



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

**ECUACIONES LOCALES DE OPTIMALIDAD EN
MODELOS DE MARKOV CONTROLADOS
Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO EN
PORTAFOLIOS CON CAÍDAS CONTROLADAS.**

T E S I S

Que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias
con Orientación en
Probabilidad y Estadística

Presenta

Diego Leonardo Hernández Bustos

Director de Tesis:

Dr. Daniel Hernández Hernández



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

**ECUACIONES LOCALES DE OPTIMALIDAD EN
MODELOS DE MARKOV CONTROLADOS
Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO EN
PORTAFOLIOS CON CAÍDAS CONTROLADAS.**

T E S I S

Que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias
con Orientación en
Probabilidad Y Estadística

Presenta

Diego Leonardo Hernández Bustos

Director de Tesis:

Dr. Daniel Hernández Hernández

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 16 de Agosto de 2019

Índice general

Agradecimientos	V
Introducción	VII
I Ecuaciones locales de optimalidad en modelos de Markov controlados	3
1. Procesos de Markov controlados	5
1.1. Problema de control estocástico	5
1.1.1. Modelo de Markov controlado	5
1.1.2. Políticas de control	6
1.1.3. Índice de desempeño	7
1.1.4. Problema de control óptimo	9
1.2. Especificación del problema	10
2. Ecuaciones locales de optimalidad	13
2.1. Ecuaciones locales de optimalidad	13
2.2. Teorema de verificación	19
2.2.1. Paso de inducción	19
2.2.2. Cotas inferiores de la función valor costo promedio óptimo	21
2.3. Estrategia óptima	25
3. Teorema de existencia	31
3.1. Operadores contractivos	31
3.2. Partición del espacio de estados	34
3.3. Tasas locales, funciones de valor relativo y estrategia óptima	39

II	Portafolios a tiempo discreto con caídas controladas	47
4.	Optimización de portafolio con caídas controladas	49
4.1.	Presentación del problema	49
4.1.1.	Valor del portafolio	50
4.1.2.	Restricción de caída y proceso de referencia	51
4.1.3.	Proceso cociente	52
4.1.4.	Estrategias admisibles de inversión	53
4.1.5.	Espacio canónico	55
4.2.	Índice de desempeño para el caso potencia	55
4.3.	Índice de desempeño para el caso general	57
5.	Estrategias óptimas	61
5.1.	Estrategia de inversión óptima para el caso potencia	61
5.1.1.	Operadores contractivos	62
5.1.2.	Existencia	68
5.1.3.	Verificación.	71
5.2.	Resultados asintóticos vía función de Arrow-Pratt	73
5.2.1.	Estrategia óptima para el caso general	73
A.	Semi continuidad	77
A.1.	Métrica de Hausdorff	77
A.2.	Multifunciones	77
A.3.	Límite superior generalizado	78
B.	Orden	81
B.1.	Teorema de Orden	81

Dedicatoría

A mis hijas Gretel y Amalia, a mi esposa Andrea, a mis padres Negro y Emilce, a mis hermanos Esteban y Andres. A Ceci, Amelia y José A.

A Gretel y Amalia que son la razón de mi ser, porque las amo, porque cada paso que doy lo doy por ustedes y para ustedes, las dos han llegado a mi vida y me han enseñado lo que es el amor y me han demostrado la existencia de Dios.

A mi esposa Andrea Molina, quien con su apoyo durante estos siete años ha sostenido cada una de las líneas que conforman esta tesis, este trabajo es tan mío como de ella, su presencia, su paciencia, sus consejos y su amor tantas veces como lo fue necesario, me dieron la fortaleza para leer, para pensar, para escribir y resolver problemas durante días y noches enteras, en el momento más difícil ella nos sostuvo a mí y a mis hijas a sus espaldas, y por fortuna para nuestra familia nunca nos dejó caer. Cada vez que quieras leer algo, pasa por la biblioteca de nuestra casa, te invito a leer este trabajo pero nunca dejes de leer la portada, ahí donde se especifican los autores, en esa misma página encontraras tu nombre junto al mío, porque este trabajo es tuyo, tu eres el sustento de todo esto. Sin tu presencia tal vez mi tesis doctoral hubiera sido diferente, otros problemas, otras hipótesis, otras matemáticas.

Agradecimientos

En primer lugar yo quiero agradecer a mis padres Emilce y Wiliam por el apoyo incondicional que han tenido hacia mí durante toda la vida, ahora que soy padre sé que me han estado dando todo su amor. Quiero agradecer a mis hermanos Wiliam Esteban y Andrés Felipe por el apoyo que me han prestado durante este tiempo y en especial por cuidar de mis padres en mi larga ausencia.

No puedo dejar de agradecer a mi abuela Amelia que con su cariño extraño me ha motivado para lograr cada una de mis metas, además le agradezco el liderazgo con que ha manejado los hilos de nuestra familia, la formación que nos ha impartido han sido los cimientos para estar hoy aquí, sin su orientación tal vez las cosas serían diferentes.

A mi abuelo José Antonio le quiero dar gracias por el ejemplo como hijo, hermano, padre, abuelo y profesor que nos ha dado, su ejemplo ha calado en cada uno de nosotros y nos ha hecho mejores personas, gracias por *El Hombre que Calculaba*, pero la decisión ya estaba tomada, simplemente me distes la certeza de saber que escogía el camino correcto, y lo más importante el camino que yo quería. A mi Abuela Cecilia le quiero dar gracias por su amor, por su ternura y su entrega, gracias por esos cuadernos de hojas amarillas donde empecé a estudiar matemáticas. A todos los demás muchas gracias, aunque no estén en estos párrafos saben que los llevo en mi mente y mi corazón.

A la familia Barbosa Rojas (nuestra familia) el profesor Pedro, Alejandro y Natalia gracias por todo, aunque soy frío como un tempano quiero que sepan que los quiero mucho. Silveria, no tengo palabras para agradecer todo lo que usted fue y es para mí, con solo escribir su nombre se me han nublado los ojos, gracias por creer mí, gracias por su comprensión. Quiero que sepa que a todo el mundo le hablo de usted, que me jalo las orejas y ese cariño de madre que me entrego. Diana Milena, la ultima vez que la vi reconocí en usted una parte de su mamá, más ese carácter fuerte que la identifica a usted, pobre de Ian. Gracias, gracias por su compañía, gracias por su inteligencia, gracias por su palabra, gracias por su comprensión, gracias por su preocupación.

A el Dr. Daniel Hernández le quiero dar gracias por la oportunidad que me brindo en

el CIMAT, gracias por su profesionalismo, gracias por su tiempo, gracias por comportarse como un padre todo el tiempo, por regañarme cuando fue necesario, por premiarme cuando me lo merecí, por aconsejarme cuando no sabía qué hacer, gracias por la paciencia y sobre todo gracias por la comprensión.

Al Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT) le agradezco por abrirme las puertas de su institución y permitirme adelantar este trabajo, gracias por la asistencia que me brindaron tanto investigadores como administrativos, gracias por el bonito lugar de trabajo que me prestaron, gracias por la computadora, los pulmones, las copias, las hojas etc. Gracias por el apoyo económico tanto para mi sostenimiento personal como para mi asistencia a eventos académicos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) le agradezco por el apoyo económico que me brindo para mi sostenimiento personal y el de mi familia a través de la beca *No* 384997 con registro *No* 261801.

Quiero agradecer a todos mis tíos y tías por su compañía, su comprensión y su ayuda, todos ellos encabezados por mi tía Carmelita y mi tía Nancy.

Gracias a Iván y Liliana por su acojo y su amistad, y muchísimas gracias a mi amigo el muy estimado Adams y su familia. Igual, muchas gracias a mis amigos Ulises y el Dr. Eduardo Cardenas, Eduardo gracias por estar en ese momento tan difícil.

Quiero agradecer a mi amigo Alejandro Florez por la amistad que me ha brindado desde hace más de 16 años, gracias por escucharme y por sus consejos. También un agradecimiento muy especial a Fabrin Huertas y Ricardo Huertas por la amistad de toda la vida, pero en especial por la compañía, la tertulia de futbol, política y mujeres durante todo este tiempo a través del internet, acercándome cada tarde a mi tierra Colombia.

Introducción

Esta tesis es la compilación de dos proyectos de investigación. El primero, considera procesos de Markov controlados. El segundo, examina el modelo de un portafolio de inversión cuya principal característica es que el precio de los activos con riesgo se ve afectado por factores económicos externos, y el inversionista tiene un interés especial por estrategias de inversión que cumplen cierta restricción de caída.

La primera parte de la tesis se dedica a resolver un problema de optimización estocástico sobre el conjunto de estrategias o políticas de control admisibles. Para tal fin, se estudian procesos de Markov controlados donde el conjunto de controles es un conjunto finito, y los procesos controlados toman valor en un conjunto numerable infinito, *espacio de estados*. El índice de desempeño o función a optimizar que se emplea en esta tesis es sensible al riesgo, debido a la convexidad de la función de utilidad exponencial. En la literatura este índice se conoce como el criterio de costo promedio a largo plazo sensible al riesgo, o como la tasa de crecimiento exponencial para el costo del sistema. Dentro de este contexto y para dar solución al problema de optimización, la función de costo promedio óptima se caracteriza en términos de un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*.

El concepto de un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad o Poisson* lo introducen Cavazos Cadena y Hernández Hernández en [11], motivados por el efecto que tienen las estructuras de comunicación en los procesos de Markov controlados con respecto a la solución de la correspondiente ecuación de programación dinámica en el caso sensible al riesgo.

El problema que se considera en la primera parte de esta tesis tiene una historia bastante larga, y se ha resuelto por separado bajo un conjunto de suposiciones diferentes en cada caso, ver por ejemplo los siguientes trabajos: [13] - [15], [17], [20], [30] - [32], y las referencias que allí se citan. Pero la mayoría de las personas que han estudiado el problema se refieren al artículo de Howard y Matheson [24] como el trabajo pionero en esta área. Este trabajo podría resumirse de la siguiente manera: si los conjuntos de estados y controles son finitos, y bajo toda estrategia de control estacionaria la correspondiente

cadena de Markov es aperiódica, y el espacio de estados es una clase de comunicación, entonces la ecuación de programación dinámica asociada a dicho modelo controlado tiene una solución. A partir de la validez de la ecuación de programación dinámica, es decir, la existencia de una solución, se puede caracterizar la función de costo promedio óptima como una función constante.

Por otro lado, si el conjunto de estados es finito y el conjunto de controles es un espacio de Borel general, Cavazos Cadena y Fernández Gaucherand en [7] extendieron los resultados de Howard y Matheson bajo las mismas hipótesis de comunicación pero omitiendo la parte aperiódica, al mismo tiempo que demostraron vía un ejemplo detallado que aún y cuando se cumplen las hipótesis de [24] sus resultados no se podían extender si el conjunto de estados es un conjunto numerable infinito; siendo el anterior hecho una de las motivaciones para el trabajo que se desarrolla en esta tesis.

Condición simultanea de Doeblin: existe un estado z y una constante positiva k , de tal forma que la esperanza del primer tiempo de arribo al estado z bajo cualquier estrategia de control estacionaria está acotada por la constante k .

Cavazos Cadena y Fernández Gaucherand bajo la condición de Doeblin, demostraron en [8] que para una función de utilidad exponencial con parámetro de riesgo bastante pequeño existe una solución para la correspondiente ecuación de programación dinámica, por lo tanto se puede caracterizar la función de costo promedio óptima. Sin embargo, en ese mismo trabajo se exhibe un ejemplo que deja al descubierto que el resultado no es válido para un parámetro de riesgo grande, a la vez que deja ver el impacto que tienen en el costo promedio los estados transitorios. Este ejemplo, remarca un contraste con el criterio de costo promedio a largo plazo neutral al riesgo, pues en ese caso, en general bajo la condición de Doeblin existe una solución para la ecuación de programación dinámica. Otro hecho importante y que tiene relación con los resultados que aquí se pretenden exponer, y que se menciona en [8] ó en [1], es que incluso si se cumple la condición simultanea de Doeblin y la función de costo promedio óptima es constante, no tiene por qué existir una solución para la correspondiente ecuación de programación dinámica.

El párrafo anterior manifiesta la importancia que tienen las estructuras de comunicación al momento de asegurar la existencia de una solución para la ecuación de programación dinámica, y es ésta otra de las motivaciones de este trabajo. Bajo hipótesis de comunicación más débiles que la condición de Doeblin, en esta tesis se aseguran la existencia de soluciones locales a la ecuación de programación dinámica y, haciendo uso de estas ecuaciones locales se caracteriza la función de costo promedio óptima.

Los resultados que se obtiene en la primera parte son una extensión de los resultados

que lograron Cavazos Cadena y Hernández Hernández para cadenas de Markov clásicas en [10] y [11]; y una extensión de los resultados conseguidos por Alanís Durán y Cavazos Cadena en [1] para procesos de Markov controlados con un conjunto de estados finito. Por lo tanto, los argumentos que se utilizan en la primera parte de la tesis se basan en los trabajos que se presentaron en [1] y en [10].

