

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

CIMAT

**Clasificación de
3-Ovillos Racionales**

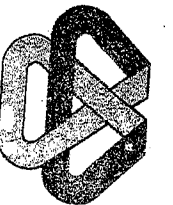
T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas



CIMAT

BIBLIOTECA

P R E S E N T A:

Hugo Cabrera Ibarra

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. José Carlos Gómez Larrañaga

TE
95

Septiembre 13 de 2001

Guanajuato, Gto. México

Para Margarita

C I M A T
BIBLIOTECA

010024

Agradecimientos

A mis padres: **José Jesús y María de Jesús**; por todo el esfuerzo que han hecho para que yo este aquí.

A **José Carlos**, por su amistad, apoyo incondicional y grandes consejos que me brindó durante el desarrollo de esta tesis.

Al **CIMAT**, como institución por los casi seis años de apoyo recibidos; los cuales serán inolvidables para mi.

Al **CONACyT**, por las becas que para estudios de maestría y doctorado me otorgó durante los periodos: Agosto-1995 a Julio-1997 y Febrero-1998 a Enero-2001.

Al **CONCYTEG**, por la beca que me otorgó de Febrero a Julio de 2001.

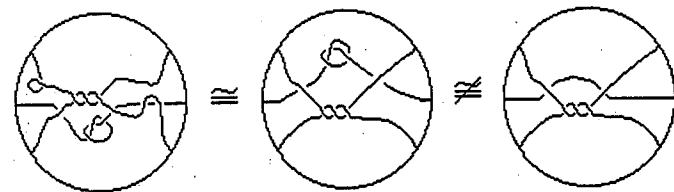
En general a **todos** aquellos que, de alguna u otra manera, han colaborado para que yo haya cumplido esta meta; pues con sus palabras de aliento y su amistad me dieron siempre la fuerza necesaria para continuar.

Contenido

1	Introducción	2
2	El polinomio de Conway	5
3	El polinomio corchete	11
4	Matrices asociadas	15
5	Clasificación de las trenzas	18
	5.1 La matriz asociada a una trenza	22
6	El invariante $F(T)$	27
	6.1 El invariante M_2	34
7	Los 2-ovillos generalizados	39
	7.1 La familia $B_3 + TG$	40
	7.2 La familia $TG + B_3$	48
8	Ovillo de la forma $B + \hat{X} + B$	50
9	Una aplicación a la biología molecular	56
	9.1 Nudos o enlaces de dos puentes	56
	9.2 Acción de la enzima Gin	57
	9.3 Una aplicación	58
10	Rotación de trenzas	62
11	Curvas en el doble toro	86
12	Bibliografía	93

1 Introducción

Los ovillos fueron introducidos por J. Conway [3] para ayudar a la construcción de una tabla de los nudos. Un ovillo de n hebras (o n -ovillo) es un par (B^3, T) , donde B^3 es una 3-bola que contiene n arcos $T = \{T_i\}$ propiamente encajados. Un n -ovillo (B^3, T) es racional si existe un homeomorfismo de parejas de (B^3, T) a $(D, P) \times I$, donde D es el disco unitario, P es cualquier conjunto de n puntos en el interior de D e I es el intervalo unitario del eje real. Denotaremos al conjunto de los n -ovillos racionales por \mathbb{T}_n . Si T_1 y T_2 son dos n -ovillos en B^3 diremos que T_1 es *equivalente* a T_2 , y lo denotaremos $T_1 \cong T_2$, si podemos cambiar T_1 en T_2 al aplicar repetidamente movidas de Reidemeister, [9, pag 3], manteniendo fijos los $2n$ puntos de $B^3 \cap T$.



Los ovillos han mostrado ser de gran utilidad para clasificar a los nudos o enlaces de dos puentes [2], además de que juegan un papel importante en la aplicación de la teoría de nudos a la biología molecular [15].

Nuestro objetivo es generalizar la ya conocida clasificación de los 2-ovillos racionales a los 3-ovillos racionales, lo cual ciertamente es una tarea nada fácil. Tal vez la comprensión de los métodos empleados en este intento ayuden a lograr una clasificación completa de los 3-ovillos racionales y en general la de los n -ovillos racionales.

Los principales resultados obtenidos son la construcción de una matriz, $M(T)(a, a^{-1})$, asociada a cada diagrama DT de un 3-ovillo T (o solamente ovillo T) donde

$$M(DT)(a, a^{-1}) \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z}[a, a^{-1}]),$$

es invariante bajo isotopía regular y $\mathbb{Z}[a, a^{-1}]$ denota el anillo de polinomios de Laurent.

En [7] se desarrolla un método más simple para calcular el polinomio de Conway de un enlace L , ∇_L . Siguiendo este método se consigue encontrar la matriz $M(T)(a, a^{-1})$; evaluamos esta matriz en los números $a = \sqrt{i}$ y $a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ y obtenemos así las matrices

$$M_1(DT) = M(DT)(\sqrt{i}, \sqrt{i}^{-1}), \quad M_2(DT) = M(DT)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}\right).$$

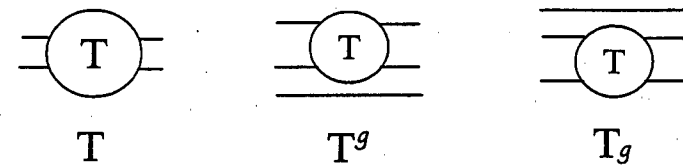
Demostremos que M_1 es un invariante de ovillos bajo isotopía regular mientras que la matriz M_2 es un invariante de ovillos.

Sean A y B dos matrices, diremos que A está relacionada con B , denotado $A \approx B$, si $A = (-\sqrt{i})^{3z}B$, donde $z \in \mathbb{Z}$. Definida de esta manera se tiene que \approx es una relación de equivalencia.

Con la relación de equivalencia anterior, se tiene que la clase de equivalencia de $M_1(DT)$, $[M_1(DT)]$, es un invariante de la clase de diagramas que representan al ovillo T y, abusando de la notación, escribiremos $M_1(DT)$ en lugar de $[M_1(DT)]$.

Cuando no haya lugar a equivocación diremos "el ovillo T " en lugar de "el ovillo que es representado por el diagrama T ".

Dado $T \in \mathbb{T}_2$ podemos construir dos 3-ovillos racionales, T^g y T_g , de la siguiente manera:

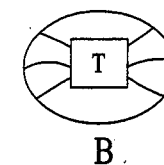


Así se tienen dos nuevas familias de 3-ovillos racionales

$$\mathbb{T}^G = \{T^g \mid T \in \mathbb{T}_2\} \quad \mathbb{T}_G = \{T_g \mid T \in \mathbb{T}_2\}$$

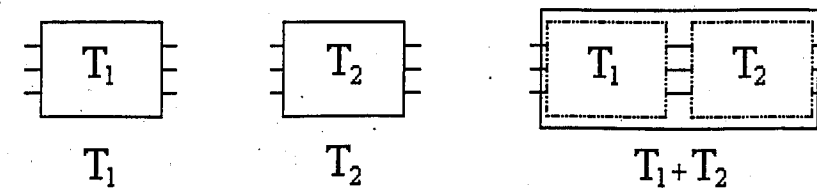
a las cuales se llamará respectivamente *ovillos generalizados superiores* y *ovillos generalizados inferiores* y $\mathbb{T}_G = \mathbb{T}^G \cup \mathbb{T}_G$ es el conjunto de los *ovillos generalizados*.

Se denotará al grupo de las 3-trenzas por \mathbb{B}_3 , se dirá trenza en lugar de 3-trenza y, si un ovillo B tiene un diagrama como el siguiente

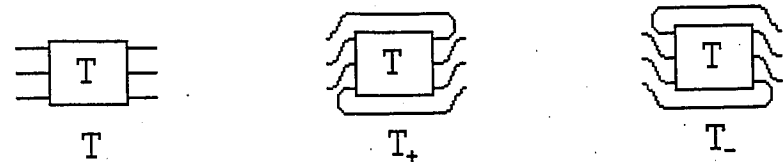


donde T es el diagrama de una trenza, diremos "la trenza B " en lugar de "el ovillo B ".

Dados dos ovillos $T_1, T_2 \in \mathbb{T}_3$ formaremos un nuevo 3-ovillo (posiblemente no racional) llamado *suma de T_1 y T_2* , denotado por $T_1 + T_2$, de la siguiente manera



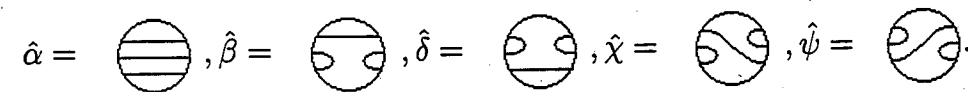
Dado un ovillo T podemos obtener otros dos ovillos al "rotar" el ovillo T de las siguientes maneras:



a estos nuevos ovillos, respectivamente se les llamará *rotación positiva de T* , denotado T_+ , y *rotación negativa de T* , denotado T_- .

Sea Q un conjunto de ovillos, se llamará *rotación positiva de Q* al conjunto $\{R_+ \mid R \in Q\}$, denotado Q_+ , y *rotación negativa de Q* al conjunto $\{R_- \mid R \in Q\}$, denotado Q_- . Para referirse indistintamente a cualquiera de estos conjuntos se dirá simplemente *rotación de Q* y se denotará Q_R .

Sea $\hat{X} = \{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, \hat{\psi}\}$ un conjunto de los ovillos, donde



Dados los conjuntos de ovillos \mathbb{B}_3 , \hat{X} y TG se definen los siguientes conjuntos

$$\mathbb{B}_3 + \text{TG} = \{B + G \mid B \in \mathbb{B}_3, G \in \text{TG}\}, \quad \text{TG} + \mathbb{B}_3 = \{G + B \mid B \in \mathbb{B}_3, G \in \text{TG}\},$$

$$B\hat{X}B = \{B_1 + X + B_2 \mid B_1, B_2 \in \mathbb{B}_3, X \in \hat{X}\} \quad (\mathbb{B}_3)_R.$$

En este trabajo se demuestra que las matrices M_1, M_2 clasifican completamente a estos conjuntos, es decir:

Teorema. Sean $T_1, T_2 \in X$, donde $X \in \{\mathbb{B}_3 + \text{TG} \cup \text{TG} + \mathbb{B}_3 \cup B\hat{X}B, (\mathbb{B}_3)_R\}$, entonces

$$T_1 \cong T_2 \iff M_1(T_1) = M_1(T_2) \quad \text{y} \quad M_2(T_1) = M_2(T_2).$$

De hecho, se tiene que dadas las matrices $M_1(T)$ y $M_2(T)$ de un ovillo T en esta clase de subfamilias, se puede recuperar el diagrama de un representante de la clase del ovillo T .

La principal conjetura que se desprende de este trabajo es:

La matriz $M(T)(a, a^{-1})$ clasifica completamente a los ovillos racionales.

El polinomio corchete de Kauffman [8] es una de nuestras herramientas principales y este trabajo se basa en una idea expresada por Kaufmann durante una serie de pláticas tituladas "Topology of DNA", dictadas durante el "Kirby Fest", en el M.S.R.I en Berkeley en 1998. En éstas muestra un método para clasificar los 2-ovillos racionales usando el polinomio corchete.

Entre las aplicaciones que se siguen de la clasificación de \mathbb{B}_3 se tiene que usando esta clasificación en el grupo de las trenzas y bajo ciertas suposiciones, las cuales son razonables desde el punto de vista de la biología molecular, se encuentra una familia de posibles soluciones a la forma en que actúa la enzima Gin en el ADN, esto es, encontramos una familia de posibles soluciones a la acción de la enzima Gin en una molécula circular de ADN.

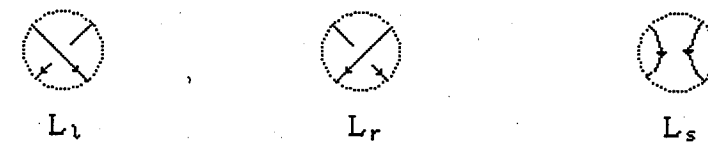
En [5] J. Emert y C. Ernst hacen un intento por clasificar los n -ovillos racionales desde un enfoque distinto. En este trabajo se le asocia un subgrupo a cada n -ovillo racional, el cual es un invariante algebraico de la clase del n -ovillo racional el cual, como ellos mismos expresan, "es impráctico para distinguir o clasificar n -ovillos racionales" con $n > 2$. Además generan una matriz-símbolo, la cual, codifica un diagrama de un tipo especial de n -ovillos racionales alternantes, a los cuales llama esenciales y que no son todos los n -ovillos. En el caso de 2-ovillos racionales se tiene que dicha matriz es un invariante; no así en el caso de n -ovillos con $n > 3$, ya que en este caso un n -ovillo puede tener más de una matriz asociada.

2 El polinomio de Conway $\nabla_L(z)$

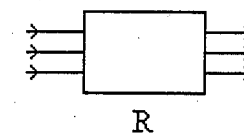
Recordemos como se calcula el polinomio de Conway de un enlace orientado mediante la fórmula recursiva

$$\nabla_{L_l}(z) = \nabla_{L_r}(z) + z\nabla_{L_s}(z), \quad \nabla_{\text{nudo trivial}}(z) = 1,$$

donde (L_l, L_r, L_s) es una terna de digramas orientados que son idénticos salvo en la vecindad de un cruce, donde se ven así:

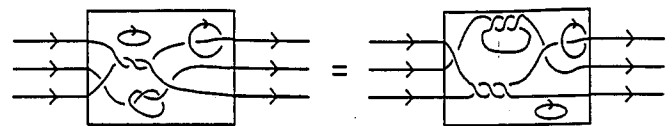


Definición 2.1 Un n -cuarto K es un dominio conexo (a menudo un rectángulo) en \mathbb{R}^2 , equipado con n cuerdas que entran y n que salen y, en el cual puede haber curvas simples cerradas y orientadas. En este trabajo trataremos solo con 3-cuartos por lo que solamente diremos cuarto en lugar de 3-cuarto y en particular usaremos el siguiente 3-cuarto R .



La *madeja* de un n -cuarto, $S(K)$, es el conjunto de todas las colecciones de cuerdas que se conectan con las cuerdas entrantes y salientes. Dadas $s_1, s_2 \in S(K)$, se tiene que $s_1 = s_2$

si existe una isotopía de ambiente que lleve s_1 en s_2 . El siguiente es un elemento de la madeja del cuarto anterior.

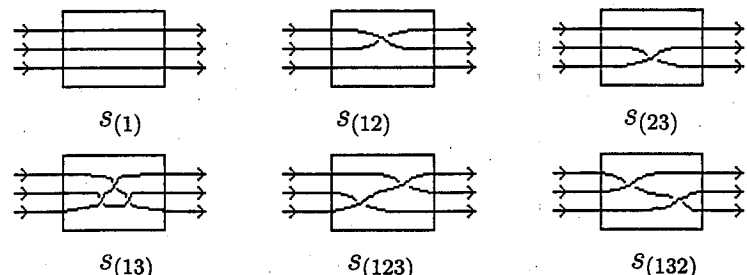


Sea S_3 el grupo simétrico en tres letras. Dado $s \in S(R)$, se le puede asignar una permutación $\pi(s) \in S_3$ al numerar las cuerdas.



Al elemento anterior, por ejemplo, le corresponde la permutación (13).

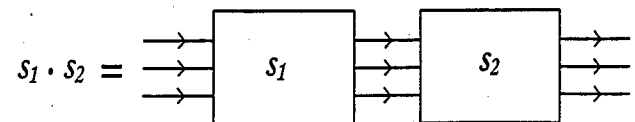
Fijemos un ordenamiento $\{\pi_i\}_{i=1,\dots,6}$ de S_n . Si numeramos las cuerdas como en la figura anterior y elegimos un elemento s_{π_i} de la madeja para cada $\pi_i \in S_n$ de manera que $\pi(s_{\pi_i}) = \pi_i$ y tal que s_{π_i} no tenga curvas simples cerradas y orientadas. Fijemos



Llamemos

$$s_{\pi_1} = s(1), \quad s_{\pi_2} = s(12), \quad s_{\pi_3} = s(32), \quad s_{\pi_4} = (13), \quad s_{\pi_5} = s(123), \quad s_{\pi_6} = s(132),$$

Definimos en $S(R)$ una operación binaria por yuxtaposición



notemos que $\pi(s_1 \cdot s_2) = \pi(s_1)\pi(s_2) \in S_3$.

Llamaremos una *tercia de madejas* a una tercia de elementos de una madeja que son idénticos salvo por un cruce, tal y como se hace en el caso de los nudos o enlaces [12] y denotemos por \mathbb{M} al conjunto de todas las tercias de madejas.

Sea F el campo de cocientes de $\mathbb{Z}[z]$, sea $V(S)$ el espacio vectorial generado por $S(R)$ sobre F y $N(S)$ el subespacio vectorial de $V(S)$ generado por $\{s_l - s_r - z s_s \mid (s_l, s_r, s_s) \in \mathbb{M}\}$. Definimos la linealización $L(S)$ por $L(S) = V(S)/N(S)$. $L(S)$ es un espacio vectorial y además un álgebra bajo la extensión de la operación binaria \cdot a $L(S)$ definida por

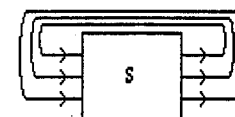
$$s_l \cdot (s_r + z s_s) = s_l \cdot s_r + z s_l \cdot s_s = s_l \cdot s_l$$

En [7] se prueban los siguientes hechos de manera más general.

Lema 2.1 El conjunto $\{s_{\pi_j} \mid j = 1, \dots, 6\}$ es una base para $L(S)$.

Corolario 2.1 Cualquier elemento de la madeja se puede expresar de manera única como una combinación lineal de los s_{π_j} y, por lo tanto, $\dim_F(L(S)) = 6$.

Sea $s \in S(R)$, definamos $N(s)$ como el nudo o enlace orientado obtenido por cerrar la madeja s de la siguiente manera.



denotemos por s^N al polinomio de Conway de $N(s)$. Al igual que en [7], dados elementos s y x de la madeja definimos el dual de s por $s^*(x) = \nabla(N(x \cdot s)) = (x \cdot s)^N$. Definido de esta manera s^* puede ser extendido linealmente a todo $L(S)$; obsérvese que

$$s^*(s_r + z s_s) = s^*(s_r) + z s^*(s_s)$$

Sea M_3 la matriz de 6×6 definida por $(M_3)_{ij} = s_{\pi_i}^*(s_{\pi_j})$. Tenemos que

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & z & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1+z^2 & z & z \\ 0 & 1 & 0 & 1+z^2 & z & z \\ z & 1+z^2 & 1+z^2 & 3z^2+z^4 & 2z+z^3 & 2z+z^3 \\ 1 & z & z & 2z+z^3 & 1+z^2 & z^2 \\ 1 & z & z & 2z+z^3 & z^2 & 1+z^2 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que $\det(M_3) = -(z^2 + 4) \neq 0$, por lo que $\{s_{\pi_i}^*\}$ es una base para el dual $L^*(S)$.

Definimos una forma bilineal en el espacio vectorial $L(S)$ por

$$(s_1, s_2) \mapsto (s_1 \cdot s_2)^N.$$

claramente

$$\varphi(s_1, s_r + z s_s) = \varphi(s_1, s_r) + z\varphi(s_1, s_s) \quad \varphi(s_r + z s_s, s_2) = \varphi(s_r, s_2) + z\varphi(s_s, s_2).$$

Como $\{s_{\pi_i}^*\}$ es una base para $L^*(S)$ existen elementos $a_{k,l}$ de F tales que $\varphi = a_{k,l} s_{\pi_k}^* \otimes s_{\pi_l}^*$. Así que

$$\begin{aligned} \varphi(s_{\pi_i}, s_{\pi_j}) &= \sum a_{k,l} s_{\pi_k}^*(s_{\pi_i}) s_{\pi_l}^*(s_{\pi_j}) = \sum a_{k,l} (M)_{k,i} (M)_{l,j} \\ &= \sum_l \left(\sum_k a_{k,l} M_{k,i} \right) M_{l,j} = ((A^T M)^T M)_{i,j} = (M^T A M)_{i,j}, \end{aligned}$$

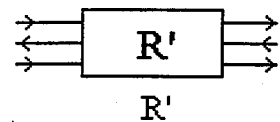
donde $M = M_3$ y $(A)_{k,i} = a_{k,i}$. Pero como $\varphi(s_{\pi_i}, s_{\pi_j}) = M_{i,j}$ tenemos que $M = M^T A M$, de aquí se tiene que $\varphi = A = (M^T)^{-1}$. Por lo tanto, si $\alpha = \sum a_i s_{\pi_i}$ y $\beta = \sum b_i s_{\pi_i}$ entonces

$$\nabla(N(\alpha \cdot \beta)) = \varphi(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_6 \end{pmatrix} (M^T)^{-1} (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_6).$$

En este caso, como M es simétrica tenemos que

$$(M^T)^{-1} = M^{-1} = \frac{-1}{z^2 + 4} \begin{pmatrix} -z^4 - 3z^2 + 2 & z^3 + 3z & z^3 + 3z & z & -z^2 - 2 & -z^2 - 2 \\ z^3 + 3z & 2 & -z^2 - 2 & -2 & z & z \\ z^3 + 3z & -z^2 - 2 & 2 & -2 & z & z \\ z & -2 & -2 & 2 & -z & -z \\ -z^2 - 2 & z & z & -z & -2 & z^2 + 2 \\ -z^2 - 2 & z & z & -z & z^2 + 2 & -2 \end{pmatrix}$$

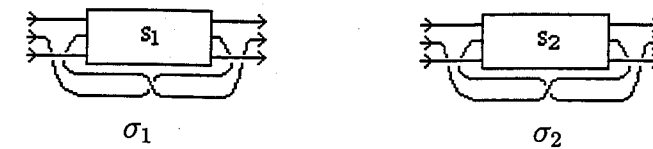
Los cálculos anteriores se pueden hacer para cualquier cuarto, por ejemplo el siguiente:



este cuarto lo denotaremos por R' . Sean s_1 y s_2 elementos de la madeja $S(R')$; definimos como antes una operación binaria en R' y una nueva función bilineal

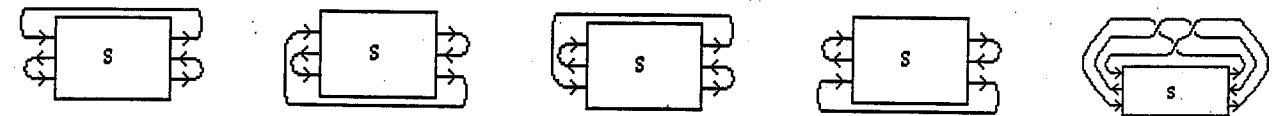
$$s_1 + s_2 = \begin{array}{c} \rightarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} \begin{array}{|c|} \hline s_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array}, \quad \psi(s_1, s_2) = \nabla(N(s_1 + s_2)).$$

Usando $s_1, s_2 \in S(R')$ definamos elementos $\sigma_1, \sigma_2 \in S(R)$ de la siguiente manera



Es fácil ver que $\psi(s_1, s_2) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2)$.

Siguiendo la idea de [7], definiremos $A(s), B(s), C(s), D(s)$ y $E(s)$ al nudo o enlace orientado obtenido por cerrar $s \in S(R')$ de las siguientes maneras.



Denotaremos por s^A, s^B, s^C, s^D y s^E al polinomio de Conway de $A(s), B(s), C(s), D(s)$ y $E(s)$ respectivamente. Al dibujar los enlaces notamos que se tiene

$$s_{\pi_1}^*(\sigma_1) = \nabla \left(\begin{array}{c} \rightarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) = s_1^N$$

De manera similar se prueba que

$$\begin{aligned} s_{\pi_1}^*(\sigma_1) &= s_1^N & s_{\pi_1}^*(\sigma_2) &= s_2^N & s_{\pi_2}^*(\sigma_1) &= s_1^D \\ s_{\pi_2}^*(\sigma_2) &= s_2^D + z s_2^N & s_{\pi_3}^*(\sigma_1) &= s_1^A & s_{\pi_3}^*(\sigma_2) &= s_2^A + z s_2^N \\ s_{\pi_4}^*(\sigma_1) &= s_1^E + z s_1^B & s_{\pi_4}^*(\sigma_2) &= z s_2^B + (1 + z^2) s_2^E & s_{\pi_5}^*(\sigma_1) &= s_1^B \\ s_{\pi_5}^*(\sigma_2) &= s_2^B + z s_2^E & s_{\pi_6}^*(\sigma_1) &= s_1^C + z s_1^A + z s_1^D - z s_1^E & s_{\pi_6}^*(\sigma_2) &= s_2^C + z s_2^A + z s_2^D + z^2 s_2^N \end{aligned}$$

Por la anterior fórmula de φ tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(s_1, s_2) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) = & (-z^4 - 3z^2 + 2)s_{\pi_1}^*(\sigma_1)s_{\pi_1}^*(\sigma_2) + (z^3 + 3z)s_{\pi_1}^*(\sigma_1)s_{\pi_2}^*(\sigma_2) + (z^3 + 3z)s_{\pi_1}^*(\sigma_1)s_{\pi_3}^*(\sigma_2) + zs_{\pi_1}^*(\sigma_1)s_{\pi_4}^*(\sigma_2) \\ & - (z^2 + 2)s_{\pi_1}^*(\sigma_1)s_{\pi_5}^*(\sigma_2) - (z^2 + 2)s_{\pi_1}^*(\sigma_1)s_{\pi_6}^*(\sigma_2) + (z^3 + 3z)s_{\pi_2}^*(\sigma_1)s_{\pi_1}^*(\sigma_2) + 2s_{\pi_2}^*(\sigma_1)s_{\pi_2}^*(\sigma_2) \\ & - (z^2 + 2)s_{\pi_2}^*(\sigma_1)s_{\pi_3}^*(\sigma_2) - 2s_{\pi_2}^*(\sigma_1)s_{\pi_4}^*(\sigma_2) + zs_{\pi_2}^*(\sigma_1)s_{\pi_5}^*(\sigma_2) + zs_{\pi_2}^*(\sigma_1)s_{\pi_6}^*(\sigma_2) \\ & + (z^3 + 3z)s_{\pi_3}^*(\sigma_1)s_{\pi_1}^*(\sigma_2) - (z^2 + 2)s_{\pi_3}^*(\sigma_1)s_{\pi_2}^*(\sigma_2) + 2s_{\pi_3}^*(\sigma_1)s_{\pi_3}^*(\sigma_2) - 2s_{\pi_3}^*(\sigma_1)s_{\pi_4}^*(\sigma_2) \\ & + zs_{\pi_3}^*(\sigma_1)s_{\pi_5}^*(\sigma_2) + zs_{\pi_3}^*(\sigma_1)s_{\pi_6}^*(\sigma_2) + zs_{\pi_4}^*(\sigma_1)s_{\pi_1}^*(\sigma_2) - 2s_{\pi_4}^*(\sigma_1)s_{\pi_2}^*(\sigma_2) - 2s_{\pi_4}^*(\sigma_1)s_{\pi_3}^*(\sigma_2) \\ & + 2s_{\pi_4}^*(\sigma_1)s_{\pi_4}^*(\sigma_2) - zs_{\pi_4}^*(\sigma_1)s_{\pi_5}^*(\sigma_2) - zs_{\pi_4}^*(\sigma_1)s_{\pi_6}^*(\sigma_2) - (z^2 + 2)s_{\pi_5}^*(\sigma_1)s_{\pi_1}^*(\sigma_2) + zs_{\pi_5}^*(\sigma_1)s_{\pi_2}^*(\sigma_2) \\ & + zs_{\pi_5}^*(\sigma_1)s_{\pi_3}^*(\sigma_2) - zs_{\pi_5}^*(\sigma_1)s_{\pi_4}^*(\sigma_2) - 2s_{\pi_5}^*(\sigma_1)s_{\pi_5}^*(\sigma_2) + (z^2 + 2)s_{\pi_5}^*(\sigma_1)s_{\pi_6}^*(\sigma_2) - (z^2 + 2)s_{\pi_6}^*(\sigma_1)s_{\pi_1}^*(\sigma_2) \\ & + zs_{\pi_6}^*(\sigma_1)s_{\pi_2}^*(\sigma_2) + zs_{\pi_6}^*(\sigma_1)s_{\pi_3}^*(\sigma_2) - zs_{\pi_6}^*(\sigma_1)s_{\pi_4}^*(\sigma_2) + (z^2 + 2)s_{\pi_6}^*(\sigma_1)s_{\pi_5}^*(\sigma_2) - 2s_{\pi_6}^*(\sigma_1)s_{\pi_6}^*(\sigma_2). \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos se tiene

$$\begin{aligned} \psi(s_1, s_2) = (s_1 + s_2)^N = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) = & \frac{-1}{z^2 + 4} [2s_1^A s_2^A + zs_1^B s_2^A - zs_1^C s_2^A - (2 + z^2)s_1^D s_2^A - 2s_1^E s_2^A + zs_1^N s_2^A \\ & zs_1^A s_2^B - 2s_1^B s_2^B + 2s_1^C s_2^B + zs_1^D s_2^B - zs_1^E s_2^B - 2s_1^N s_2^B \\ & - zs_1^A s_2^C + 2s_1^B s_2^C - 2s_1^C s_2^C - zs_1^D s_2^C + zs_1^E s_2^C - (z^2 + 2)s_1^N s_2^C \\ & - (z^2 + 2)s_1^A s_2^D + zs_1^B s_2^D - zs_1^C s_2^D + 2s_1^D s_2^D - 2s_1^E s_2^D + zs_1^N s_2^D \\ & - 2s_1^A s_2^E - zs_1^B s_2^E + zs_1^C s_2^E - 2s_1^D s_2^E + 2s_1^E s_2^E - zs_1^N s_2^E \\ & zs_1^A s_2^N - 2s_1^B s_2^N - (z^2 + 2)s_1^C s_2^N + zs_1^D s_2^N - zs_1^E s_2^N + (z^2 + 2)s_1^N s_2^N \\ & 2s_1^A s_2^A + zs_1^B s_2^A - zs_1^C s_2^A - (2 + z^2)s_1^D s_2^A - 2s_1^E s_2^A + zs_1^N s_2^A \\ & 2s_1^A s_2^A + zs_1^B s_2^A - zs_1^C s_2^A - (2 + z^2)s_1^D s_2^A - 2s_1^E s_2^A + zs_1^N s_2^A] \end{aligned}$$

lo cual se puede expresar como

$$(s_1 + s_2)^N = \frac{-1}{z^2 + 4} (s_1^A s_1^B s_1^C s_1^D s_1^E s_1^N) \begin{pmatrix} 2 & z & -z & -2 - z^2 & -2 & z \\ z & -2 & 2 & z & -z & -2 \\ -z & 2 & -2 & -z & z & -2 - z^2 \\ -2 - z^2 & z & -z & 2 & -2 & z \\ -2 & -z & z & -2 & 2 & -z \\ z & -2 & -z^2 - 2 & z & -z & 2 + z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2^A \\ s_2^B \\ s_2^C \\ s_2^D \\ s_2^E \\ s_2^N \end{pmatrix}$$

De manera análoga obtenemos que

$$\begin{aligned} (s_1 + s_2)^A &= s_1^B s_2^A + s_1^A s_2^C, & (s_1 + s_2)^B &= s_1^A s_2^D + s_1^B s_2^B, \\ (s_1 + s_2)^C &= s_1^C s_2^C + s_1^D s_2^A, & (s_1 + s_2)^D &= s_1^D s_2^B + s_1^C s_2^D, \end{aligned}$$

$$(s_1 + s_2)^E = \frac{-1}{z^2 + 4} (s_1^A s_1^B s_1^C s_1^D s_1^E s_1^N) \begin{pmatrix} z & -2 & 2 & z & -z & -2 \\ 2 + z^2 & -z & z & -2 & -2 - z^2 & -z \\ -2 - z^2 & z & -z & 2 & -2 & z \\ -3z - z^3 & 2 + z^2 & -2 - z^2 & z & -z & -2 \\ -z & -2 - z^2 & -2 & -z & z & 2 \\ -2 & -z & z & -2 & 2 & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2^A \\ s_2^B \\ s_2^C \\ s_2^D \\ s_2^E \\ s_2^N \end{pmatrix}$$

Dado un elemento $s \in S(R')$ le asignaremos la siguiente matriz, la cual es un invariante de s , ya que el polinomio de Conway lo es.

$$M_{\nabla}(s) = \begin{pmatrix} s^C & s^D \\ s^A & s^B \end{pmatrix}.$$

Lema 2.2 Sean $s_1, s_2 \in S(R')$ se tiene que

$$M_{\nabla}(s_1 + s_2) = M_{\nabla}(s_1)M_{\nabla}(s_2)$$

Demostración.- Basta notar que

$$M_{\nabla}(s_1)M_{\nabla}(s_2) = \begin{pmatrix} s_1^C & s_1^D \\ s_1^A & s_1^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2^C & s_2^D \\ s_2^A & s_2^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1^C s_2^C + s_1^D s_2^A & s_1^D s_2^B + s_1^C s_2^D \\ s_1^B s_2^A + s_1^A s_2^C & s_1^A s_2^D + s_1^B s_2^B \end{pmatrix} = M_{\nabla}(s_1 + s_2). \blacksquare$$

3 Polinomio corchete

El polinomio corchete del diagrama de un ovillo. Para calcular el polinomio corchete del diagrama de un nudo o enlace no orientado T , denotado por $\langle T \rangle$, aplicamos repetidamente las conocidas relaciones:

- (1) $\langle \times \rangle = a \langle \smile \rangle + a^{-1} \langle \frown \rangle$
- (2) $\langle T \sqcup \bigcirc \rangle = -(a^2 + a^{-2}) \langle T \rangle$
- (3) $\langle \bigcirc \rangle = 1$

De la misma manera que a un nudo o enlace [9], a cada diagrama no orientado de un ovillo T le podemos aplicar repetidamente las relaciones (1) y (2) del polinomio corchete. Usando el polinomio corchete, a cada diagrama T de un ovillo le asignaremos cinco polinomios en las variables a y a^{-1} .

