[33] K. Itô y H. P. McKean (1974). Diffusion processes and their sample paths, Springer.

[34] J. Jacod (1979). Calcul Stochastique et problèmes de martingales, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 714, Springer.

[35] J. Jacod y A. N. Shiryaev (1987). Limit theorems for stochastic processes, Springer-Verlag.

[36] I. Karatzas y S. E. Shreve (1991). Brownian motion and stochastic calculus, second edition, Springer-Verlag.

[37] F. B. Knight (1981). Essentials of Brownian motion and diffusion, Math. Surveys, AMS, Vol. 18.

[38] S. M. Krone (1993). *Local times for superdiffusions*, Ann. Prob., Vol. 21, No. 3, 1599-1623.

[39] J-F. Le Gall (1999). Spatial branching processes random snakes and partial differential equations, Birkhäuser.

[40] P. Lévy (1948). Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars, Paris.

[41] M. Lewin (1999). *Local time for stable discontinuous superprocesses in one dimension*, Stochastic Analysis and Applications, Vol. 17(1), 71-84.

[42] Z. H. Li (1992). *A note on the multitype measure branching process*, Adv. Appl. Prob., Vol. 24, 496-498.

[43] E. H. Lieb y M. Loss (2001). Analysis, second edition, AMS.

[44] R. Sh. Liptser y A. N. Shiryayev (1989). Theory of Martingales, Kluwer.

[45] S. Méléard y S. Roelly-Coppoletta (1988). *A generalized equation for a continuous measure branching process*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1390, 171-186.

[46] S. Méléard y S. Roelly (1991). *Discontinuous Measure-Values Branching Processes and Generalized Stochastic Equations*, Math. Nachr., Vol. 154, 141-156.

[47] E. Perkins (1990). *Polar sets and multiple points for super-Brownian motion*, Ann. Probability, Vol. 18, No. 2, 453-491.

[48] E. Perkins (1999). Dawson-Watanabe Superprocesses and measure-valued diffusions, Saint-Flour lecture notes.

[49] M. Reed y B. Simon (1980). Functional Analysis I, Methods of modern mathematical physics, second edition, Academic Press.

[50] M. Renardy y R. C. Rogers (1993). An introduction to partial differential equations, Springer-Verlag.

[51] D. Revuz y M. Yor (1999). Continuous martingales and Brownian motion, third edition, Springer.

[52] S. Roelly-Coppoletta (1986). A *criterion of convergence of measure-valued processes: Application to measure branching processes*, Stochastics, Vol. 17, 43-65.

[53] L. C. G. Rogers y D. Williams (1993). Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Wiley, second edition, Vol. 1.

[54] L. C. G. Rogers y D. Williams (2000). Diffusions, Markov Processes, and Martingales, second edition, Cambridge, Vol. 2.

[55] K-I. Sato (1999). Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press.

[56] E. M. Stein (1970). Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press.

[57] D. W. Strook (1999). A concise introduction to the theory of integration, second edition, Birkhäuser.

[58] S. Sugitani (1989). *Some properties for the measure-valued branching diffusion processes*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 41, No. 3, 437-462.

[59] H. Tanaka (1963). *Note on continuous additive functionals of the 1-dimensional Brownian path*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, Vol. 1, 251-257.

[60] M. E. Taylor (1997). Partial differential equations I, basic theory, Springer.

[61] R. Tribe (1992). *The behavior of superprocesses near extinction*, Ann. Prob., Vol. 20, No. 1, 286-311.

[62] C. Tudor (1997). Procesos estocásticos, SMM serie de Textos 2.

[63] S. Watanabe (1968). *A limit theorem of branching processes and continuous state branching*, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 8, 141-167.

[64] K. Yosida (1968). Functional Analysis, sixth edition, Springer-Verlag.