La consecución de los resultados de la primera parte se basan en la construcción de una familia de operadores contractivos, que a la postre, junto con la hipótesis de que existe un conjunto finito para el cual el primer tiempo de arribo bajo toda estrategia estacionaria es finito, casi seguramente, permiten definir una relación de equivalencia que trae como consecuencia una partición del conjunto de estados, y la existencia sobre cada clase de equivalencia de una solución a la correspondiente ecuación de programación dinámica.

La primera parte de esta tesis se ha publicado bajo el título *Local Poisson equations Associated with Discrete Time Markov Control Processes* en la revista *Journal of Optimization Theory and Applications*, ver [19].

En la segunda parte de la tesis se considera un problema de optimización de portafolios a tiempo discreto; donde el *inversionista* se conduce bajo una función de utilidad exponencial con aversión al riesgo o bajo una familia de funciones de utilidad cóncavas más generales.

En esta tesis, se establece y se trabaja bajo el mismo modelo que instauraron Bielecki, Hernández y Pliska en [4], el cual discretiza el modelo que presentaron Bielecki y Pliska en [5], y cuya principal característica es que el precio relativo de los activos con riesgo es afectado por factores económicos o financieros externos al mercado, que se representan como procesos Gaussianos en el modelo a tiempo continuo, o como una cadena de Markov estacionaria para el modelo a tiempo discreto.

En el modelo que presentaron Bielecki, Hernández y Pliska en [4] aparece otra característica especial: la distribución del precio relativo de los activos con riesgo no solo depende del estado factor en el comienzo de un periodo de comercialización, sino que también depende del estado factor al final del periodo. Esta característica junto con condiciones de comunicación -similares a las que establecen Howard y Matheson en [24] sobre la cadena de Markov factor- le permiten a Bielecki, Hernández y Pliska transformar el problema original en un problema de control estocástico óptimo sensible al riesgo, similar al que se estudia en la primera parte de la tesis, salvo que este nuevo problema cumple condiciones de comunicación estándar, como son las hipótesis que se establecen en [24].

En relación con el párrafo anterior, el índice o criterio que se usa en esta tesis para medir el desempeño de una estrategia de inversión es el mismo que se utiliza en [4] y

en [5], y se conoce en la literatura como la tasa de crecimiento exponencial esperada a largo plazo en relación con una utilidad potencia. Una de las innovaciones del modelo presentado por Bielecki y Pliska en [5], y de este índice de desempeño es que posibilita el empleo de técnicas que se usan en teoría de control estocástico sensible al riesgo.

La naturaleza del criterio que se usa en esta tesis radica en la relación asintótica entre la utilidad esperada y su varianza impactada por un factor de riesgo.

La diferencia entre el trabajo que se presenta en esta tesis y el trabajo de Bielecki, Hernández y Pliska en [4] radica en que, en este trabajo se resuelve un problema de optimización sobre un conjunto de estrategias de inversión que cumplen una restricción de caída que puede explicarse de la siguiente manera: el valor del portafolio no puede estar por debajo de un porcentaje fijo del máximo que ya haya alcanzado; mientras que en [4] se trabaja sobre un conjunto de estrategias de inversión que obedecen una restricción de no banca rota.

De hecho, el problema que se afronta en la segunda parte de esta tesis es similar en las restricciones de caída al que enfrentan Grossman y Zhou en [18] para el modelo de Black-Scholes-Merton a tiempo continuo. Grossman y Zhou recalcan que la solución para el caso de no banca rota en el modelo de Black-Scholes-Merton viola la restricción de caída que se imponen en [18]. Por lo tanto, en relación con esta tesis, como ya se insinuó, la solución que presentan en [4] se obtiene como: la solución de un problema de control estocástico óptimo sensible al riesgo, y es de esperar que dicha solución no cumpla la restricción de caída, pues en cada tiempo de comercialización dicha estrategia óptima depende de los estados factor inicial y final del periodo; mientras que la solución que se presenta en esta tesis no solo depende de los estados factor inicial y final del periodo sino que también depende del valor del portafolio al inicio del periodo de comercialización.

También, debido a la característica del índice de desempeño, en este trabajo se utilizan técnicas de teoría de control estocástico óptimo para establecer la existencia de una estrategia de inversión óptima. La solución al problema que se afronta en esta tesis se caracteriza a partir de la solución de una desigualdad de programación dinámica, análoga a la que se presenta y se resuelve en [12], [20] y [25].

Por la anterior razón, el desarrollo del trabajo en la segunda parte de la tesis se asemeja al trabajo hecho en [12] y [25], y consiste en dar solución al problema que se plantea a partir de una familia de operadores contractivos que permiten construir una solución a la correspondiente desigualdad de programación dinámica.

El segundo resultado importante que se presenta en la segunda parte de la tesis puede describirse de la siguiente manera: si el *inversionista* se rige bajo una función de utilidad U

cóncava diferente a una función potencia pero que además comparte el mismo *coeficiente asintótico sensible al riesgo*, entonces la tasa de crecimiento exponencial esperada óptima a largo plazo con respecto a la función de utilidad U coincide con la tasa de crecimiento exponencial óptima a largo plazo con respecto a la función potencia, y además la estrategia de inversión óptima de la segunda tasa también es óptima para la primera tasa.

Los resultados que se describen en el párrafo anterior extienden los resultados que se presentan en [21] para un portafolio de inversión, y los que se presentan en [9] para teoría de control estocástico óptimo sensible al riesgo. Por lo tanto, los resultado de la segunda parte de la tesis se obtiene a través de argumentos de continuidad y son razonamientos análogos o se asemejan a los que se presentan en [9] y [21].

La tesis se organiza en cinco capítulos. En el capítulo 1 se describe un modelo de Markov controlado a tiempo discreto, se establece y se justifica el problema a tratar en la primera parte de la tesis. En el capítulo 2 se fija la hipótesis sobre la cual se desarrolla toda la primera parte de la tesis, se define un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*, y se presentan los resultados principales como lo son el teorema de verificación y el teorema de existencia. Gran parte del capítulo 2 se dedica a caracterizar la función óptima a partir de un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*. En el capítulo 3 se demuestra la existencia de un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*. La segunda parte de la tesis empieza en el capítulo 4, y se dedica a construir un modelo matemático para el valor de un portafolio con m activos con riesgo, a la vez que se enuncian los dos problemas a tratar en la segunda parte. En el capítulo 5 se demuestra la existencia de una estrategia de inversión óptima que resuelva el primer problema que se plantea en el capítulo 4, y en la segunda parte del capítulo se demuestra que la solución óptima del primer problema, es solución del segundo problema; al final de la primera sección del capítulo 5 se pueden encontrar algunas conclusiones que deja esta tesis.

Parte I

Ecuaciones locales de optimalidad en modelos de Markov controlados

Capítulo 1

Procesos de Markov controlados

El propósito principal de este capítulo es justificar y motivar el problema que se afronta en la primera parte de esta tesis, pero antes de eso, la primera sección del capítulo está dedicada a introducir los procesos de Markov controlados, como lo hacen Hernández-Lerma y Lasserre en [22]. Se presentan algunas definiciones básicas y se establece el problema de control estocástico que se encara en la primera parte de este trabajo.

1.1. Problema de control estocástico

Para determinar un problema de control estocástico primero se necesita definir un modelo de control, un conjunto de estrategias o políticas admisibles y un índice de desempeño o función objetivo.

1.1.1. Modelo de Markov controlado

Definición 1.1.1. Un modelo de control a tiempo discreto es un arreglo constituido de los siguientes elementos:

- i) Un espacio de estados S , el cual para esta tesis se supone que es un conjunto numerable dotado con la topología discreta.
- ii) Un espacio de controles A , que se tomará finito. Además, para cada estado $x \in S$, se asume que existe un subconjunto no vacío $A_x \subseteq A$, que representa el conjunto de controles admisibles cuando el sistema se encuentra en el estado x .

El conjunto $\mathbb{K} := \{(x, a) : x \in S, a \in A_x\}$ representa los pares admisibles. De esta manera el modelo de Markov controlado queda completamente determinado con:

- iii) una función real $C : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, que interpretamos como el costo que genera el sistema y ,
- iv) un núcleo estocástico (una medida de probabilidad) sobre S dado \mathbb{K} , el cual se denota como: $P := P_{xy}(\cdot)$.

En general, un modelo de control está conformado por un espacio de estados y un espacio control que regularmente se supone son espacios de Borel, una función de costo y una medida de probabilidad o ley de transición; la cual está condicionada por un control. En la definición anterior se imponen ciertas características sobre el modelo, como lo son la cardinalidad del espacio de estados y del espacio control, dicho modelo se denotara de la siguiente manera $M = \langle S, A, C, P \rangle$, a menos de que se escriba lo contrario cada vez que en este trabajo el autor se refiera a un modelo de control M se esta haciendo referencia al modelo de la Definición 1.1.1.

La evolución de un proceso controlado en relación con el modelo M se puede interpretar de la siguiente manera: en cada tiempo $t \in \mathbb{N}$, se observa el estado de un sistema dinámico, se ve $X_t = x \in S$, a la vez un controlador escoge un control $A_t = a \in A_x$; entonces, se incurre en un costo $C(x, a)$ y con una probabilidad $P_{xy}(a)$ el siguiente estado del sistema será $X_{t+1} = y \in S$.

1.1.2. Políticas de control

Antes de definir una estrategia o política de control admisible es indispensable definir el espacio de historias admisibles (espacio canónico del proceso) hasta el tiempo t como: $\mathbb{H}_0 := S$, para $t = 0$, y $\mathbb{H}_t := \mathbb{K}^t \times S$, para $t \geq 1$.

Un vector de la forma $h_t := (x_0, a_0, \dots, a_{t-1}, x_t)$, es un elemento genérico de \mathbb{H}_t , y en esta tesis se considera al vector $H_t := (X_0, A_0, X_1, \dots, X_{t-1}, A_{t-1}, X_t)$, como un vector información hasta el tiempo t .¹

Una estrategia o política de control admisible π , es una sucesión de núcleos estocásticos $\pi := \{\pi_t\}_{t=0}^{\infty}$, donde cada π_t es una medida de probabilidad condicional definida sobre A dado \mathbb{H}_t , que satisface la siguiente restricción: para todo $h_t \in \mathbb{H}_t$, $\pi_t(A_{x_t} | h_t) = 1$. De aquí en adelante se denota la clase de todas las estrategias admisibles para el modelo M con la letra \mathbb{P} .

¹ $H_t :=$ Filtración canónica hasta el tiempo t .

Sea \mathbb{F} la clase de todas las funciones $f : S \rightarrow A$, tales que para cada $x \in S$, $f(x) \in A_x$, es decir $\mathbb{F} = \prod_{x \in S} A_x$. Una estrategia admisible π , es una estrategia estacionaria si existe $f \in \mathbb{F}$, tal que para todo $B \in \mathcal{B}(A)$, (se recuerda que $\mathcal{B}(C)$ se utiliza para denotar los conjuntos de Borel de un espacio métrico C) para todo vector $h_t \in \mathbb{H}_t$ y para todo $t \geq 0$, se tiene que $\pi_t(B|h_t) = 1_B(f(x_t))$. En consecuencia, se puede identificar la clase de todas las estrategias admisibles estacionarias con \mathbb{F} ; es claro que $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}$.

Además, sea $\Omega := \prod_{t=0}^{\infty} (S \times A)_t$, y \mathcal{F} la σ -álgebra producto correspondiente a Ω . Se puede observar que el espacio $\mathbb{H}_{\infty} := \prod_{t=1}^{\infty} \mathbb{K}_t$, con $\mathbb{K}_t := \mathbb{K}$, está contenido en Ω . Por lo tanto, para cada política $\pi \in \mathbb{P}$, y para cualquier estado inicial $x \in S$, existe una única medida de probabilidad P_x^{π} definida sobre el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) (ver [2, Teorema 2.7.2]). Así, de manera natural E_x^{π} representa el operador esperanza correspondiente a la medida de probabilidad P_x^{π} .

Nota 1.1.1. Para una estrategia $\pi \in \mathbb{P}$ y un estado $x \in S$, la probabilidad P_x^{π} sigue la siguiente dinámica -por así decirlo-

$$P_x^{\pi}[X_0 = x, A_0 = a_0, X_1 = x_1, A_1 = a_1, X_2 = x_2, \dots] = \pi_0(A_0 = a_0|x)P_{xx_1}(a_0)\pi_1(A_1 = a_1|x, a_0, x_1)P_{x_1x_2}(a_1)\pi_2(A_2 = a_2|x, a_0, x_1, a_1, x_2) \dots$$

Si $\pi \in \mathbb{F}$, o sea π se puede identificar con una función f , entonces en este caso la probabilidad P_x^f sigue la siguiente dinámica:

$$P_x^f[X_0 = x, A_0 = a_0, X_1 = x_1, A_1 = a_1, X_2 = x_2, \dots] = 1_{a_0}(f(x))P_{xx_1}(f(x))1_{a_1}(f(x_1))P_{x_1x_2}(f(x_1))1_{a_2}(f(x_2))P_{x_2x_3}(f(x_2)) \dots$$

En la anterior igualdad se puede ver que cuando el proceso es conducido bajo una estrategia estacionaria f , este es una cadena de Markov clásica.