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \alpha(a, a^{-1}) \langle \bigcirc \rangle + \beta(a, a^{-1}) \langle \bigcirc \rangle + \delta(a, a^{-1}) \langle \bigcirc \rangle \\ &\quad + \chi(a, a^{-1}) \langle \bigcirc \rangle + \psi(a, a^{-1}) \langle \bigcirc \rangle. \end{aligned}$$

Llamemos al los diagramas anteriores como sigue

$$\hat{\alpha} = \langle \bigcirc \rangle, \hat{\beta} = \langle \bigcirc \rangle, \hat{\delta} = \langle \bigcirc \rangle, \hat{\chi} = \langle \bigcirc \rangle, \hat{\psi} = \langle \bigcirc \rangle.$$

Ejemplo 3.1

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 &= a(a \langle \text{Diagram 4} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle) + a^{-1}(a \langle \text{Diagram 6} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 7} \rangle) \\
 &= a^2 \langle \text{Diagram 8} \rangle + (1 + 1 - (a^2 + a^{-2})a^2) \langle \text{Diagram 9} \rangle \\
 &= a^2 \langle \text{Diagram 10} \rangle + (1 - a^4) \langle \text{Diagram 11} \rangle
 \end{aligned}$$

El anterior ejemplo nos muestra cómo calcular el polinomio corchete de un ovillo. En este caso

$$\alpha(a, a^{-1}) = a^2, \quad \beta(a, a^{-1}) = 1 - a^{-4}, \quad \delta(a, a^{-1}) = \chi(a, a^{-1}) = \psi(a, a^{-1}) = 0.$$

Con la definición del polinomio corchete tenemos, al igual que en el caso de nudos o enlaces, que el polinomio corchete es un invariante bajo las movidas de Reidemeister del tipo II y III.

$$\langle \text{Diagram 12} \rangle = \langle \text{Diagram 13} \rangle, \quad \langle \text{Diagram 14} \rangle = \langle \text{Diagram 15} \rangle,$$

no así para la movida de tipo I, para la cual tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 16} \rangle &= -a^3 \langle \text{Diagram 17} \rangle, \\
 \langle \text{Diagram 18} \rangle &= -a^{-3} \langle \text{Diagram 19} \rangle,
 \end{aligned}$$

notemos que lo anterior implica que, si DT_1 y DT_2 son diagramas distintos de un mismo ovillo, no necesariamente se tiene la igualdad $\langle DT_1 \rangle = \langle DT_2 \rangle$.

Dado un diagrama de ovillo DT , le asignaremos la siguiente matriz:

$$(3.1) \quad M(DT)(a, a^{-1}) = \begin{pmatrix} \alpha(a, a^{-1}) + \chi(a, a^{-1}) & \beta(a, a^{-1}) & 0 \\ \delta(a, a^{-1}) & \alpha(a, a^{-1}) + \psi(a, a^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(a, a^{-1}) \end{pmatrix}.$$

La manera en que surgió esta matriz la explicaremos al final de la sección.

Lema 3.1 Dados los diagramas de ovillos DT_1 y DT_2 se tiene:

$$M(DT_1 + DT_2)(a, a^{-1}) = M(DT_1)(a, a^{-1})M(DT_2)(a, a^{-1}) + d \begin{pmatrix} \chi_1 & \beta_1 & 0 \\ \delta_1 & \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_2 & \beta_2 & 0 \\ \delta_2 & \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $d = -(a^2 + a^{-2})$, $M(DT_i)(a, a^{-1}) = \begin{pmatrix} \alpha_i + \chi_i & \beta_i & 0 \\ \delta_i & \alpha_i + \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i \end{pmatrix}$ es la matriz asociada al diagrama DT_i y $\alpha_i(a, a^{-1}) = \alpha_i$, $\beta_i(a, a^{-1}) = \beta_i, \dots, \psi_i(a, a^{-1}) = \psi_i$ para $i = 1, 2$.

Demostración.- Sean

$$\langle DT_1 \rangle = \alpha_1 \langle \text{Diagram 20} \rangle + \beta_1 \langle \text{Diagram 21} \rangle + \delta_1 \langle \text{Diagram 22} \rangle + \chi_1 \langle \text{Diagram 23} \rangle + \psi_1 \langle \text{Diagram 24} \rangle$$

las expansiones resultantes de aplicar el polinomio corchete a cada uno de los diagramas DT_1 y DT_2 , respectivamente.

Así que para el ovillo $DT_1 + DT_2$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle DT_1 + DT_2 \rangle &= \alpha_1 \langle \text{Diagram 25} \rangle + \beta_1 \langle \text{Diagram 26} \rangle + \delta_1 \langle \text{Diagram 27} \rangle + \chi_1 \langle \text{Diagram 28} \rangle + \psi_1 \langle \text{Diagram 29} \rangle \\
 &= \alpha_1 \alpha_2 \langle \text{Diagram 30} \rangle + \alpha_1 \beta_2 \langle \text{Diagram 31} \rangle + \alpha_1 \delta_2 \langle \text{Diagram 32} \rangle + \alpha_1 \chi_2 \langle \text{Diagram 33} \rangle + \alpha_1 \psi_2 \langle \text{Diagram 34} \rangle \\
 &+ \beta_1 \alpha_2 \langle \text{Diagram 35} \rangle + \beta_1 \beta_2 \langle \text{Diagram 36} \rangle + \beta_1 \delta_2 \langle \text{Diagram 37} \rangle + \beta_1 \chi_2 \langle \text{Diagram 38} \rangle + \beta_1 \psi_2 \langle \text{Diagram 39} \rangle \\
 &+ \delta_1 \alpha_2 \langle \text{Diagram 40} \rangle + \delta_1 \beta_2 \langle \text{Diagram 41} \rangle + \delta_1 \delta_2 \langle \text{Diagram 42} \rangle + \delta_1 \chi_2 \langle \text{Diagram 43} \rangle + \delta_1 \psi_2 \langle \text{Diagram 44} \rangle \\
 &+ \chi_1 \alpha_2 \langle \text{Diagram 45} \rangle + \chi_1 \beta_2 \langle \text{Diagram 46} \rangle + \chi_1 \delta_2 \langle \text{Diagram 47} \rangle + \chi_1 \chi_2 \langle \text{Diagram 48} \rangle + \chi_1 \psi_2 \langle \text{Diagram 49} \rangle \\
 &+ \psi_1 \alpha_2 \langle \text{Diagram 50} \rangle + \psi_1 \beta_2 \langle \text{Diagram 51} \rangle + \psi_1 \delta_2 \langle \text{Diagram 52} \rangle + \psi_1 \chi_2 \langle \text{Diagram 53} \rangle + \psi_1 \psi_2 \langle \text{Diagram 54} \rangle.
 \end{aligned}$$

Notemos que omitimos los corchetes del lado derecho de la ecuación para una mejor apreciación, y así se hará en adelante. Si agrupamos términos obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \boxed{DT_1} \boxed{DT_2} = & \alpha_1 \alpha_2 \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 + \beta_1 \psi_2 + \chi_1 \beta_2) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + (\alpha_1 \delta_2 + \delta_1 \alpha_2 + \delta_1 \chi_2 + \psi_1 \delta_2) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \\
 & + (\alpha_1 \chi_2 + \beta_1 \delta_2 + \chi_1 \alpha_2 + \chi_1 \chi_2) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + (\alpha_1 \psi_2 + \delta_1 \beta_2 + \psi_1 \alpha_2 + \psi_1 \psi_2) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \\
 & + d((\beta_1 \beta_2 + \chi_1 \psi_2) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + (\delta_1 \delta_2 + \psi_1 \chi_2) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + (\beta_1 \chi_2 + \chi_1 \delta_2) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + (\delta_1 \psi_2 + \psi_1 \beta_2) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array})
 \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición de la matriz $M(DT)$ tenemos

$$M(DT_1 + DT_2)(a, a^{-1}) =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \chi_2 + \beta_1 \delta_2 + \chi_1 \alpha_2 + \chi_1 \chi_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 + \beta_1 \psi_2 + \chi_1 \beta_2 & 0 \\ \alpha_1 \delta_2 + \delta_1 \alpha_2 + \delta_1 \chi_2 + \psi_1 \delta_2 & \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \psi_2 + \psi_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2 + \psi_1 \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \alpha_2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \beta_1 \chi_2 + \chi_1 \delta_2 & \beta_1 \beta_2 + \chi_1 \psi_2 & 0 \\ \delta_1 \delta_2 + \psi_1 \chi_2 & \delta_1 \psi_2 + \psi_1 \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

basta ahora notar que se cumple

$$M(DT_1 + DT_2)(a, a^{-1}) = M(DT_1)(a, a^{-1})M(DT_2)(a, a^{-1}) + d \begin{pmatrix} \chi_1 & \beta_1 & 0 \\ \delta_1 & \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_2 & \beta_2 & 0 \\ \delta_2 & \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Dado un diagrama de ovillo DT , le asignaremos las siguientes matrices:

$$M_1(DT) = M(DT)(\sqrt{i}, \frac{1}{\sqrt{i}}), \quad M_2(DT) = M(DT)(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}),$$

donde $M(DT)(x, y)$ es la matriz que se obtiene de evaluar en x y y las entradas de la matriz $M(DT)(a, a^{-1})$. Tenemos entonces el siguiente

Lema 3.2 Dados los diagramas de ovillos DT_1 y DT_2 se tiene:

$$M_1(DT_1 + DT_2) = M_1(DT_1)M_1(DT_2)$$

Demostración.- Notemos que si $a = \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ entonces $d = -(a^2 + a^{-2}) = 0$; de aquí que, por el lema anterior, tenemos el resultado deseado. ■

Veamos ahora cómo surgió la matriz (3). Recordemos que dado un ovillo T , se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle T \rangle = & \alpha(a, a^{-1}) \langle \text{Diagrama 1} \rangle + \beta(a, a^{-1}) \langle \text{Diagrama 2} \rangle + \delta(a, a^{-1}) \langle \text{Diagrama 3} \rangle \\
 & + \chi(a, a^{-1}) \langle \text{Diagrama 4} \rangle + \psi(a, a^{-1}) \langle \text{Diagrama 5} \rangle.
 \end{aligned}$$

Si evaluamos $a = \sqrt{i}$ (con lo cual $d = 0$ y, por ejemplo, $\langle N(\hat{\alpha}) \rangle = 0$) se tiene que

$$\langle A(T) \rangle = \delta, \quad \langle B(T) \rangle = \alpha + \psi, \quad \langle C(T) \rangle = \alpha + \chi, \quad \langle D(T) \rangle = \beta,$$

donde $A(T)$, $B(T)$, $C(T)$ y $D(T)$ son como antes pero sin orientaciones. En analogía con la matriz $M_{\nabla}(s)$ de la sección anterior, a cada ovillo T se le puede asociar la matriz

$$M_{\langle \rangle}(T) = \begin{pmatrix} \alpha + \chi & \beta \\ \delta & \alpha + \psi \end{pmatrix},$$

con esta matriz se trabajó en un principio, pero conforme se fue avanzando en el trabajo ésta se modificó para quedar como (3).

Una posible continuación de este trabajo estaría orientado primero al estudio de los cuartos con cuatro cuerdas y a los 4-ovillos, después a tratar de generalizar a cualquier n .

4 Matrices asociadas

Recordemos que para la movida tipo I de Reidemeister tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagrama 1} \rangle & = -a^3 \langle \text{Diagrama 2} \rangle, \\
 \langle \text{Diagrama 3} \rangle & = -a^{-3} \langle \text{Diagrama 4} \rangle,
 \end{aligned}$$

por lo anterior y dado que el polinomio corchete es un invariante bajo isotopía regular, tenemos que, si $DT_1 \cong DT_2$ entonces

$$M_1(DT_1) = (-\sqrt{i})^{3z} M_1(DT_2), \quad M_2(DT_1) = \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3z} M_2(DT_2), \quad z \in \mathbb{Z}.$$

Dado que $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -1$, resulta que la matriz M_2 es un invariante de ovillos. Por el momento trabajaremos sólo con la matriz M_1 .

Definimos en $M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ la siguiente relación

$$A_1 \sim A_2 \Leftrightarrow A_1 = (-\sqrt{i})^{3z} A_2 \quad z \in \mathbb{Z}.$$

Es fácil ver que dicha relación es de equivalencia, entonces dados los diagramas DT_1 y DT_2 de ovillos equivalentes, les corresponde la misma clase de equivalencia, $[M_1(DT_1)] = [M_1(DT_2)]$. De donde se desprende que la clase de equivalencia de la matriz $[M_1(DT)]$ es un invariante de la clase del ovillo representado por el diagrama DT .

Además del lema 3.2 se sigue

$$[M_1(DT_1 + DT_2)] = [M_1(DT_1)M_1(DT_2)] = [M_1(DT_1)][M_1(DT_2)].$$

Ejemplo 4.1 Del ejemplo 1 obtenemos

$$M_1\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} i & 2 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad M_1\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De manera similar obtenemos

$$M_1\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \sqrt{i} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{i}} & \sqrt{i} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{i} \end{pmatrix}, \quad M_1\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{i}} & 0 & 0 \\ \sqrt{i} & \frac{1}{\sqrt{i}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{i}} \end{pmatrix},$$

$$M_1\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \sqrt{i} & \frac{1}{\sqrt{i}} & 0 \\ 0 & \sqrt{i} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{i} \end{pmatrix}, \quad M_1\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{i}} & \sqrt{i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{i}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{i}} \end{pmatrix}.$$

Definamos los diagramas *trenza entera superior (inferior) con n-cruces*, TES_n (TEI_n), de la siguiente manera:

$$TES_1 = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad TES_2 = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad \dots, \quad TES_n = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$TES_{-1} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad TES_{-2} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad \dots, \quad TES_{-n} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$TEI_1 = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad TEI_2 = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad \dots, \quad TEI_n = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$TEI_{-1} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad TEI_{-2} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad \dots, \quad TEI_{-n} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$TE_0 = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

donde $n > 0$ es un entero. Definamos $TES_0 = TE_0 = TEI_0$.

Lema 4.1 Dada la notación anterior, se cumple

$$[M_1(TES_n)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [M_1(TEI_n)] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{n}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Demostración.- Por el ejemplo anterior tenemos que

$$[M_1(TES_1)] = \begin{bmatrix} \sqrt{i} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{i}} & \sqrt{i} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[M_1(TES_{-1})] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{i}} & 0 & 0 \\ \sqrt{i} & \frac{1}{\sqrt{i}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $n > 0$ un entero. Notemos que

$$TES_n = \overbrace{TES_1 + \dots + TES_1}^{n\text{-veces}}, \quad TES_{-n} = \overbrace{TES_{-1} + \dots + TES_{-1}}^{n\text{-veces}}.$$

Así que por el lema 3.2

$$M_1(\text{TES}_n) = \begin{pmatrix} \sqrt{i} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{i}} & \sqrt{i} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{i} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \sqrt{i}^n & 0 & 0 \\ n\sqrt{i}^{n-2} & \sqrt{i}^n & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{i}^n \end{pmatrix},$$

$$M_1(\text{TES}_{-n}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{i}} & 0 & 0 \\ \sqrt{i} & \frac{1}{\sqrt{i}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{i}} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \sqrt{i}^{-n} & 0 & 0 \\ n\sqrt{i}^{-n+2} & \sqrt{i}^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{i}^{-n} \end{pmatrix},$$

de donde se sigue

$$[M_1(\text{TES}_n)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [M_1(\text{TES}_{-n})] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-n}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Además, del ejemplo anterior se sigue

$$[M_1(\text{TE}_0)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

esto implica

$$[M_1(\text{TES}_n)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$


De manera similar se prueba que

$$[M_1(\text{TEI}_n)] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{n}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

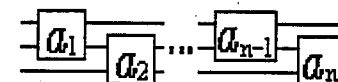
Abusando de la notación escribiremos de ahora en adelante $M_1(T)$ en lugar de $[M_1(T)]$.

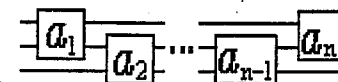
5 Clasificación de las trenzas

Notemos que una trenza no es otra cosa que la suma de trenzas enteras superiores e inferiores.

$$\text{TES}_4 + \text{TEI}_{-2} + \text{TES}_1 + \text{TEI}_2 = \text{Diagrama de trenza}$$


Definamos la notación $T[a_1, a_2, \dots, a_n]$ para representar al diagrama de una trenza de la siguiente manera:

Si n es par, $T[a_1, \dots, a_n] = \text{TES}_{a_1} + \text{TEI}_{a_2} + \dots + \text{TEI}_{a_n} =$ 

Si n es impar $T[a_1, \dots, a_n] = \text{TES}_{a_1} + \text{TEI}_{a_2} + \dots + \text{TES}_{a_n} =$ 

Diremos que la representación $T[a_1, \dots, a_n]$ del diagrama es estable, si cuando $a_i = 0$, ocurre una de las siguientes:

- 1) $a_{i+1} \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$,
- 2) Si $i \neq 1$ entonces $sg(a_{i-1}) = -sg(a_{i+1})$.

Donde $sg : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \{1, -1\}$ es la función signo de n definida por

$$sg(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n > 0 \\ -1 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Sea $T[a_1, \dots, a_n]$ un diagrama estable, definimos la longitud de $T[a_1, \dots, a_n]$, $L(T[a_1, \dots, a_n])$, como el subíndice más grande de los a_j :

$$L(T[a_1, \dots, a_n]) = n.$$

De ahora en adelante trabajaremos únicamente con diagramas estables.

A continuación mostramos dos diagramas que son de vital importancia para el desarrollo de este trabajo.

$$\text{Diagrama } = T[1, 1, 1] = E_+$$

$$\text{Diagrama } = T[-1, -1, -1] = E_-$$

Llamémosle trenza base a una trenza que tiene un diagrama DA que es alternante, esto es, que al recorrer cualquier cuerda del diagrama, no encontramos dos pasos superiores o dos pasos inferiores consecutivos.

Ejemplo 5.1 Tenemos que la trenza $T[3, -2, 1, -2, 3]$ es una trenza base



Observemos también que E_+ y E_- no son alternantes.

Afirmamos que dada una trenza T , ésta es equivalente a una trenza obtenida de la suma de un diagrama alternante y kE , $k \in \mathbb{Z}$, donde

$$kE = \begin{cases} \overbrace{E_+ + \dots + E_+}^{k\text{-veces}} & \text{si } k > 0 \\ \underbrace{(-k)\text{-veces}} \\ \overbrace{E_- + \dots + E_-} & \text{si } k < 0 \\ TE_0 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Lema 5.1 Sea T una trenza, entonces

$$T \cong DA + kE$$

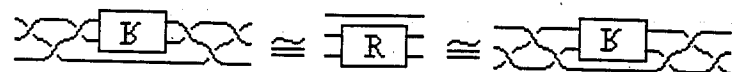
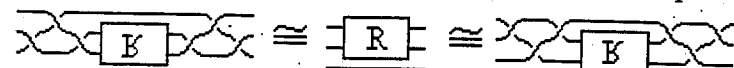
donde DA es un diagrama alternante.

Demostración.-Por inducción sobre la longitud del diagrama estable $T[a_1, \dots, a_n]$.

$$L(T[a_1, a_2, \dots, a_n]) = n,$$

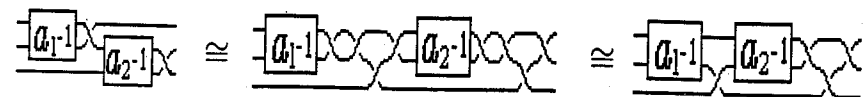
Cuando $n = 1$ claramente se cumple. Cuando $n = 2$, si en $T[a_1, a_2]$ se tiene que $a_1 = 0$, se cumple claramente que el diagrama es alternante; como el diagrama es estable ambos son distintos de 0 y si el diagrama no es alternante entonces a_1 y a_2 son de igual signo; aquí desarrollaremos el caso $a_1, a_2 > 0$, el caso $a_1, a_2 < 0$ es similar.

Notemos en primer lugar que en el caso de una trenza entera superior o inferior se tiene



$$\overline{R} \cong \overline{B}$$

de esto se sigue que



donde si $a_2 = 1$ entonces el diagrama $T[a_1 - 1, -1]$ es alternante; si $a_2 > 1$ el diagrama $T[a_1 - 1, -1, a_2 - 1]$ es alternante. Esto da la idea de cómo se prueba el lema.

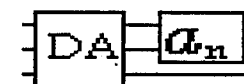
Supongámoslo cierto para $n - 1$ y veamos que sucede para n . Supongamos n impar (el caso n par se trata de manera similar) entonces, por hipótesis de inducción.

$$\boxed{a_1} \boxed{a_2} \dots \boxed{a_{n-1}} \boxed{a_n} \cong \boxed{DA} \boxed{kE} \boxed{a_n}$$

Supongamos que k es par (el caso k impar se trata de manera similar), se ve fácilmente que

$$\boxed{DA} \boxed{kE} \boxed{a_n} \cong \boxed{DA} \boxed{a_n} \boxed{kE}$$

Si tenemos que el diagrama



es alternante acabamos; si el diagrama no es alternante (en particular se tendría que $DA \neq TE_0$), tenemos uno de los siguientes dos casos, para analizarlo supongamos $a_n > 0$ (el caso $a_n < 0$ se trata de manera similar).

$$1) \boxed{DA} \boxed{a_n} = \boxed{DA'} \boxed{a'-1} \boxed{a_n-1}$$

$$2) \boxed{DA} \boxed{a_n} = \boxed{DA'} \boxed{a'-1} \boxed{a_n-1}$$

Si $|a'| \geq |a_n|$ en el caso (1) entonces acabamos, lo mismo ocurre en el caso $DA' = TE_0$; en caso contrario nos queda el diagrama



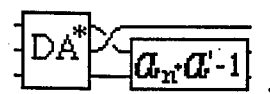
el cual no es alternante; tenemos así que

$$\boxed{DA'} \boxed{a_n a'-1} = \boxed{DA^*} \boxed{a_n a'-1}$$

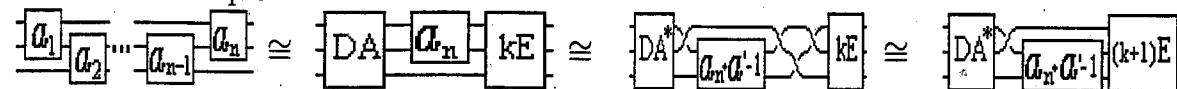
con DA^* diagrama alternante. Y por lo tanto tenemos

$$\boxed{DA^*} \boxed{a_n a'-1} \cong \boxed{DA^*} \boxed{a_n a'-1} \cong \boxed{DA^*} \boxed{a_n a'-1}$$

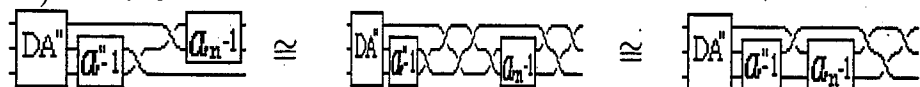
Donde se tiene que el diagrama



es alternante. Así que



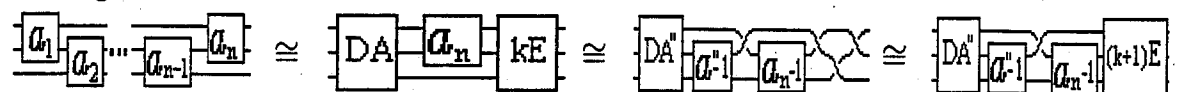
En el caso 2) se tiene



Donde



es un diagrama alternante. Y de esta manera tenemos



Los demás casos se prueban de manera similar. ■

El anterior lema es de gran utilidad pues nos describe una forma estándar de una trenza.

5.1 La matriz M_1 asociada a una trenza

Veamos ahora cómo es la matriz M_1 asociada a la trenza $T[a_1, \dots, a_n]$, veamos antes un ejemplo.

Por el lema 4.1 y por el lema 3.2 tenemos que

$$M_1(T[4, -2, 1, 2]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y en general se tiene que, para n par

$$M_1(T[a_1, \dots, a_n]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_2}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_n}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para n impar

$$M_1(T[a_1, \dots, a_n]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_2}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_n}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nos gustaría tener una forma fácil de calcular estos productos de matrices y, para ello, daremos antes ciertas definiciones:

Dados enteros a_1, a_2, \dots, a_n definimos

$$\begin{aligned} N[a_1] &= a_1 & D[a_1] &= 1 \\ N[a_1, a_2] &= a_2 N[a_1] + 1 & D[a_1, a_2] &= a_2 D[a_1] \\ N[a_1, a_2, a_3] &= a_3 N[a_1, a_2] + N[a_1] & D[a_1, a_2, a_3] &= a_3 D[a_1, a_2] + D[a_1]. \end{aligned}$$

Si definimos $N[a_{-1}] = 0, D[a_{-1}] = 1, N[a_0] = 1, D[a_0] = 0$ tenemos las fórmulas de recurrencia

$$\begin{aligned} N[a_1, a_2, \dots, a_n] &= a_n N[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}] + N[a_1, a_2, \dots, a_{n-2}], \quad n \geq 1, \\ D[a_1, a_2, \dots, a_n] &= a_n D[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}] + D[a_1, a_2, \dots, a_{n-2}], \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Notemos también que

$$\frac{N[a_1]}{D[a_1]} = \frac{a_1}{1}, \quad \frac{N[a_1, a_2]}{D[a_1, a_2]} = a_1 + \frac{1}{a_2}.$$

Y en general

$$\frac{N[a_1, \dots, a_n]}{D[a_1, \dots, a_n]} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}$$

Definimos

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \infty \cdot a = \infty = \infty + a \quad \frac{1}{\infty} = 0 \quad a \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0.$$

A $[a_1, \dots, a_n]$ se le llama *fracción continua* y se le llamará *fracción continua estricta*, si cuando $a_1 \neq 0$ entonces $sg(a_j) = sg(a_{j+1})$ para $j = 1, \dots, n-1$, si $a_1 = 0$ entonces $sg(a_j) = sg(a_{j+1})$ para $j = 2, \dots, n-1$.

Antes de continuar, daremos algunas notaciones útiles.

$$\begin{aligned} A_n &= [a_1, \dots, a_n] & A_n[r, s] &= [a_1, \dots, a_n + r, s] \\ {}_i A_n &= [\frac{a_1}{i}, \dots, \frac{a_n}{i}], & {}_i A_n[r, s] &= [\frac{a_1}{i}, \dots, \frac{a_n}{i} + \frac{r}{i}, \frac{s}{i}], \\ \hat{A}_n &= [a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n], & \hat{A}_n[r, s] &= [a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n + r, s], \\ {}_i \hat{A}_n &= [\frac{a_1}{i}, \dots, \frac{(-1)^{n+1} a_n}{i}], & {}_i \hat{A}_n[r, s] &= [\frac{a_1}{i}, \dots, \frac{(-1)^{n+1} a_n}{i} + \frac{r}{i}, \frac{s}{i}], \end{aligned}$$

por lo cual tenemos que

$$NA_n = a_n NA_{n-1} + NA_{n-2}, \quad DA_n = a_n DA_{n-1} + DA_{n-2}, \quad \frac{NA_n}{DA_n} = A_n.$$

Ahora estamos en posibilidad de dar el siguiente

Lema 5.2 Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Si } n \text{ es impar} & \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DA_n & DA_{n-1} & 0 \\ NA_n & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ \text{Si } n \text{ es par} & \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & a_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DA_{n-1} & DA_n & 0 \\ NA_{n-1} & NA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demostración.- Por inducción sobre n . Para $n = 1$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D[a_1] & D[a_0] & 0 \\ N[a_1] & N[a_0] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $n = 2$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 \\ a_1 & a_1 a_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D[a_1] & D[a_1, a_2] & 0 \\ N[a_1] & N[a_1, a_2] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supongámoslo cierto para $n - 1$ y veamos qué pasa para n ; supongamos que n es impar, entonces, como $n - 1$ es par y por hipótesis de inducción, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DA_{n-2} & DA_{n-1} & 0 \\ NA_{n-2} & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_n DA_{n-1} + DA_{n-2} DA_{n-1} & 0 \\ a_n NA_{n-1} + NA_{n-2} NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DA_n & DA_{n-1} & 0 \\ NA_n & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El caso n par se prueba de manera similar. Esto demuestra el lema. ■

El lema anterior nos da la clave para determinar $M_1(TA_n)$.

Lema 5.3 Sea TA_n un diagrama estable, entonces

$$\begin{aligned} \text{Para } n \text{ impar} & \quad M_1(TA_n) = \begin{bmatrix} D_i A_n & D_i A_{n-1} & 0 \\ N_i A_n & N_i A_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \hat{A}_n & \frac{-1}{i} D \hat{A}_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{i} N \hat{A}_n & N \hat{A}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \\ \text{Para } n \text{ par} & \quad M_1(TA_n) = \begin{bmatrix} D_i A_{n-1} & D_i A_n & 0 \\ N_i A_{n-1} & N_i A_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \hat{A}_{n-1} & \frac{-1}{i} D \hat{A}_n & 0 \\ \frac{1}{i} N \hat{A}_{n-1} & N \hat{A}_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Demostración.-Las primeras igualdades se siguen de el lema 5.2 y el lema 4.1. Las otras igualdades se probarán por inducción sobre n . Para $n = 1$ tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D[a_1] & \frac{-1}{i} D[a_0] & 0 \\ \frac{1}{i} N[a_1] & N[a_0] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para $k = 2$ tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_2}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_2}{i} & 0 \\ \frac{a_1}{i} & -a_1 a_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D[a_1] & \frac{-1}{i} D[a_1, -a_2] & 0 \\ \frac{1}{i} N[a_1] & N[a_1, -a_2] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \hat{A}_1 & \frac{-1}{i} D \hat{A}_2 & 0 \\ \frac{1}{i} N \hat{A}_1 & N \hat{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Supongámoslo cierto para $n - 1$ y veamos qué pasa para n ; supongamos que n es impar, entonces, como $n - 1$ es par tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_2}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_n}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D \hat{A}_{n-2} & \frac{-1}{i} D \hat{A}_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{i} N \hat{A}_{n-2} & N \hat{A}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_n}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_n D \hat{A}_{n-1} + D \hat{A}_{n-2} \frac{-1}{i} D \hat{A}_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{i} a_n N \hat{A}_{n-1} + N \hat{A}_{n-2} N \hat{A}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \hat{A}_n & \frac{-1}{i} D \hat{A}_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{i} N \hat{A}_n & N \hat{A}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

esta última igualdad es cierta ya que $a_n = (-1)^{n+1} a_n$ si n impar.

El caso n par se prueba de manera similar. Esto demuestra el lema. ■

Notemos que dado el diagrama T de un ovillo, se tiene la clase de equivalencia

$$M_1(T) = \begin{bmatrix} \alpha + \chi & \beta & 0 \\ \delta & \alpha + \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definamos la función

$$F(T) = \left\{ \frac{\delta}{\alpha + \chi}, \frac{\alpha + \psi}{\beta} \right\}.$$

Notemos que F está bien definida y, por lo tanto, $F(T)$ es un invariante de T bajo isotopías que dejan fija la frontera del ovillo T (aunque en realidad cualquier cociente de las entradas de la matriz $M_1(T)$ lo es).

Ejemplo 5.2 Del lema 4.1 se deducen las siguientes igualdades

$$F(T[0, 2]) = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}, \quad F(T[0, m]) = \left\{ 0, \frac{1}{m} \right\},$$

$$F(T[2]) = \left\{ \frac{2}{i}, \infty \right\}, \quad F(T[n]) = \left\{ \frac{n}{i}, \infty \right\}.$$

Así, tenemos el siguiente

Teorema 5.1 Para n par tenemos

$$F(TA_n) = \left\{ \left[\frac{a_1}{i}, \dots, \frac{a_{n-1}}{i} \right], \left[\frac{a_1}{i}, \dots, \frac{a_n}{i} \right] \right\} = \{ {}_i A_{n-1, i} A_n \}.$$

Para n impar tenemos

$$F(TA_n) = \left\{ \left[\frac{a_1}{i}, \dots, \frac{a_n}{i} \right], \left[\frac{a_1}{i}, \dots, \frac{a_{n-1}}{i} \right] \right\} = \{ {}_i A_{n, i} A_{n-1} \}.$$

Demostración.- Se sigue del lema 5.3. ■

Notemos que

$${}_i A_n = \left[\frac{a_1}{i}, \dots, \frac{a_n}{i} \right] = \frac{1}{i} [a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n] = \frac{1}{i} \hat{A}_n.$$

Ejemplo 5.3 Tenemos que

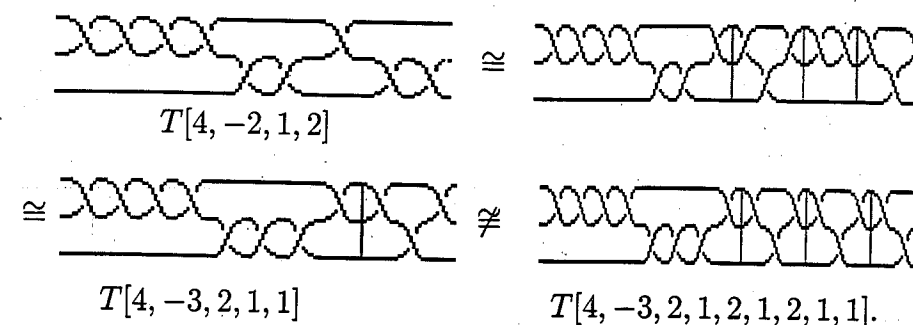
$$F(T[4, -2, 1, 2]) = \left\{ \frac{1}{i} [4, 2, 1], \frac{1}{i} [4, 2, 1, -2] \right\} = \left\{ \frac{1}{i} \frac{13}{3}, \frac{1}{i} \frac{17}{4} \right\},$$

$$F(T[4, -3, 2, 1, 1]) = \left\{ \frac{1}{i} [4, 3, 2, -1, 1], \frac{1}{i} [4, 3, 2, -1] \right\} = \left\{ \frac{1}{i} \frac{13}{3}, \frac{1}{i} \frac{17}{4} \right\},$$

$$F(T[4, -3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1])$$

$$= \left\{ \frac{1}{i} [4, 3, 2, -1, 2, -1, 2, -1, 1], \frac{1}{i} [4, 3, 2, -1, 2, -1, 2, -1] \right\} = \left\{ \frac{1}{i} \frac{13}{3}, \frac{1}{i} \frac{17}{4} \right\}.$$

Los siguientes esquemas muestran que $T[4, -3, 2, 1, 1] \cong T[4, -2, 1, 2]$, y a su vez que $T[4, -3, 2, 1, 1] \not\cong T[4, -3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1]$.



Así que

$$T[4, -2, 1, 2] = T[4, 3, 1] + E, \quad T[4, -3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1] = T[4, 3, 1] + 3E,$$

Ejemplo 5.4 Tenemos que para la trenza

$$T[3, -2, 1, -2, 3] =$$

se tiene que

$$F(T[3, -2, 1, -2, 3]) = \left\{ \frac{1}{i} \frac{91}{27}, \frac{1}{i} \frac{127}{8} \right\} = \left\{ \frac{1}{i} [3, 2, 1, 2, 3], \frac{1}{i} [3, 2, 1, 2] \right\}.$$

6 El Invariante $F(T)$.

Lema 6.1 Sean T_1, T_2 trenzas base, tenemos que

$$T_1 \cong T_2 \iff F(T_1) = F(T_2).$$

En particular se tiene

$$T_1 \cong T_2 \iff M_1(T_1) = M_1(T_2).$$

Demostración.- Claramente si $T_1 \cong T_2$ entonces $F(T_1) = F(T_2)$. Sea $T[a_1, \dots, a_n] = TA_n$ un diagrama alternante de la trenza base T_1 .

Si n es impar y, dado que TA_n es alternante, $a_i \neq 0$ para $i > 1$; si $a_1 = 0$ se tiene que $sg(a_i) \neq sg(a_{i+1})$, con $1 < i < n$; si $a_1 \neq 0$ entonces $sg(a_i) \neq sg(a_{i+1})$, con $1 \leq i < n$.

Por el teorema 5.1 se tiene

$$F(T[a_1, \dots, a_n]) = \left\{ \frac{1}{i} [a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n], \frac{1}{i} [a_1, \dots, (-1)^n a_{n-1}] \right\},$$

donde $[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n]$ es una fracción continua estricta. Supongamos que

$$[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n] = \frac{p}{q}, \quad [a_1, \dots, (-1)^n a_{n-1}] = \frac{p'}{q'},$$

Recordemos, [14, pag 327], que un número racional puede tener a lo más dos expansiones en fracción continua estricta :

$$[b_1, \dots, b_m] = [b_1, \dots, b_m \pm 1, \mp 1],$$

donde únicamente el primer término de cada expansión puede tomar el valor de 0. Así que las fracciones $[b_1, \dots, b_m]$ y $[b_1, \dots, b_{m-1}]$ determinan de manera única la expansión de fracción continua $[b_1, \dots, b_m]$. De igual manera, las fracciones $[b_1, \dots, b_m \pm 1, \mp 1]$ y $[b_1, \dots, b_m \pm 1]$ determinan de manera única la expansión $[b_1, \dots, b_m \pm 1, \mp 1]$.

Por lo anterior se tiene que las fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{p'}{q'}$ determinan de manera única una expansión en fracción continua estricta, a saber

$$[a_1, -a_2, \dots, (-1)^{n+1} a_n].$$

Así que si una trenza base T_2 tiene asociado la pareja ordenada de fracciones

$$\left\{ \frac{1}{i} \frac{p}{q}, \frac{1}{i} \frac{p'}{q'} \right\},$$

utilizando el razonamiento anterior se tiene que

$$T_2 \cong T[a_1, -a_2, \dots, (-1)^{n+1} a_n] \cong T_1.$$

de esto se sigue que una trenza base tiene asociado un único diagrama alternante.

Por otro lado, claramente si $T_1 \cong T_2$ entonces $M_1(T_1) = M_1(T_2)$. Por otra parte, si $M_1(T_1) = M_1(T_2)$, esto implica que $F(T_1) = F(T_2)$ y, del resultado anterior, se sigue que $T_1 \cong T_2$ (el caso n par es similar). ■

El lema anterior nos indica que dado un par de números racionales que provengan de una trenza base, podemos construir el diagrama alternante asociado a la trenza base, simplemente desarrollando la expansión en fracción continua estricta asociada a la pareja de números racionales dados.

Ejemplo 6.1 Sea T una trenza base tal que

$$F(T) = \left\{ \frac{1}{i} \frac{91}{27}, \frac{1}{i} \frac{27}{8} \right\},$$

para obtener el diagrama alternante de la trenza base procedemos de la siguiente manera.

Puesto que

$$\frac{91}{27} = [3, 2, 1, 2, 3] = [3, 2, 1, 2, 2, 1], \quad \frac{27}{8} = [3, 2, 1, 2] = [3, 2, 1, 1, 1],$$

y recordando que estas expansiones están relacionadas como la pareja ordenada

$$\left\{ \frac{1}{i} [a_1, \dots, a_n], \frac{1}{i} [a_1, \dots, a_{n-1}] \right\} \text{ si } n \text{ es impar,}$$

$$\left\{ \frac{1}{i} [a_1, \dots, a_{n-1}], \frac{1}{i} [a_1, \dots, a_n] \right\} \text{ si } n \text{ es par,}$$

tenemos por conclusión que la expansión buscada es $[3, 2, 1, 2, 3]$ y, por lo tanto, la trenza buscada tiene por diagrama alternante $T[3, -2, 1, -2, 3]$; de aquí se tiene que

$$T \cong \text{Diagrama Alternante de } T[3, -2, 1, -2, 3]$$

Investiguemos ahora cómo es $M_1(kE)$.

Como

$$E = \text{Diagrama } E = T[1, 1, 1], \quad -E = \text{Diagrama } -E = T[-1, -1, -1],$$

se tiene que

$$M_1(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{i} & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De estos cálculos obtenemos que

$$F(E) = \left\{ \frac{1}{0}, \frac{0}{1} \right\} = \{\infty, 0\} = \left\{ \frac{1}{i} [1, -1, 1], \frac{1}{i} [1, -1] \right\},$$

lo que se puede interpretar como

$$[1, -1, 1] = 1 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{0} = 1 + \infty = \infty, \quad [1, -1] = 1 + \frac{1}{-1} = 0.$$

De manera similar se tiene

$$F(-E) = \left\{ \frac{1}{0}, \frac{0}{1} \right\} = \{\infty, 0\} = \left\{ \frac{1}{i}[-1, 1, -1], \frac{1}{i}[-1, 1] \right\}.$$

Haciendo algunos cálculos obtenemos las matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{i} & 0 \\ \frac{-1}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{i} & 0 \\ \frac{-1}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

para $M_1(-E)$, $M_1(2E)$, $M_1(3E)$ y $M_1(4E)$, respectivamente, de donde se desprende que

$$\begin{aligned} M_1(E) &= M_1((4k+1)E), & M_1(2E) &= M_1((4k+2)E), \\ M_1(3E) &= M_1((4k+3)E), & M_1(4E) &= M_1((4k)E), \end{aligned} \quad k \in \mathbb{Z}$$

en particular se tiene que para un ovillo T

$$M_1(T+lE) = M_1(T+mE) \quad \Leftrightarrow \quad l \equiv m \pmod{4}$$

Veamos el efecto que tiene en M_1 el sumar la trenza kE a una trenza base.

Ejemplo 6.2 Tenemos que

$$\begin{aligned} M_1(T[3, -2, 1, -2, 3] + (4k+1)E) &= M_1(T[3, -2, 1, -2, 3])M_1(4kE)M_1(E) \\ &= \begin{bmatrix} D[\frac{3}{i}, \frac{-2}{i}, \frac{1}{i}, \frac{-2}{i}, \frac{3}{i}] & D[\frac{3}{i}, \frac{-2}{i}, \frac{1}{i}, \frac{-2}{i}] & 0 \\ N[\frac{3}{i}, \frac{-2}{i}, \frac{1}{i}, \frac{-2}{i}, \frac{3}{i}] & N[\frac{3}{i}, \frac{-2}{i}, \frac{1}{i}, \frac{-2}{i}] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{i} & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D[3, 2, 1, 2, 3] & -\frac{1}{i}D[3, 2, 1, 2] & 0 \\ \frac{1}{i}N[3, 2, 1, 2, 3] & N[3, 2, 1, 2] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{i} & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D[3, 2, 1, 2] & \frac{1}{i}D[3, 2, 1, 2, 3] & 0 \\ \frac{1}{i}N[3, 2, 1, 2] & -N[3, 2, 1, 2, 3] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De manera similar se tienen las matrices

$$\begin{aligned} M_1(T[3, -2, 1, -2, 3] + (4k+2)E) &= \begin{bmatrix} -D[3, 2, 1, 2, 3] & \frac{1}{i}D[3, 2, 1, 2] & 0 \\ \frac{-1}{i}N[3, 2, 1, 2, 3] & -N[3, 2, 1, 2] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ M_1(T[3, -2, 1, -2, 3] + (4k+3)E) &= \begin{bmatrix} -D[3, 2, 1, 2] & \frac{-1}{i}D[3, 2, 1, 2, 3] & 0 \\ \frac{-1}{i}N[3, 2, 1, 2] & N[3, 2, 1, 2, 3] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$M_1(T[3, -2, 1, -2, 3] + 4kE) = \begin{bmatrix} D[3, 2, 1, 2, 3] & -\frac{1}{i}D[3, 2, 1, 2] & 0 \\ \frac{1}{i}N[3, 2, 1, 2, 3] & N[3, 2, 1, 2] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nótese que ninguna de estas cuatro matrices son equivalentes. De las matrices anteriores obtenemos

$$F(T[3, -2, 1, -2, 3]) = \left\{ \frac{1}{i}[3, 2, 1, 2, 3], \frac{1}{i}[3, 2, 1, 2] \right\},$$

$$F(T[3, -2, 1, -2, 3] + E) = \left\{ \frac{1}{i}[3, 2, 1, 2], \frac{1}{i}[3, 2, 1, 2, 3] \right\}.$$

Similarmente se tiene

$$M_1(T[3, -2, 1, -2, 3] - E) = \begin{bmatrix} -D[3, 2, 1, 2] & -\frac{1}{i}D[3, 2, 1, 2, 3] & 0 \\ -\frac{1}{i}N[3, 2, 1, 2] & N[3, 2, 1, 2, 3] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y, por lo tanto,

$$F(T[3, -2, 1, -2, 3] - E) = \left\{ \frac{1}{i}[3, 2, 1, 2], \frac{1}{i}[3, 2, 1, 2, 3] \right\}$$

El ejemplo anterior muestra un caso particular del siguiente

Lema 6.2 Sea T una trenza tal que $F(T) = \left\{ \frac{1}{i}f_1, \frac{1}{i}f_2 \right\}$. Entonces se tiene que

- 1) $F(T+nE) = \left\{ \frac{1}{i}f_1, \frac{1}{i}f_2 \right\}$ si n es par,
- 2) $F(T+nE) = \left\{ \frac{1}{i}f_2, \frac{1}{i}f_1 \right\}$ si n es impar.

Demostración.- Supongamos que

$$M_1(T) = \begin{bmatrix} a & \frac{-1}{i}b & 0 \\ \frac{1}{i}c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$F(T) = \left\{ \frac{1}{i}\frac{c}{a}, \frac{1}{i}\frac{d}{b} \right\}$$

De aquí se sigue que

$$M_1(T \pm E) = \begin{bmatrix} a & \frac{-1}{i}b & 0 \\ \frac{1}{i}c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \pm \frac{1}{i} & 0 \\ \pm \frac{1}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm b & \pm \frac{1}{i}a & 0 \\ \pm \frac{1}{i}d & \mp c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así que tenemos

$$F(T \pm E) = \left\{ \frac{1}{i} \frac{d}{b}, \frac{1}{i} \frac{c}{a} \right\}$$

Así que el efecto que tiene en $F(T)$ el sumar $\pm E$ a la trenza T es el intercambio entre las fracciones de $F(T)$.

Si a la trenza $T \pm E$ le sumamos nuevamente $\pm E$ obtenemos que $F(T) = F(T \pm 2E)$.

En general tenemos

$$F(T) = F(T + 2nE) \quad n \in \mathbb{Z},$$

de donde se desprende que

$$F(T + E) = F(T + (2n + 1)E) \quad n \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Así que nuestro invariante F no distingue entre una trenza T y la trenza $T + 2nE$. Observemos que, por el lema 5.1, dada una trenza T se tiene

$$T \cong DA + kE,$$

donde DA es un diagrama alternante; supongamos que

$$DA = T[b_1, \dots, (-1)^{m+1} b_m],$$

con $[b_1, \dots, b_m]$ una fracción continua estricta; si suponemos que

$$F(T[b_1, \dots, (-1)^{m+1} b_m]) = \left\{ \frac{1}{i} f_1, \frac{1}{i} f_2 \right\},$$

entonces

$$F(T) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{i} f_1, \frac{1}{i} f_2 \right\} & \text{si } k \text{ es par} \\ \left\{ \frac{1}{i} f_2, \frac{1}{i} f_1 \right\} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Como anteriormente se examinó, de f_1 y f_2 se puede recuperar la expansión única $[b_1, \dots, b_m]$ y de aquí la trenza base DA .

Es por esto que para el caso de trenzas, $F(T)$ determina la única trenza base DA asociada a T .

De este razonamiento tenemos el siguiente

Lema 6.3 Sean T_1 y T_2 trenzas,

1) Si $F(T_1) = F(T_2) = \left\{ \frac{1}{i} f_1, \frac{1}{i} f_2 \right\}$ entonces $T_1 \cong T_2 + 2kE$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Si $F(T_1) = \left\{ \frac{1}{i} f_1, \frac{1}{i} f_2 \right\}$ y $F(T_2) = \left\{ \frac{1}{i} f_2, \frac{1}{i} f_1 \right\}$ entonces

$$T_1 \cong T_2 + (2k + 1)E, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. - Primero probaremos (2) suponiendo cierto (1) y luego probaremos que así es.

Por el lema 6.2 tenemos que

$$F(T_2 + E) = \left\{ \frac{1}{i} f_1, \frac{1}{i} f_2 \right\},$$

usando (1) se deduce que

$$T_1 \cong (T_2 + E) + 2kE = T_2 + (2k + 1)E, \quad k \in \mathbb{Z},$$

obteniendo el resultado deseado.

Para probar (1) notemos que como $F(T_1) = F(T_2)$ y, por la observación anterior, tenemos que de $F(T_1)$ podemos recuperar una única expansión de fracción continua estricta, la cual esta asociada a un diagrama alternante DA , entonces

$$T_1 \cong DA + k_1E \quad T_2 \cong DA + k_2E;$$

si $F(DA) = \left\{ \frac{1}{i} g_1, \frac{1}{i} g_2 \right\}$ entonces

$$F(T_1) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{i} g_1, \frac{1}{i} g_2 \right\} & \text{si } k_1 \text{ es par} \\ \left\{ \frac{1}{i} g_2, \frac{1}{i} g_1 \right\} & \text{si } k_1 \text{ es impar} \end{cases}$$

$$F(T_2) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{i} g_1, \frac{1}{i} g_2 \right\} & \text{si } k_2 \text{ es par} \\ \left\{ \frac{1}{i} g_2, \frac{1}{i} g_1 \right\} & \text{si } k_2 \text{ es impar} \end{cases}$$

como $F(T_1) = F(T_2)$, entonces tanto k_1 como k_2 son ambos pares o ambos impares, de donde se sigue que

$$T_1 \cong DA + k_1E \cong DA + k_2E + (k_1 - k_2)E \cong T_2 + (k_1 - k_2)E. \blacksquare$$

donde $(k_1 - k_2)$ es par.

6.1 El invariante M_2

Recordemos la definición de la matriz M_2 asociada a un diagrama de ovrillo DT .

$$M_2(DT) = M(DT)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right),$$

habíamos demostrado que M_2 es invariante de ovillos. En esta sección veremos que

$$M_2(T+rE) = M_2(T+sE) \Leftrightarrow r=s,$$

y, usando este hecho, concluiremos que las matrices M_1 y M_2 distinguen completamente las trenzas.

Por el momento llamaremos $a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ y $a^{-1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Usando la definición de polinomio corchete tenemos que

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \text{diagrama} = a \text{diagrama} + a^{-1} \text{diagrama} = a \text{diagrama} + a^{-1} \text{diagrama} \\ &= a \left[a \text{diagrama} + a^{-1} \text{diagrama} \right] + a^{-1} \text{diagrama} = a^2 \text{diagrama} + \text{diagrama} + a^{-1} \text{diagrama} \\ &= a^2 \left[a \text{diagrama} + a^{-1} \text{diagrama} \right] + \text{diagrama} + a^{-1} \text{diagrama} \\ &= a^3 \text{diagrama} + a \text{diagrama} + \text{diagrama} + a^{-1} \text{diagrama} \\ &= a^3 \text{diagrama} + a \text{diagrama} + \left[a \text{diagrama} + a^{-1} \text{diagrama} \right] + a^{-1} \text{diagrama} \\ &= a^3 \text{diagrama} + a \text{diagrama} + a \text{diagrama} + a^{-1} \text{diagrama} + a^{-1} \text{diagrama} \end{aligned}$$

Recordemos que $a^3 = -1$, entonces esto queda

$$= -\text{diagrama} + a \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right] + a^{-1} \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right]$$

De manera similar se tiene que

$$\langle -E \rangle = \text{diagrama} = -\text{diagrama} + a^{-1} \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right] + a \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right]$$

Sea $z \in \mathbb{R}^+$, con \mathbb{R}^+ el conjunto de los números reales no negativos, definimos la función entero mínimo $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ por $\lfloor z \rfloor = m$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$ es el mayor entero no negativo tal que $m \leq z$.

Lema 6.4 Sea $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\begin{aligned} nE &= (-1)^n \text{diagrama} + (sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^n + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor) a^{sg(n)}) \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right] \\ &\quad + (sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^{n+1} + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor) a^{-sg(n)}) \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right] \end{aligned}$$

Demostración.- Primero usaremos inducción para los enteros positivos.

Para $n = 1$ el lema se cumple. Supongamos que se cumple para n y veamos qué pasa para $n + 1$.

$$\langle (n+1)E \rangle = \boxed{(n+1)E} = \boxed{nE} \text{diagrama}$$

Por hipótesis de inducción se tiene

$$\begin{aligned} &= (-1)^n \text{diagrama} + (sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^n + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor) a^{sg(n)}) \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right] \\ &\quad + (sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^{n+1} + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor) a^{-sg(n)}) \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right] \\ &= (-1)^n \text{diagrama} + (sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^n + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor) a^{sg(n)}) \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right] \\ &\quad + (sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^{n+1} + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor) a^{-sg(n)}) \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right] \\ &= (-1)^n \left[-\text{diagrama} + a \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right] + a^{-1} \left[\text{diagrama} + \text{diagrama} \right] \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^n + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor)a^{sg(n)}) \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \\
& +(sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^{n+1} + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor)a^{-sg(n)}) \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \\
= & (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} + (sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^n + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor)a^{sg(n)} + (-1)^n a^{-1}) \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \\
& +(sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^{n+1} + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor)a^{-sg(n)} + (-1)^n a) \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Supongamos que n es par; en este caso

$$\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor = \lfloor \frac{|n+1|}{2} \rfloor, \quad (-1)^n = 1 = 2(\lfloor \frac{|n+1|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n+1|}{2} \rfloor),$$

$$\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor = 0, \quad a^{sg(n)} = a, \quad a^{-sg(n)} = a^{-1},$$

por esto tenemos que

$$\begin{aligned}
= & (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} + (sg(n+1)\lfloor \frac{|n+1|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^{n+2} + 2(\lfloor \frac{|n+1|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n+1|}{2} \rfloor)a^{-sg(n)}) \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \\
& +(sg(n+1)\lfloor \frac{|n+1|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^{n+1} + 2(\lfloor \frac{|n+1|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n+1|}{2} \rfloor)a^{sg(n)}) \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. El caso n impar se prueba de manera análoga.

El mismo procedimiento se desarrolla al suponer n negativo. ■

Veamos ahora cómo es la matriz asociada a $T + nE$.

Lema 6.5 Sea T un ovillo con

$$M_2(T) = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ z & w & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

entonces

$$M_2(T + nE) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ z & w & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} b & p & 0 \\ p & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ w & z & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} b & p & 0 \\ p & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

donde

$$b = sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^n + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor)a^{sg(n)},$$

$$p = sg(n)\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor (a^{-1} - a)(-1)^{n+1} + 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor)a^{-sg(n)}.$$

Demostración.- Por el lema anterior se sigue que

$$M_2(nE) = \begin{pmatrix} (-1)^n + p & b & 0 \\ b & (-1)^n + p & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix},$$

así que

$$M_2(T + nE) = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ z & w & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n + p & b & 0 \\ b & (-1)^n + p & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - \alpha & y & 0 \\ z & w - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & b & 0 \\ b & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n x + (x+y)(p+b) - \alpha b & (-1)^n y + (x+y)(p+b) - \alpha p & 0 \\ (-1)^n z + (z+w)(p+b) - \alpha p & (-1)^n w + (z+w)(p+b) - \alpha b & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \alpha \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ z & w & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + (b+p) \begin{pmatrix} x+y & x+y & 0 \\ z+w & z+w & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} b & p & 0 \\ p & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $b+p = 2(\lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor - \lfloor \frac{|n|}{2} \rfloor)$; así que tenemos

$$b+p = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

usando este resultado en la última igualdad se sigue la afirmación. ■

Sea $T \in \mathbb{B}_3$, supongamos que para $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$(6.2) \quad M_2(T+n_1E) = M_2(T+n_2E),$$

en particular se tiene $(M_2(T+n_1E))_{33} = (M_2(T+n_2E))_{33}$, donde $(A)_{33}$ es la entrada (3,3) de la matriz A . Del lema 6.5 se desprende que tanto n_1 como n_2 son ambos pares o ambos impares (ya que en el caso de una trenza T , $(M_2(T))_{33} \neq 0$); notemos que por lo desarrollado anteriormente y tomando en cuenta que $a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ y $a^{-1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, se tiene que si n es par entonces $b = \frac{n}{2}(-\sqrt{3}i)$ y $p = \frac{n}{2}(\sqrt{3}i)$; para n impar tenemos $b = \frac{1+ni\sqrt{3}}{2}$ y $p = \frac{1-ni\sqrt{3}}{2}$. Como se cumple 6.2 entonces $(M_2(T+n_1E))_{11} = (M_2(T+n_2E))_{11}$, si suponemos que n_1 y n_2 ambos son pares debemos de tener que

$$\frac{n_1}{2}(-\sqrt{3}i) = \frac{n_2}{2}(-\sqrt{3}i)$$

Pero esto implica que $n_1 = n_2$. En el caso ambos impares debemos de tener

$$\frac{1+n_1i\sqrt{3}}{2} = \frac{1+n_2i\sqrt{3}}{2}$$

Donde de igual manera esto implica que $n_1 = n_2$. Así que hemos probado el siguiente

Lema 6.6 Dada la trenza T , tenemos

$$M_2(T+n_1E) = M_2(T+n_2E) \iff n_1 = n_2.$$

Ahora estamos en posición de probar el siguiente teorema.