1.1.3. Índice de desempeño

Si el controlador se rige bajo una función de utilidad U , y le ofrecen que pague una cantidad fija c en vez de un costo aleatorio Y , él con gusto acepta siempre y cuando $U(c) < E[U(Y)]$ y rechaza la oferta si $U(c) > E[U(Y)]$. El valor c^* , donde el controlador es indiferente entre aceptar o rechazar la oferta se conoce como el equivalente certero con respecto a la utilidad U del costo Y , y se denota como: $\Psi_U(Y)$, observe que $\Psi_U(Y) := U^{-1}(E[U(Y)])$. También, se dice que el controlador es sensible al riesgo cuando $E[Y] \leq \Psi_U(Y)$, o sea el caso en que la utilidad es una función convexa, y es neutral al riesgo si

$E[Y] = \Psi_U(Y)$; es decir cuando la función de utilidad es lineal y sin pérdida de generalidad en la mayoría de casos neutral al riesgo se toma U como la función identidad.

Ahora que el lector sabe identificar cuando el controlador es sensible o neutral al riesgo, y en vista de que ya se definió un modelo de control M , y se definió el conjunto de estrategias admisibles \mathbb{P} , un problema de *control óptimo a tiempo-discreto*, queda completamente determinado por el criterio o la función objetivo, el cual o la cual mide el desempeño de una estrategia $\pi \in \mathbb{P}$, cuando ésta es utilizada por el controlador.

Previo a definir o conocer algunos criterios de desempeño, es valioso mencionar que en esta tesis se trata con un problema donde el controlador es sensible al riesgo, y en horizonte infinito; es decir, que no se ha fijado a priori una fecha de terminación para el proceso controlado.

Después del anterior preámbulo, el paso a seguir es definir algunos criterios de desempeño, primero se hace para el caso neutral al riesgo y enseguida, para el caso sensible al riesgo.

En el caso donde el controlador es neutral al riesgo, por ejemplo, es común en varias aplicaciones encontrar los siguientes criterios de desempeño:

1. *Costo total descontado*: sea $\beta \in (0, 1)$ fijo, $\pi \in \mathbb{P}$ y $x \in S$, se define el criterio de desempeño para π cuando el proceso empieza en el estado x como:

$$V(\pi, x) := E_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t C(X_t, A_t) \right].$$

En este ejemplo, la función objetivo V es el equivalente certero del costo total incurrido por el sistema, llevado a valor presente con una tasa de interés $\alpha(\beta) > 0$, donde $\alpha(\beta) = \frac{1-\beta}{\beta}$.

2. *Costo promedio*: para un estrategia $\pi \in \mathbb{P}$, y un estado inicial $x \in S$. El equivalente certero con respecto a la función identidad del costo acumulado por el sistema hasta el tiempo n es $W_n(\pi, x) := E_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t) \right]$. De esta manera, el criterio se define como el promedio por unidad de tiempo a largo plazo del equivalente certero W_n , es decir

$$W(\pi, x) := \limsup \frac{1}{n} W_n(\pi, x).$$

Para asegurar que la función objetivo W está bien definida, se usa \limsup en lugar de \lim por causa de que no se puede aseverar que el límite exista, tampoco se toma el límite inferior porque de cierto modo el criterio es pesimista con respecto al costo esperado.

Sea p un número real mayor que uno. Entonces, en el caso sensible al riesgo por ejemplo, existe una familia de criterios *costo promedio* indexada por p , donde cada función objetivo es el promedio por unidad de tiempo a largo plazo, del equivalente certero con respecto a la función de utilidad potencia $U(x) = x^p$ del costo acumulado hasta cierto tiempo n , es decir, cada función objetivo indexada por p es de la forma

$$V_p(\pi, x) = \limsup \frac{1}{n} E_x^\pi \left[\left(\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t) \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

En segundo lugar, en el caso sensible al riesgo se puede encontrar el criterio de estudio en esta tesis, a saber, el criterio de *costo promedio* para la función exponencial $U(x) = e^x$. Así pues, para una estrategia $\pi \in \mathbb{P}$, y un estado $x \in S$, el equivalente certero con respecto a la exponencial del costo acumulado hasta cierto tiempo n es $J_n(\pi, x) = \ln(E_x^\pi[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}])$, y la función objetivo es

$$J(\pi, x) := \limsup \frac{1}{n} J_n(\pi, x). \quad (1.1)$$

1.1.4. Problema de control óptimo

Para el modelo de control $M = \langle S, A, C, P \rangle$, el conjunto de estrategias admisibles \mathbb{P} , y la función objetivo $J(\pi, x)$ en (1.1), el problema de control óptimo consiste en minimizar la función objetivo sobre el conjunto de estrategias admisibles \mathbb{P} , es decir, se quiere encontrar una estrategia $\pi^* \in \mathbb{P}$, de tal forma que

$$J(\pi^*, x) = \inf_{\pi \in \mathbb{P}} J(\pi, x); \quad (1.2)$$

si la estrategia π^* existe se le llama estrategia óptima.

La función

$$J^*(x) := \inf_{\pi \in \mathbb{P}} J(\pi, x), \quad (1.3)$$

se denomina: función valor de costo promedio óptimo.

En esta tesis, se dan condiciones suficientes para garantizar la existencia de una estrategia óptima en (1.2), y para garantizar la existencia de un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*, el cual a la postre caracteriza la función valor $J^*(x)$.

Nota 1.1.2. Observe que la función $J(\pi, x) = \limsup \frac{1}{n} \ln(E_x^\pi[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}])$, se puede interpretar como una tasa de crecimiento exponencial para el costo del sistema cuando el controlador usa la estrategia π . La función valor $J^*(x)$ se puede entender como la mejor de estas tasas o la más conveniente.

Antes de pasar a justificar los resultados que se van a exponer en esta tesis, se introduce notación que será necesaria en futuros postulados y demostraciones. Para una política $\pi \in \mathbb{P}$ y un estado inicial $x \in S$, se define el costo promedio a largo plazo (límite-inferior) como $J_-(\pi, x) := \liminf \frac{1}{n} J_n(\pi, x)$, y a su vez, la correspondiente función valor de costo promedio óptimo (límite-inferior) $J_*(x) := \inf_{\pi \in \mathbb{P}} J_-(\pi, x)$.

1.2. Especificación del problema

Como se mencionó en párrafos anteriores, el primer objetivo de la tesis consiste en demostrar la existencia de una estrategia óptima y caracterizar la función de valor óptimo $J^*(x)$, definida en (1.3).

En la mayoría de los casos, la caracterización de la función valor $J^*(x)$ se basa en la siguiente ecuación de programación dinámica.

Definición 1.2.1 (Ecuación de Optimalidad o Ecuación de Poisson). Para un número real $g \in \mathbb{R}$ y una función real $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, la ecuación de programación dinámica, o ecuación de optimalidad es:

$$e^{g+h(x)} = \inf_{a \in A_x} \left\{ e^{C(x,a)} \sum_{y \in S} e^{h(y)} P_{xy}(a) \right\}, \quad x \in S. \quad (1.4)$$

A partir de la ecuación de optimalidad (1.4), utilizando propiedades de esperanza condicional y siguiendo un argumento de inducción, se puede inferir la siguiente desigualdad

$$e^{ng+h(x)} \leq E_x^\pi [e^{\sum_{i=0}^{n-1} C(X_i, A_i) + h(X_n)}], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in S, \quad \forall \pi \in \mathbb{P}, \quad (1.5)$$

de la cual se puede llegar a la subsecuente conclusión: si h es acotada, y se cuenta con condiciones estándar de compacidad y continuidad sobre el espacio de controles A , entonces la función valor $J^*(x)$ es constante e igual a g , además, la estrategia óptima es una función $f \in \mathbb{F}$, con $f(x)$ el punto donde se alcanza el ínfimo en (1.4).

Por lo tanto, se puede decir que el problema de control óptimo (1.2) queda completamente resuelto; y de una forma muy elegante, si existe una solución acotada (g, h) de la ecuación de optimalidad. O sea, que en algunos casos con la finalidad de exhibir una solución al problema de control óptimo, se debe estudiar la existencia de soluciones acotadas para la ecuación de programación dinámica. Bajo hipótesis estándar de comunicación, existen trabajos en los cuales ya se ha demostrado la existencia de soluciones a la ecuación

(1.4), por ejemplo, es valioso notar como las siguientes dos hipótesis juegan un papel importante al momento de determinar la existencia de soluciones acotadas para la ecuación de optimalidad.

Para $F \subset S$ se define el primer tiempo de arribo a F como:

$$T_F := \min\{n \geq 1 : X_n \in F\}. \quad (1.6)$$

La variable aleatoria T_F , es un ejemplo de un tiempo de paro.

Hipótesis 1.2.1 (Comunicación). Para toda estrategia $f \in \mathbb{F}$, y todo par de estados $x, y \in S$, existe $n(x, y, f) \in \mathbb{N}$, de tal forma que $P_x^f[X_n = y] > 0$, además la matriz de transición que induce la estrategia f es aperiódica.

Hipótesis 1.2.2 (Condición simultánea de Doeblin). Existe un estado $z \in S$, y una constante positiva K , de tal forma que para todo $x \in S$, y toda estrategia $f \in \mathbb{F}$,

$$E_x^f[T_z] \leq K.$$

Cuando los espacios de estados y controles son finitos, Howard y Matheson bajo la Hipótesis 1.2.1 demostraron (ver [24]) la existencia de una solución (g, h) para la ecuación de optimalidad (1.4), utilizando teoría de Perron-Frobenius para matrices positivas. Cuando el espacio de estados es finito y el espacio de controles es arbitrario, bajo condiciones de compacidad-continuidad, y bajo la Hipótesis 1.2.1 omitiendo la periodicidad, Cavazos-Cadena y Fernández-Guachera exhibieron en [7] una solución para la ecuación de optimalidad, y además con un ejemplo (ver [7, Proposición 3.1-3.2]) mostraron que sus resultados no se pueden extender cuando el espacio de estados es numerable.

Por otra parte, bajo la condición simultánea de Doeblin, Cavazos-Cadena y Fernández-Guachera en [8] mostraron que para una función de utilidad exponencial $U(x) = e^{\lambda x}$, con λ suficientemente pequeño, existe una solución acotada para la correspondiente ecuación de programación dinámica, pero por otro lado para un λ grande y arbitrario, el siguiente Ejemplo 1.2.1, muestra que en dicho caso la función valor no es constante, por lo tanto no existe una solución acotada a la ecuación de programación dinámica. Además, el ejemplo deja ver un contraste interesante entre los criterios de costo promedio a largo plazo para el caso neutral al riesgo; donde bajo la Hipótesis 1.2.2 existe una solución para la correspondiente ecuación de programación dinámica, y el criterio de costo promedio en el caso sensible al riesgo. Así mismo, el Ejemplo 1.2.1 permite apreciar el impacto que tiene un estado recurrente en el desempeño del sistema.

Ejemplo 1.2.1. Sea $S = \{0, 1\}$ el espacio de estados, el conjunto $A = \{a\}$ es el espacio control, $C(x, a) = x$ la función de costo a un paso, y se define la ley de transición de la siguiente manera: tómesese $\beta \in (0, 1)$ de tal forma que se cumpla la siguiente desigualdad, $e\beta > 1$, entonces

$$\begin{aligned} P_{00}(a) &= 1 \\ P_{11}(a) &= \beta \\ P_{10}(a) &= 1 - \beta. \end{aligned}$$

De la definición, es fácil observar que $P_0[T_{\{0\}} = 1] = 1$ y $P_1[T_{\{0\}} = k] = \beta^{k-1}(1 - \beta)$, en consecuencia $E_0[T_{\{0\}}] = 1$ y $E_1[T_{\{0\}}] = (1 - \beta)^{-1}$, de modo que para este modelo la Hipótesis 1.2.2 se cumple con el estado $z = 0$. Como $z = 0$ es un estado absorbente, tampoco es difícil ver que $J^*(0) = 0$, además, por otra parte, como $e\beta > 1$

$$\begin{aligned} e^{\lim \frac{1}{n} J_n(\pi, 1)} &= \lim \left(E_1^\pi [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}] \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim \left(\sum_{k=1}^n E_1^\pi [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}[T_{\{0\}} = k]] + E_1^\pi [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}[T_{\{0\}} > n]] \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim \left(e(1 - \beta) \sum_{k=1}^n (e\beta)^{k-1} + (e\beta)^n \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim \left((e\beta)^n \frac{e - 1}{e\beta - 1} + e \frac{\beta - 1}{e\beta - 1} \right)^{\frac{1}{n}}, \\ &= e\beta. \end{aligned}$$

Entonces, $\ln(e\beta) = J^*(1) \neq J^*(0) = 0$, de manera que la función de valor óptimo no es constante.