Teorema 6.1 Dadas dos trenzas T_1 y T_2 , tenemos

$$T_1 \cong T_2 \iff M_1(T_1) = M_1(T_2) \quad \text{y} \quad M_2(T_1) = M_2(T_2).$$

Demostración.-Claramente se cumple la primera implicación; veamos ahora la otra implicación. Como las trenzas T_1 y T_2 , satisfacen $M_1(T_1) = M_1(T_2)$ se tiene que

$$F(T_1) = \left\{ \frac{1}{i}f_1, \frac{1}{i}f_2 \right\} = F(T_2);$$

por el lema 6.3 tenemos que

$$T_1 \cong DA + k_1E, \quad T_2 \cong DA + k_2E,$$

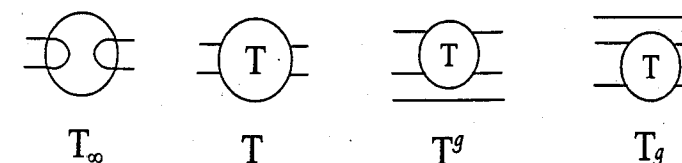
donde DA es el diagrama de la trenza base asociada a f_1 y f_2 ; falta ver que $k_1 = k_2$. Para esto notemos que por hipótesis $M_2(T_1) = M_2(T_2)$ y, por el lema 6.6, tenemos que

$$M_2(DA + k_1E) = M_2(DA + k_2E) \iff k_1 = k_2.$$

Esto muestra el resultado deseado. ■

7 Los 2-Ovillos Generalizados.

Notemos que si tenemos un 2-ovillo racional $T \in \mathbb{T}_2 \setminus \{T_\infty\}$, donde T_∞ es como en la siguiente figura, automáticamente podemos generar un nuevo 3-ovillo, al cual llamaremos *ovillo generalizado*, de la siguiente manera:



llamaremos a T^g *ovillo generalizado superior de T* y a T_g *ovillo generalizado inferior de T*, denotaremos por \mathbb{T}^G al conjunto de todos los ovillos generalizados superiores, por \mathbb{T}_G al conjunto de todos los ovillos generalizados inferiores y sea $\mathbb{T}G = \mathbb{T}^G \cup \mathbb{T}_G$.

Kaufmann [8] prueba que el polinomio corchete evaluado en \sqrt{i} , clasifica completamente a los 2-ovillos racionales. Del artículo se desprende que, al aplicar el polinomio corchete a la familia $\mathbb{T}G$, ésta es clasificada por las matrices M_1 y M_2 , aunque en este caso, la familia $\mathbb{T}G$ se puede clasificar únicamente con M_1 .

Notemos que dado el 2-ovillo T obtenemos los ovillos T^g y T_g para los cuales

$$\langle T^g \rangle = \alpha \langle \text{diagrama superior} \rangle + \delta \langle \text{diagrama inferior} \rangle, \quad \langle T_g \rangle = \alpha \langle \text{diagrama superior} \rangle + \beta \langle \text{diagrama inferior} \rangle$$

donde $\beta = \delta$. Así que

$$M_1(T^g) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \delta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad M_1(T_g) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$F(T^g) = \left\{ \frac{\delta}{\alpha}, \infty \right\}, \quad F(T_g) = \left\{ 0, \frac{\alpha}{\beta} \right\},$$

donde $\frac{i\delta}{\alpha}$ es la fracción asociada a T .

Teorema 7.1 Sean $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_3 \cup \mathbb{T}G$ entonces

$$T_1 \cong T_2 \iff M_1(T_1) = M_1(T_2) \quad \text{y} \quad M_2(T_1) = M_2(T_2).$$

Demostración.- La primera implicación es clara. Notemos que si

$$M_1(T_1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \chi_1 & \beta_1 & 0 \\ \delta_1 & \alpha_2 + \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \chi_2 & \beta_2 & 0 \\ \delta_2 & \alpha_2 + \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} = M_1(T_2)$$

entonces tenemos que $|\alpha_1| = |\alpha_2|$. Si $|\alpha_1| = 1$, estamos en el caso en que T_1 y T_2 son trenzas, en cuyo caso ya tenemos la clasificación; si $|\alpha_1| \neq 1$ tenemos que las matrices M_1 son distintas del caso de las matrices de una trenza y, por lo tanto, $T_1, T_2 \in \text{TG}$ y en este caso también se tiene la clasificación. ■

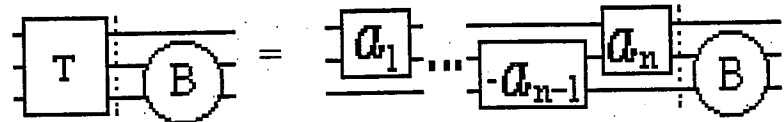
Así que nuestras matrices clasifican a la unión de las familias \mathbb{B}_3 y TG .

7.1 La familia $\mathbb{B}_3 + \text{TG}$

Veamos ahora el caso en que un ovillo tiene un diagrama que se puede ver como la suma de un elemento T de la familia de trenzas base y un elemento Tg de la familia TG , por ejemplo, supongamos $Tg \cong B_g$ con $B \in \mathbb{T}_2$



Notemos que en este caso podemos suponer que $T = T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n]$, con n impar y, entonces, el diagrama es de la forma



Para referirnos a un diagrama de este tipo escribiremos lo siguiente

$$T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n : i \frac{\beta}{\alpha}]$$

donde $\frac{i\beta}{\alpha}$ es la fracción asociada a B y $[a_1, \dots, a_n]$ es una fracción continua estricta. Pero, ¿qué pasa con las matrices asociadas a la suma?

En el caso del ovillo mostrado en la figura anterior tenemos que

$$M_1(T) = \begin{bmatrix} DA_n & \frac{-1}{i} DA_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{i} NA_n & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1(B_g) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Si B_g no es una trenza entonces $|\alpha| \neq 1$ y como

$$(7.3) \quad M_1(T+B_g) = \begin{bmatrix} DA_n & \frac{-1}{i} DA_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{i} NA_n & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha DA_n & \beta DA_n + \frac{-1}{i} \alpha DA_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{i} \alpha NA_n & \frac{1}{i} \beta NA_n + \alpha NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

tenemos

$$F(T+B_g) = \left\{ \frac{1}{i} [a_1, \dots, a_n], \frac{\frac{1}{i} \beta NA_n + \alpha NA_{n-1}}{\beta DA_n + \frac{-1}{i} \alpha DA_{n-1}} \right\} = \left\{ \frac{1}{i} A_n, \frac{\frac{1}{i} \frac{\beta}{\alpha} NA_n + NA_{n-1}}{\frac{1}{i} \frac{\beta}{\alpha} DA_n + DA_{n-1}} \right\}$$

(nótese que la primera fracción corresponde a la fracción continua estricta asociada a T). Haciendo los cálculos se sigue que

$$F(T+B_g) = \left\{ \frac{1}{i} [a_1, \dots, a_n], \frac{1}{i} [a_1, \dots, a_n, \frac{\beta}{\alpha}] \right\}.$$

Nuevamente vemos que si $|\alpha| = 1$, estamos en el caso de una trenza.

Para el caso de una trenza base $T' = T[b_1, \dots, (-1)^{m+1} b_m]$, con m par, y B_g se obtiene:

$$F(T'+B_g) = \left\{ [b_1, \dots, b_m, \frac{\beta i}{\alpha}], \frac{1}{i} [b_1, \dots, b_m] \right\},$$

en este caso, la segunda fracción es la que corresponde a la fracción continua estricta asociada a T' .

Notemos que en el caso de $T \in \mathbb{B}_3 \cup \text{TG}$, si $c_{kl} = (M_1(T))_{kl}$, se tiene que el máximo común divisor

$$\text{mcd}(|c_{11}|, |c_{21}|) = 1, \quad \text{mcd}(|c_{12}|, |c_{22}|) = 1.$$

Si $Tg \in \text{TG}$ no es una trenza se tiene que $(M_1(Tg))_{33} = \alpha$ es tal que $|\alpha| \neq 1$. Así que, haciendo un análisis, se tiene que para $T+Tg$, con $T \in \mathbb{B}_3$

$$\text{en el caso } Tg \in \text{TG}, \quad \text{mcd}(|c_{11}|, |c_{21}|) = |\alpha| \neq 1,$$

$$\text{en el caso } Tg \in \text{TG}, \quad \text{mcd}(|c_{12}|, |c_{22}|) = |\alpha| \neq 1,$$

esto demuestra que, dado $T \in \mathbb{B}_3 \cup \text{TG} \cup (\mathbb{B}_3 + \text{TG})$, la matriz M_1 nos indica si $T \in \mathbb{B}_3 \cup \text{TG}$ o $T \in (\mathbb{B}_3 + \text{TG})$. Más aún, de observar $(M_1(T))_{33}$, notamos que si $|\alpha| \neq 1$, la matriz no pertenece a una trenza y, si $\text{mcd}(|c_{11}|, |c_{21}|) = |\alpha| \neq 1$ o $\text{mcd}(|c_{12}|, |c_{22}|) = |\alpha| \neq 1$ tenemos que $T \notin \text{TG}$. Entonces la matriz M_1 distingue cuando estamos propiamente en cada una de las familias de ovillos $\mathbb{B}_3 + \text{TG}$, \mathbb{B}_3 o TG , donde propiamente significa que no se esta en dos familias al mismo tiempo.

La meta es probar el siguiente

Teorema 7.2 Sean $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_3 \cup \text{TG} \cup \mathbb{B}_3 + \text{TG}$ entonces

$$T_1 \cong T_2 \iff M_1(T_1) = M_1(T_2) \quad \text{y} \quad M_2(T_1) = M_2(T_2).$$

Veamos como procederíamos.

Sea $B \in \mathbb{B}_3 \cup \text{TG} \cup (\mathbb{B}_3 + \text{TG})$ y sea

$$M_1(B) = \begin{bmatrix} q & q' & 0 \\ p & p' & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Tenemos que si $|\alpha| = 1$ estamos en el caso de $B \in \mathbb{B}_3$, entonces con las matrices $M_1(B)$ y $M_2(B)$, B esta completamente determinada y, en particular, podemos recuperar un diagrama asociado a B . Si $|\alpha| \neq 1$, entonces $B \in \text{TG} \cup (\mathbb{B}_3 + \text{TG})$ y, por la discusión anterior, si

$$\text{mcd}(|c_{11}|, |c_{21}|) = 1, \quad \text{mcd}(|c_{12}|, |c_{22}|) = 1$$

tenemos que $B \in \text{TG}$ y de igual manera las matrices $M_1(B)$ y $M_2(B)$, determinan B completamente y para recuperar un diagrama asociado al ovrillo ya sabemos qué hacer. En el caso en que las igualdades anteriores no se cumplen, tenemos que $B \in (\mathbb{B}_3 + \text{TG})$.

¿Serán las matrices M_1 y M_2 un invariante completo para la familia $\mathbb{B}_3 + \text{TG}$? Esto es equivalente a preguntarnos, ¿existirán $B, B' \in (\mathbb{B}_3 + \text{TG})$ con $B \not\cong B'$ tales que

$$M_1(B) = M_1(B') \quad \text{y} \quad M_2(B) = M_2(B')?.$$

veremos que la respuesta es que dichas B y B' no existen.

Sea $B \in \mathbb{B}_3 + \text{TG}$, entonces $B \cong T + Tg$ con $Tg \in \text{TG}$, $T \cong DA + kE \in \mathbb{B}_3$ y DA es un diagrama alternante. Supongamos que $Tg \cong T'g$ con $T' \in \mathbb{T}_2$, entonces

$$\text{si } k \text{ es par} \quad B \cong DA + kE + T'g \cong DA + T'g + kE,$$

$$\text{si } k \text{ es impar} \quad B \cong DA + kE + Tg \cong DA + T'g + kE.$$

Supongamos también que

$$M_1(B) = \begin{bmatrix} q & q' & 0 \\ p & p' & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Sean

$$\frac{p}{q} = \left[\frac{a_1}{i}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}a_n}{i} \right] = {}_i \hat{A}_n, \quad \frac{p'}{q'} = \left[\frac{b_1}{i}, \dots, \frac{(-1)^{m+1}b_m}{i} \right] = {}_i \hat{B}_m,$$

donde $[a_1, \dots, a_n]$ y $[b_1, \dots, b_m]$ son expansiones en fracción continua estricta; notemos que no necesariamente se tienen las igualdades

$$|N_i \hat{A}_n| = |p|, \quad |D_i \hat{A}_n| = |q|,$$

$$|N_i \hat{B}_m| = |p'|, \quad |D_i \hat{B}_m| = |q'|.$$

Por lo visto en el inicio de esta sección y por la discusión posterior al lema 6.2, una de las dos fracciones continuas estrictas corresponde a DA , i.e. tenemos únicamente una de las siguientes posibilidades

$$DA \cong T \hat{A}_n, \quad DA \cong T \hat{A}_n[\pm 1, \mp 1],$$

$$DA \cong T \hat{B}_m, \quad DA \cong T \hat{B}_m[\pm 1, \mp 1].$$

Así que tenemos cuatro posibles soluciones para el ovrillo $B - kE$, estas son

$$T[a_1, \dots, (-1)^{n+1}a_n : ix_1],$$

$$T[a_1, \dots, (-1)^{n+1}a_n \pm 1, \mp 1 : ix_2],$$

$$T[b_1, \dots, (-1)^{m+1}b_m : ix_3],$$

$$T[b_1, \dots, (-1)^{m+1}b_m \pm 1, \mp 1 : ix_4],$$

donde, para cada una de estas opciones, debemos de tener que las fracciones asociadas deben ser $\frac{p}{q}$ y $\frac{p'}{q'}$, o sea, que las fracciones $ix_j = \frac{\beta_j}{\alpha_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, deben cumplir:

$$1) [a_1, \dots, a_n] = i \frac{p}{q}, \quad [a_1, \dots, a_n, (-1)^{n+1}ix_1] = i \frac{p'}{q'}$$

$$2) [a_1, \dots, a_n \pm 1, \mp 1] = i \frac{p}{q}, \quad [a_1, \dots, a_n \pm 1, \mp 1, (-1)^{n+2}ix_2] = i \frac{p'}{q'}$$

$$3) [b_1, \dots, b_m, (-1)^{m+1}ix_3] = i \frac{p}{q}, \quad [b_1, \dots, b_m] = i \frac{p'}{q'}$$

$$4) [b_1, \dots, b_m \pm 1, \mp 1, (-1)^{m+2}ix_4] = i \frac{p}{q}, \quad [b_1, \dots, b_m \pm 1, \mp 1] = i \frac{p'}{q'}$$

Para encontrar x_1 debemos resolver el sistema:

$$i \frac{p'}{q'} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\beta_1}}}} = i \frac{\beta_1 N A_n + \alpha_1 N A_{n-1}}{\beta_1 D A_n + \alpha_1 D A_{n-1}}$$

Al resolver este sistema encontramos x_1 que cumple lo requerido; lo mismo ocurre en los demás casos, así que sólo hace falta ver que las matrices no son equivalentes entre si y corroborar cual de todas las matrices que se obtienen es equivalente a la matriz original. Veamos en un ejemplo como hacer este procedimiento.

Ejemplo 7.1 Supongamos que tenemos al ovillo B , cuyas matrices asociadas son:

$$(7.4) \quad M_1(B) = \begin{bmatrix} 9 & -\frac{9}{i} & 0 \\ \frac{24}{i} & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_2(B);$$

queremos identificar a los ovillos B que tienen dichas matrices asociadas.

Como $|c_{33}| = 3$, B no es una trenza y, como $\text{mcd}(|\frac{24}{i}|, |9|) = 3$, debemos tener que $B \in \mathbb{B}_3 + \text{TG}$. Notemos que

$$\frac{24}{i} = \frac{1}{i} \frac{8}{3} = \frac{1}{i} [2, 1, 2], \quad \frac{25}{-9} = \frac{1}{i} \frac{25}{9} = \frac{1}{i} [2, 1, 3, 2].$$

Entonces, de acuerdo a los comentarios anteriores, debemos tener sólo una de las siguientes cuatro opciones

$$DA \cong T[2, -1, 2], \quad DA \cong T[2, -1, 1, -1], \\ DA \cong T[2, -1, 3, -2], \quad DA \cong T[2, -1, 3, -1, 1].$$

Así que debemos encontrar $ix_j = \frac{\beta_j}{\alpha_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, tales que satisfagan

$$(1) \quad \frac{1}{i} [2, 1, 2, \frac{\beta_1}{\alpha_1}] = \frac{1}{i} \frac{8\beta_1 + 3\alpha_1}{3\beta_1 + \alpha_1} = \frac{1}{i} \frac{25}{9}, \\ (2) \quad \frac{1}{i} [2, 1, 1, 1, \frac{\beta_2}{\alpha_2}] = \frac{1}{i} \frac{8\beta_2 + 5\alpha_2}{3\beta_2 + 2\alpha_2} = \frac{1}{i} \frac{25}{9}, \\ (3) \quad \frac{1}{i} [2, 1, 3, 2, \frac{\beta_3}{\alpha_3}] = \frac{1}{i} \frac{25\beta_3 + 11\alpha_3}{9\beta_3 + 4\alpha_3} = \frac{1}{i} \frac{8}{3}, \\ (4) \quad \frac{1}{i} [2, 1, 3, 1, 1, \frac{\beta_4}{\alpha_4}] = \frac{1}{i} \frac{25\beta_4 + 14\alpha_4}{9\beta_4 + 5\alpha_4} = \frac{1}{i} \frac{8}{3}.$$

De (1) tenemos las ecuaciones $8\beta_1 + 3\alpha_1 = 25$, $3\beta_1 + \alpha_1 = 9$, de donde obtenemos las soluciones $\beta_1 = 2$, $\alpha_1 = 3$; de (2) obtenemos las ecuaciones $8\beta_2 + 5\alpha_2 = 25$, $3\beta_2 + 2\alpha_2 = 9$ de aquí obtenemos $\beta_2 = 5$, $\alpha_2 = -3$; de manera similar obtenemos $\beta_3 = -1$, $\alpha_3 = 3$, $\beta_4 = 2$ y $\alpha_4 = 3$.

De aquí que los ovillos $B_j \in \mathbb{B}_3 + \text{TG}$, $j = 1, 2, 3, 4$, los cuales cumplen $F(B_j) = \{\frac{1}{i} \frac{8}{3}, \frac{1}{i} \frac{25}{9}\}$ o $F(B_j) = \{\frac{1}{i} \frac{25}{9}, \frac{1}{i} \frac{8}{3}\}$ son

$$1) \quad B_1 = T[2, -1, 2 : -\frac{2}{3}], \quad 2) \quad B_2 = T[2, -1, 1, -1 : -\frac{5}{3}], \\ 3) \quad B_3 = T[2, -1, 3, -2 : -\frac{1}{3}], \quad 4) \quad B_4 = T[2, -1, 3, -1, 1 : -\frac{2}{3}].$$

Las matrices asociadas a estos ovillos son

$$M_1(B_1) = \begin{bmatrix} \frac{9}{i} & 9 & 0 \\ -24 & \frac{25}{i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{i} \end{bmatrix}, \quad M_1(B_2) = \begin{bmatrix} -\frac{9}{i} & 9 & 0 \\ 25 & \frac{24}{i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{i} \end{bmatrix}, \\ M_1(B_3) = \begin{bmatrix} \frac{3}{i} & 27 & 0 \\ -8 & \frac{75}{i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{i} \end{bmatrix}, \quad M_1(B_4) = \begin{bmatrix} -\frac{27}{i} & 3 & 0 \\ 75 & \frac{8}{i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{i} \end{bmatrix}.$$

Además vemos que la igualdad $M_1(B_i) = M_1(B_j)$ sólo se cumple cuando $i = j$, mientras que $M_1(B_k) \neq M_1(B_l + E)$ siempre, esto muestra que las matrices no son equivalentes entre sí.

De aquí que los ovillos B que satisfacen (7.4) son de la forma

$$T[2, -1, 2 : \frac{-2}{3}] + 2kE,$$

esto porque la matriz $M_1(B_1)$ es equivalente a la matriz $M_1(B)$. Para determinar k basta ver para que k se satisface la igualdad

$$M_2(B) = M_2(T[2, -1, 2, \frac{2}{3}] + 2kE),$$

y por el lema 6.6, k es único. Lo anterior se debe a que si $B \in \mathbb{B}_3 \cup \text{TG} \cup \mathbb{B}_3 + \text{TG}$ entonces $(M_2(B))_{33} \neq 0$.

Veamos que las matrices M_1, M_2 distinguen al conjunto $\mathbb{B}_3 + \text{TG}$.

Lema 7.1 Sean $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_3 + \text{TG}$ entonces

$$T_1 \cong T_2 \iff M_1(T_1) = M_1(T_2) \quad y \quad M_2(T_1) = M_2(T_2).$$

Demostración.- Sea $B \in \mathbb{B}_3 + \text{TG}$ con

$$(7.5) \quad M_1(B) = \begin{bmatrix} q & q' & 0 \\ p & p' & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad M_2(B) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix},$$

matrices asociadas al ovillo B , si $|\alpha| \neq 1$ estamos en el caso de $B \in \mathbb{B}_3$. Si $|\alpha| \neq 1$ entonces B esta propiamente en $\mathbb{B}_3 + \text{TG}$, entonces

$$B \cong T[c_1, \dots, (-1)^{s+1} c_s : x] + kE$$

donde $[c_1, \dots, c_s]$ es una fracción continua estricta y $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; así que tenemos uno de los siguientes casos

$$(7.6) \quad \left\{ \frac{p}{q}, \frac{p'}{q'} \right\} = \begin{cases} \frac{1}{i} \{ [c_1, \dots, c_s], [c_1, \dots, c_s, (-1)^{s+2}x] \}, \\ \frac{1}{i} \{ [c_1, \dots, c_s, (-1)^{s+2}x], [c_1, \dots, c_s] \}; \end{cases}$$

de aquí obtendremos las posibles soluciones. Supongamos que

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{i} [a_1, \dots, a_n] = \frac{1}{i} A_n, \quad \frac{p'}{q'} = \frac{1}{i} [b_1, \dots, b_m] = \frac{1}{i} B_m.$$

donde A_n y B_m son fracciones continuas estrictas; entonces tenemos alguna de las siguientes opciones

$$(7.7) \quad \frac{1}{i} A_n = \frac{1}{i} [c_1, \dots, c_s],$$

$$(7.8) \quad \frac{1}{i} B_m = \frac{1}{i} [c_1, \dots, c_s].$$

como no sabemos que opción es la correcta, debemos verificar el procedimiento del ejemplo anterior.

Veamos cómo encontrar x . Supongamos que se cumple (7.7) y $A_n > 0$ (el caso $A_n < 0$ se resuelve de manera similar), así que resolviendo los dos sistemas de ecuaciones asociados encontramos $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ y $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ que satisfacen:

$$1) \quad \frac{1}{i} A_n = \frac{p}{q}, \quad \frac{1}{i} [a_1, \dots, a_n, (-1)^{n+1} \frac{\beta_1}{\alpha_1}] = \frac{1}{i} A_n [0, (-1)^{n+1} \frac{\beta_1}{\alpha_1}] = \frac{p'}{q'}$$

$$2) \quad \frac{1}{i} A_n [-1, 1] = \frac{p}{q}, \quad \frac{1}{i} A_n [-1, 1, (-1)^{n+2} \frac{\beta_2}{\alpha_2}] = \frac{p'}{q'}$$

Supóngase ahora que se cumple (7.8) y que $B_m > 0$ (el caso $B_m < 0$ se resuelve de manera similar), así que, resolviendo los sistemas de ecuaciones asociados encontramos $\frac{\beta_3}{\alpha_3}$ y $\frac{\beta_4}{\alpha_4}$ que satisfacen:

$$3) \quad \frac{1}{i} B_m = \frac{p'}{q'}, \quad \frac{1}{i} B_m [0, (-1)^{m+1} \frac{\beta_3}{\alpha_3}] = \frac{p}{q}$$

$$4) \quad \frac{1}{i} B_m [-1, 1] = \frac{p'}{q'}, \quad \frac{1}{i} B_m [-1, 1, (-1)^{m+2} \frac{\beta_4}{\alpha_4}] = \frac{p}{q}$$

Vemos que en general

$$x + \frac{1}{y} = x \pm 1 + \frac{1}{\mp 1 + \frac{1}{-y \pm 1}}$$

así que en este caso

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} - 1, \quad \frac{\beta_4}{\alpha_4} = -\frac{\beta_3}{\alpha_3} - 1.$$

Llamemos

$$\begin{aligned} T_1 &= T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n : \frac{\beta_1}{\alpha_1}], \\ T_2 &= T[a_1, \dots, (-1)^n a_{n-1}, (-1)^{n+1} (a_n - 1), (-1)^{n+2} : \frac{\beta_2}{\alpha_2}], \\ T_3 &= T[b_1, \dots, (-1)^{m+1} b_m : \frac{\beta_3}{\alpha_3}], \\ T_4 &= T[b_1, \dots, (-1)^m b_{m-1}, (-1)^{m+1} (b_m - 1), (-1)^{m+2} : \frac{\beta_4}{\alpha_4}]. \end{aligned}$$

Así que los únicos ovillos que puedan llegar a satisfacer M_1 de (7.5) son los siguientes:

$$1) T_1 + k_1 E, \quad 2) T_2 + k_2 E, \quad 3) T_3 + k_3 E, \quad 4) T_4 + k_4 E, \quad k_j \in \mathbb{Z}.$$

Veamos que las matrices $M_1(T_j)$ de los ovillos T_j , $j = 1, 2, 3, 4$, no son equivalentes entre sí.

Notemos que hay cuatro casos: cuando m es par o impar y cuando n es par o impar. Supongamos que n y m son pares (los demás casos se resuelven de manera análoga); entonces las matrices asociadas a T_j son:

$$1) \quad \begin{bmatrix} DA_{n-1} & \frac{-1}{i} DA_n & 0 \\ \frac{1}{i} NA_{n-1} & NA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\alpha_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & i\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & i\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\alpha_1 DA_{n-1} + \beta_1 \frac{-1}{i} DA_n & -\alpha_1 DA_n & 0 \\ \alpha_1 NA_{n-1} + \beta_1 NA_n & i\alpha_1 NA_n & 0 \\ 0 & 0 & i\alpha_1 \end{bmatrix} = M_1(T_1)$$

$$2) \quad \begin{bmatrix} DA_n[-1, 1] & \frac{-1}{i} DA_n[-1] & 0 \\ \frac{1}{i} NA_n[-1, 1] & NA_n[-1] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & -i\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\alpha_2 DA_n[-1, 1] & \beta_2 DA_n[-1, 1] + \alpha_2 DA_n[-1] & 0 \\ -\alpha_2 NA_n[-1, 1] & \frac{1}{i} \beta_2 NA_n[-1, 1] - i\alpha_2 NA_n[-1] & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha_2 \end{bmatrix} = M_1(T_2)$$

De manera similar obtenemos

$$3) \quad \begin{bmatrix} i\alpha_3 DB_{m-1} + \beta_3 \frac{-1}{i} DB_m & -\alpha_3 DB_m & 0 \\ \alpha_3 NB_{m-1} + \beta_3 NB_m & i\alpha_3 NB_m & 0 \\ 0 & 0 & i\alpha_3 \end{bmatrix} = M_1(T_3)$$

$$4) \quad \begin{bmatrix} -i\alpha_4 DB_m[-1, 1] & \beta_4 DB_m[-1, 1] + \alpha_4 DB_m[-1] & 0 \\ -\alpha_4 NB_m[-1, 1] & \frac{1}{i} \beta_4 NB_m[-1, 1] - i\alpha_4 NB_m[-1] & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha_4 \end{bmatrix} = M_1(T_4).$$

Es fácil verificar que la igualdad $M_1(T_i) = M_1(T_j)$ sólo se cumple cuando $i = j$; de igual manera se puede verificar que, $M_1(T_k) \neq M_1(T_l + E)$ siempre. Esto demuestra que

las matrices no son equivalentes entre si, como sabemos que al menos una de estas matrices es equivalente a $M_1(B)$ de (7.5), tenemos que hay una única matriz que es equivalente a $M_1(B)$.

Supongamos que los ovillos B que satisfacen (7.5) son de la forma

$$T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n : \frac{\beta_1}{\alpha_1}] + 2kE,$$

para determinar k , basta ver qué k satisface la igualdad

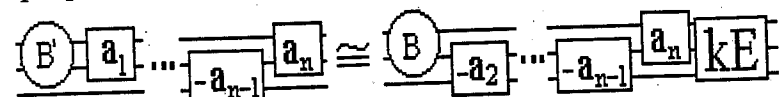
$$M_2(B) = T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n : \frac{\beta_1}{\alpha_1}] + 2kE,$$

y por el lema 6.6, k es único. Esto se debe a que si $B \in \mathbb{B}_3 + \mathbb{TG}$ entonces $(M_2(B))_{33} \neq 0$. Con esto se verifica que M_1 y M_2 son invariantes completos para $\mathbb{B}_3 + \mathbb{TG}$. ■

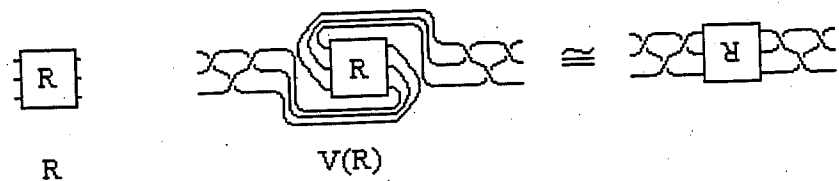
Demostración del teorema 7.2.- Por los comentarios posteriores a la enunciación del teorema 7.2, tenemos que al analizar $M_1(B)$, con $B \in \mathbb{B}_3 \cup \mathbb{TG} \cup \mathbb{B}_3 + \mathbb{TG}$, podemos determinar en cual de los conjuntos \mathbb{B}_3 , \mathbb{TG} o $\mathbb{B}_3 + \mathbb{TG}$, esta propiamente B , y, por el resultado anterior, tenemos que M_1 y M_2 son invariantes completos para $\mathbb{B}_3 \cup \mathbb{TG}$ y $\mathbb{B}_3 + \mathbb{TG}$. ■

7.2 La familia $\mathbb{TG} + \mathbb{B}_3$

Veamos que pasa en caso de tener ahora un elemento de la familia $\mathbb{TG} + \mathbb{B}_3$. Es de notar que un ovillo de este tipo puede ser como en el siguiente diagrama



Dado un ovillo R , definimos un nuevo ovillo llamado, R volteado y denotado $V(R)$, de la siguiente manera



notemos que $V(V(R)) = R$.

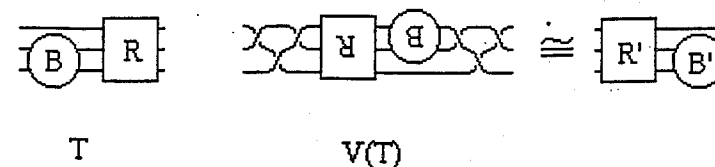
Tenemos así el siguiente lema.

Lema 7.2 Sean $T_1, T_2 \in \mathbb{TG} + \mathbb{B}_3$ entonces

$$T_1 \cong T_2 \iff M_1(T_1) = M_1(T_2) \quad y \quad M_2(T_1) = M_2(T_2).$$

Demostración.- La primera implicación es clara. La segunda implicación se demostrará por contradicción.

El siguiente diagrama muestra que para un ovillo $T \in \mathbb{TG} + \mathbb{B}_3$, $V(T) \in \mathbb{B}_3 + \mathbb{TG}$.



Notemos también dado T un ovillo, se tiene

$$M_1(T) = \begin{bmatrix} q & q' & 0 \\ p & p' & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad M_1(V(T)) = \begin{bmatrix} p' & q' & 0 \\ p & q & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

así que de existir $T_1, T_2 \in \mathbb{TG} + \mathbb{B}_3$ con $T_1 \not\cong T_2$, tales que $M_1(T_1) = M_1(T_2)$ y $M_2(T_1) = M_2(T_2)$, entonces se tiene $V(T_1) \cong V(T_2)$ con $M_1(V(T_1)) = M_1(V(T_2))$ y $M_2(V(T_1)) = M_2(V(T_2))$, lo cual es una contradicción al lema 7.1. ■

Se tiene así que las matrices M_1 y M_2 son un invariante completo para $\mathbb{TG} + \mathbb{B}_3$, por lo tanto, si detectamos que T esta propiamente en $\mathbb{TG} + \mathbb{B}_3$, T esta completamente determinado. Veamos cómo determinar en que caso estamos.

Supongamos que las matrices M_1 asociadas a $T \in \mathbb{B}_3$ y $B \in \mathbb{TG}$ son

$$M_1(T) = \begin{bmatrix} q & q' & 0 \\ p & p' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1(B) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

entonces la matriz asociada a $B + T$ es

$$(7.9) \quad M_1(B + T) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & q' & 0 \\ p & p' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha q + \beta p & \alpha q' + \beta p' & 0 \\ \alpha p & \alpha p' & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Nótese que si $|\alpha| \neq 1$ entonces $B + T \notin \mathbb{B}_3$ y además

$$\text{mcd}(|c_{21}|, |c_{22}|) = \text{mcd}(|\alpha p|, |\alpha p'|) = |\alpha| \neq 1.$$

En el caso $B \in \mathbb{TG}$ se tiene $\text{mcd}(|c_{11}|, |c_{12}|) = \text{mcd}(|\alpha q|, |\alpha q'|) = |\alpha| \neq 1$.

Para determinar en cuál de los casos estamos, sólo hace falta notar que dada la matriz $M_1(T)$ asociada a $T \in \mathbb{B}_3 \cup \mathbb{TG} \cup \mathbb{B}_3 + \mathbb{TG} \cup \mathbb{TG} + \mathbb{B}_3$, ésta determina a la subfamilia a la

cual T pertenece propiamente. Supongamos que $T \in \mathbb{B}_3 \cup \text{TG} \cup \mathbb{B}_3 + \text{TG} \cup \text{TG} + \mathbb{B}_3$ con

$$M_1(T) = \begin{bmatrix} q & q' & 0 \\ p & p' & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

entonces se cumple sólo una de las siguientes condiciones

$$\begin{array}{llll} |\alpha| = 1 & \text{mcd}(|p|, |q|) = 1 & \text{mcd}(|p'|, |q'|) = 1 & \text{en este caso } T \in \mathbb{B}_3, \\ |\alpha| \neq 1 & \text{mcd}(|p|, |q|) = 1 & \text{mcd}(|p'|, |q'|) = 1 & \text{en este caso } T \in \text{TG}, \\ |\alpha| \neq 1 & \text{mcd}(|p|, |q|) = |\alpha| & \text{mcd}(|p'|, |q'|) = 1 & \text{en este caso } T \in \mathbb{B}_3 + \text{TG}, \\ |\alpha| \neq 1 & \text{mcd}(|p|, |q|) = 1 & \text{mcd}(|p'|, |q'|) = |\alpha| & \text{en este caso } T \in \mathbb{B}_3 + \text{TG}, \\ |\alpha| \neq 1 & \text{mcd}(|p|, |p'|) = 1 & \text{mcd}(|q|, |q'|) = |\alpha| & \text{en este caso } T \in \text{TG} + \mathbb{B}_3, \\ |\alpha| \neq 1 & \text{mcd}(|p|, |p'|) = |\alpha| & \text{mcd}(|q|, |q'|) = 1 & \text{en este caso } T \in \text{TG} + \mathbb{B}_3, \end{array}$$

de esta manera se tiene el siguiente teorema

Teorema 7.3 Sean $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_3 \cup \text{TG} \cup \mathbb{B}_3 + \text{TG} \cup \text{TG} + \mathbb{B}_3$ entonces

$$T_1 \cong T_2 \iff M_1(T_1) = M_1(T_2) \quad \text{y} \quad M_2(T_1) = M_2(T_2).$$

Demostración.- Dado $T \in \mathbb{B}_3 \cup \text{TG} \cup \mathbb{B}_3 + \text{TG} \cup \text{TG} + \mathbb{B}_3$, por la tabla anterior tenemos que al analizar $M_1(T)$, podemos determinar en cual de los conjuntos \mathbb{B}_3 , TG , $\mathbb{B}_3 + \text{TG}$ o $\text{TG} + \mathbb{B}_3$, esta propiamente T . Como tenemos que M_1 y M_2 son invariantes completos para $\mathbb{B}_3 \cup \text{TG}$, $\mathbb{B}_3 + \text{TG}$ y $\text{TG} + \mathbb{B}_3$ se tiene el resultado deseado. ■

8 Ovillos de la forma $B + \hat{X} + B$

Veamos ahora a la familia de ovillos que puede expresarse como

$$B_1 + X + B_2, \quad \text{con } B_1, B_2 \in \mathbb{B}_3 \text{ y } X \in \{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, \hat{\psi}\} = \hat{X}.$$

Donde

$$\hat{\alpha} = \text{---} \bigcirc \text{---}, \quad \hat{\beta} = \text{---} \bigcirc \text{---}, \quad \hat{\delta} = \text{---} \bigcirc \text{---}, \quad \hat{\chi} = \text{---} \bigcirc \text{---}, \quad \hat{\psi} = \text{---} \bigcirc \text{---}.$$

Es claro que si $X = \hat{\alpha}$ entonces $B_1 + X + B_2$ no es otra cosa que la suma de las trenzas B_1 y B_2 ; en el caso en que $X \neq \hat{\alpha}$, tenemos una nueva familia de ovillos, a la cual denotaremos por $B\hat{X}B$.

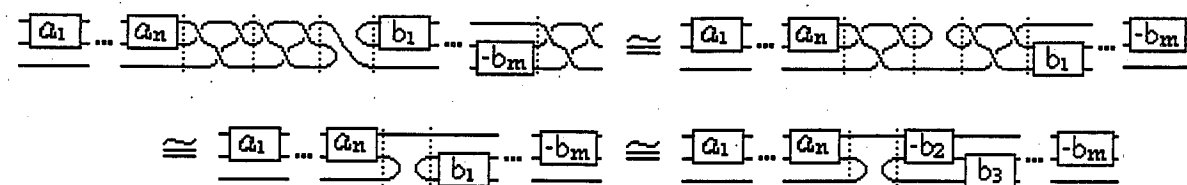
Ejemplo 8.1 Supongamos que

$$B_1 = T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n] + k_1 E, \quad B_2 = T[b_1, \dots, (-1)^{m+1} b_m] + k_2 E, \quad X = \hat{\chi},$$

si suponemos que n es impar, m par, k_1 par y k_2 impar; entonces

$$B_1 + X + B_2 \cong T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n] + \hat{\beta} + T[-b_2, b_3, \dots, (-1)^{m+1} b_m],$$

esto se desprende de la siguiente figura.



Veamos cómo es la matriz M_1 asociada a $B_1 + X + B_2$.

Como k_1 es par, podemos tener dos casos $k_1 \equiv 0 \pmod{4}$ ó $k_1 \equiv 2 \pmod{4}$, de igual manera tenemos que $k_2 \equiv 1 \pmod{4}$ ó $k_2 \equiv 3 \pmod{4}$. Si suponemos que $k_1 \equiv 2 \pmod{4}$ y $k_2 \equiv 3 \pmod{4}$ entonces tenemos

$$M_1(B_1) = \begin{bmatrix} -DA_n & \frac{1}{i}DA_{n-1} & 0 \\ \frac{-1}{i}NA_n & -NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1(B_2) = \begin{bmatrix} -DB_m & \frac{-1}{i}DB_{m-1} & 0 \\ \frac{-1}{i}NB_m & NB_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1(\hat{\chi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

entonces

$$M_1(B_1 + \hat{\chi} + B_2) = \begin{bmatrix} -DA_n & 0 & 0 \\ \frac{-1}{i}NA_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -DB_m & \frac{-1}{i}DB_{m-1} & 0 \\ \frac{-1}{i}NB_m & NB_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DB_m DA_n & \frac{1}{i}DB_{m-1} DA_n & 0 \\ \frac{1}{i}NA_n DB_m & -NA_n DB_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notemos que

$$F(B_1 + \hat{\chi} + B_2) = \left\{ \frac{1}{i}A_n, \frac{1}{i}A_n \right\}.$$

Si ahora definimos el invariante

$$\hat{F}(T) = \left\{ \frac{\alpha + \chi}{\beta}, \frac{\delta}{\alpha + \psi} \right\},$$

donde $\alpha, \chi, \beta, \delta$ y ψ se toman, al igual que en la definición de $F(T)$, de $M_1(T)$, entonces

$$\hat{F}(B_1 + \hat{\chi} + B_2) = \left\{ \frac{1}{i}[-b_2, \dots, -b_m], \frac{1}{i}[-b_2, \dots, -b_m] \right\}.$$

Las fracciones obtenidas en $F(B_1 + \hat{\chi} + B_2)$ y $\hat{F}(B_1 + \hat{\chi} + B_2)$ están asociadas a las trenzas que se obtienen de la última figura.

Veamos que esto es un hecho general para la familia $B\hat{X}B$.

Lema 8.1 Sea $T \in B\hat{X}B$, entonces

$$F(T) = \left\{ \frac{1}{i}a, \frac{1}{i}a \right\}, \quad \hat{F}(T) = \left\{ \frac{1}{i}b, \frac{1}{i}b \right\} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{Q}.$$

Demostración.- Tenemos que $T \cong B_1 + X + B_2$ con $B_1, B_2 \in \mathbb{B}_3$ y $X \in \hat{X}$. Supongamos primero que $X \cong \hat{\beta}$, entonces

$$M_1(B_1) = \begin{bmatrix} q_1 & \frac{-1}{i}q'_1 & 0 \\ \frac{1}{i}p_1 & p'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_1(B_2) = \begin{bmatrix} q_2 & \frac{-1}{i}q'_2 & 0 \\ \frac{1}{i}p_2 & p'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

de donde se tiene que

$$M_1(B_1 + \hat{\beta} + B_2) = \begin{bmatrix} q_1 p_2 & \frac{-1}{i}q_1 p'_2 & 0 \\ \frac{1}{i}p_1 p_2 & p_1 p'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$F(T) = \left\{ \frac{1}{i} \frac{p_1}{q_1}, \frac{1}{i} \frac{p_1}{q_1} \right\}, \quad \hat{F}(T) = \left\{ \frac{1}{i} \frac{p_2}{p'_2}, \frac{p_2}{p'_2} \right\}.$$

Se obtiene un resultado análogo en el caso $X \in \{\hat{\delta}, \hat{\chi}, \hat{\psi}\}$. Esto demuestra el resultado. ■

Nótese que este es hasta ahora el único caso en que $F(T) = \left\{ \frac{1}{i}a, \frac{1}{i}a \right\}$, con $a \in \mathbb{Q}$, así que, de nueva cuenta $M_1(T)$ determina si T está propiamente en $B\hat{X}B$.

Veamos que M_1 y M_2 clasifican completamente a $B\hat{X}B$.

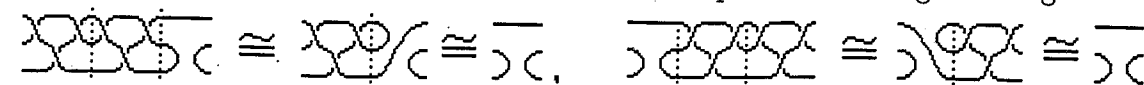
Lema 8.2 Sean $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, entonces

$$k_1 E + X + k_2 E \cong Y$$

donde $X, Y \in \{\hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, \hat{\psi}\}$.

Demostración.- Notemos que tenemos 16 casos para probar pero desarrollaremos sólo el caso k_1 par, k_2 impar y $X = \hat{\beta}$.

Obsérvese que $E + E + \hat{\beta} = \hat{\beta} = \hat{\beta} + E + E$, esto se desprende de la siguiente figura



no es difícil ver que $k_1 E + \hat{\beta} = \hat{\beta}, \hat{\beta} + k_2 E = \hat{\beta} + E = \hat{\chi}$.

los demás casos se muestran de manera similar. A continuación damos la tabla que corresponde a la suma $k_1 E + X + k_2 E \cong Y$, con $p=\text{par}, i=\text{impar}$:

k_1	X	k_2	Y	k_1	X	k_2	Y	k_1	X	k_2	Y	k_1	X	k_2	Y
p	$\hat{\beta}$	p	$\hat{\beta}$	p	$\hat{\delta}$	p	$\hat{\delta}$	p	$\hat{\chi}$	p	$\hat{\chi}$	p	$\hat{\psi}$	p	$\hat{\psi}$
p	$\hat{\beta}$	i	$\hat{\chi}$	p	$\hat{\delta}$	i	$\hat{\psi}$	p	$\hat{\chi}$	i	$\hat{\beta}$	p	$\hat{\psi}$	i	$\hat{\delta}$
i	$\hat{\beta}$	p	$\hat{\psi}$	i	$\hat{\delta}$	p	$\hat{\chi}$	i	$\hat{\chi}$	p	$\hat{\delta}$	i	$\hat{\psi}$	p	$\hat{\beta}$
i	$\hat{\beta}$	i	$\hat{\delta}$	i	$\hat{\delta}$	i	$\hat{\beta}$	i	$\hat{\chi}$	i	$\hat{\psi}$	i	$\hat{\psi}$	i	$\hat{\chi}$

Una consecuencia del lema anterior es el siguiente

Teorema 8.1 Sean $B_1, B_2 \in \mathbb{B}_3$ y $X \in \{\hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, \hat{\psi}\}$ entonces

$$B_1 + X + B_2 \cong TB_1 + Y + TB_2$$

donde TB_1 y TB_2 son trenzas base, $Y \in \{\hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, \hat{\psi}\}$.

Demostración.- Supongamos que

$$B_1 = T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n] + k_1 E, \quad B_2 = T[b_1, \dots, (-1)^{m+1} b_m] + k_2 E,$$

entonces tenemos que

$$B_2 \cong k_2 E + T[b_1, \dots, (-1)^{m+1} b_m] \quad \text{si } K_2 \text{ es par,}$$

$$B_2 \cong k_2 E + T[0, -b_1, \dots, (-1)^m b_m] \quad \text{si } K_2 \text{ es impar y } b_1 \neq 0,$$

$$B_2 \cong k_2 E + T[b_2, \dots, (-1)^m b_m] \quad \text{si } K_2 \text{ es impar y } b_1 = 0;$$

notemos que $T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n]$ es una trenza base, al igual que cada una de las trenzas

$$(8.10) \quad T[b_1, \dots, (-1)^{m+1} b_m], \quad T[0, -b_1, \dots, (-1)^m b_m], \quad T[b_2, \dots, (-1)^m b_m].$$

Llamémosle TB_1 a $T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n]$ y TB_2 a cualquiera de las trenzas de (8.10), entonces (dependiendo de k_2 y b_1)

$$B_1 + X + B_2 \cong TB_1 + k_1 E + X + k_2 E + TB_2.$$

Por el lema anterior esto implica

$$TB_1 + k_1 E + X + k_2 E + TB_2 \cong TB_1 + Y + TB_2,$$

donde $Y \in \{\hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, \hat{\psi}\}$. ■

Así que dado $T \in B\hat{X}B$, por el teorema anterior

$$T \cong TB_1 + Y + TB_2,$$

donde $Y \in \{\hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, \hat{\psi}\}$.

Del análisis anterior se tiene el siguiente lema.

Lema 8.3 Sean $T_1, T_2 \in B\hat{X}B$, entonces

$$M_1(T_1) = M_1(T_2) \Leftrightarrow T_1 \cong T_2.$$

Demostración.- Sea $T \in B\hat{X}B$, por el teorema anterior

$$T \cong T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n] + X + T[b_1, \dots, (-1)^{m+1} b_m],$$

donde $X \in \{\hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, \hat{\psi}\}$. Supongamos n par, m impar, $X = \hat{\beta}$ y $b_1 \neq 0$, en este contexto tenemos que

$$T \cong T[a_1, \dots, (-1)^n a_{n-1}] + \hat{\beta} + T[b_1, \dots, (-1)^{m+1} b_m];$$

Si se tiene que $b_1 = 0$, entonces

$$T \cong T[a_1, \dots, (-1)^n a_{n-1}] + \hat{\beta} + T[b_3, \dots, (-1)^m b_m],$$

esto por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c} \boxed{a_1} \dots \boxed{a_{n-1}} \boxed{a_n} \dots \boxed{b_1} \dots \boxed{b_2} \dots \boxed{b_3} \dots \boxed{b_m} \\ \cong \\ \boxed{a_1} \dots \boxed{a_{n-1}} \boxed{a_n} \dots \boxed{b_3} \dots \boxed{b_m} \end{array}$$

Veamos como son las matrices asociadas a T .

$$M_1(T) = \begin{bmatrix} DA_{n-1} & \frac{-1}{i} DA_n & 0 \\ \frac{1}{i} NA_{n-1} & NA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DB_m & \frac{-1}{i} DB_{m-1} & 0 \\ \frac{1}{i} NB_m & NB_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & DA_{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i} NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DB_m & \frac{-1}{i} DB_{m-1} & 0 \\ \frac{1}{i} NB_m & NB_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{i} NB_m DA_{n-1} & NB_{m-1} DA_{n-1} & 0 \\ -NA_{n-1} NB_m & \frac{1}{i} NA_{n-1} NB_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde tenemos que

$$F(T) = \left\{ \frac{1}{i} A_{n-1}, \frac{1}{i} A_{n-1} \right\}, \quad \hat{F}(T) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{i} [b_m, \dots, b_1], \frac{1}{i} [b_m, \dots, b_1] \right\} & \text{si } b_1 \neq 0 \\ \left\{ \frac{1}{i} [b_m, \dots, b_3], \frac{1}{i} [b_m, \dots, b_3] \right\} & \text{si } b_1 = 0. \end{cases}$$

Notemos que si m es par entonces

$$M_1(T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{i} NB_{m-1} DA_{n-1} & NB_m DA_{n-1} & 0 \\ -NA_{n-1} NB_{m-1} & \frac{1}{i} NA_{n-1} NB_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de donde tenemos que

$$F(T) = \left\{ \frac{1}{i} A_{n-1}, \frac{1}{i} A_{n-1} \right\}, \quad \hat{F}(T) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{i} [0, b_m, \dots, b_1], \frac{1}{i} [0, b_m, \dots, b_1] \right\} & \text{si } b_1 \neq 0 \\ \left\{ \frac{1}{i} [0, b_m, \dots, b_3], \frac{1}{i} [0, b_m, \dots, b_3] \right\} & \text{si } b_1 = 0. \end{cases}$$

Obsérvese que en este caso se tiene que

$$T \cong \begin{array}{c} \boxed{a_1} \dots \boxed{a_{n-1}} \boxed{a_n} \dots \boxed{b_1} \dots \boxed{b_2} \dots \boxed{b_m} \\ \text{si } b_1 \neq 0. \end{array}$$

$$T \cong \begin{array}{c} \boxed{a_1} \dots \boxed{a_{n-1}} \boxed{a_n} \dots \boxed{b_3} \dots \boxed{b_m} \\ \text{si } b_1 = 0. \end{array}$$

en cada uno de estos casos, el invariante $F(T)$ nos da información de la trenza base que va en primer lugar, a saber, $T[a_1, \dots, (-1)^n a_{n-1}]$; el invariante $\hat{F}(T)$ nos da información de la otra trenza base "leída" en sentido inverso, $V(T[b_1, \dots, -b_m]) \cong T[0, -b_m, \dots, b_1]$ o $V(T[b_3, \dots, -b_m]) \cong T[0, -b_m, \dots, b_3]$, ..., dependiendo del caso en que nos encontremos. Teniendo estas dos trenzas, existe un único elemento $X \in \{\hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\chi}, \hat{\psi}\}$ tal que "cierra" el diagrama y no añade ningún cruce. Los demás casos se resuelven de manera similar. ■

De esto se sigue el teorema

Teorema 8.2 Sean $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_3 \cup \text{TG} \cup \mathbb{B}_3 + \text{TG} \cup \text{TG} + \mathbb{B}_3 \cup B\hat{X}B$ entonces

$$T_1 \cong T_2 \Leftrightarrow M_1(T_1) = M_1(T_2) \quad \text{y} \quad M_2(T_1) = M_2(T_2).$$

Demostración.- Dado $T \in \mathbb{B}_3 \cup \text{TG} \cup \mathbb{B}_3 + \text{TG} \cup \text{TG} + \mathbb{B}_3 \cup \text{BX}B$, tenemos que al analizar $M_1(T)$, podemos determinar en cual de los conjuntos \mathbb{B}_3 , TG , $\mathbb{B}_3 + \text{TG}$ o $\text{TG} + \mathbb{B}_3$ o $\text{BX}B$, esta propiamente T . Como tenemos que M_1 y M_2 son invariantes completos para $\mathbb{B}_3 \cup \text{TG}$, $\mathbb{B}_3 + \text{TG}$, $\text{TG} + \mathbb{B}_3$ y $\text{BX}B$ se tiene el resultado. ■

9 Una aplicación a biología molecular

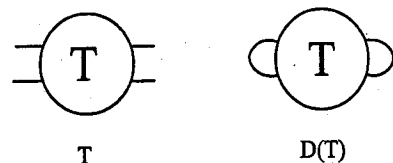
9.1 Nudos o enlaces de dos puentes

Los nudos (o enlaces) de dos puentes, o $N2P$, son una familia de nudos (o enlaces) que está íntimamente relacionada a los 2-ovillos racionales. De hecho tenemos el siguiente teorema.

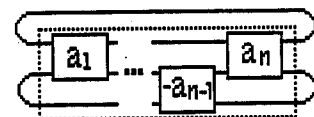
Teorema 9.1 [12]

- 1) Un $N2P$ es el denominador de algún 2-ovillo racional.
- 2) Conversamente, el denominador de un 2-ovillo racional es un $N2P$.

Donde el denominador de un 2-ovillo T , $D(T)$, es el nudo o enlace obtenido de la construcción mostrada en la siguiente figura:



Debido al anterior teorema, los $N2P$ son también llamados *nudos racionales*. Así que podemos pensar en el diagrama estándar de un $N2P$ como el mostrado en la siguiente figura.

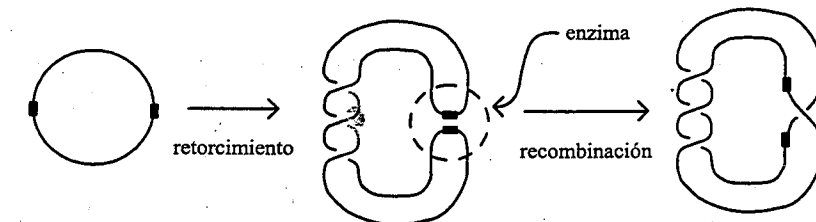


el cual no es otra cosa que $A(T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n])$ con n impar y $[a_1, \dots, a_n]$ una fracción continua estricta.

Definición 9.1 Un $N2P$ es del tipo (a, b) , denotado $N2P(a, b)$, con $\text{mcd}(a, b) = 1$, si $\frac{a}{b} = [a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}]$ es una fracción continua estricta, $a_1 \neq 0$ y donde los a_j se toman de un diagrama estándar del $N2P$.

9.2 Acción de la enzima Gin

La aproximación topológica al estudio de cómo es que las enzimas actúan, involucra incubar ADN circular y no anudado como sustrato en una solución que contiene la enzima a estudiar. A grandes rasgos lo que hace una enzima al actuar sobre una molécula circular de ADN del sustrato, se muestra a continuación.



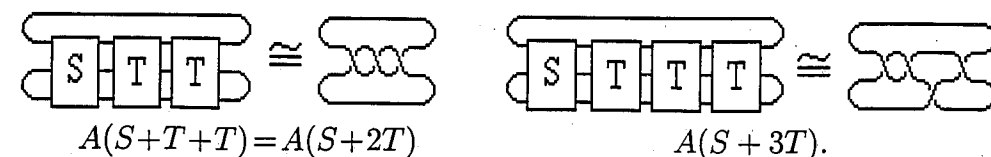
De resultados experimentales se tiene que si comenzamos con una molécula circular de ADN no anudada y hacemos que actúe la enzima Gin varias veces obtenemos:

al actuar la enzima una vez se tiene el nudo trivial

al actuar la enzima dos veces se tiene el $N2P(3,1)$

al actuar la enzima tres veces se tiene el $N2P(5,2)$

de acuerdo a resultados experimentales esto se puede ver esquemáticamente como:



Estas serán las "ecuaciones" con las que trabajaremos en esta sección. Notemos que O ,

S y T son 3-ovillos y, de acuerdo a la opinión de expertos en el tema como Dr. De Witt L. Sumners y Joaquim Roca, estos 3-ovillos son 3-trenzadas. Es aquí que la clasificación de éstas toma relevancia.

9.3 UNA APLICACION

Recordemos que tenemos el teorema de clasificación de las trenzas, el cual, como veremos, es equivalente al siguiente teorema.

Teorema 9.2 Dadas dos trenzas T_1 y T_2 entonces

$$T_1 \simeq T_2 \Leftrightarrow F(T_1) = F(T_2), \quad M_2(T_1) = M_2(T_2).$$

Demostración.- Basta notar que la matriz $M_1(T)$ define de manera única, en el caso de las trenzas, a una pareja de fracciones $F(T)$, las que a su vez, definen de manera única una expansión en fracción continua de un número racional. ■

Recordemos también que dado un diagrama de una trenza T , tenemos que

$$T \cong T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n] + kE$$

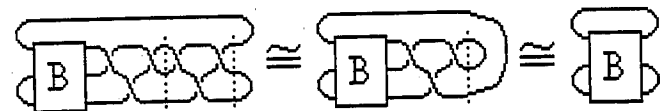
donde $[a_1, \dots, a_n]$ es una fracción continua estricta.

Notemos que en el caso de una trenza B , tanto $A(B)$ como $D(B)$ son $N2P$. Haciendo el análisis se tiene el siguiente

Lema 9.1 Sea $B \in \mathbb{B}_3$ entonces

$$A(B + 2kE) \cong A(B).$$

Demostración.- De la siguiente figura se desprende que $A(B + 2E) \cong A(B)$,



de manera similar se prueba $A(B - 2E) \cong A(B)$; es fácil ver que

$$A(B + 2kE) \cong A(B) \quad k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Lo anterior nos da la clave para relacionar las trenzas y los $N2P$.

Lema 9.2 Sea $B \in \mathbb{B}_3$, supongamos que $F(B) = (\frac{1}{i} \frac{a}{b}, \frac{1}{i} \frac{a'}{b'})$ con $|\frac{a}{b}| > 1$ entonces

$$A(B) \cong N2P(a, b).$$

Demostración.- Por los comentarios anteriores al lema 6.3 se tiene que, de $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$, se recupera una única expansión en fracción continua estricta $[b_1, \dots, b_m]$ y de aquí se tiene

$$B \cong T[b_1, \dots, (-1)^{m+1} b_m] + kE, \quad k \in \mathbb{Z}$$

de donde se sigue que

$$F(B) = \begin{cases} \frac{1}{i} \{ [b_1, \dots, b_m], [b_1, \dots, b_{m-1}] \} & \text{si } m \text{ es impar y } k \text{ es par} \\ \frac{1}{i} \{ [b_1, \dots, b_{m-1}], [b_1, \dots, b_m] \} & \text{si } m \text{ es impar y } k \text{ es impar} \\ \frac{1}{i} \{ [b_1, \dots, b_{m-1}], [b_1, \dots, b_m] \} & \text{si } m \text{ es par y } k \text{ es par} \\ \frac{1}{i} \{ [b_1, \dots, b_m], [b_1, \dots, b_{m-1}] \} & \text{si } m \text{ es par y } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Supongamos que m es impar y k es par, por el lema anterior tenemos que

$$A(T[b_1, -b_2, \dots, b_m] + kE) = A(T[b_1, \dots, b_m]) = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array}$$

Como por hipótesis, $|\frac{a}{b}| = |[b_1, b_2, \dots, b_m]| > 1$, se deduce que $b_1 \neq 0$. De la clasificación de los $N2P$ se desprende que

$$A(T[b_1, -b_2, \dots, b_m] + kE) \cong A(T[b_1, -b_2, \dots, b_m]) \cong N2P(a, b).$$

Supongamos ahora que m es par y k es par, por el lema anterior tenemos que

$$A(T[b_1, -b_2, \dots, -b_m] + kE) \cong A(T[b_1, \dots, -b_m]) = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array}$$

al igual que antes. Ya que por hipótesis $|\frac{a}{b}| = |[b_1, b_2, \dots, b_{m-1}]| > 1$, se deduce que $b_1 \neq 0$ y, de la clasificación de los $N2P$, se desprende que

$$A(T[b_1, -b_2, \dots, b_m] + kE) \cong A(T[b_1, -b_2, \dots, b_m]) \cong A(T[b_1, -b_2, \dots, b_{m-1}]) \cong N2P(a, b).$$

Los casos m impar y k impar, m par y k impar se resuelven de manera análoga. ■

En lo que sigue de esta sección trabajaremos únicamente con trenzas T que satisfagan $F(T) = (\frac{1}{i} \frac{a}{b}, \frac{1}{i} \frac{a'}{b'})$ con $|\frac{a}{b}| > 1$.