Por consiguiente, como se acaba de ver, la existencia de una solución para la ecuación de optimalidad está estrechamente relacionada con la estructura de comunicación que se impone sobre el modelo. En consecuencia para casos más generales; con una estructura de comunicación más débil, no se puede cimentar la caracterización de la función de valor óptimo $J^*(x)$ sobre una única ecuación de optimalidad. Por lo tanto, esta tesis pretende dar condiciones que permitan caracterizar $J^*(x)$ en términos de un número finito mayor o igual a uno de ecuaciones locales de optimalidad, y condiciones que a la vez permitan garantizar la existencia de una estrategia óptima.

Capítulo 2

Ecuaciones locales de optimalidad

En este capítulo se enuncian los principales resultados de la primera parte de la tesis, como lo son el teorema de verificación y el teorema de existencia. El objetivo principal del capítulo es demostrar el teorema de verificación. Primero se impone sobre el modelo $M = \langle S, A, C, P \rangle$ la Hipótesis 2.1.1, la cual se mantendrá fija durante toda la primera parte de este trabajo, incluso si ella no se llega a mencionar explícitamente. Enseguida se define un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*, ya que como se mencionó anteriormente, la función valor $J^*(x)$ se caracteriza en términos de dicho sistema, y antes de entrar a la demostración del teorema de verificación se exhibe un ejemplo de tal sistema.

2.1. Ecuaciones locales de optimalidad

Hipótesis 2.1.1. i) Existe un subconjunto finito F de S ($F \subset S$), de tal forma que: para cada $f \in \mathbb{F}$, y cada $x \in S$,

$$P_x^f[T_F < \infty] = 1.$$

ii) La función de costo C es no negativa, y tiene soporte finito, es decir, el siguiente conjunto $Supp(C) := \{(x, a) \in \mathbb{K} : C(x, a) > 0\}$ es finito.

La primera parte de la Hipótesis 2.1.1 es una forma débil de la condición simultanea de Doeblin. El Ejemplo 2.1.1, que se expone más adelante, cuenta con un conjunto F que cumple las condiciones de la hipótesis anterior, que además es finito y cerrado con respecto a cualquier estrategia estacionaria $f \in \mathbb{F}$. Sin embargo, esto no tiene porque pasar regularmente, es decir, siempre que un proceso controlado bajo la Hipótesis 2.1.1

arribe a F , éste no tiene porque quedarse a vivir ahí eternamente. De hecho, como se vio en el Ejemplo 1.2.1, el tiempo que pasa el proceso por un estado transitorio es importante para cuantificar el costo promedio a largo plazo.

Definición 2.1.1. Un vector de la forma $\mathfrak{B} = ((S_1, g_1, h_1), (S_2, g_2, h_2), \dots, (S_k, g_k, h_k))$ es un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*, de orden k , para el modelo M si, y solo si, se cumplen las siguientes condiciones:

1. Los conjuntos S_1, S_2, \dots, S_k , forman una partición de S .
2. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, h_i es una función real definida sobre el conjunto S_i , de tal forma que:

$$\sup_{x \in S_i} h_i(x) = M_i < \infty. \quad (2.1)$$

Además, los g_i son números reales que respetan el siguiente orden:

$$g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_k. \quad (2.2)$$

3. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, y cada $x \in S_i$, el conjunto,

$$B_x := \{a \in A_x : \sum_{y \in \bigcup_{j=1}^i S_j} P_{xy}(a) = 1\}, \quad (2.3)$$

no puede ser vacío.

4. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, y cada $x \in S_i$, el par (g_i, h_i) satisface la siguiente ecuación local de optimalidad,

$$e^{g_i + h_i(x)} = \min_{a \in B_x} \{e^{C(x,a)} \sum_{y \in S_i} e^{h_i(y)} P_{xy}(a)\}. \quad (2.4)$$

Como ya se dijo, el siguiente teorema es el primero de los resultados principales de la primera parte de esta tesis. Este resultado, deja ver que soluciones (g_i, h_i) de un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad* son cotas locales por abajo para la función de valor (límite inferior) $J_*(x)$. Igualmente, si el controlador dirige el proceso bajo una estrategia estacionaria \tilde{f} , y justo para esta estrategia \tilde{f} , el número g_i es una cota por arriba de la tasa de crecimiento exponencial mientras el proceso permanece en S_i (ver Nota 1.1.2) y además, \tilde{f} es el punto donde se alcanza el mínimo en la ecuación (2.4), entonces el teorema dice que \tilde{f} es una estrategia óptima.

Teorema 2.1.1 (Verificación). *Bajo la Hipótesis 2.1.1, si*

$$\mathfrak{B} = ((S_1, g_1, h_1), (S_2, g_2, h_2), \dots, (S_k, g_k, h_k)),$$

es un sistema de ecuaciones locales de optimalidad para el modelo M , entonces,

$$J_*(x) \geq g_i, \quad x \in S_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.5)$$

Más aún, si asumimos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, y cada estado $x \in S_i$, existe $\tilde{f} \in \mathbb{F}$, que se satisface lo siguiente:

$$\tilde{f}(x) \in B_x, \quad e^{g_i + h_i(x)} = e^{C(x, \tilde{f}(x))} \sum_{y \in S_i} e^{h_i(y)} P_{xy}(\tilde{f}(x)), \quad (2.6)$$

y

$$\limsup \frac{1}{n} \ln(E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}]) \leq g_i, \quad (2.7)$$

entonces, para todo $x \in S_i$, $J_(x) = J^*(x) = g_i$, y $J^*(x) = \lim \frac{1}{n} J_n(\tilde{f}, x)$.*

La demostración del teorema anterior se divide en dos partes. La primera parte es la combinación de un argumento de inducción con un argumento de contradicción. En la segunda parte, el primer objetivo es mostrar que para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, y cada estado $x \in S_i$, si el proceso se conduce bajo la función \tilde{f} en (2.6) y en (2.7) entonces, g_i es la tasa de crecimiento exponencial para el costo del proceso mientras éste permanece en S_i ; una realidad que viene a implicar la siguiente desigualdad $J(\tilde{f}, x) \leq g_i$.

Se ha mencionado varias veces que la caracterización de la función valor $J^*(x)$, depende de la existencia de un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*, en el siguiente teorema se asegura tal existencia y además se obtiene una estrategia óptima.

Teorema 2.1.2 (Existencia). *Bajo la Hipótesis 2.1.1, para el modelo M , existe un sistema de ecuaciones locales de optimalidad \mathfrak{B} . Además, existe una política \hat{f} que cumple: (2.6) y (2.7).*

Con la finalidad de construir un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*, se hace uso de los puntos fijos de una familia de operadores contractivos, los cuales están definidos sobre el espacio de funciones acotadas en S .

Antes de pasar a la demostración del teorema de verificación, no está de más ver el siguiente ejemplo, el cual desvela que es un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*.

Ejemplo 2.1.1. Sea $S = \{0, 1, 2, \dots, \dots, \}$ el espacio de estados, $A = \{a_1, a_2\}$ el espacio control, se define la ley de transición de la siguiente manera: $P_{00}(a_1) = 1$, para $x = 1$ y para $x = 2$ $P_{xx}(a_1) = P_{x0}(a_1) = \frac{1}{2}$. Además, para cada entero positivo k , se tiene que $P_{3k,3k-3}(a_1) = P_{3k,3k+3}(a_1) = \frac{1}{2}$, y

$$P_{3k,3(k+1)}(a_2) = \frac{1}{2}, \quad P_{3k,3k-3}(a_2) = P_{3k,3k-2}(a_2) = \frac{1}{4},$$

$$P_{3k+1,3k+4}(a_1) = \frac{1}{2}, \quad P_{3k+1,3k-2}(a_1) = P_{3k+1,3k-3}(a_1) = \frac{1}{4},$$

$$P_{3k+1,3k+4}(a_2) = \frac{1}{2}, \quad P_{3k+1,3k-2}(a_2) = P_{3k+1,3k-3}(a_2) = P_{3k+1,3k-1}(a_2) = \frac{1}{6},$$

$$P_{3k+2,3k+5}(a_1) = \frac{1}{2}, \quad P_{3k+2,3k-3}(a_1) = P_{3k+2,3k-2}(a_1) = P_{3k+2,3k-1}(a_1) = \frac{1}{6},$$

$$P_{3k+2,3k-1}(a_2) = P_{3k+2,3k+5}(a_2) = \frac{1}{2}.$$

Se puede observar lo siguiente: para $x = 0, 1, 2$ el conjunto de controles admisibles es $A_x = \{a_1\}$, y para $x \in S \setminus \{0, 1, 2\}$, el conjunto de controles admisibles es $A_x = A$. En este ejemplo, se define la función de costo a un paso C de la siguiente manera:

$$C(x, a_1) := \begin{cases} x, & \text{if } x \in \{1, 2\}, \\ 0, & \text{if } x \in S \setminus \{1, 2\}, \end{cases}$$

y

$$C(x, a_2) := \begin{cases} 2x, & \text{if } x \in \{1, 2\}, \\ 0, & \text{if } x \in S \setminus \{1, 2\}. \end{cases}$$

No es difícil ver que $P_0^\pi[T_{\{0\}} = 1] = 1$ para toda $\pi \in \mathbb{P}$, además, para $x = 1$ y $x = 2$ se tiene que $P_x^\pi[T_{\{0\}} = n] = \frac{1}{2^n}$, por lo tanto para $x = 0, 1, 2$,

$$P_x^\pi[T_{\{0\}} < \infty] = 1. \tag{2.8}$$

Recuerde que bajo cualquier política estacionaria $f \in \mathbb{F}$, el correspondiente proceso controlado es una cadena de Markov clásica. Se define la parte entera de x como $\Xi(x)$, y el

proceso $Y_n := \Xi(X_n/3)$. Por lo tanto, para cualquier entero no negativo n , y cualquier $f \in \mathbb{F}$, si $Y_n > 0$, entonces,

$$P_x^f[Y_{n+1} = Y_n - 1 | H_n] = \frac{1}{2},$$

y

$$P_x^f[Y_{n+1} = Y_n + 1 | H_n] = \frac{1}{2}.$$

Si $Y_n = 0$, entonces $Y_{n+1} = 0$ P_x^f -casi seguramente (c.s.), es decir, que bajo cualquier estrategia estacionaria $f \in \mathbb{F}$ el proceso $\{Y_n\}$ es una caminata aleatoria simétrica con una barrera absorbente en el estado $\{0\}$, en conclusión, para todo $x \in S$, $P_x^f[Y_n = 0, \text{ para algún } n > 0] = 1$, entonces para todo x en S ,

$$P_x^f[X_n \in \{0, 1, 2\}, \text{ para algún } n > 0] = 1. \quad (2.9)$$

La siguiente proposición es consecuencia inmediata de (2.8) y (2.9).

Proposición 2.1.1. Para el Ejemplo 2.1.1, la Hipótesis 2.1.1 se cumple con $F = \{0\}$.

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior, para el Ejemplo 2.1.1, existe un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*. En primer lugar, la partición del espacio de estados S se define para $r = 0, 1, 2$, como:

$$S_r := \{3k + r : k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

El costo $C(0, a_1)$ es cero, y el estado cero es absorbente, entonces para cualquier estrategia $\pi \in \mathbb{P}$, se tiene que la función valor en cero es igual a cero $J^*(0) = 0$. Por otro lado, gracias a la relación (2.8), para $x = 1$ y cualquier política $\pi \in \mathbb{P}$, se tiene la siguiente igualdad

$$e^{J_n(\pi, 1)} = E_1^\pi[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}] = \sum_{r=1}^{n-1} e^r P_1^\pi[T_{\{0\}} = r] + e^n P_1^\pi[T_{\{0\}} \geq n],$$

la cual implica la siguiente estimación

$$\frac{e^n}{2^{n-1}} \leq e^{J_n(\pi, 1)} \leq n \frac{e^n}{2^{n-1}},$$

por lo tanto, $J^*(1) = \ln(e/2)$. De manera similar se puede calcular $J^*(2) = \ln(e^2/2)$. Ahora, sea \tilde{f} una política estacionaria tal que para todo $x \in S$, $\tilde{f}(x) = a_1$. Entonces, para cada $r \in \{0, 1, 2\}$, se definen localmente las siguientes funciones: para $x \in S_0$, $h_0(x) := 0$, para $r = 1$ y $r = 2$, $h_r(r) := 0$, y para $x \in S_r \setminus \{r\}$,

$$h_r(x) := \ln(E_x^{\tilde{f}}[e^{-J^*(r)T_r} \mathbb{I}_{[T_{\{r\}} < \infty]}]).$$

Proposición 2.1.2. Para el Ejemplo 2.1.1, $\mathbf{P} := ((S_0, g_0, h_0), (S_1, g_1, h_1), (S_2, g_2, h_2))$ es un sistema de ecuaciones locales de optimalidad, donde $g_r = J^*(r)$.

Demostración

1. Por definición $\{S_0, S_1, S_2\}$, es una partición de S .
2. Por definición, para cada $r \in \{0, 1, 2\}$, y cada $x \in S_r$, $h_r(x) \leq 0$. Más aún, para $r = 1$ ó $r = 2$, y un estado fijo de la forma $x = 3k + r$ en $S_r \setminus \{r\}$, se tiene la siguiente probabilidad $P_x^{\tilde{f}}[T_{\{r\}} = k] = \frac{1}{(2r+2)^k}$, por lo tanto

$$e^{h_r(x)} \geq e^{-g_r k} P_x^{\tilde{f}}[T_{\{r\}} = k] = \frac{1}{(e^{g_r} 2(r+1))^k}.$$

Es decir que para $r \in \{0, 1, 2\}$, y $x \in S_r$, la función nunca toma el valor $-\infty$, ($h_r(x) \in]-\infty, 0]$). En conclusión, $\sup_{x \in S_r} h_r(x) = M_r = 0 < \infty$, además por definición $g_0 < g_1 < g_2$.