Por los lemas anteriores y por el teorema de clasificación de los $N2P$ tenemos el siguiente:

Teorema 9.3 Sea $T \in \mathbb{B}_3$ tal que $F(T) = \frac{1}{i} \left\{ \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_1'}{\beta_1'} \right\}$, entonces $A(T) \cong N2P(\alpha_2, \beta_2)$ si y sólo si se satisface lo siguiente:

$$1) \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 \equiv \beta_2 \pmod{\alpha}$$

o

$$2) \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 \beta_2 \equiv 1 \pmod{\alpha}$$

Demostración.- Por el lema anterior se tiene que $A(T) \cong N2P(\alpha_1, \beta_1)$. Si tenemos que

$$A(T) \cong N2P(\alpha_1, \beta_1) \cong N2P(\alpha_2, \beta_2),$$

sabemos, por el teorema de clasificación de los $N2P$, que esto ocurre si y sólo si se satisface 1) ó 2). ■

Veamos cómo resolver las ecuaciones que se tienen para la acción de la enzima Gin. Por el teorema anterior, las trenzas X que cumplen $A(X) \cong N2P(3, 1)$ son aquellas que satisfacen $F(X) = \frac{1}{i} \left\{ \frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \right\}$ con $a = 3$ y $b \equiv 1 \pmod{3}$.

Teniendo en cuenta que se debe cumplir $|\frac{a}{b}| > 1$, se deduce que $|b| < 3$, con esta condición, los b que satisfacen $b \equiv 1 \pmod{3}$ son $b = 1$ o $b = -2$. Por lo cual debemos encontrar todas las trenzas X que satisfacen

$$1) \quad F(X) = \frac{1}{i} \left\{ \frac{3}{1}, \frac{a'}{b'} \right\} \quad 2) \quad F(X) = \frac{1}{i} \left\{ \frac{3}{-2}, \frac{a'}{b'} \right\}.$$

Después de hacer los cálculos se tienen las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= T[3, a_1] + 2c_1 E & X_2 &= T[2, 1, a_2] + (2c_2 + 1)E \\ X_3 &= T[-1, -2, -a_3] + (2c_3 + 1)E & X_4 &= T[-1, -1, -1, -a_4] + 2c_4 E \end{aligned} \quad a_i, c_j \in \mathbb{Z}$$

Notemos que las trenzas X_1 y X_2 satisfacen (1) y las trenzas X_3 y X_4 satisfacen (2).

De igual manera las trenzas B que cumplen $A(B) \cong N2P(5, 2)$, son aquellas tales que $F(B) = \frac{1}{i} \left\{ \frac{c}{d}, \frac{c'}{d'} \right\}$ con $c = 5$ y, $d \equiv 2 \pmod{5}$ ó $2d \equiv 1 \pmod{5}$.

Teniendo en cuenta que $|d| < 5$, para satisfacer $d \equiv 2 \pmod{5}$ resulta que $d = 2$ ó $d = -3$. Para satisfacer $2d \equiv 1 \pmod{5}$ obtenemos $d = 3$ ó $d = -2$. De esto tenemos que

las trenzas buscadas son del tipo:

$$B_1 = T[2, 2, b_1] + 2d_1 E \quad B_2 = T[2, 1, 1, b_2] + (2d_2 + 1)E$$

$$B_3 = T[1, 1, 2, b_3] + (2d_3 + 1)E \quad B_4 = T[1, 1, 1, 1, b_4] + 2d_4 E$$

$$B_5 = T[-2, -2, b_5] + 2d_5 E \quad B_6 = T[-2, -1, -1, b_6] + (2d_6 + 1)E$$

$$B_7 = T[-1, -1, -2, b_7] + (2d_7 + 1)E \quad B_8 = T[-1, -1, -1, -1, b_8] + 2d_8 E \quad b_k, d_l \in \mathbb{Z}$$

Por lo anterior si $T_1, T_2 \in \mathbb{B}_3$ cumplen $A(T_1) \cong N2P(3, 1)$ y $A(T_2) \cong N2P(5, 2)$ entonces

$$T_1 \cong X_i, \quad T_2 \cong B_j \quad \text{para algún } i = 1, 2, 3, 4. \quad j = 1, 2, \dots, 8.$$

Por la forma en que la enzima Gin actúa en una cadena circular de ADN y recordando que estamos suponiendo que S y T son trenzas, se tiene que se deben satisfacer las siguientes equivalencias

$$(S + T) + T \cong X_i, \quad (S + T) + T + T \cong B_j,$$

para algún i y j .

Lo anterior, al hacer el análisis de la matriz M_1 asociada a cada trenza, da lugar a las ecuaciones

$$1) \quad M_1((S + T) + T) = M_1(S + T)M_1(T) = M_1(A_i).$$

$$2) \quad M_1((S + T) + T + T) = M_1(S + T)M_1(T)M_1(T) = M_1(A_i)M_1(T) = M_1(B_j).$$

Si asignamos

$$M_1(S + T) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1(T) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_3 & y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

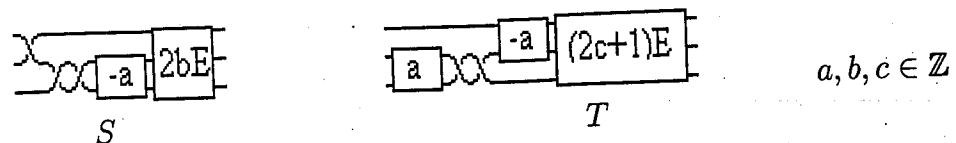
$$M_1(X_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & 0 \\ a_{3j} & a_{4j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1(B_k) = \begin{bmatrix} b_{1k} & b_{2k} & 0 \\ b_{3k} & b_{4k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $j = 1, 2, 3, 4$ y $k = 1, 2, \dots, 8$. Esto es, se generan 32 sistemas del tipo

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_3 & y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & 0 \\ a_{3j} & a_{4j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & 0 \\ a_{3j} & a_{4j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_3 & y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1k} & b_{2k} & 0 \\ b_{3k} & b_{4k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

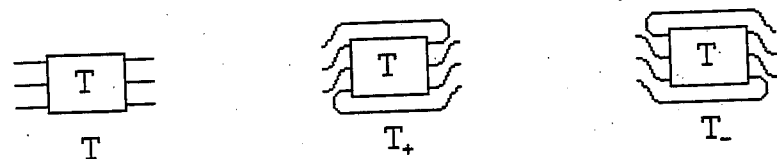
Cada uno de estos sistemas tiene solución única ya que cada matriz tiene determinante distinto de cero. Al resolver los sistemas se obtiene la siguiente familia de soluciones:



10 Rotación de trenzas

En la presente sección veremos que las matrices M_1 y M_2 también clasifican a la familia de ovillos generada de la siguiente manera.

Definición 10.1 Dado el ovillo T , llamemos la *rotación positiva de T* y *rotación negativa de T* , denotadas respectivamente por T_+ y T_- , a los ovillos mostrados a continuación, los cuales son obtenidos a partir del ovillo T .



Diremos *rotación de T* para referirnos indistintamente a una rotación positiva o negativa de T .

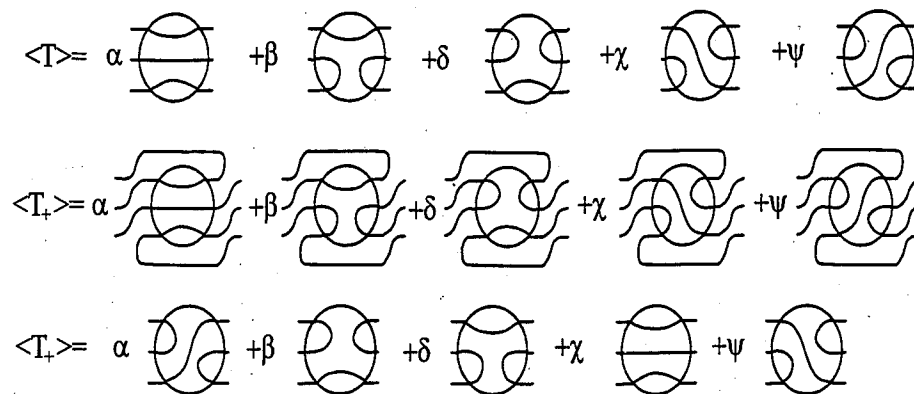
Notemos que si T es un ovillo tal que

$$M_1(T) = \begin{bmatrix} \alpha + \chi & \beta & 0 \\ \delta & \alpha + \psi & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

entonces las matrices asociadas a $M_1(T_+)$ y $M_1(T_-)$ son

$$M_1(T_+) = \begin{bmatrix} \chi + \psi & \delta & 0 \\ \beta & \alpha + \chi & 0 \\ 0 & 0 & \chi \end{bmatrix}, \quad M_1(T_-) = \begin{bmatrix} \alpha + \psi & \delta & 0 \\ \beta & \chi + \psi & 0 \\ 0 & 0 & \psi \end{bmatrix}$$

Esto se tiene de la siguiente figura, en donde se muestra el caso T_+ .



Es importante observar de que

$$\chi + \psi = (\alpha + \chi) + (\alpha + \psi) - 2\alpha = (M_1(T))_{11} + (M_1(T))_{22} - 2(M_1(T))_{33},$$

$$\chi = (\alpha + \chi) - \alpha = (M_1(T))_{11} - (M_1(T))_{33}, \quad \psi = (\alpha + \psi) - \alpha = (M_1(T))_{22} - (M_1(T))_{33}$$

Veamos como son, en general, las matrices asociadas a la rotación de una trenza. Sea $T = T[a_1, \dots, (-1)^{n+1} a_n]$ un diagrama de trenza base, entonces tenemos que para n impar

$$M_1(T + 4kE) = \begin{bmatrix} DA_n & \frac{-1}{i} DA_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{i} NA_n & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + 4kE)_+) = \begin{bmatrix} DA_n + NA_{n-1} - 2 & \frac{1}{i} NA_n & 0 \\ \frac{-1}{i} DA_{n-1} & DA_n & 0 \\ 0 & 0 & DA_n - 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + 4kE)_-) = \begin{bmatrix} NA_{n-1} & \frac{1}{i} NA_n & 0 \\ \frac{-1}{i} DA_{n-1} & DA_n + NA_{n-1} - 2 & 0 \\ 0 & 0 & NA_{n-1} - 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que para n par

$$M_1(T + 4kE) = \begin{bmatrix} DA_{n-1} & \frac{-1}{i}DA_n & 0 \\ \frac{1}{i}NA_{n-1} & NA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + 4kE)_+) = \begin{bmatrix} DA_{n-1} + NA_n - 2 & \frac{1}{i}NA_{n-1} & 0 \\ \frac{-1}{i}DA_n & DA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & DA_{n-1} - 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + 4kE)_-) = \begin{bmatrix} NA_n & \frac{1}{i}NA_{n-1} & 0 \\ \frac{-1}{i}DA_n & DA_{n-1} + NA_n - 2 & 0 \\ 0 & 0 & NA_n - 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que para n impar

$$M_1(T + (4k \pm 1)E) = \begin{bmatrix} \pm DA_{n-1} & \frac{\pm 1}{i}DA_n & 0 \\ \frac{\pm 1}{i}NA_{n-1} & \mp NA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + (4k \pm 1)E)_+) = \begin{bmatrix} \pm DA_{n-1} \mp NA_n - 2 & \frac{\pm 1}{i}NA_{n-1} & 0 \\ \frac{\pm 1}{i}DA_n & \pm DA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \pm DA_{n-1} - 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + (4k \pm 1)E)_-) = \begin{bmatrix} \mp NA_n & \frac{\pm 1}{i}NA_{n-1} & 0 \\ \frac{\pm 1}{i}DA_n & \pm DA_{n-1} \mp NA_n - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mp NA_n - 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que para n par

$$M_1(T + (4k \pm 1)E) = \begin{bmatrix} \pm DA_n & \frac{\pm 1}{i}DA_{n-1} & 0 \\ \frac{\pm 1}{i}NA_n & \mp NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + (4k \pm 1)E)_+) = \begin{bmatrix} \pm DA_n \mp NA_{n-1} - 2 & \frac{\pm 1}{i}NA_n & 0 \\ \frac{\pm 1}{i}DA_{n-1} & \pm DA_n & 0 \\ 0 & 0 & \pm DA_n - 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + (4k \pm 1)E)_-) = \begin{bmatrix} \mp NA_{n-1} & \frac{\pm 1}{i}NA_n & 0 \\ \frac{\pm 1}{i}DA_{n-1} & \pm DA_n \mp NA_{n-1} - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mp NA_{n-1} - 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que para n impar

$$M_1(T + (4k + 2)E) = \begin{bmatrix} -DA_n & \frac{1}{i}DA_{n-1} & 0 \\ \frac{-1}{i}NA_n & -NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + (4k + 2)E)_+) = \begin{bmatrix} -DA_n - NA_{n-1} - 2 & \frac{-1}{i}NA_n & 0 \\ \frac{1}{i}DA_{n-1} & -DA_n & 0 \\ 0 & 0 & -DA_{n-1} - 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + (4k + 2)E)_-) = \begin{bmatrix} -NA_{n-1} & \frac{-1}{i}NA_n & 0 \\ \frac{1}{i}DA_{n-1} & -DA_n - NA_{n-1} - 2 & 0 \\ 0 & 0 & -NA_{n-1} - 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que para n par

$$M_1(T + (4k + 2)E) = \begin{bmatrix} -DA_{n-1} & \frac{1}{i}DA_n & 0 \\ \frac{-1}{i}NA_{n-1} & -NA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + (4k + 2)E)_+) = \begin{bmatrix} -DA_{n-1} - NA_n - 2 & \frac{-1}{i}NA_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{i}DA_n & -DA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & -DA_{n-1} - 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1((T + (4k + 2)E)_-) = \begin{bmatrix} -NA_n & \frac{-1}{i}NA_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{i}DA_n & -DA_{n-1} - NA_n - 2 & 0 \\ 0 & 0 & -NA_n - 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que se tienen las siguientes igualdades

$$D[x, a_1, \dots, a_n] = NA_n$$

$$NA_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3$$

$$NA_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1$$

$$NA_5 = a_1 \cdots a_5 + a_1 a_2 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3 + a_5$$

$$NA_6 = a_1 \cdots a_6 + a_1 a_2 a_5 a_6 + a_1 a_4 a_5 a_6 + a_3 a_4 a_5 a_6 + a_1 a_2 a_3 a_6 + a_1 a_6 + a_3 a_6 + a_5 a_6 + a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1.$$

Si suponemos que $[a_1, \dots, a_n] = A_n$ es una fracción continua estricta con $n \geq 5$; entonces se cumple que

$$|NA_n| \geq 3, \quad |DA_n| \geq 3.$$

Así que para garantizar que la entrada $c_{33} = (M_1(T_{\pm}))_{33}$ de las matrices asociadas a una rotación de una trenza satisfaga $|c_{33}| > 1$, es necesario que $|\chi - 1| \geq 2$ o $|\psi - 1| \geq 2$, dependiendo del caso en que nos encontremos, lo cual siempre se satisface para la fracción continua estricta $[a_1, \dots, a_n]$ asociada a cualquier rotación de $T[a_1, \dots, (-1)^{n+1}a_n]$ con $n \geq 6$.

Así que para trenzas que tienen asociadas expansiones de fracción continua estricta de longitud $n \geq 6$ y sus rotaciones, tenemos que la entrada c_{33} de estas matrices nos determina si el ovillo asociado es una trenza, en el caso $|c_{33}| = 1$, o una trenza rotada en el caso $|c_{33}| \neq 1$.

Sea \tilde{B} el conjunto formado por las trenzas y las rotaciones de éstas. Recordemos que si T es una trenza, entonces por el lema 5.1 tenemos que $T \cong DA + kE$, donde DA es un diagrama alternante. Denotemos por \tilde{B}_6 al conjunto formado por las trenzas y las rotaciones de éstas tales que la trenza base asociada DA satisface $L(DA) \geq 6$; notemos que $\tilde{B}_6 \subset \tilde{B}$, entonces

Lema 10.1 Sean $T_1, T_2 \in \tilde{B}_6$, tenemos que

$$T_1 \cong T_2 \iff M_1(T_1) = M_1(T_2) \quad y \quad M_2(T_1) = M_2(T_2),$$

Demostración.- La primera implicación es clara. Para demostrar la segunda implicación supongamos primero que $|(M_1(T_1))_{33}| = 1 = |(M_1(T_2))_{33}|$. Por lo comentado anteriormente estamos ante el caso de una trenza, así que si se satisface la hipótesis, por el teorema 6.1, tenemos que $T_1 \cong T_2$.

Supongamos ahora que $|(M_1(T_1))_{33}| \neq 1$, entonces estamos ante el caso de la rotación de una trenza. Veamos que en este caso se tiene únicamente una de las siguientes opciones

$$1) \quad c_{11} - c_{33} = 1, \quad 2) \quad c_{22} - c_{33} = 1.$$

Para ver que se cumple alguna de las dos opciones basta analizar las matrices asociadas a la rotación de una trenza; ahora probaremos que ambas opciones no se cumplen al mismo tiempo. Esto se debe a que dada la trenza $T[a_1, \dots, (-1)^{n+1}a_n] + kE$ se tiene

$$\begin{array}{ll} \text{para } n \text{ impar y } k \text{ par} & \text{si se cumple (2) entonces } c_{11} - c_{33} = (-1)^{\frac{|k|}{2}} NA_{n-1} - 1, \\ & \text{si se cumple (1) entonces } c_{22} - c_{33} = (-1)^{\frac{|k|}{2}} DA_n - 1, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{para } n \text{ par y } k \text{ par} & \text{si se cumple (2) entonces } c_{11} - c_{33} = (-1)^{\frac{|k|}{2}} NA_n - 1, \\ & \text{si se cumple (1) entonces } c_{22} - c_{33} = (-1)^{\frac{|k|}{2}} DA_{n-1} - 1, \\ \text{para } n \text{ impar y } k \text{ impar} & \text{si se cumple (2) entonces } c_{11} - c_{33} = \mp(-1)^{\frac{|k|-1}{2}} NA_n - 1, \\ & \text{si se cumple (1) entonces } c_{22} - c_{33} = \pm(-1)^{\frac{|k|-1}{2}} DA_{n-1} - 1, \\ \text{para } n \text{ par y } k \text{ impar} & \text{si se cumple (2) entonces } c_{11} - c_{33} = \mp(-1)^{\frac{|k|-1}{2}} NA_{n-1} - 1, \\ & \text{si se cumple (1) entonces } c_{22} - c_{33} = \pm(-1)^{\frac{|k|-1}{2}} DA_n - 1, \end{array}$$

como por hipótesis $n \geq 6$, en cada uno de los casos anteriores se concluye que $|c_{jj} - c_{33}| \neq 1$ y, por lo tanto, ambas opciones no se cumplen al mismo tiempo.

Dado que conocemos cómo cambia la matriz de una trenza T después de una rotación, sabemos que si se satisface (1) estamos en el caso de una rotación negativa, esto es, existen trenzas B_j , $j = 1, 2$ tal que $(B_j)_- = T_j$; tomemos $(T_j)_+ = B_j$. De la hipótesis del lema se deduce que

$$M_1(B_1) = M_1(B_2), \quad M_2(B_1) = M_2(B_2),$$

como para las trenzas ya tenemos una clasificación, se tiene que $B_1 \cong B_2$; de aquí se sigue que

$$T_1 \cong (B_1)_- \cong (B_2)_- \cong T_2.$$

Si se satisface (2), estamos en el caso de una rotación positiva, así que para obtener la conclusión procedemos de manera análoga a lo hecho en el caso anterior. ■

Ejemplo 10.1 Supongamos que tenemos asociadas al ovillo $R \in \tilde{B}_6$ la siguientes matrices:

$$M_1(R) = \begin{bmatrix} 145 & -37i & 0 \\ 85i & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}, \quad M_2(R) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix};$$

como $c_{33} \neq 1$ en $M_1(R)$, tenemos que estamos ante la rotación de una trenza; si además queremos ver cual es el tipo de rotación debemos verificar cuál de las siguientes opciones se cumple.

$$1) \quad c_{11} - c_{33} = 1, \quad 2) \quad c_{22} - c_{33} = 1,$$

Ya que la opción (2) es la que se satisface, estamos ante el caso $R = T_+$; de esta manera tenemos que las matrices asociadas al ovillo $R_- = T$ son

$$M_1(T) = \begin{bmatrix} 26 & 85i & 0 \\ -37i & 121 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2(T) = \begin{pmatrix} d & c & 0 \\ b & a+d-2e & 0 \\ 0 & 0 & d-e \end{pmatrix},$$

las cuales sabemos que pertenecen a una trenza, y por el método descrito en el ejemplo 6.1 tenemos que

$$T = T[1, -2, 2, -2, 3, -3] + k_0 E,$$

donde k_0 , es el único entero que satisface

$$M_2(T[1, -2, 2, -2, 3, -3] + k_0 E) = M_2(T);$$

así que el ovillo buscado es $R = T_+ = (T[1, -2, 2, -2, 3, -3] + k_0 E)_+$.

Probaremos que las matrices M_1 y M_2 clasifican al conjunto de trenzas rotadas \tilde{B} .

Sea $T \in \tilde{B} \setminus \tilde{B}_6$, supongamos que $(M_1(T))_{33} = \pm 1$ (obsérvese que esto ocurre siempre en el caso en que T es una trenza), ¿será posible esto en el caso en que T es la rotación de una trenza?.

Como para un ovillo T , $M_1(T) = M_1(T + 4kE)$ y, dado que cualquier trenza T es equivalente a un diagrama de la forma $DA + kE$ con DA diagrama alternante, únicamente analizaremos los casos $(M_1((DA + kE)_R))_{33} = \pm 1$ con $k = -1, 0, 1, 2$ y R una rotación.

Caso $k = 0$.

Veamos primero el caso en que T es una trenza base.

Si n es impar tenemos que

$$(M_1(T_+))_{33} = D[a_1, \dots, a_n] - 1; \quad (M_1(T_-))_{33} = N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1.$$

Si n es par entonces

$$(M_1(T_+))_{33} = D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1; \quad (M_1(T_-))_{33} = N[a_1, \dots, a_n] - 1.$$

Veamos cuáles trenzas base satisfacen que la matriz que se les asocia después de una rotación cumple $c_{33} = \pm 1$; analicemos todos los casos.

Caso $n = 1$.

Tenemos que una rotación de $T[a_1]$ nunca satisface $c_{33} = \pm 1$, esto porque la matriz asociada a $T[a_1]$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i}N[a_1] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y las matrices asociadas a $(T[a_1])_+$ y $(T[a_1])_-$ son:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{i}N[a_1] & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{i}N[a_1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Caso $n = 2$.

Tenemos $T[a_1, -a_2]$; para que $c_{33} = \pm 1$ después de una rotación se debe cumplir uno de los siguientes

- 1) $D[a_1] - 1 = 1$
- 2) $N[a_1, a_2] - 1 = 1$
- 3) $D[a_1] - 1 = -1$
- 4) $N[a_1, a_2] - 1 = -1$.

Vemos que el caso (1) no se satisface ya que $D[a_1] = 1$.

En el caso (2) debemos tener $(a_1 a_2 + 1) - 1 = 1$, lo que implica $a_1 a_2 = 1$; esto implica que $a_1 = a_2 = \pm 1$. O sea que una rotación que satisface $c_{33} = 1$ es $(T[\pm 1, \mp 1])_-$. Llamemos $Z_1 = T[\pm 1, \mp 1]$ y $Z_{1r} = (T[\pm 1, \mp 1])_-$.

Después de analizar las ecuaciones, vemos que los casos (3) y (4) nunca se satisfacen.

Caso $n = 3$.

Si tenemos la trenza $T[a_1, -a_2, a_3]$, para que una rotación de ésta cumpla $c_{33} = \pm 1$, se debe tener

- 1) $D[a_1, a_2, a_3] - 1 = 1$
- 2) $N[a_1, a_2] - 1 = 1$
- 3) $D[a_1, a_2, a_3] - 1 = -1$
- 4) $N[a_1, a_2] - 1 = -1$.

En el caso (1) debemos tener

$$(a_2 a_3 + 1) - 1 = 1 \Rightarrow a_2 a_3 = 1;$$

esto implica que $a_2 = a_3 = \pm 1$. Esto es, $(T[a_1, \pm 1, \mp 1])_+$ cumple $c_{33} = \pm 1$. Denotemos $Z_2 = T[a_1, \pm 1, \mp 1]$ y $Z_{2r} = (T[a_1, \pm 1, \mp 1])_+$.

Vemos que el caso (2) se satisface si $a_1 = a_2 = \pm 1$; esto por el caso $T[a_1, -a_2]$, o sea, $(T[\pm 1, \mp 1, a_3])_-$ satisface $c_{33} = \pm 1$. Llamemos $Z_3 = T[\pm 1, \mp 1, a_3]$ y $Z_{3r} = (T[\pm 1, \mp 1, a_3])_-$.

Los casos (3) y (4) nunca se satisfacen.

Caso $n = 4$.

Si $T[a_1, -a_2, a_3, -a_4]$, para que $c_{33} = \pm 1$ se debe cumplir

$$\begin{array}{ll} 1) D[a_1, a_2, a_3] - 1 = 1 & 2) N[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = 1 \\ 3) D[a_1, a_2, a_3] - 1 = -1 & 4) N[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = -1. \end{array}$$

Vemos que el caso (1) se satisface si $a_2 = a_3 = \pm 1$; esto por el caso $T[a_1, -a_2, a_3]$, o sea, $(T[a_1, \pm 1, \mp 1, -a_4])_+$ satisface $c_{33} = \pm 1$. Denotemos $Z_4 = T[a_1, \pm 1, \mp 1, -a_4]$ y $Z_{4r} = (T[a_1, \pm 1, \mp 1, -a_4])_+$.

En el caso (2) debemos tener

$$(a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1) - 1 = 1;$$

esto implica que $a_1 = 0$, ya que $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ es una fracción continua estricta; así que $a_3 = a_4 = \pm 1$. Esto es, $(T[0, -a_2, \pm 1, \mp 1])_-$ satisface $c_{33} = \pm 1$. Denotemos $Z_5 = T[0, -a_2, \pm 1, \mp 1]$ y $Z_{5r} = (T[0, -a_2, \pm 1, \mp 1])_-$.

Los casos (3) y (4) nunca se satisfacen.

Caso $n = 5$.

Si $T[a_1, -a_2, a_3, -a_4, a_5]$, para que $c_{33} = \pm 1$ se debe cumplir

$$\begin{array}{ll} 1) D[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] - 1 = 1 & 2) N[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = 1 \\ 3) D[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] - 1 = -1 & 4) N[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = -1. \end{array}$$

El caso (1) debemos tener

$$D[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] - 1 = 1 = N[a_2, a_3, a_4, a_5] - 1$$

Pero esto nunca se cumple ya que $a_j \neq 0$, $j = 2, 3, 4, 5$ y, por lo tanto,

$$|N[a_2, a_3, a_4, a_5]| \geq 5.$$

El caso (2) se satisface si $a_1 = 0$, $a_3 = a_4 = \pm 1$; esto por el caso $T[a_1, -a_2, a_3, -a_4]$, o sea, $(T[0, -a_2, \pm 1, \mp 1, a_5])_-$ satisface $c_{33} = \pm 1$. Denotemos $Z_6 = T[0, -a_2, \pm 1, \mp 1, a_5]$ y $Z_{6r} = (T[0, -a_2, \pm 1, \mp 1, a_5])_-$.

Caso $k = 1$.

En el caso $T + E$ se tiene que si n es impar

$$(M_1((T + E)_+))_{33} = D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1; \quad (M_1((T + E)_-))_{33} = -N[a_1, \dots, a_n] - 1.$$

Si n es par

$$(M_1((T + E)_+))_{33} = D[a_1, \dots, a_n] - 1; \quad (M_1((T + E)_-))_{33} = -N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1.$$

Veamos cuáles de este tipo de trenzas satisfacen $c_{33} = \pm 1$ después de una rotación; analicemos, al igual que antes, todos los casos.

Caso $n = 1$.

Para que una rotación de $T[a_1] + E$ tenga $c_{33} = \pm 1$ se debe tener

$$\begin{array}{ll} 1) D[a_0] - 1 = 1 & 2) -N[a_1] - 1 = 1 \\ 3) D[a_0] - 1 = -1 & 4) -N[a_1] - 1 = -1. \end{array}$$

El caso (1) nunca se cumple ya que $D[a_0] = 0$.

En el caso (2) se debe cumplir $-a_1 - 1 = 1$, pero esto implica que $a_1 = -2$; así que $(T[-2] + E)_-$ tiene $c_{33} = \pm 1$. Denotemos $Z_7 = T[-2] + E$ y $Z_{7r} = (T[-2] + E)_-$.

El caso (3) siempre se cumple, ya que $D[a_0] = 0$; así que $(T[a_1] + E)_+$ tiene $|c_{33}| = 1$. Denotemos $W_1 = T[a_1] + E$ y $W_{1r} = (T[a_1] + E)_+$.

En el caso (4) se debe cumplir $-a_1 - 1 = -1$, pero esto implica que $a_1 = 0$; así que $(E)_-$ tiene $c_{33} = \pm 1$. Denotemos $W_2 = E$ y $W_{2r} = (E)_-$.

Caso $n = 2$.

Si tenemos $T[a_1, -a_2] + E$, para que $c_{33} = \pm 1$ se debe cumplir

$$\begin{array}{ll} 1) D[a_1, a_2] - 1 = 1 & 2) -N[a_1] - 1 = 1 \\ 3) D[a_1, a_2] - 1 = -1 & 4) -N[a_1] - 1 = -1. \end{array}$$

Vemos que el caso (1) se satisface si $a_2 = 2$ y, por lo tanto, $(T[a_1, -2] + E)_+$ es una rotación que satisface $c_{33} = \pm 1$. Denotemos $Z_8 = T[a_1, -2] + E$ y $Z_{8r} = (T[a_1, -2] + E)_+$.

En el caso (2) debemos tener $-a_1 - 1 = 1$, lo cual implica que $a_1 = -2$ y, por lo tanto, una rotación que satisface $c_{33} = \pm 1$ es $(T[-2, -a_2] + E)_-$. Denotemos $Z_9 = T[-2, -a_2] + E$ y $Z_{9r} = (T[-2, -a_2] + E)_-$.

Vemos que el caso (3) se satisface si $a_2 = 0$, lo cual nunca se cumple por ser $[a_1, a_2]$ una fracción continua estricta.

En el caso (4) debemos tener $-a_1 - 1 = -1$, lo cual implica que $a_1 = 0$ y, por lo tanto, una rotación que satisface $c_{33} = \pm 1$ es $(T[0, -a_2] + E)_-$. Denotemos $W_3 = T[0, -a_2] + E$ y $W_{3r} = (T[0, -a_2] + E)_-$.

Caso $n = 3$.

Si $T[a_1, -a_2, a_3] + E$, para que $c_{33} = \pm 1$ se debe cumplir

$$1) D[a_1, a_2] - 1 = 1 \quad 2) -N[a_1, a_2, a_3] - 1 = 1$$

$$3) D[a_1, a_2] - 1 = -1 \quad 4) -N[a_1, a_2, a_3] - 1 = -1.$$

En el caso (1) debemos tener $a_2 - 1 = 1$, lo cual implica $a_2 = 2$; así que $(T[a_1, -2, a_3] + E)_+$ satisface $c_{33} = \pm 1$. Denotemos $Z_{10} = T[a_1, -2, a_3] + E$ y $Z_{10r} = (T[a_1, -2, a_3] + E)_+$.

Vemos que el caso (2) se satisface si $-a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3 - 1 = 1$, lo cual implica que $a_1 = 0$, $a_3 = -2$; o sea que una rotación de trenza que satisface $c_{33} = \pm 1$ es $(T[0, a_2, -2] + E)_-$. Denotemos $Z_{11} = T[0, a_2, -2] + E$ y $Z_{11r} = (T[0, a_2, -2] + E)_-$.

Los casos (3) y (4) nunca se cumplen.

Caso $n = 4$.

Si $T[a_1, -a_2, a_3, -a_4] + E$, para que $c_{33} = \pm 1$ se debe cumplir

$$1) D[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = 1 \quad 2) -N[a_1, a_2, a_3] - 1 = 1$$

$$3) D[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = -1 \quad 4) -N[a_1, a_2, a_3] - 1 = -1.$$

Vemos que el caso (1) se satisface si $a_2 a_3 a_4 + a_2 + a_3 - 1 = 1$, lo cual nunca sucede ya que $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ es una fracción continua estricta.

En el caso (2) debemos tener $-a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3 - 1 = 1$; esto implica que $a_1 = 0$, $a_3 = -2$. O sea que la rotación que satisface $c_{33} = 1$ es $(T[0, -a_2, -2, -a_4] + E)_-$. Denotemos $Z_{12} = T[0, -a_2, -2, -a_4] + E$ y $Z_{12r} = (T[0, -a_2, -2, -a_4] + E)_-$.

Los casos (3) y (4) nunca se cumplen.

Caso $n = 5$.

Si $T[a_1, -a_2, a_3, -a_4, a_5] + E$, para que $c_{33} = \pm 1$ se debe cumplir

$$1) D[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = 1 \quad 2) -N[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] - 1 = 1$$

$$3) D[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = -1 \quad 4) -N[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] - 1 = -1.$$

El caso (1) debemos tener $D[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = 1 = N[a_2, a_3, a_4] - 1$. Pero esto nunca se cumple ya que como $a_j \neq 0, j = 2, 3, 4$, entonces $|N[a_2, a_3, a_4]| \geq 3$.

El caso (2) no se cumple ya que como $a_j \neq 0, j = 2, 3, 4$, entonces $|N[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]| \geq 3$.

Los casos (3) y (4) nunca se cumplen.

Caso $k = -1$.

Veamos ahora el caso $T - E$, si n es impar

$$(M_1((T - E)_+))_{33} = -D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1; \quad (M_1((T - E)_-))_{33} = N[a_1, \dots, a_n] - 1.$$

Si n es par

$$(M_1((T - E)_+))_{33} = -D[a_1, \dots, a_n] - 1; \quad (M_1((T - E)_-))_{33} = N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1.$$

Veamos cuáles de este tipo de trenzas satisfacen $c_{33} = \pm 1$ después de una rotación; analicemos, al igual que antes, todos los casos.

Caso $n = 1$.

Para que una rotación de $T[a_1] - E$ tenga $c_{33} = \pm 1$ se debe tener

$$1) -D[a_0] - 1 = 1 \quad 2) N[a_1] - 1 = 1,$$

$$3) -D[a_0] - 1 = -1 \quad 4) N[a_1] - 1 = -1.$$

El caso (1) nunca se cumple ya que $D[a_0] = 0$.

En el caso (2) se debe cumplir $a_1 - 1 = 1$, lo que implica que $a_1 = 2$; así que $(T[2] - E)_-$ satisface $c_{33} = \pm 1$. Denotemos $Z_{13} = T[2] - E$ y $Z_{13r} = (T[2] - E)_-$.

El caso (3) siempre se cumple ya que $D[a_0] = 0$; así que $(T[a_1] - E)_+$ cumple $c_{33} = \pm 1$. Denotemos $W_4 = T[a_1] - E$ y $W_{4r} = (T[a_1] - E)_+$.

En el caso (4) se debe cumplir $a_1 - 1 = -1$, pero esto implica que $a_1 = 0$; así que $(-E)_-$ tiene $c_{33} = \pm 1$. Denotemos $W_5 = -E$ y $W_{5r} = (-E)_-$.

Caso $n = 2$.

Si tenemos $T[a_1, -a_2] - E$, para que $c_{33} = \pm 1$ se debe cumplir

$$1) -D[a_1, a_2] - 1 = 1 \quad 2) N[a_1] - 1 = 1,$$

$$3) -D[a_1, a_2] - 1 = -1 \quad 4) N[a_1] - 1 = -1.$$

Vemos que el caso (1) se satisface si $a_2 = -2$ y, por lo tanto, la rotación que satisface $c_{33} = \pm 1$ es $(T[a_1, 2] - E)_+$. Denotemos $Z_{14} = T[a_1, 2] - E$ y $Z_{14r} = (T[a_1, 2] - E)_+$.

En el caso (2) debemos tener $a_1 - 1 = 1$, lo cual implica que $a_1 = 2$ y, por lo tanto, la rotación que satisface $c_{33} = \pm 1$ es $(T[2, -a_2] - E)_-$. Denotemos $Z_{15} = T[2, -a_2] - E$ y $Z_{15r} = (T[2, -a_2] - E)_-$.

El caso (3) nunca se satisface.

En el caso (4) debemos tener $a_1 - 1 = -1$, lo cual implica que $a_1 = 0$ y, por lo tanto, la rotación que satisface $c_{33} = \pm 1$ es $(T[0, -a_2] - E)_-$. Denotemos $W_6 = T[0, -a_2] - E$ y $W_{6r} = (T[0, -a_2] - E)_-$.

Caso $n = 3$.

Si $T[a_1, -a_2, a_3] - E$, para que $c_{33} = \pm 1$ se debe cumplir

$$1) -D[a_1, a_2] - 1 = 1 \quad 2) N[a_1, a_2, a_3] - 1 = 1,$$

$$3) -D[a_1, a_2] - 1 = -1 \quad 4) N[a_1, a_2, a_3] - 1 = -1.$$

En el caso (1) debemos tener $-a_2 - 1 = 1$, lo cual implica $a_2 = -2$ y, por lo tanto, la rotación que satisface $c_{33} = \pm 1$ es $(T[a_1, 2, a_3] - E)_+$. denotemos $Z_{16} = T[a_1, 2, a_3] - E$ y $Z_{16r} = (T[a_1, 2, a_3] - E)_+$.

Vemos que el caso (2) se satisface si $a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3 - 1 = 1$ lo que implica $a_1 = 0, a_3 = 2$ y, por lo tanto, la rotación que satisface $c_{33} = \pm 1$ es $(T[0, a_2, 2] - E)_-$. Denotemos $Z_{17} = T[0, a_2, 2] - E$ y $Z_{17r} = (T[0, a_2, 2] - E)_-$.

Los casos (3) y (4) nunca se satisfacen.

Caso $n = 4$.

Si $T[a_1, -a_2, a_3, -a_4] + E$, para que $c_{33} = \pm 1$ se debe cumplir

$$1) -D[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = 1 \quad 2) N[a_1, a_2, a_3] - 1 = 1,$$

$$3) -D[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = -1 \quad 4) N[a_1, a_2, a_3] - 1 = -1.$$

Vemos que el caso (1) se satisface si $-a_2 a_3 a_4 - a_2 - a_3 - 1 = 1$, lo cual nunca sucede ya que $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ es una fracción continua estricta.

En el caso (2) debemos tener $a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3 - 1 = 1$; esto implica que $a_1 = 0, a_3 = 2$. Por lo tanto, la rotación que satisface $c_{33} = \pm 1$ es $(T[0, -a_2, 2, -a_4] - E)_-$. Denotemos $Z_{18} = T[0, -a_2, 2, -a_4] - E$ y $Z_{18r} = (T[0, -a_2, 2, -a_4] - E)_-$.

Los casos (3) y (4) nunca se satisfacen.

Caso $n = 5$.

Si $T[a_1, -a_2, a_3, -a_4, a_5] - E$, para que $c_{33} = \pm 1$ se debe cumplir

$$1) -D[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = 1 \quad 2) N[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] - 1 = 1,$$

$$3) -D[a_1, a_2, a_3, a_4] - 1 = -1 \quad 4) N[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] - 1 = -1.$$

Al analizar las ecuaciones anteriores vemos que los casos (1), (2), (3) y (4) nunca se satisfacen.

Caso $k = 2$.

Veamos ahora el caso $T + 2E$, si n es impar

$$(M_1((T + 2E)_+))_{33} = -D[a_1, \dots, a_n] - 1, \quad (M_1((T + 2E)_-))_{33} = -N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1.$$

Si n es par

$$(M_1((T + 2E)_+))_{33} = -D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1, \quad (M_1((T + 2E)_-))_{33} = -N[a_1, \dots, a_n] - 1 = 1.$$

Veamos cuáles de este tipo de trenzas satisfacen que la entrada $c_{33} = \pm 1$ después de una rotación; analicemos todos los casos.

Caso $n = 1$.

Tenemos que una rotación de $T[a_1] + 2E$ nunca satisface $c_{33} = \pm 1$; esto porque la matriz asociada a $T[a_1] + 2E$ es

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{i} N[a_1] & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Y las matrices asociadas a $(T[a_1] + 2E)_+$ y $(T[a_1] + 2E)_-$ son respectivamente

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{i} N[a_1] & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{i} N[a_1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que en los casos $n = 2, 3, 4, 5$ nunca se satisface que $c_{33} = \pm 1$, ya que en todos estos casos $|c_{33}| \geq 2$.

Definamos los conjuntos de ovillos

$$\mathcal{Z}_1 = \{Z_j \mid j = 1, 2, \dots, 18\}, \quad \mathcal{Z}_2 = \{W_j \mid j = 1, 2, \dots, 6\},$$

$$\mathcal{Y}_1 = \{Z_{jr} \mid j = 1, 2, \dots, 18\}, \quad \mathcal{Y}_2 = \{W_{jr} \mid j = 1, 2, \dots, 6\}$$

y sea $Z_1 \cup Z_2 = Z \subset \mathbb{B}_3$; es fácil verificar que $\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y} \subset \mathbb{B}_3$.

Por el análisis anterior se tiene el siguiente

Lema 10.2 Sea $T \in (\mathbb{B}_3)_R$, si se cumple $M_1(T) = \pm 1$ entonces existe $X \in Z$, con $X_r \in \mathcal{Y}$, tal que $T \cong (X + 4kE)_r$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración.- Recordemos que para un ovillo R se tiene $M_1(R) = M_1(R + 4kE)$. Si $T \in (\mathbb{B}_3)_R$ entonces existe $B \in \mathbb{B}_3$ tal que alguna rotación de B es equivalente a T , digamos que $B_+ \cong T$; supongamos que $B \cong DA + (k_0 + 4k)E$ donde DA es un diagrama alternante y $-1 \leq k_0 \leq 1$.

Como $M_1(B) = M_1(DA + k_0E)$ entonces $M_1((DA + k_0E)_+) = M_1(B_+) = M_1(T) = \pm 1$. Por el análisis anterior las únicas trenzas de la forma $DA + k_0E$, con DA diagrama alternante y $-1 \leq k_0 \leq 1$, que cumplen $(M_1((DA + k_0E)_+))_{33} = \pm 1$ pertenecen a Z . Entonces se tiene que $(DA + k_0E) \in Z$ y $T \cong (DA + (k_0 + 4k)E)_+$. El caso $B_- \cong T$ se prueba de manera similar. ■

Lema 10.3 Sea $X \in Z$, con $X_r \in \mathcal{Y}$. Entonces $(X + 4kE)_r$ es una trenza si y sólo si $k = 0$. En particular $(X + 4kE)_r$ es una trenza si y sólo si $|(M_2((X + 4kE)_r))_{33}| = 1$.

Demostración.- Después de hacer algunos cálculos y tomando $a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ tenemos que

$$\text{Si } \boxed{n} = \begin{cases} \text{---} \times \dots \times & n \geq 0 \\ n\text{-veces} & \\ \text{---} \times \dots \times & n < 0 \end{cases} \quad \text{entonces } \langle \boxed{n} \rangle = a^n \text{---} + (1-a^n) \text{---}$$

Es fácil ver que en el caso de $B \in \mathbb{B}_3$, $|(M_2(B))_{33}| = 1$.

Si $k = 0$, por hipótesis tenemos $(X + 4kE)_r = X_r \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{B}_3$. Veamos que si $k \neq 0$ entonces $(X + 4kE)_r$ no es una trenza.

Calculemos $M_2(T[-x, 1, -1, y])$, con $x, y > 0$. Notemos que $(T[-x, 1, -1, y])_+ \in \mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}$.

$$M_2(T[-x, 1]) = \begin{pmatrix} a^{-x} & 0 & 0 \\ 1 - a^{-x} & a^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & a^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a^{-1} & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 - a^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{-x+1} & a^{-x-1} & 0 \\ a - a^{-x+1} & a^{-1} - a^{-x-1} + a^{-x+1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{-x+1} \end{pmatrix},$$

haciendo los demás cálculos tenemos

$$M_2(T[-x, 1, -1, y]) = \begin{pmatrix} 2a^{y-x} & 2a^{-x}(1-a^y) + a^{-x-2} & 0 \\ a^y(2-2a^{-x}+a^2) & (1-a^y)(2-2a^{-x}+a^2) + (1-a^{-x})a^{-2} + a^{y-x} & 0 \\ 0 & 0 & a^{y-x} \end{pmatrix};$$

llamemos $d_{ij} = (M_2(T[-x, 1, -1, y]))_{ij}$; como

$$M_2(T[-x, 1, -1, y] + 4kE) = \begin{pmatrix} d_{11} - d_{33}b & d_{12} - d_{33}p & 0 \\ d_{21} - d_{33}p & d_{22} - d_{33}b & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix},$$

donde $b = -2k\sqrt{3}i$ y $p = 2k\sqrt{3}i$, entonces

$$M_2((T[-x, 1, -1, y] + 4kE)_+) = \begin{pmatrix} d_{11} + d_{22} - 2d_{33}b & d_{21} - d_{33}p & 0 \\ d_{12} - d_{33}p & d_{11} - d_{33}b & 0 \\ 0 & 0 & d_{11} - d_{33}b - d_{33} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto se tiene

$$|(M_2((T[-x, 1, -1, y] + 4kE)_+))_{33}| = |2a^{y-x} + a^{y-x}2k\sqrt{3}i - a^{y-x}| = |a^{y-x}(1+2k\sqrt{3}i)| = \sqrt{1+12k^2},$$

si $k \neq 0$ entonces $M_2((T[-x, 1, -1, y] + 4kE)_+) \neq 1$ y, por lo tanto, $(T[-x, 1, -1, y] + 4kE)_+$ no es una trenza. Haciendo los cálculos, se prueba que para cualquier elemento $T \in Z_1$, con $T_r \in \mathcal{Y}_1$, se tiene $|(M_2(T_r))_{33}| = \sqrt{1+12k^2}$.

Si $R \in Z_2$, con $R_r \in \mathcal{Y}_2$, entonces

$$|(M_2(R + 4kE)_r)_{33}| = \sqrt{1+6k+12k^2};$$

al igual que en el caso anterior, si $k \neq 0$ tenemos que $M_2((R + 4kE)_r) \neq 1$ y, por lo tanto, $(R + 4kE)_r$ no es una trenza. Notemos que en cada caso $|(M_2((Z + 4kE)_r))_{33}| = 1$ si, y sólo si, $k = 0$, lo que implica que $(Z + 4kE)_r = Z_r$ es una trenza. ■

De los dos lemas anteriores se tiene el siguiente:

Lema 10.4 Sea $T \in \tilde{B} \setminus \tilde{B}_6$, tenemos que

$$T \in \mathbb{B}_3 \Leftrightarrow (M_1(T))_{33} = \pm 1 \text{ y } |(M_2(T))_{33}| = 1.$$

Demostración.- Si T es una trenza se tiene que $(M_1(T))_{33} = \pm 1$ y $|(M_2(T))_{33}| = 1$.

La otra implicación se probará por contradicción. Supongamos que $(M_1(T))_{33} = \pm 1$ y $|(M_2(T))_{33}| = 1$, si T no es una trenza entonces $T \in (\mathbb{B}_3)_R$; por el lema 10.2, como

$(M_1(T))_{33} = \pm 1$, existe $X \in \mathcal{Z}$, con $X_r \in \mathcal{Y}$, tal que $T \cong (Z + 4kE)_r$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por el lema 10.3, $|(M_2((Z + 4kE)_r))_{33}| = 1$ si y sólo si $(Z + 4kE)_r \cong T$ es una trenza, lo cual es una contradicción. ■

Lema 10.5 Sean $T_1, T_2 \in \tilde{B} \setminus \tilde{B}_6$, tenemos que

$$T_1 \cong T_2 \Leftrightarrow M_1(T_1) = M_1(T_2) \text{ y } M_2(T_1) = M_2(T_2).$$

Demostración.- Si $T_1 \cong T_2$ claramente $M_1(T_1) = M_1(T_2)$ y $M_2(T_1) = M_2(T_2)$. Sean $T_j \in \tilde{B} \setminus \tilde{B}_6$, $j=1, 2$ tales que $M_1(T_1) = M_1(T_2)$ y $M_2(T_1) = M_2(T_2)$.

Si $(M_1(T_j))_{33} = \pm 1$, tenemos dos casos

$$1) |(M_2(T_j))_{33}| = 1 \quad 2) |(M_2(T_j))_{33}| \neq 1$$

Si ocurre el caso (1), por el lema 10.4, tenemos que tanto T_1 como T_2 son trenzas y, por el teorema 6.1, tenemos que $T_1 \cong T_2$.

Si se cumple (2), por el lema 10.4, tenemos que $T_j \in (\mathbb{B}_3)_R$ y, T_j no es una trenza para $j = 1, 2$. Por el lema 10.2 tenemos que existen $X_j \in \mathcal{Z}$, con $(X_j)_r \in \mathcal{Y}$, $j = 1, 2$ tales que

$$T_1 \cong (X_1 + 4k_1E)_r \quad T_2 \cong (X_2 + 4k_2E)_r;$$

como (2) se cumple tenemos que $k_1 \neq 0 \neq k_2$. Veremos que sólo uno de $(T_1)_+$ y $(T_1)_-$ es una trenza; esto es, uno es $((X_1 + 4k_1E)_r)_r$ y el otro es $X_1 + 4k_1E$.

Denotemos por T^v al ovillo $((T_+)_+)_+$. Haciendo el análisis se tiene que para un ovillo T

$$((T + 4kE)_+)_+ \cong (T^v + 4kE)_- \quad ((T + 4kE)_-)_- \cong (T^v + 4kE)_+.$$

Es por esto que $((X_1 + 4k_1E)_r)_r \cong (X_1^v + 4k_1E)_{-r}$, donde $-r$ es la rotación en sentido contrario al de la rotación r . Notemos también que si $X \in \mathcal{Z}$ entonces $X^v \in \mathcal{Z}$.

Si $(M_1((X_1^v + 4k_1E)_{-r}))_{33} \neq \pm 1$, por el lema 10.4, se tiene que $(X_1^v + 4k_1E)_{-r}$ no es una trenza.

Si $(M_1((X_1^v + 4k_1E)_{-r}))_{33} = (M_1((X_1^v)_{-r}))_{33} = \pm 1$ se tiene que $(X_1^v)_{-r} \in \mathcal{Y}$ y, como $k_1 \neq 0$, por el lema 10.3 se tiene que $|(M_2((X_1^v + 4k_1E)_{-r}))_{33}| \neq 1$ y, por lo tanto, $(X_1^v + 4k_1E)_{-r}$ no es una trenza.

Lo anterior prueba que sólo se cumple uno de los siguientes

$$2.1) (M_1((T_1)_+))_{33} = \pm 1, \quad |(M_2((T_1)_+))_{33}| = 1,$$

$$2.2) (M_1((T_1)_-))_{33} = \pm 1, \quad |(M_2((T_1)_-))_{33}| = 1.$$

Si se cumple (2.1) tenemos que $(T_1)_+$ es una trenza. Ya que $M_j(T_1) = M_j(T_2)$ para $j=1, 2$ tenemos que $M_j((T_1)_+) = M_j((T_2)_+)$ y $M_j((T_1)_-) = M_j((T_2)_-)$. Así, se tiene $(T_2)_+ \in \mathbb{B}_3$, $(T_2)_- \notin \mathbb{B}_3$ y, por el teorema 6.1, tenemos que $(T_1)_+ \cong (T_2)_+$, lo cual implica que $T_1 \cong T_2$.

Si se cumple (2.2) se actúa de manera similar.

Supongamos ahora que $(M_1(T_1))_{33} \neq \pm 1$.

Estamos ahora en el caso de una rotación de trenza, si únicamente uno de los siguientes ocurre

$$c_{11} - c_{33} = \pm 1, \quad c_{22} - c_{33} = \pm 1,$$

actuamos como en el caso $T[a_1, \dots, a_n] + kE$ con $n \geq 6$ y obtenemos $T_1 \cong T_2$.

¿Ocurrirá que

$$(10.11) \quad c_{11} - c_{33} = c_{22} - c_{33} = \pm 1.?$$

Esta pregunta surge porque, de ocurrir, no podemos actuar como en el caso anterior, esto es, si ocurre (10.11), no podemos distinguir el tipo de rotación que se hizo en la trenza T_1 . Veamos cuales trenzas cumplen $c_{33} \neq \pm 1$ y (10.11).

Notemos que para T trenza se tiene

$$M_1(T) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_1(T_+) = \begin{bmatrix} a+d-2 & c & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}, M_1(T_-) = \begin{bmatrix} d & c & 0 \\ b & a+d-2 & 0 \\ 0 & 0 & d-1 \end{bmatrix},$$

de aquí se tiene que:

$$\text{En el caso de } T_+ : c_{11} - c_{33} = c_{22} - c_{33}; \quad a + d - 2 - (a - 1) = a - (a - 1); \quad d = 2.$$

$$\text{En el caso de } T_- : c_{11} - c_{33} = c_{22} - c_{33}; \quad d - (d - 1) = 1 = a + d - 2 - (d - 1); \quad a = 2.$$

En el caso de una rotación positiva para que se cumpla (10.11), se debe tener que la entrada $c_{22} = 2$ y, en el caso de una rotación negativa $c_{11} = 2$; notemos que siempre podemos suponer $c_{22} - c_{33} = 1 = c_{11} - c_{33}$ en lugar de $c_{22} - c_{33} = -1 = c_{11} - c_{33}$.

Veamos los casos $T + kE$ donde $k = -1, 0, 1, 2$ y T trenza base; así que para que (10.11) y $(M_1((DA + kE)_R))_{33} \neq \pm 1$ se cumplan con $k = 0$, en el caso n impar tenemos

$$0.1) (M_1((T+kE)_+))_{33} = D[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_+))_{22} = N[a_1, \dots, a_{n-1}] = 2,$$

$$0.2) (M_1((T+kE)_-))_{33} = N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_-))_{11} = D[a_1, \dots, a_n] = 2.$$

En el caso de n par tenemos

$$0.3) (M_1((T+kE)_+)_{33} = D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_+)_{22} = N[a_1, \dots, a_n] = 2,$$

$$0.4) (M_1((T+kE)_-)_{33} = N[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_-)_{11} = D[a_1, \dots, a_{n-1}] = 2.$$

Caso (0.1).

De resultados anteriores, para n impar las trenzas que satisfacen $N[a_1, \dots, a_{n-1}] = 2$, ó equivalentemente $N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 = 1$, de (0.1) son de la forma

$$0.1.1) T[\pm 1, \mp 1, a_3], \quad 0.1.2) T[0, -a_2, \pm 1, \mp 1, a_5].$$

Si además se debe cumplir la condición $D[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1$, entonces en el caso (0.1.1) se debe tener que

$$D[\pm 1, \pm 1, \pm a_3] - 1 = a_3 + 1 - 1 \neq \pm 1;$$

lo cual ocurre si $a_3 \neq \pm 1$.

En el caso (0.1.2) se debe tener que

$$D[0, a_2, \pm 1, \pm 1, a_5] - 1 = N[a_2, \pm 1, \pm 1, a_5] - 1 \neq 1,$$

lo cual siempre ocurre ya que $N[a_2, \pm 1, \pm 1, a_5] \geq 5$.

Las rotaciones de trenza que satisfacen (0.1) son $(T[\pm 1, \mp 1, a_3])_+$, con $a_3 \neq \pm 1$ y $(T[0, -a_2, \pm 1, \mp 1, a_5])_+$.

Caso (0.2).

Las trenzas que satisfacen $D[a_1, \dots, a_n] - 1 = 1$ en (0.2) son de la forma

$$0.2.1) T[a_1, \pm 1, \mp 1].$$

Si además se debe cumplir la condición $N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1$, entonces se debe tener

$$N[\pm a_1, \pm 1] - 1 = a_1 + 1 - 1 \neq \pm 1;$$

lo cual se cumple si $a_1 \neq \pm 1$; así que los ovillos que satisfacen (0.2) son $(T[\mp a_1, \pm 1, \mp 1])_-$ donde $a_1 \neq \pm 1$.

Caso (0.3).

De resultados anteriores, para n par las trenzas que satisfacen $N[a_1, \dots, a_n] - 1 = 1$ de (0.3) son de la forma

$$0.3.1) T[\pm 1, \mp 1], \quad 0.3.2) T[0, -a_2, \pm 1, \mp 1].$$

Si además se debe cumplir la condición $D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1$, entonces, en el caso 0.3.1) se debe tener que

$$D[\pm 1] - 1 \neq \pm 1,$$

lo cual siempre ocurre ya que $D[\pm 1] = 1$.

En el caso 0.3.2) se debe tener que

$$D[0, \pm a_2, \pm 1] - 1 = N[\pm a_2, \pm 1] - 1 \neq \pm 1;$$

lo cual ocurre si $a_2 \neq \pm 1$.

Así que los ovillos que satisfacen (0.3) son $(T[\pm 1, \mp 1])_+$ y $(T[0, -a_2, \pm 1, \mp 1])_+$ donde $a_2 \neq \mp 1$.

Caso (0.4).

Las trenzas que satisfacen $D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 = 1$ en (0.4) son de la forma

$$0.4.1) T[\mp a_1, \pm 1, \mp 1, \pm a_4].$$

Si además se debe cumplir la condición $N[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1$, entonces se debe tener

$$N[\pm a_1, \pm 1, \pm 1, \pm a_4] - 1 \neq \pm 1, \quad a_1 a_4 + a_1 + a_1 a_4 + a_4 \neq \pm 1,$$

lo cual no se cumple si $a_1 = 0$ y $a_4 = \pm 1$; así que los ovillos que satisfacen (0.4) son de la forma $(T[\mp a_1, \pm 1, \mp 1, \pm a_4])_-$, donde no se tienen $a_1 = 0$ y $a_4 = \pm 1$ al mismo tiempo.

Para que (10.11) ocurra con $k = 1$ debemos tener que para n impar

$$1.1) (M_1((T+kE)_+)_{33} = D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_+)_{22} = -N[a_1, \dots, a_n] = 2,$$

$$1.2) (M_1((T+kE)_-)_{33} = -N[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_-)_{11} = D[a_1, \dots, a_{n-1}] = 2.$$

Si n es par

$$1.3) (M_1((T+kE)_+)_{33} = D[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_+)_{33} = -N[a_1, \dots, a_{n-1}] = 2,$$

$$1.4) (M_1((T+kE)_-)_{33} = -N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_-)_{22} = D[a_1, \dots, a_n] = 2.$$

Caso (1.1).

De resultados anteriores, las trenzas que satisfacen para n impar $-N[a_1, \dots, a_n] - 1 = 1$ de (1.1) son de la forma

$$1.1.1) T[-2] + E, \quad 1.1.2) T[0, -a_2, -2] + E, \quad 1.1.3) E.$$

si además se debe cumplir la condición $D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1$, tenemos que esto en el caso (1.1.1) nunca se cumple ya que $D[a_0] - 1 = -1$.

En el caso (1.1.2) se debe tener que

$$D[0, a_2, -2] - 1 = N[a_2, -2] - 1 = -2a_2 \neq \pm 1,$$

lo cual siempre ocurre ya que $|a_2| \geq 1$.

En el caso (1.1.3) se debe tener que $D[0] - 1 \neq \pm 1$, lo cual nunca se cumple. Así que los ovillos que satisfacen (1.1) son de la forma $(T[0, -a_2, -2] + E)_+$.