3. Por la construcción del modelo presente en el Ejemplo 2.1.1, para cada $x \in S_0 \cup S_1 \cup \{2\}$, $B_x = \{a_1\}$, y para $x \in S_2 \setminus \{2\}$, $B_x = A$.
4. Aún falta por demostrar la cuarta condición de la Definición 2.1.1. Cuando $r = 0$, la conclusión es inmediata, pasa lo mismo para $r = 1, x = 1$ y $r = 2, x = 2$. A partir de la definición de la ley de transición en el ejemplo 2.1.1, es fácil observar que para $x \in S_1 \setminus \{1\}$, se cumple

$$P_x^{\tilde{f}}[X_1 \in \{x-4, x-3, x+3\}] = 1,$$

como $x-4 \in S_0$, y S_0 es un conjunto cerrado bajo la política \tilde{f} , entonces

$$P_x^{\tilde{f}}[X_1 = x-4, T_1 < \infty] = 0,$$

por lo tanto, para $x \in S_1$ y $x > 3$

$$\begin{aligned} e^{h_1(x)} &= \\ E_x^{\tilde{f}}[e^{-g_1 T_{\{1\}}} \mathbb{I}[X_1 = x-3, T_{\{1\}} < \infty]] &+ E_x^{\tilde{f}}[e^{-g_1 T_{\{1\}}} \mathbb{I}[X_1 = x+3, T_{\{1\}} < \infty]] = \\ e^{-g_1} P_{x,x-3}(a_1) E_{x-3}^{\tilde{f}}[e^{-g_1 T_{\{1\}}} \mathbb{I}[T_{\{1\}} < \infty]] &+ e^{-g_1} P_{x,x+3}(a_1) E_{x+3}^{\tilde{f}}[e^{-g_1 T_{\{1\}}} \mathbb{I}[T_{\{1\}} < \infty]] = \\ e^{-g_1} P_{x,x-3}(a_1) e^{h_1(x-3)} &+ e^{-g_1} P_{x,x+3}(a_1) e^{h_1(x+3)}, \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} E_4^{\tilde{f}}[e^{-g_1 T_{\{1\}}} \mathbb{I}[X_1 = 4 - 3, T_{\{1\}} < \infty]] &= E_4^{\tilde{f}}[e^{-g_1 T_{\{1\}}} \mathbb{I}[X_1 = 1]] \\ &= e^{-g_1} P_{4,1}(a_1) = e^{-g_1} P_{4,1}(a_1) e^{h_1(1)}. \end{aligned}$$

De este modo, combinando los dos últimos juegos (conjuntos) de ecuaciones, se sigue que

$$e^{h_1(x)} = e^{-g_1} \sum_{y \in S_1} e^{h_1(y)} P_{x,y}(a_1), \quad x \in S_1 \setminus \{1\}. \quad (2.10)$$

Para $x \in S_1 \setminus \{1\}$, $C(x, a_1) = 0$, entonces la igualdad (2.10) implica (2.4). Cuando x está en $S_2 \setminus \{2\}$, se puede establecer un resultado similar observando que el mínimo sobre el lado derecho de la ecuación (2.4) se alcanza en a_1 .

□

2.2. Teorema de verificación

Esta sección junto con la siguiente son el plato fuerte de este capítulo, y están dedicadas a demostrar el teorema de verificación. Como se dijo, dicha demostración se divide en dos partes, la primera parte consiste en un argumento de inducción sobre el orden k del sistema, mezclado con un argumento de contradicción el cual se basa en contestar la siguiente pregunta: ¿Qué pasa, si existe una clase $S_r \neq S_k$, un estado x en S_r y una estrategia $\pi \in \mathbb{P}$ de tal forma que la correspondiente tasa de crecimiento exponencial asociada a π cuando el proceso empieza en x sea mayor que la tasa g_r ? La segunda parte consiste en demostrar que para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, y cada estado $x \in S_i$, si el proceso se conduce bajo la función \tilde{f} que cumple (2.6) y cumple (2.7), g_i es la tasa de crecimiento exponencial para el costo del proceso mientras este permanece en S_i ; una afirmación que a través del Lema 2.3.2 y la Proposición 2.3.1 con llevan a la demostración de la siguiente desigualdad: $J(\tilde{f}, x) \leq g_i$, la cual implica de inmediato la segunda parte del teorema de verificación.

2.2.1. Paso de inducción

La Proposición 2.2.1 es un elemento clave a la hora de completar la demostración del teorema de verificación. La prueba de dicha proposición se basa en la desigualdad que se obtiene en el siguiente lema.

Lema 2.2.1. Sea \mathfrak{B} , un sistema de ecuaciones locales de optimalidad de orden k para el modelo M . Entonces, para cada política $\pi \in \mathbb{P}$, y $n \in \mathbb{N}$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$e^{ng_k+h_k(x)} \leq E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)+h_k(X_n)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq n]}], \quad x \in S_k. \quad (2.11)$$

La demostración de este lema sigue un argumento de inducción sobre la variable temporal n .

Demostración. Sea x un estado arbitrario en S_k , entonces, en este caso a partir de la Definición 2.1.1, $B_x = A_x$, por lo tanto, de la ecuación (2.4) para cada $a \in A_x$, se tiene que:

$$e^{g_k+h_k(x)} \leq e^{C(x,a)} \sum_{y \in S_k} e^{h_k(y)} P_{xy}(a), \quad (2.12)$$

o sea que para cualquier estrategia $\pi \in \mathbb{P}$,

$$\pi_0(a|x) e^{g_k+h_k(x)} \leq \sum_{y \in S_k} e^{C(x,a)} e^{h_k(y)} P_{xy}(a) \pi_0(a|x),$$

sumando sobre A_x en ambos lados de la desigualdad anterior se llega de inmediato a la siguiente desigualdad:

$$e^{g_k+h_k(x)} \leq \sum_{a \in A_x} \sum_{y \in S_k} e^{C(x,a)} e^{h_k(y)} P_{xy}(a) \pi_0(a|x) = E_x^\pi [e^{C(X_0, A_0)} e^{h_k(X_1)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq 1]}],$$

y de esta manera se tiene que la desigualdad (2.11) se cumple para $n = 1$.

Supóngase que la desigualdad (2.11) es válida para un entero positivo n . Sean $x \in S_k$, y $\pi \in \mathbb{P}$ arbitrarios, haciendo uso de la propiedad de Markov, y de la desigualdad (2.12) se obtiene que

$$\begin{aligned} E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^n C(X_t, A_t)+h_k(X_{n+1})} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq n+1]} | H_n, A_n] &= \\ e^{\sum_{t=0}^n C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq n]} E_x^\pi [e^{h_k(X_{n+1})} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]} | X_n, A_n] &= \\ e^{\sum_{t=1}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq n]} e^{C(X_n, A_n)} \sum_{y \in S_k} e^{h_k(y)} P_{X_n y}(A_n) &\geq \\ e^{\sum_{t=1}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq n]} e^{g_k+h_k(X_n)}. \end{aligned}$$

Integrando con respecto a P_x^π en ambos lados de la desigualdad anterior, y haciendo uso de la hipótesis de inducción, se sigue que

$$\begin{aligned} E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^n C(X_t, A_t)+h_k(X_{n+1})} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq n+1]}] &\geq e^{g_k} E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)+h_k(X_n)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq n]}] \\ &\geq e^{g_k} e^{ng_k+h_k(x)} \\ &= e^{(n+1)g_k+h_k(x)}. \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición, demuestra la primera parte del teorema de verificación en la última clase de la partición, es decir sobre el conjunto S_k en el *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*.

Proposición 2.2.1. Sea \mathfrak{B} , un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad* de orden k para el modelo M . Entonces, para todo $x \in S_k$, $J_*(x) \geq g_k$.

Demostración. Sea $x \in S_k$ arbitrario, observe que para todo entero positivo n , y $\pi \in \mathbb{P}$,

$$e^{J_n(\pi, x)} = E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}] \geq E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq n]}].$$

Por otro lado, de (2.1) se sigue que para todo $x \in S_k$, $h_k(x) - M_k \leq 0$, por lo tanto, de la desigualdad del Lemma 2.2.1 se obtiene la siguiente desigualdad,

$$\begin{aligned} e^{J_n(\pi, x)} &\geq E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t) + h_k(X_n) - M_k} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq n]}] \\ &= e^{-M_k} E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t) + h_k(X_n)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq n]}] \geq e^{-M_k} e^{ng_k + h_k(x)}. \end{aligned}$$

Tomando logaritmo natural, y después el límite inferior en ambos lados de la desigualdad anterior, se llega a la siguiente desigualdad, $\liminf \frac{J_n(\pi, x)}{n} \geq g_k$, entonces, minimizando sobre el conjunto de todas las políticas se sigue que $J_*(x) \geq g_k$. □

2.2.2. Cotas inferiores de la función valor costo promedio óptimo

Con la finalidad de dar respuesta a la pregunta que fundamenta el argumento de contradicción utilizado para demostrar la primera parte del teorema de verificación, es indispensable en este punto introducir el concepto de modelo de control reducido.

Sea \mathfrak{B} , un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad* de orden $k > 1$ para el modelo M . Sea $\widehat{S} := \bigcup_{j=1}^{k-1} S_j$, como B_x es no vacío, se define el conjunto no vacío \widehat{A}_x de la siguiente manera:

$$\widehat{A}_x := \{a \in A_x : \sum_{y \in \widehat{S}} P_{xy}(a) = 1\}, \quad x \in \widehat{S}.$$

Definición 2.2.1. Sea \mathfrak{B} , un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad* de orden $k > 1$ para el modelo M . Sea $\widehat{\mathbb{K}} := \{(x, a) : x \in \widehat{S}, a \in \widehat{A}_x\}$. Se define un kernel estocástico \widehat{P} sobre \widehat{S} dado $\widehat{\mathbb{K}}$, como $\widehat{P}_{xy}(a) := P_{xy}(a)$, y se define una función de costo $\widehat{C} : \widehat{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera $\widehat{C}(x, a) := C(x, a)$. Entonces, se puede especificar el siguiente modelo de control reducido: $\widehat{M} = \langle \widehat{S}, A, \{\widehat{A}_x\}_{x \in \widehat{S}}, \widehat{C}, \widehat{P} \rangle$.

Nota 2.2.1. De la definición 2.2.1, se puede ver que sí \mathfrak{B} es un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad* de orden $k > 1$ para el modelo M , entonces,

$$\widehat{\mathfrak{B}} = ((S_1, g_1, h_1), (S_2, g_2, h_2), \dots, (S_{k-1}, g_{k-1}, h_{k-1})),$$

es un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad* de orden $k - 1$, para el modelo reducido \widehat{M} .

¿Qué pasa, si existe una clase $S_r \neq S_k$, un estado x en S_r y una estrategia $\pi \in \mathbb{P}$ de tal forma que $J_-(\pi, x) < g_r$? Respuesta:

Lema 2.2.2. Sea \mathfrak{B} , un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad* de orden $k > 1$ para el modelo M . Supongamos que para algún $r \in \{1, 2, 3, \dots, k - 1\}$ y $x \in S_r$, existe una política $\pi \in \mathbb{P}$ tal que

$$J_-(\pi, x) < g_r. \quad (2.13)$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_x^\pi[\pi_n(\widehat{A}_{X_n} | H_n) = 1] = 1$.

La demostración de este lema se basa en un argumento por contradicción.

Demostración. Para cada $y \in \widehat{S}$, se define el conjunto $\widehat{A}_y^c := A_y \setminus \widehat{A}_y$. Supóngase que existe un $n \in \mathbb{N}$, para el cual se cumple la siguiente desigualdad:

$$P_x^\pi[\pi_n(\widehat{A}_{X_n}^c | H_n) > 0] > 0. \quad (2.14)$$

Por otro lado, se puede ver que

$$P_x^\pi[X_{n+1} \in S_k | H_n] = \sum_{a \in A_{X_n}} \sum_{y \in S_k} P_{X_n y}(a) \pi_n(a | H_n) \geq \sum_{a \in \widehat{A}_{X_n}^c} \sum_{y \in S_k} P_{X_n y}(a) \pi_n(a | H_n).$$

Es decir, que la suposición (2.14) implican que existe una probabilidad positiva de que el proceso visite la clase S_k al tiempo $n + 1$,

$$P_x^\pi[X_{n+1} \in S_k] > 0. \quad (2.15)$$

Tómese $\tilde{h}_n \in \mathbb{H}_n$, y $\tilde{a} \in A_{x_n}$ arbitrarios pero fijos, se define la estrategia de desplazamiento $\rho^{(\tilde{h}_n, \tilde{a})}$ de la siguiente manera:

$$\rho_t^{(\tilde{h}_n, \tilde{a})}(\cdot | h_t) := \pi_{n+1+t}(\cdot | \tilde{h}_n, \tilde{a}, h_t), \quad h_t \in \mathbb{H}_t, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para un $m > n + 1$,

$$\begin{aligned}
& E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^{m-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]} | H_n, A_n, X_{n+1}] = \\
& e^{\sum_{t=0}^n C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]} E_x^\pi [e^{\sum_{t=n+1}^{m-1} C(X_t, A_t)} | H_n, A_n, X_{n+1}] = \\
& e^{\sum_{t=0}^n C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]} E_{X_{n+1}}^{\rho^{(H_n, A_n)}} [e^{\sum_{t=0}^{m-n-2} C(X_t, A_t)}] \geq \\
& e^{-(n+1)\|C\|} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]} E_{X_{n+1}}^{\rho^{(H_n, A_n)}} [e^{\sum_{t=0}^{m-n-2} C(X_t, A_t)}] \geq \\
& e^{-(n+1)\|C\|} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]} E_{X_{n+1}}^{\rho^{(H_n, A_n)}} [e^{\sum_{t=0}^{m-n-2} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_k; t \leq m-n-1]}].
\end{aligned}$$

El Lema 2.2.1, la desigualdad anterior, y (2.1), llevan a la siguiente desigualdad:

$$E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^{m-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]} | H_n, A_n, X_{n+1}] \geq e^{-(n+1)\|C\|} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]} e^{-M_k} e^{(m-n-1)g_k + h_k(X_{n+1})},$$

integrando con respecto a P_x^π en ambos lados de la desigualdad anterior se obtiene que

$$E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^{m-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]}] \geq e^{-(n+1)\|C\|} e^{-M_k} e^{(m-n-1)g_k} E_x^\pi [e^{h_k(X_{n+1})} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]}].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
e^{J_m(\pi, x)} &= E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^{m-1} C(X_t, A_t)}] \geq E_x^\pi [e^{\sum_{t=0}^{m-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]}] \\
&\geq e^{-(n+1)\|C\|} e^{-M_k} e^{(m-n-1)g_k} E_x^\pi [e^{h_k(X_{n+1})} \mathbb{I}_{[X_{n+1} \in S_k]}].
\end{aligned}$$

Como la función $e^{h_k(x)}$ es positiva, y el evento $[X_{n+1} \in S_k]$ tiene una medida positiva (ver (2.15)), entonces $\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} J_m(\pi, x) \geq g_k$. Pero (2.13) implica que $g_k < g_r$. Por lo tanto, se ha arribado a una contradicción (ver (2.2)). \square

Evidentemente si tal estrategia π en el Lemma 2.2.2 existe, y si el proceso se conduce bajo esta estrategia, entonces, casi seguramente el proceso nunca visita la clase S_k . Ciertamente ésta es la respuesta que presenta el Lema 2.2.2 a la pregunta que lo precede. Lo importante, como se verá a continuación, es que esa estrategia π se puede identificar con una estrategia Δ correspondiente al modelo de control reducido; que en conclusión resulta que miden o integran lo mismo.

Para el modelo de control reducido \widehat{M} el espacio de historias admisibles hasta el tiempo t se denota por $\widehat{\mathbb{H}}_t$, la clase de estrategias admisibles y la clase de estrategias admisibles estacionarias se denotan por $\widehat{\mathbb{P}}$ y $\widehat{\mathbb{F}}$, respectivamente. Para cada política $\rho \in \widehat{\mathbb{P}}$, el costo promedio a largo plazo (límite-inferior) se denota como $\widehat{J}_-(\rho, \cdot)$, y se denota por $\widehat{J}_*(\cdot)$ a la correspondiente función valor de costo óptimo (límite-inferior).

Dada una $\omega \in \widehat{\mathbb{F}}$, y π como en el Lema 2.2.2, para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n \in \widehat{\mathbb{H}}_n$, y $D \in \mathcal{B}(A)$, se define la estrategia $\Delta \in \widehat{\mathbb{P}}$ como:

$$\Delta_n(D|h_n) := \pi_n(D \cap \widehat{A}_{x_n}|h_n) + (1 - \pi_n(\widehat{A}_{x_n}|h_n))\delta_{\omega(x_n)}(D). \quad (2.16)$$

Lema 2.2.3. Sea \mathfrak{B} , un sistema de ecuaciones locales de optimalidad de orden $k > 1$ para el modelo M . Se supone que para algún $r \in \{1, 2, 3, \dots, k-1\}$, $x \in S_r$, y $\pi \in \mathbb{P}$, se cumple la desigualdad (2.13). Entonces, para la estrategia Δ definida en (2.16), se tiene que

$$P_x^\Delta[H_n \in D] = P_x^\pi[H_n \in D], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad D \in \mathcal{B}(\widehat{\mathbb{H}}_n), \quad (2.17)$$

además,

$$\widehat{J}_-(\Delta, x) = J_-(\pi, x) < g_r. \quad (2.18)$$

Demostración. El argumento es por inducción. Primero, $P_x^\Delta[x \in D] = \delta_x(D) = P_x^\pi[x \in D]$, entonces se cumple (2.17) para $n = 0$. Ahora, se asume que (2.17) es válida para un entero positivo n . Sean $D \in \mathcal{B}(\widehat{\mathbb{H}}_n)$, $D_1 \in \mathcal{B}(A)$, y $D_2 \subset \widehat{S}$, entonces

$$P_x^\pi[H_n \in D, A_n \in D_1, X_{n+1} \in D_2 | H_n] = \mathbb{I}_{[H_n \in D]} \sum_{a \in D_1} \sum_{y \in D_2} P_{X_n y}(a) \pi_n(a | H_n).$$

También, como consecuencia del Lema 2.2.2 y (2.16) se tiene que $\Delta_n(\cdot | H_n) = \pi_n(\cdot | H_n) P_x^\pi$ casi seguramente (c.s.). Por lo tanto

$$P_x^\pi[H_n \in D, A_n \in D_1, X_{n+1} \in D_2 | H_n] = \mathbb{I}_{[H_n \in D]} \sum_{a \in D_1} \sum_{y \in D_2} P_{X_n y}(a) \Delta_n(a | H_n) P_x^\pi \text{ c. s.}$$

haciendo uso de la hipótesis de inducción se sigue que

$$\begin{aligned} P_x^\pi[H_n \in D, A_n \in D_1, X_{n+1} \in D_2] &= \int_D \sum_{a \in D_1} \sum_{y \in D_2} P_{X_n y}(a) \Delta_n(a | H_n) dP_x^\pi(h_n) \\ &= \int_D \sum_{a \in D_1} \sum_{y \in D_2} P_{X_n y}(a) \Delta_n(a | H_n) dP_x^\Delta(h_n) \\ &= P_x^\Delta[H_n \in D, A_n \in D_1, X_{n+1} \in D_2]. \end{aligned}$$

Entonces, por [6, Teorema 3.3], se cumple (2.17) para $n + 1$. Es así que del argumento anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $E_x^\Delta[e^{\sum_{t=0}^{n-1} \widehat{C}(X_t, A_t)}] = E_x^\pi[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}]$. Por consiguiente $\widehat{J}_-(\Delta, x) = J_-(\pi, x)$. \square

Ya se tienen las herramientas suficientes para demostrar la primera parte del teorema de verificación. Como se ha venido anunciando el argumento de la prueba es una combinación entre un razonamiento por inducción y uno por contradicción.

Demostración del Teorema 2.1.1 primera parte: La inducción es sobre el orden k del sistema \mathfrak{B} . Primero, si \mathfrak{B} tiene orden $k = 1$, el resultado se sigue de la Proposición 2.2.1. Supóngase que (2.5) es válida para $k = m - 1$, con $m \geq 2$. Sea \mathfrak{B} un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad* de orden $k = m$. Entonces, el sistema reducido $\widehat{\mathfrak{B}}$ tiene orden $k = m - 1$, y por la hipótesis de inducción se tiene que:

$$\widehat{J}_*(x) := \inf_{\pi \in \widehat{\mathbb{P}}} (\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \widehat{J}_n(\pi, x)) \geq g_i, \quad x \in S_i, \quad i = 1, 2, \dots, m - 1. \quad (2.19)$$

Ahora, si se supone que en el sistema original \mathfrak{B} , existe $r \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$ y $x \in S_r$ tal que

$$J_*(x) := \inf_{\pi \in \mathbb{P}} (\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} J_n(\pi, x)) < g_r,$$

entonces, la definición de \inf implica que existe una política $\pi \in \mathbb{P}$, tal que $J_-(\pi, x) < g_r$. Por lo tanto, por el Lema 2.2.3 y por (2.18), existe una estrategia $\Delta \in \widehat{\mathbb{P}}$ tal que $\widehat{J}_-(\Delta, x) = J_-(\pi, x) < g_r$, es decir se ha llegado a una contradicción con (2.19). El anterior argumento, y la Proposición 2.2.1 implican que

$$J_*(x) = \inf_{\pi \in \mathbb{P}} (\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} J_n(\pi, x)) \geq g_i, \quad x \in S_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

□

2.3. Estrategia óptima

A partir de este momento y hasta el final de este capítulo, \widetilde{f} denota una estrategia estacionaria que cumple las condiciones (2.6) y (2.7). La demostración de la segunda parte del teorema de verificación se basa en la Proposición 2.3.1, la cual utiliza en su demostración que $\widetilde{f}(x) \in B_x$, y el Lema 2.3.2.

A partir de la veracidad del límite que se demuestra en el siguiente lema, en el Lema 2.3.2 se construirá una cota que depende de $\epsilon > 0$ y la correspondiente tasa local para el certero equivalente del costo acumulado mientras el proceso es conducido bajo \widetilde{f} y permanece en la clase en la cual empieza.

Lema 2.3.1. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, y $x \in S_i$, se cumple el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(E_x^{\widetilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}]) = g_i, \quad (2.20)$$

además

$$g_i \geq 0. \quad (2.21)$$

Demostración. Sean $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, y $x \in S_i$, arbitrarios pero fijos. La ecuación (2.6) es equivalente a

$$e^{g_i+h_i(x)} = E_x^{\tilde{f}}[e^{C(X_0, A_0)+h_i(X_1)} \mathbb{I}_{[X_1 \in S_i]}],$$

entonces, siguiendo un argumento similar al que se utilizó en el Lema 2.2.1, se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$ la siguiente igualdad:

$$e^{ng_i+h_i(x)} = E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)+h_i(X_n)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n]}].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} e^{ng_i+h_i(x)} &\leq e^{M_i} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n]}] \\ &\leq e^{M_i} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}], \end{aligned}$$

tomando logaritmo natural en ambos lados de la desigualdad anterior, dividiendo por n , y finalmente calculado el límite inferior se tiene la siguiente desigualdad:

$$g_i \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}]).$$

La condición (2.7) junto con la anterior desigualdad traen consigo el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}]) = g_i.$$

Para verificar (2.21), recuerde que $\tilde{f}(x) \in B_x$, entonces para $x \in S_1$, y para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}] = E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_1; t \leq n-1]}],$$

por lo tanto, (2.20) implica que $g_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}]) \geq 0$. \square

El Lema 2.3.2 es una versión local de la Proposición 2.3.1, de aquí que su intención sea el uso que se hace de él en la demostración de la Proposición 2.3.1.

Lema 2.3.2. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, se cumple la siguiente proposición: dado un $\epsilon > 0$, existe $b_i(\epsilon)$ en $[0, \infty[$, de tal forma que para todo estado x en S_i , y para todo n en \mathbb{N} , se cumple la siguiente desigualdad:

$$E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}] \leq e^{n(g_i+\epsilon)+b_i(\epsilon)}. \quad (2.22)$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, tómesese $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y $x \in S_i$, arbitrarios. Por el lema anterior existe un entero positivo $N(x, \epsilon)$ de tal forma que para todo $n > N(x, \epsilon)$,

$$E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}] \leq e^{n(g_i + \epsilon)}. \quad (2.23)$$

También, para $\epsilon > 0$, y cada $x \in S_i$, se puede definir el siguiente número real no negativo,

$$b_i(x, \epsilon) := \max_{1 \leq n \leq N(x, \epsilon)} \{\ln(E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}])\}. \quad (2.24)$$

A partir de la desigualdad (2.21), y la Definición (2.24), es claro que para todo $x \in S_i$, y $n \in \mathbb{N}$,

$$E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}] \leq e^{n(g_i + \epsilon) + b_i(x, \epsilon)}. \quad (2.25)$$

Con la finalidad de completar la demostración, a continuación se verifica que $b_i(x, \epsilon)$ se puede seleccionar independientemente de x . Primero, se fija un conjunto $C^* \subset S$, el cual se define de la siguiente manera,

$$C^* := \{x \in S : C(x, a) > 0 \text{ para algún } a \in A_x\}. \quad (2.26)$$

Luego, se consideran los siguientes dos casos:

Caso 1: $S_i \cap C^* = \emptyset$.