Caso (1.2)

Las trenzas que satisfacen $D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 = 1$ en 1.2) son de la forma

$$1.2.1) T[a_1, -2, a_3] + E, \quad 1.2.2) T[a_1] + E;$$

como se debe cumplir que $-N[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1$, entonces se debe tener en el caso (1.2.1) que

$$-N[a_1, 2, a_3] - 1 = -2a_1a_3 - a_1 - a_3 - 1 \neq \pm 1.$$

Lo cual se cumple si no se tiene $a_1 = 0$ y $a_3 = -2$ a la vez; pero notemos que por ser $T[a_1, -2, a_3]$ un diagrama alternante, entonces $a_3 \neq 0$.

En el caso (1.2.2) se debe tener $-a_1 - 1 \neq \pm 1$, lo cual se cumple si $a_1 \neq -2$. Así que los ovillos que satisfacen (1.2) son de la forma $(T[a_1] + E)_-$, con $a_1 \neq -2$ y, $(T[a_1, -2, a_3] + E)_-$.

Caso (1.3)

De los resultados anteriores, para n par, las trenzas que satisfacen $-N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 = 1$ de (1.3) son

$$1.3.1) T[-2, a_2] + E, \quad 1.3.2) T[0, a_2, -2, a_4] + E, \quad 1.3.3) T[0, a_2] + E.$$

Como se debe cumplir que $D[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1$, en el caso (1.3.1) se debe tener que

$$D[-2, -a_2] - 1 = -a_2 - 1 \neq \pm 1;$$

lo cual ocurre si $a_2 \neq -2$. Pero notemos que por ser $T[-2, a_2]$ un diagrama alternante, entonces $a_2 \neq 0$.

En el caso (1.3.2) se debe tener que

$$D[0, -a_2, -2, -a_4] - 1 = -2a_2a_4 - a_2 - a_4 - 1 \neq \pm 1,$$

lo cual nunca ocurre ya que $a_2 \neq 0 \neq a_4$.

En el caso (1.3.3) se debe tener

$$D[0, a_2] - 1 \neq a_2 - 1 \pm 1,$$

lo cual ocurre si $a_2 \neq 2$. Así que los ovillos que satisfacen (1.3) son de la forma $(T[-2, a_2] + E)_+$, $(T[0, a_2, -2, a_4] + E)_+$ y $(T[0, a_2] + E)_+$ si $a_2 \neq 2$.

Caso 1.4).

Las trenzas que satisfacen $D[a_1, \dots, a_n] - 1 = 1$ en (1.4) son

$$1.4.1) T[a_1, -2] + E;$$

al cumplirse la condición $-N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1$ se debe tener

$$-N[a_1] - 1 = -a_1 - 1 \neq \pm 1,$$

lo cual se cumple si $a_1 \neq -2$, por ser $T[a_1, -2] + E$ un diagrama alternante $a_1 \neq 0$. Así que los ovillos que satisfacen (1.2) son de la forma $(T[a_1, -2] + E)_-$.

Para que (10.11) ocurra con $k = 2$ debemos tener que para n impar

$$2.1) (M_1((T+kE)_+)_{33} = D[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_+)_{22} = -N[a_1, \dots, a_{n-1}] = 2,$$

$$2.2) (M_1((T+kE)_-)_{33} = N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_-)_{11} = -D[a_1, \dots, a_n] = 2.$$

Si n es par

$$2.3) (M_1((T+kE)_+)_{33} = D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_+)_{22} = -N[a_1, \dots, a_n] = 2,$$

$$2.4) (M_1((T+kE)_-)_{33} = N[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_-)_{11} = -D[a_1, \dots, a_{n-1}] = 2.$$

Es fácil ver que nunca se cumplen las siguientes igualdades

$$1) -N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 = 1, \quad -D[a_1, \dots, a_n] - 1 = 1,$$

$$2) -N[a_1, \dots, a_n] - 1 = 1, \quad -D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 = 1,$$

tomadas de 2.1), 2.2), 2.3) y 2.4) respectivamente.

Para que (10.11) ocurra con $k = -1$ debemos tener que para n impar

$$3.1) (M_1((T+kE)_+)_{33} = -D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_+)_{22} = N[a_1, \dots, a_n] = 2,$$

$$3.2) (M_1((T+kE)_-)_{33} = N[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_-)_{11} = -D[a_1, \dots, a_{n-1}] = 2.$$

Si n es par

$$3.3) (M_1((T+kE)_+))_{33} = -D[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_+))_{22} = N[a_1, \dots, a_{n-1}] = 2,$$

$$3.4) (M_1((T+kE)_-))_{33} = N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1 \quad (M_1((T+kE)_-))_{11} = -D[a_1, \dots, a_n] = 2.$$

Caso (3.1).

De los resultados anteriores, para n impar, las trenzas que satisfacen $N[a_1, \dots, a_n] - 1 = 1$ de (3.1) son

$$3.1.1) T[2] - E, \quad 3.1.2) T[0, -a_2, 2] - E, \quad 3.1.3) -E.$$

Además se debe cumplir la condición $-D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1$. Pero esto en el caso (3.1.1) nunca se cumple ya que $-D[a_0] - 1 = -1$.

En el caso (3.1.2) se debe tener que

$$D[0, a_2, 2] - 1 = 2a_2 \neq \pm 1,$$

lo cual siempre ocurre ya que $|a_2| \geq 1$.

En el caso (3.1.3) se debe tener que $D[a_0] - 1 \neq \pm 1$, lo cual nunca se cumple. Así que los ovillos que satisfacen (3.1) son de la forma $(T[0, -a_2, 2] - E)_+$.

Caso (3.2).

Además las trenzas que satisfacen $-D[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 = 1$ en (3.2) son

$$3.2.1) T[-a_1, 2, -a_3] - E, \quad 3.2.2) T[a_1] - E.$$

Si además se debe cumplir la condición $N[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1$, entonces se debe tener

$$N[a_1, 2, a_3] - 1 = 2a_1a_3 + a_1 + a_3 - 1 \neq \pm 1,$$

lo cual se cumple si no se tiene $a_1 = 0, a_3 = 2$ a la vez.

En el caso (3.2.2) deben cumplir $N[a_1] - 1 = a_1 - 1 \neq \pm 1$, lo cual ocurre si $a_1 \neq 2$. Así, los ovillos que satisfacen (3.2) son de la forma $(T[-a_1, 2, -a_3] - E)_-$, con $a_1 \neq 0, a_3 \neq 2$ a la vez, y $(T[a_1] - E)_-$ con $a_1 \neq 2$.

Caso (3.3).

De los resultados anteriores, para n , par las trenzas que satisfacen $N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 = 1$ de (3.3) son

$$(3.3.1) T[2, -a_2] - E, \quad (3.3.2) T[0, -a_2, 2, -a_4] - E.$$

Si además se debe cumplir la condición $-D[a_1, \dots, a_n] - 1 \neq \pm 1$, entonces en el caso (3.3.1) se debe tener que

$$-D[2, a_2] - 1 = -a_2 - 1 \neq \pm 1,$$

lo cual ocurre si $a_2 \neq -2$, pero como $T[2, -a_2]$ es un diagrama alternante $a_2 > 0$.

En el caso (3.3.2) se debe tener que

$$D[0, -a_2, -2, -a_4] - 1 = -2a_2a_4 - a_2 - a_4 - 1 \neq \pm 1,$$

lo cual siempre ocurre. Así, los ovillos que satisfacen (3.3) son de la forma $(T[2, -a_2] - E)_+$ y $(T[0, -a_2, 2, -a_4] - E)_+$.

Caso (3.4).

Además las trenzas que satisfacen $-D[a_1, \dots, a_n] - 1 = 1$ en (3.4) son

$$(3.4.1) T[-a_1, 2] - E.$$

Si además se debe cumplir la condición $N[a_1, \dots, a_{n-1}] - 1 \neq \pm 1$, entonces se debe tener

$$N[-a_1] - 1 = -a_1 - 1 \neq \pm 1,$$

lo cual se cumple si $a_1 \neq -2$, pero como $T[-a_1, 2]$ es un diagrama alternante $a_1 > 0$. Así, los ovillos que satisfacen (3.3) son de la forma $(T[-a_1, 2] - E)_-$.

Todas las rotaciones de trenzas del análisis anterior para $k = -1, 0, 1$ satisfacen $c_{33} \neq \pm 1$ y (10.11) y, por lo tanto, no podemos aplicar el mismo criterio que se aplicó cuando $n \geq 6$.

Notemos que si $X \in \mathcal{Z}$, con $X_r \in \mathcal{Y}$, los elementos del análisis anterior no son otros que X_{-r} , donde $-r$ es la rotación en sentido contrario al de la rotación r , siempre y cuando $X_{-r} \notin \mathbb{B}_3$.

Si tenemos $(M_1(T_1))_{33} \neq \pm 1$ y ocurre (10.11) tenemos que $T_1 \cong (X + 4kE)_{-r}$ para algún $X \in \mathcal{Z}$, con $X_r \in \mathcal{Y}$ y $X_{-r} \notin \mathbb{B}_3$. Analizaremos $(T_1)_+$ y $(T_1)_-$.

Si únicamente uno de los siguientes se cumple

$$1) (M_1((T_1)_+))_{33} = \pm 1, \quad 2) (M_1((T_1)_-))_{33} = \pm 1,$$

digamos que se cumple (1), entonces $(T_1)_+ \in \mathbb{B}_3$, de esta manera se tiene que $(T_2)_+ \in \mathbb{B}_3$, y como por hipótesis $M_j(T_1) = M_j(T_2)$ para $j = 1, 2$. Se tiene que $M_j((T_1)_+) = M_j((T_2)_+)$, lo cual implica que $T_1 \cong T_2$. Si se cumple (2) se procede de manera análoga con $(T_1)_-$.

Si se cumple (1) y (2) nos fijamos cual de los siguientes se cumple

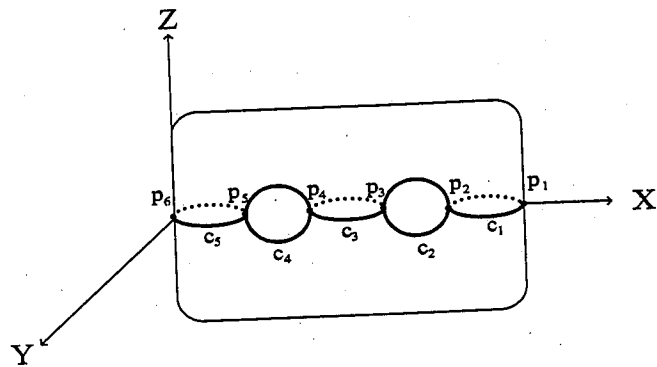
$$3) |(M_2((T_1)_+))_{33}| = 1 \quad 4) |(M_2((T_1)_-))_{33}| = 1.$$

Si se cumple (3), por el lema 10.4, se tiene que $(T_1)_+ \in \mathbb{B}_3$, de esta manera se tiene que $(T_2)_+ \in \mathbb{B}_3$; ahora se procede como el caso anterior y se obtiene $T_1 \cong T_2$. Si se cumple (2) se procede de manera análoga con $(T_1)_-$. ■

Esto demuestra que las matrices M_1 y M_2 clasifican completamente al conjunto \tilde{B} .

11 Curvas en el doble toro

Sea T_2 una superficie de género 2, encajada en \mathbb{R}^3 como se ilustra en la siguiente figura



El encaje se escoge de manera que T_2 es invariante bajo reflexiones en los planos XZ y XY y, $T_2 \cap \{(x, y, z) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ es un conjunto de 2 cilindros rectos circulares de radio 1 con ejes paralelos al eje Y .

Denotémos por c_1, c_3, c_5 las intersecciones de T_2 con el plano XY y por c_2, c_4 las intersecciones de T_2 con el plano XZ , definidas de esta manera cada c_i es un círculo. Sea $i : T_2 \rightarrow T_2$ definida por $i((x, y, z)) = (x, -y, -z)$, definamos una relación de equivalencia en T_2 mediante

$$(x, y, z) \sim i((x, y, z)) = (x, -y, -z).$$

Se tiene que la proyección natural $\pi : T_2 \rightarrow T_2/\sim$ es una función dos a uno, con excepción de los seis puntos de la intersección de T_2 con el eje X , los cuales llamaremos p_1, p_2, \dots, p_6 el orden se toma conforme decrece la coordenada en X . Así tenemos que la superficie T_2/\sim es homeomorfa a la esfera S^2 , las imágenes de los puntos excepcionales p_1, p_2, \dots, p_6 bajo π son un conjunto de puntos excepcionales q_1, q_2, \dots, q_6 en S^2 ; llamemos $P = \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ y $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_6\}$.

Diremos que un homeomorfismo $h : T_2 \rightarrow T_2$ es *simétrico* si tiene la propiedad

$$i(h(w)) = h(i(w))$$

donde w denota un punto arbitrario en la superficie T_2 . Nótese que para todo homeomorfismo simétrico $g, g(P) = P$, aunque no necesariamente $g|_P = Id_P$.

Sea $S(T_2)$ el grupo de clases de homeomorfismos simétricos de T_2 , esto es, el grupo $\mathcal{S}(T_2)$ de todos los homeomorfismos simétricos que preservan la orientación, módulo el subgrupo $SD(T_2) \subseteq \mathcal{S}(T_2)$, de los homeomorfismos simétricos que son isotópicos al homeomorfismo identidad, mediante una isotopia H_t^* tal que $H_t^* \in \mathcal{S}(T_2)$. Nótese que $[i] \in \mathcal{S}(T_2)$ tiene orden 2 y está en el centro de $\mathcal{S}(T_2)$. Definamos $\tilde{S}(T_2)$ como el grupo factor de $\mathcal{S}(T_2)$ módulo el subgrupo cíclico de orden 2, generado por $[i]$. En [1] se prueba el siguiente:

Teorema 11.1 $\tilde{S}(T_2)$ es isomorfo al grupo de clases de homeomorfismos de $S^2 \setminus P, M(S^2 \setminus P)$.

De la prueba de éste se desprende el siguiente

Lema 11.1 Cualquier homeomorfismo $h \in M(S^2 \setminus P)$ se puede levantar a un homeomorfismo $\tilde{h} : T_2 \setminus Q \rightarrow T_2 \setminus Q$.

Y de aquí se tiene

Corolario 11.1 Dado $h : (S^2, P) \rightarrow (S^2, P)$ un homeomorfismo de parejas, existe un homeomorfismo de parejas $\tilde{h} : (T_2, Q) \rightarrow (T_2, Q)$ tal que $\pi \tilde{h} = h \pi$.

El grupo de clases de mapeos $M(S^2_{2g+2})$, donde S^2_{2g+2} es una esfera de la cuál han sido removidos $2g+2$ puntos, fue estudiado por W. Magnus [10], en particular para el caso $g=2$, se desprende que $M(S^2 \setminus P)$ admite la presentación:

generadores: $\sigma_1, \dots, \sigma_5$

con las relaciones:

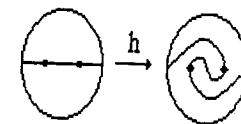
(a) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad 1 \leq i \leq 5 \quad |i-j| \geq 2;$

(b) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 4$

(c) $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_5)^6 = 1$

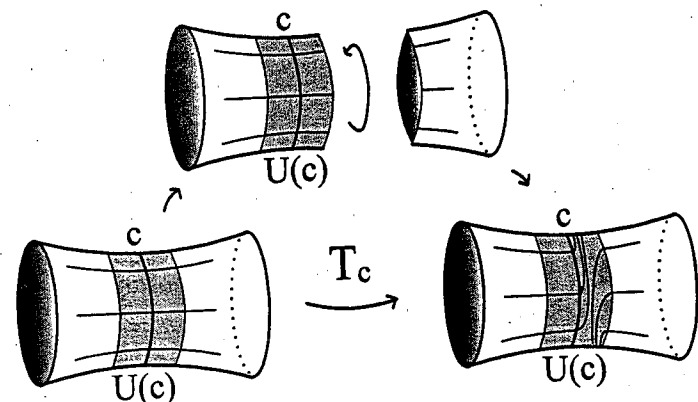
(d) $\sigma_1 \dots \sigma_4 \sigma_5 \sigma_5 \sigma_4 \dots \sigma_1 = 1$

Los generadores $\sigma_i, 1 \leq i \leq 5$ pueden ser representados por los siguientes auto-homeomorfismos de $S^2 \setminus P$. En el plano euclideo parametrizado por (r, θ) tomemos D el disco $r \leq 2$. Definamos un homeomorfismo $h : D \rightarrow D$ mediante $h(r, \theta) = (r, \theta + r\pi)$.



Sea h_i un encaje de D en $S^2 \setminus P$, donde $h_i(D)$ incluye a q_i y q_{i+1} pero no a q_j , $j \neq i, i+1$. Suponga que $h_i(1,0) = q_i$ y $h_i(1,\pi) = q_{i+1}$. De esta manera el homeomorfismo $h_i h_i^{-1}$ extendido como el mapeo identidad fuera de $h_i(D)$, define un auto-homeomorfismo de $S^2 \setminus P$ el cual representa a σ_1 . El efecto de este homeomorfismo es intercambiar los puntos q_i y q_{i+1} y dejar los otros puntos q_j fijos.

Sea c una curva simple cerrada en una superficie F , tome una vecindad $U(c)$ de c , la cual es homeomorfa a un cilindro. Corte la superficie F a lo largo de una base de este cilindro, gire una de las orillas de el corte por -2π y pegue nuevamente las orillas del corte como se muestra a continuación:



El homeomorfismo $T_c : F \rightarrow F$ construido de esta manera, es llamado un *giro negativo a lo largo de la curva c*. De manera similar se puede hacer girar la orilla de el corte por 2π y obtenemos el homeomorfismo $(T_c)^{-1} : F \rightarrow F$ el cual es llamado un *giro positivo a lo largo de la curva c*, para referirse indistintamente a un giro positivo o negativo se dirá solamente *giro a lo largo de la curva c*.

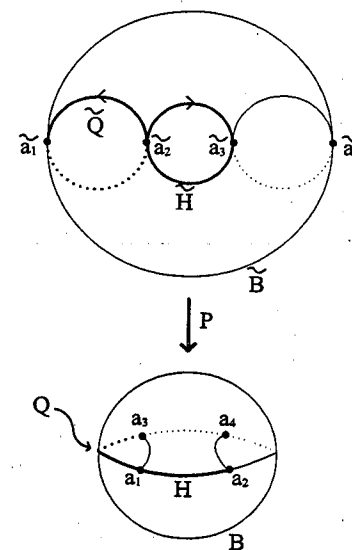
Teorema 11.2 Los mapeos que representan los generadores $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ de $M(S^2 \setminus Q)$, se levantan a giros a lo largo de las curvas $c_i, i = 1, \dots, 5$ en T_2 y estos giros representan a los elementos $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_5$ de $\tilde{S}(T_2)$.

Se tiene que el levantamiento de σ_i con $i = 1, 3, 5$, es T_{c_i} , mientras que el levantamiento de las σ_j con $j = 2, 4$, es $(T_{c_j})^{-1}$,

En [6] se da una demostración del siguiente

Teorema 11.3 Sean $c_i, i = 1, \dots, 5$ las curvas definidas anteriormante, se cumple que los giros T_{c_i} generan $M(T_2)$.

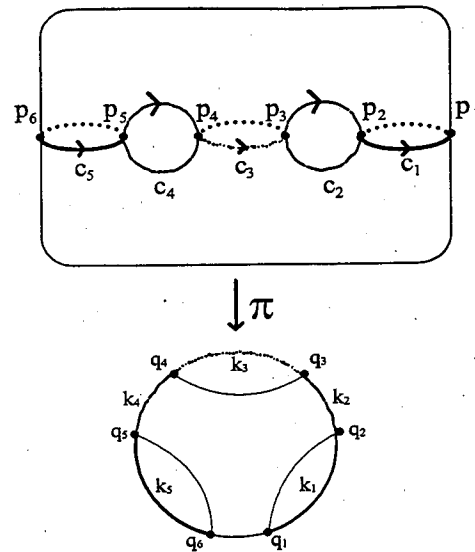
Sea B la bola de la figura siguiente y L la unión de los dos arcos disjuntos $a_1 a_2$ y $a_3 a_4$. Se tiene así que B admite un recubrimiento cíclico de dos hojas $p : \tilde{B} \rightarrow B$, donde \tilde{B} es un toro macizo, en el que a $p^{-1}Q = \tilde{Q}$ se le llama *meridiano* y a $p^{-1}H = \tilde{H}$ una *longitud*.



En [11] J.M. Montesinos da una descripción de cómo se debe modificar L en el interior de B , con el fin de que el recubridor cíclico de dos hojas de B , ramificado sobre los arcos modificados, sea un toro macizo cuyo meridiano sea homólogo a $\alpha\tilde{Q} + \beta\tilde{H}$ siendo α y β dos enteros primos entre sí.

Por otro lado, nótese que (T_2, π) es una doble cubierta de S^2 , ramificada a lo largo de Q y $(T_2 \setminus P, \pi)$ es un espacio cubriente de dos hojas de $S^2 \setminus Q$. Definamos en S^2 los arcos $k_i, i = 1, \dots, 5$ de la siguiente manera: k_i es el arco en el ecuador que une q_i con q_{i+1} y sea $\tilde{k}_i = \pi^{-1}(k_i)$ en T_2 , notemos que $\tilde{k}_i = c_i$. El cubriente no induce una orientación natural en los k_i , supongamos que k_1 está orientado arbitrariamente, fijemos orientaciones en los demás k_i de manera que el número de intersección entre k_i y k_{i+1} es $+1$.

Sea B la bola de la siguiente figura y L la unión de los tres arcos disjuntos $q_1 q_2, q_3 q_4$ y $q_5 q_6$. Se tiene así que B admite un recubrimiento cíclico de dos hojas $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ donde \tilde{B} es un doble toro macizo en el que llamaremos *meridiano j* a $\pi^{-1}(k_{2j-1}) = \tilde{k}_{2j-1} = c_{2j-1}$, con $j = 1, 2, 3$. Llamaremos *longitud s* a $\pi^{-1}(k_{2s}) = \tilde{k}_{2s} = c_{2s}$, con $s = 1, 2$.

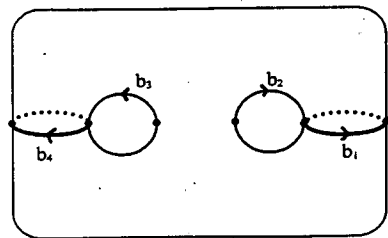


Nótese que \$c_3\$ es homólogo a \$c_5 - c_1\$ de aquí que a \$c_1\$ y \$c_5\$ les llamaremos *meridianos base*, en este contexto podemos llamar *longitudes base* a \$c_2\$ y \$c_4\$.

Se dará una descripción de cómo se debe modificar \$L\$ en el interior de \$B\$, con el fin de que el recubridor cíclico de dos hojas de \$B\$, ramificado sobre los arcos modificados, sea un doble toro macizo con meridianos base homólogos a \$\alpha b_1 + \beta b_2\$ y \$-(\alpha' b_3 + \beta' b_4)\$ donde \$(\alpha, \beta) = 1\$ y \$(\alpha', \beta') = 1\$.

Sean los homeomorfismos \$\sigma_i : S^2 \to S^2, i = 1, \dots, 5\$ definidos anteriormente. Por el teorema 11.2 los homeomorfismos \$\tilde{\sigma}_i : T_2 \to T_2, i = 1, \dots, 5\$ satisfacen \$\sigma_i \pi = \pi \tilde{\sigma}_i\$.

El grupo de homología de \$T_2, H(T_2) = \oplus_4 \mathbb{Z}\$, tiene por generadores a los \$b_k, k = 1, 2, 3, 4\$ mostrados en la siguiente figura:



Notemos que \$c_1 = b_1\$ y \$c_5 = -b_4\$. Tenemos que los homeomorfismos \$\tilde{\sigma}_i : T_2 \to T_2\$ inducen isomorfismos \$\tilde{\sigma}_i^* : H(T_2) \to H(T_2)\$, para los cuales se tiene que \$(\tilde{\sigma}_i^*)^n\$ pueden ser representados

por las siguientes matrices.

$$(\tilde{\sigma}_1^*)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{\sigma}_2^*)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{\sigma}_3^*)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -n & -n & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\tilde{\sigma}_4^*)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{\sigma}_5^*)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -n & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De esta manera tenemos por ejemplo que \$\tilde{\sigma}_2^*(c_1)\$ es homóloga a \$b_1 - b_2\$ y que \$\tilde{\sigma}_4^*(c_5)\$ es homóloga a \$-(b_3 + b_4)\$, lo cual se ve fácilmente de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera tenemos que para \$[a_1, \dots, a_n]\$ fracción continua estricta, si \$n\$ es par entonces

$$(\tilde{\sigma}_1^*)^{a_n} (\tilde{\sigma}_2^*)^{-a_{n-1}} \dots (\tilde{\sigma}_1^*)^{a_2} (\tilde{\sigma}_2^*)^{-a_1} (c_1) = \begin{pmatrix} DA_{n-1} & DA_n & 0 & 0 \\ NA_{n-1} & NA_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DA_{n-1} \\ NA_{n-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{\sigma}_5^*)^{-a_n} (\tilde{\sigma}_4^*)^{a_{n-1}} \dots (\tilde{\sigma}_5^*)^{-a_2} (\tilde{\sigma}_4^*)^{a_1} (c_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & NA_n & NA_{n-1} \\ 0 & 0 & DA_n & DA_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -NA_{n-1} \\ -DA_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Si \$n\$ es impar entonces

$$(\tilde{\sigma}_2^*)^{-a_n} (\tilde{\sigma}_1^*)^{a_{n-1}} \dots (\tilde{\sigma}_1^*)^{a_2} (\tilde{\sigma}_2^*)^{-a_1} (c_1) = \begin{pmatrix} DA_n & DA_{n-1} & 0 & 0 \\ NA_n & NA_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DA_n \\ NA_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\tilde{\sigma}_4^*)^{a_n} (\tilde{\sigma}_5^*)^{-a_{n-1}} \dots (\tilde{\sigma}_5^*)^{-a_2} (\tilde{\sigma}_4^*)^{a_1} (c_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & NA_{n-1} & NA_n \\ 0 & 0 & DA_{n-1} & DA_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -NA_n \\ -DA_n \end{pmatrix}.$$

Así que para modificar L en el interior de B , con el fin de que el recubridor cíclico de dos hojas de B ramificado sobre los arcos modificados, sea un doble toro macizo con meridianos base homólogos a $\alpha b_1 + \beta b_2$ y $-(\alpha' b_3 + \beta' b_4)$, donde $(\alpha, \beta) = 1$ y $(\alpha', \beta') = 1$, hacemos el siguiente proceso.

Sean las expansiones en fracción continua estricta $\frac{\beta}{\alpha} = [a_1, \dots, a_n]$ Y $\frac{\alpha'}{\beta'} = [b_1, \dots, b_m]$, notemos que siempre podemos escoger la expansión de forma que n y m sean impares.

Tómese el homeomorfismo

$$f(\beta', \alpha', \beta, \alpha) = (\sigma_4)^{b_m} (\sigma_5)^{-b_m-1} \dots (\sigma_5)^{-b_2} (\sigma_4)^{b_1} (\sigma_2)^{-a_n} (\sigma_1)^{a_n-1} \dots (\sigma_1)^{a_2} (\sigma_2)^{-a_1},$$

entonces el homeomorfismo

$$\tilde{f}(\beta', \alpha', \beta, \alpha) = (\tilde{\sigma}_4)^{b_m} (\tilde{\sigma}_5)^{-b_m-1} \dots (\tilde{\sigma}_5)^{-b_2} (\tilde{\sigma}_4)^{b_1} (\tilde{\sigma}_2)^{-a_n} (\tilde{\sigma}_1)^{a_n-1} \dots (\tilde{\sigma}_1)^{a_2} (\tilde{\sigma}_2)^{-a_1}$$

es tal que $\pi \tilde{f}(\beta', \alpha', \beta, \alpha) = f(\beta', \alpha', \beta, \alpha) \pi$.

Si consideramos la curva $M = f(\beta', \alpha', \beta, \alpha)(k_1)$ en ∂B , se tiene que $\tilde{f}(\beta', \alpha', \beta, \alpha)(c_1)$ es una curva simple que se proyecta sobre M y, es homóloga a $\alpha b_1 + \beta b_2$. De igual manera, si ahora consideramos la curva $N = f(\beta', \alpha', \beta, \alpha)(k_5)$ en ∂B , se tiene que $\tilde{f}(\beta', \alpha', \beta, \alpha)(c_5)$ es una curva simple que se proyecta sobre N y, es homóloga a $-(\alpha' b_3 + \beta' b_4)$.

12 Bibliografía

- [1] J. S. Birman and H. M. Hilden, *On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces*, in *Advances in the Theory of Riemann Surfaces*, Ann. Math. Stud. **66**, (1971), 81-115.
- [2] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, De Gruyter Studies in Mathematics 5, (1985).
- [3] J. Conway, *On enumeration of knots and links and some of their related properties*, in *Computational Problems in Abstract Algebra: Proc. Conf. Oxford 1967* (Pergamon Press, 1970), 329-358.
- [4] J. Emert and C. Ernst, *N-string Tangles*, Journal of Knot Theory and its Ramifications, Vol. 9, No. 8, (2000), 987-1004.
- [5] C. Ernst and D. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **108**, (1990), 489-515.
- [6] A. T. Fomenko, S. V. Matveev, *Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds*, Kluwer Academic Publishers, (city?), 1997.
- [7] C. A. Giller, *A Family of links and the Conway calculus*, Trans. Amer. Math. Soc, **270**, (1982), 75-109.
- [8] J. R. Goldman, L. H. Kaufmann, *Rational Tangles*, Adv. in App. Math., **18**, (1997), 300-332.
- [9] W.B. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Springer-Verlag, (New York), (1997).
- [10] W. Magnus, *Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen*, Math. Ann., **109**, (1934), 617-646.
- [11] J.M. Montesinos, *Variedades de Seifert que son recubridores cíclicos ramificados de dos hojas*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana.
- [12] K. Murasugi, *Knot Theory and Its Applications*, Birkhäuser, (Boston), (1996).
- [13] F. Norwood, *Curves on surfaces*, Topology and its applications, **33**, (1989), 241-246.
- [14] I. Niven, H.S. Zuckerman, H.L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Wiley, (1991).