Sea $x \in S_i$, y sea $n \in \mathbb{N}$, entonces,

$$E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}] = P_x^{\tilde{f}}[X_t \in S_i; t \leq n-1] \leq 1,$$

por lo tanto, (2.22) se cumple con $b_i(\epsilon) = 0$, porque $g_i \geq 0$, (ver (2.21)).

Caso 2: $S_i \cap C^* \neq \emptyset$.

Por la Hipótesis 2.1.1, $S_i \cap C^*$ es un conjunto finito. Ahora, si se define $b_i(\epsilon)$ como

$$b_i(\epsilon) := \max_{x \in S_i \cap C^*} b_i(x, \epsilon) \geq 0,$$

la desigualdad (2.25), implica que para todo $x \in S_i \cap C^*$, y todo $n \in \mathbb{N}$,

$$E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}] \leq e^{n(g_i + \epsilon) + b_i(\epsilon)}.$$

Por otra parte, si $x \in S_i \setminus C^*$, entonces $C(X_t, A_t) = 0$, para todo $t < T_{C^*}$; de esta manera utilizando la propiedad de Markov para $r < n$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1; T_{C^*} = r]} | H_t, t \leq r] &= \\ E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=r}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1; T_{C^*} = r]} | H_t, t \leq r] &= \\ \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq r; T_{C^*} = r]} E_{X_r}^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-r-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-r-1]}]. \end{aligned}$$

Sobre el evento $[X_r \in S_i; T_{C^*} = r]$, se tiene que $X_r \in S_i \cap C^*$, entonces, una vez más a partir de que g_i es no negativo (2.21), se tiene que:

$$\begin{aligned} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=r}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1; T_{C^*} = r]} | H_t, t \leq r] &\leq \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq r; T_{C^*} = r]} e^{(n-r)(g_i + \epsilon) + b_i(\epsilon)} \\ &\leq \mathbb{I}_{[T_{C^*} = r]} e^{n(g_i + \epsilon) + b_i(\epsilon)}, \end{aligned}$$

por lo tanto $E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=r}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1; T_{C^*} = r]}] \leq P_x^{\tilde{f}}[T_{C^*} = r] e^{n(g_i + \epsilon) + b_i(\epsilon)}$.

Sea $x \in S_i \setminus C^*$, y n un entero positivo, como los números g_i y $b_i(\epsilon)$ son no negativos, entonces,

$$\begin{aligned} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1]}] &= \\ \sum_{r=1}^{n-1} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=r}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1; T_{C^*} = r]}] + E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1; T_{C^*} \geq n]}] &= \\ \sum_{r=1}^{n-1} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=r}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i; t \leq n-1; T_{C^*} = r]}] + P_x^{\tilde{f}}[X_t \in S_i; t \leq n-1; T_{C^*} \geq n] &\leq \\ e^{n(g_i + \epsilon) + b_i(\epsilon)} \sum_{r=1}^{n-1} P_x^{\tilde{f}}[T_{C^*} = r] + P_x^{\tilde{f}}[T_{C^*} \geq n] &\leq \\ e^{n(g_i + \epsilon) + b_i(\epsilon)}, \end{aligned}$$

por lo tanto, para $x \in S_i \setminus C^*$ también se cumple (2.22). □

La siguiente proposición trae consigo como consecuencia inmediata la demostración de la segunda parte del teorema de verificación.

Sea $\epsilon > 0$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, se definen el siguiente conjunto y el siguiente número real:

$$\tilde{S}_i := \bigcup_{j=1}^i S_j \quad \text{y} \quad \tilde{b}_i(\epsilon) := \sum_{j=1}^i b_j(\epsilon). \quad (2.27)$$

Proposición 2.3.1. Dado $\epsilon > 0$, para cualquier entero positivo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, cualquier estado $x \in \tilde{S}_i$, y cualquier $n \in \mathbb{N}$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}] \leq n^{i-1} e^{n(g_i + \epsilon) + \tilde{b}_i(\epsilon)}. \quad (2.28)$$

La demostración es un argumento por inducción sobre i .

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, para $i = 1$, se tiene que $\tilde{S}_1 = S_1$, y $\tilde{b}_1(\epsilon) = b_1(\epsilon)$. Como $\tilde{f}(x) \in B_x$, entonces, para todo $x \in \tilde{S}_1$, el Lema 2.3.2 conlleva a la siguiente desigualdad:

$$E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}] = E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_1; t \leq n-1]}] \leq e^{n(g_1 + \epsilon) + \tilde{b}_1(\epsilon)},$$

por lo tanto, (2.28) se cumple para $i = 1$.

Supóngase que (2.28) se cumple para $i < k$. Entonces, usando el orden que se establece en (2.2), las definiciones en (2.27), y la hipótesis de inducción, para todo $x \in \tilde{S}_i$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se obtiene la siguiente desigualdad:

$$E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}] \leq n^{i-1} e^{n(g_i + \epsilon) + \tilde{b}_i(\epsilon)} \leq n^i e^{n(g_{i+1} + \epsilon) + \tilde{b}_{i+1}(\epsilon)}. \quad (2.29)$$

Por otra parte, recordando que $\tilde{f}(x) \in B_x$, y $\tilde{S}_{i+1} = S_{i+1} \cup \tilde{S}_i$; bajo \tilde{f} se tiene que los siguientes dos eventos coinciden para cada $x \in S_{i+1}$,

$$[T_{\tilde{S}_i} \geq n] = [X_t \in S_{i+1}; t \leq n-1] \quad \mathbb{P}_x^{\tilde{f}} \text{ a. s.}$$

y, también coinciden los siguientes dos eventos:

$$[T_{\tilde{S}_i} = m] = [X_t \in S_{i+1}; t \leq m-1; X_m \in \tilde{S}_i] \quad \mathbb{P}_x^{\tilde{f}} \text{ a. s.}$$

Por lo tanto, haciendo uso de la propiedad de Markov y la hipótesis de inducción, para todo $x \in S_{i+1}$ se sigue que:

$$\begin{aligned} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[T_{\tilde{S}_i} = m]} | H_t, t \leq m] &= \\ E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_{i+1}; t \leq m-1; X_m \in \tilde{S}_i]} | H_t, t \leq m] &= \\ e^{\sum_{t=0}^{m-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_{i+1}; t \leq m-1; X_m \in \tilde{S}_i]} E_{X_m}^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-m-1} C(X_t, A_t)}] &\leq \\ e^{\sum_{t=0}^{m-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_{i+1}; t \leq m-1; X_m \in \tilde{S}_i]} (n-m)^{i-1} e^{(n-m)(g_i + \epsilon) + \tilde{b}_i(\epsilon)}, & \end{aligned}$$

integrando con respecto a $\mathbb{P}_x^{\tilde{f}}$ en ambos lados de la desigualdad anterior, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[T_{\tilde{S}_i} = m]}] &\leq \\ E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{m-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_{i+1}; t \leq m-1; X_m \in \tilde{S}_i]}] (n-m)^{i-1} e^{(n-m)(g_i + \epsilon) + \tilde{b}_i(\epsilon)}, & \end{aligned}$$

además, haciendo uso de la propiedad monótona de la integral, y el Lema 2.3.2 se sigue que para todo $x \in S_{i+1}$,

$$\begin{aligned} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{m-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_{i+1}, t \leq m-1]}] (n-m)^{i-1} e^{(n-m)(g_i + \epsilon) + \tilde{b}_i(\epsilon)} \leq \\ (n-m)^{i-1} e^{m(g_{i+1} + \epsilon) + b_{i+1}(\epsilon) + (n-m)(g_i + \epsilon) + \tilde{b}_i(\epsilon)}, \end{aligned}$$

por lo tanto, (2.2) y (2.27) implican que para todo $x \in S_{i+1}$,

$$E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[T_{\tilde{S}_i} = m]}] \leq n^{i-1} e^{n(g_{i+1} + \epsilon) + \tilde{b}_{i+1}(\epsilon)}.$$

También, para un $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, y $x \in S_{i+1}$, usando el Lema 2.3.2 se tiene que

$$\begin{aligned} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[T_{\tilde{S}_i} \geq n]}] &= E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_{i+1}, t \leq n-1]}] \\ &\leq e^{n(g_{i+1} + \epsilon) + b_{i+1}(\epsilon)} \\ &\leq e^{n(g_{i+1} + \epsilon) + \tilde{b}_{i+1}(\epsilon)}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}] &= \sum_{m=1}^{n-1} E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[T_{\tilde{S}_i} = m]}] + E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[T_{\tilde{S}_i} \geq n]}] \\ &\leq \sum_{m=1}^{n-1} n^{i-1} e^{n(g_{i+1} + \epsilon) + \tilde{b}_{i+1}(\epsilon)} + e^{n(g_{i+1} + \epsilon) + \tilde{b}_{i+1}(\epsilon)} \\ &\leq n^i e^{n(g_{i+1} + \epsilon) + \tilde{b}_{i+1}(\epsilon)}. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior, junto con la desigualdad (2.29), implican que la Proposición 2.3.1 se cumple para $i+1$. \square

Demostración del Teorema 2.1.1 segunda parte: Dado $\epsilon > 0$, y $x \in S_i \subset \tilde{S}_i$, la Proposición 2.3.1 acarrea la siguiente desigualdad,

$$J_n(\tilde{f}, x) = \ln(E_x^{\tilde{f}}[e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)}]) \leq (i+1) \ln(n) + n(g_i + \epsilon) + \tilde{b}_i(\epsilon),$$

por lo tanto $J(\tilde{f}, x) \leq g_i + \epsilon$, como ϵ se escogió de manera arbitraria $J^*(x) \leq g_i$. Además, (2.5) implica las siguientes desigualdades: $g_i \leq J_*(x) \leq J^*(x) \leq g_i$, y

$$g_i \leq J_*(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} J_n(\tilde{f}, x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} J_n(\tilde{f}, x) \leq g_i,$$

por lo tanto, $J_*(x) = J^*(x) = g_i$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} J_n(\tilde{f}, x) = g_i$. \square

Capítulo 3

Teorema de existencia

Este capítulo está dedicado única y exclusivamente a demostrar el teorema de existencia, la decisión de dedicar un capítulo entero para tal fin, aparte de que se ha hecho lo mismo para el teorema de verificación, va más allá de una cuestión de estética por parte del autor, pues es obvio que el teorema de verificación pierde todo su valor sino se cuenta con la existencia de un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*, y una estrategia estacionaria que cumpla (2.6) y (2.7).

Como ya se mencionó, la consecución de un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad* se basa en la Hipótesis 2.1.1, y en una familia de operadores contractivos. Por esta razón el capítulo empieza con una pequeña sección dedicada a dichos operadores.

3.1. Operadores contractivos

Sea $B(S)$ el espacio de funciones medibles a valor real, acotadas, y definidas sobre el espacio S , dotado con la norma del supremo, es decir, si $V \in B(S)$, la norma de la función V es $\|V\| := \sup_{x \in S} |V(x)|$.

Definición 3.1.1. Dado α en $]0, 1[$, se define el operador $T_\alpha : B(S) \rightarrow B(S)$, de la siguiente manera: para $V \in B(S)$, y $x \in S$,

$$T_\alpha[V](x) := \inf_{a \in A_x} \{C(x, a) + \ln \sum_{y \in S} e^{\alpha V(y)} P_{xy}(a)\}.$$

La definición anterior es equivalente a

$$e^{T_\alpha[V](x)} = \inf_{a \in A_x} \{e^{C(x, a)} \sum_{y \in S} e^{\alpha V(y)} P_{xy}(a)\}. \quad (3.1)$$

Las siguientes propiedades del operador T_α son consecuencia inmediata de (3.1).

1. Monótona: para cada $V, W \in B(S)$, con $V \leq W$, $T_\alpha[V] \leq T_\alpha[W]$.
2. α -Homogeneidad: para $V \in B(S)$, y $r \in \mathbb{R}$, $T_\alpha[V + r] = T_\alpha[V] + \alpha r$.

Es claro que a partir de la definición de la norma sobre $B(S)$, para toda función V y W en $B(S)$, $|V - W| \leq \|W - V\|$, entonces, como consecuencia de la propiedad de monotonía y la propiedad de α -homogeneidad se sigue que: para toda V y W en $B(S)$,

$$\|T_\alpha[V] - T_\alpha[W]\| \leq \alpha \|V - W\|, \quad (3.2)$$

por consiguiente T_α es un operador contractivo. De esta manera, el Teorema de punto fijo de Banach (ver [27, Teorema 2.2]), implica que existe una única función $V_\alpha \in B(S)$, de tal forma que $T_\alpha[V_\alpha] = V_\alpha$, es decir,

$$e^{V_\alpha(x)} = \inf_{a \in A_x} \left\{ e^{C(x,a)} \sum_{y \in S} e^{\alpha V_\alpha(y)} P_{xy}(a) \right\}. \quad (3.3)$$

Por otro lado, para $x \in S$, $T_\alpha[0](x) = \inf_{a \in A_x} C(x, a)$, lo cual nos dice que la norma del operador evaluado en la función 0, es acotada por la norma de la función de costo, $\|T_\alpha[0]\| \leq \|C\|$.¹ La siguiente desigualdad $\|V_\alpha\| - \|T_\alpha[0]\| \leq \|V_\alpha - T_\alpha[0]\|$, junto con la contracción (3.2) para la función V_α y la función 0, llevan a la desigualdad (3.4), la cual será clave al momento de definir las tasas locales de crecimiento exponencial,

$$(1 - \alpha)\|V_\alpha\| \leq \|C\|. \quad (3.4)$$

Todo el trabajo que se desarrolla a partir de este momento y hasta el final del presente capítulo se basa en la selección de una sucesión sobre el intervalo $]0, 1[$.

Usando el método de la diagonal de Cantor se elige una sucesión $\{\alpha_m\}_{m=1}^\infty \subset]0, 1[$, de tal forma que cumpla las siguientes dos condiciones:

- 1.

$$\alpha_m \nearrow 1 \quad (3.5)$$

2. Para todo $x, y \in S$, los siguientes límites existen:

¹La norma de C es la norma del supremo sobre $B(\mathbb{K})$.

a)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y)) \in [-\infty, \infty]. \quad (3.6)$$

b)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 - \alpha_m)V_{\alpha_m}(x) \in [-\|C\|, \|C\|]. \quad (3.7)$$

La sucesión $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ que satisface (3.5)-(3.7), se mantendrá fija a través de este capítulo.

A continuación, se define una relación de equivalencia, la cual asegura la existencia de una partición del espacio de estados.

Definición 3.1.2. Sean x y y dos estados cualesquiera en S , se define la relación de equivalencia ‘ \sim ’ como: $x \sim y \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} (V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y))$ está en $] -\infty, \infty[$.

De inmediato se puede observar que:

$$x \approx y \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} (V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y)) = \infty, \text{ o } \lim_{m \rightarrow \infty} (V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y)) = -\infty. \quad (3.8)$$

Las dos relaciones que se definen a continuación, una sobre el espacio de estados, y la otra sobre las clases de equivalencia con respecto a la relación que se estableció en la Definición 3.1.2; tienen la finalidad de establecer un orden total sobre dichas clases, una propiedad que será utilizada varias veces.

Definición 3.1.3. Sean x y y , dos estados cualesquiera en S , se define la relación ‘ \succeq ’ como:

$$x \succeq y \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} (V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y)) > -\infty. \quad (3.9)$$

A partir de (3.9) no es difícil verificar los siguientes tres estamentos:

1. La relación ‘ \succeq ’ induce un orden total sobre S , esto es, para todo $x, y \in S$, se tiene al menos una de las siguientes dos relaciones, $x \succeq y$ ó $y \succeq x$.
2. La relación ‘ \succeq ’ es transitiva, estos es, para todo $x, y, z \in S$

$$x \succeq y \wedge y \succeq z \Rightarrow x \succeq z \quad (3.10)$$

3. Para todo $x, y \in S$, $x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y \wedge y \succeq x$.

Por otra parte, si $x \sim x_1$, $y \sim y_1$, y el $\lim_{m \rightarrow \infty} (V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y)) = \infty$, entonces, el

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (V_{\alpha_m}(x_1) - V_{\alpha_m}(y_1)) = \infty. \quad (3.11)$$

Definición 3.1.4. Si \mathcal{S} y \mathcal{S}^* son dos clases de equivalencia con respecto a la relación de la Definición 3.1.2, entonces, para $x \in \mathcal{S}^*$ y $y \in \mathcal{S}$, se dice que la clase \mathcal{S} es menor que la clase \mathcal{S}^* si y solamente si $\lim_{m \rightarrow \infty} (V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y)) = \infty$.

La relación de la Definición 3.1.4, es una relación de orden que se denotara como: $\mathcal{S} \prec \mathcal{S}^*$.

Nota 3.1.1. (i) Como consecuencia de (3.6) y (3.11), la relación ‘ \prec ’ esta bien definida, además (3.8) implica que la relación ‘ \prec ’ induce un orden total. También, la Definición 3.1.4 y el límite (3.11) implican que para todo $x \in \mathcal{S}^*$, y todo $y \in \mathcal{S}$,

$$\mathcal{S} \prec \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} (V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y)) = \infty.$$

(ii) A partir de (3.2) se puede deducir que para todo $\alpha \in]0, 1[$, $V_\alpha \geq 0$.

3.2. Partición del espacio de estados

Esta sección es el primer paso en la edificación de un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*. El objetivo principal consiste en obtener una partición finita del espacio de estados a partir de la relación de equivalencia que se describió en la Definición en 3.1.2 y la Hipótesis 2.1.1. Dicho resultado se enunciará como el Teorema 3.2.1, y su demostración se basa en los tres lemas que lo preceden.

La sección empieza definiendo para cada $\alpha \in]0, 1[$, una función de descuento. Las funciones de descuento serán la columna vertebral en la definición de las tasas locales de crecimiento exponencial.

Definición 3.2.1. Para cada $\alpha \in]0, 1[$, y x un estado en S , se define la función de descuento $g_\alpha(\cdot)$ como:

$$g_\alpha(x) := (1 - \alpha)V_\alpha(x).$$

A partir de la Nota 3.1.1 (ii), y la desigualdad (3.4), se puede ver que $g_\alpha(x) \in [0, \|C\|]$.

Sean F y C^* como en la Hipótesis 2.1.1 y la definición en (2.26) respectivamente. Entonces, se define el conjunto finito $G \subset S$ como $G := F \cup C^*$. Claramente $T_G \leq T_F$, por lo tanto para cada $f \in \mathbb{F}$ y $x \in S$,

$$P_x^f[T_G < \infty] = 1. \quad (3.12)$$

La demostración del Lema 3.2.2 se basa en el uso del Teorema de Convergencia Dominada, aplicado a la parte derecha de la desigualdad que se exhibe en el siguiente lema.

Lema 3.2.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{F}$, $\alpha \in]0, 1[$ y $x \in S$,

$$e^{\alpha V_\alpha(x)} \leq E_x^f[e^{\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n)-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)] + \alpha V_\alpha(X_{T_G \wedge n})}]. \quad (3.13)$$

La demostración es un argumento de inducción sobre la variable temporal n .

Demostración. Para $n = 1$. Sea f una estrategia en \mathbb{F} , por (3.3) y la Definición 3.2.1 se tiene que

$$e^{\alpha V_\alpha(x)} \leq E_x^f[e^{C(X_0, A_0) - g_\alpha(X_0) + \alpha V_\alpha(X_1)}]. \quad (3.14)$$

Ahora, supóngase que la desigualdad (3.13) es válida para un entero positivo n , y observe que a partir de (3.14), y la propiedad de Markov, se sigue que:

$$\begin{aligned} E_x^f[e^{\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n)-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)] + \alpha V_\alpha(X_{T_G \wedge n})} \mathbb{I}_{[T_G > n]} | H_t; t \leq n] &= \\ E_x^f[e^{\sum_{t=0}^{n-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)] + \alpha V_\alpha(X_n)} \mathbb{I}_{[T_G > n]} | H_t; t \leq n] &= \\ e^{\sum_{t=0}^{n-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)] + \alpha V_\alpha(X_n)} \mathbb{I}_{[T_G > n]} &= \\ e^{\sum_{t=0}^{n-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)]} \mathbb{I}_{[T_G > n]} e^{\alpha V_\alpha(X_n)} &\leq \\ e^{\sum_{t=0}^{n-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)]} \mathbb{I}_{[T_G > n]} E_{X_n}^f[e^{C(X_n, A_n) - g_\alpha(X_n) + \alpha V_\alpha(X_{n+1})}] &= \\ e^{\sum_{t=0}^{n-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)]} \mathbb{I}_{[T_G > n]} E_x^f[e^{C(X_n, A_n) - g_\alpha(X_n) + \alpha V_\alpha(X_{n+1})} | H_t; t \leq n] &= \\ E_x^f[e^{\sum_{t=0}^{n-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)]} \mathbb{I}_{[T_G > n]} e^{C(X_n, A_n) - g_\alpha(X_n) + \alpha V_\alpha(X_{n+1})} | H_t; t \leq n]. \end{aligned}$$

Sobre el evento $[T_G > n]$, $T_G \wedge n + 1$ es igual a $n + 1$, entonces la anterior desigualdad, conlleva a

$$E_x^f[e^{\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n)-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)] + \alpha V_\alpha(X_{T_G \wedge n})} \mathbb{I}_{[T_G > n]}] \leq \quad (3.15)$$

$$E_x^f[e^{\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n+1)-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)] + \alpha V_\alpha(X_{T_G \wedge n+1})} \mathbb{I}_{[T_G > n]}]. \quad (3.16)$$

Además, sobre el evento $[T_G \leq n]$, $T_G \wedge n = T_G \wedge n + 1$, entonces se tiene que

$$E_x^f [e^{\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n)-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)] + \alpha V_\alpha(X_{T_G \wedge n})} \mathbb{I}_{[T_G \leq n]}] \leq \quad (3.17)$$

$$E_x^f [e^{\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n+1)-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)] + \alpha V_\alpha(X_{T_G \wedge n+1})} \mathbb{I}_{[T_G \leq n]}]. \quad (3.18)$$

Para terminar la demostración, sea f en \mathbb{F} y x en S . Entonces la hipótesis de inducción, las desigualdades (3.15) - (3.17), traen consigo la desigualdad (3.13) para $n + 1$,

$$\begin{aligned} e^{\alpha V_\alpha(x)} &\leq E_x^f [e^{\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n)-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)] + \alpha V_\alpha(X_{T_G \wedge n})}] \\ &\leq E_x^f [e^{\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n+1)-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)] + \alpha V_\alpha(X_{T_G \wedge n+1})}]. \end{aligned}$$

□

La motivación principal del siguiente lema, es el uso que se hace de él en la demostración del Teorema 3.2.1. Una de las consecuencias fundamentales de este lema; y la cual se usa más adelante, es el hecho de que cuando el proceso se conduce bajo una estrategia estacionaria, entonces, α veces el punto fijo del operador T_α evaluado en el estado inicial, es menor o igual que el certero equivalente de α veces el punto fijo evaluado en el primer estado de arribó del sistema al conjunto G , (ver (3.22)).

Lema 3.2.2. Para cada $\alpha \in]0, 1[$, $f \in \mathbb{F}$ y $x \in S$,

$$e^{\alpha V_\alpha(x)} \leq e^{C(x, f(x))} E_x^f [e^{-\sum_{t=0}^{T_G-1} g_\alpha(X_t) + \alpha V_\alpha(X_{T_G})}].$$

Demostración. Mientras $1 \leq t < T_G$, $X_t \notin G$; entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n)-1} [C(X_t, A_t) - g_\alpha(X_t)] = C(X_0, A_0) - \sum_{t=0}^{(T_G \wedge n)-1} g_\alpha(X_t).$$

Por lo tanto, para cualquier estrategia estacionaria $f \in \mathbb{F}$, el Lema 3.2.1 implica la siguiente desigualdad:

$$e^{\alpha V_\alpha(x)} \leq e^{C(x, f(x))} E_x^f [e^{-\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n)-1} g_\alpha(X_t) + \alpha V_\alpha(X_{T_G \wedge n})}]. \quad (3.19)$$

Recordando que la función de descuento $g_\alpha(\cdot)$ es no negativa, a partir de la desigualdad (3.4) se tiene la siguiente estimación para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq e^{-\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n)-1} g_\alpha(X_t) + \alpha V_\alpha(X_{T_G \wedge n})} \leq e^{\frac{\alpha}{1-\alpha} \|C\|}.$$

Por otro lado, sobre el evento $[T_G < \infty]$, el siguiente límite se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\sum_{t=0}^{(T_G \wedge n)-1} g_\alpha(X_t) + \alpha V_\alpha(X_{T_G \wedge n})} = e^{-\sum_{t=0}^{T_G-1} g_\alpha(X_t) + \alpha V_\alpha(X_{T_G})}.$$

Entonces, como $P_x^f[T_G < \infty] = 1$, (ver (3.12)); el Teorema de Convergencia Dominada, y la desigualdad (3.19), permiten llegar a la conclusión deseada

$$e^{\alpha V_\alpha(x)} \leq e^{C(x, f(x))} E_x^f[e^{-\sum_{t=0}^{T_G-1} g_\alpha(X_t) + \alpha V_\alpha(X_{T_G})}].$$

□

Como A_x es un conjunto finito, a partir de (3.3) se tiene que para cada $x \in S$, y cada $\alpha \in]0, 1[$, existe $f_\alpha \in \mathbb{F}$ de tal forma que cumple la siguiente igualdad:

$$e^{V_\alpha(x)} = e^{C(x, f_\alpha(x))} \sum_{y \in S} e^{\alpha V_\alpha(y)} P_{xy}(f_\alpha(x)).$$

Sea $\{\alpha_m\}_{m=1}^\infty$ la sucesión que se fijó en un principio y satisface (3.5), (3.6) y (3.7); considérese la sucesión correspondiente $\{f_{\alpha_m}\}_{m=1}^\infty$, del hecho de que A_x es un conjunto finito, existe una sub-sucesión $\{f_{\alpha_{m_k}}(x)\}_{k=1}^\infty$ que converge puntualmente en A_x . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad se puede asumir que existe $\hat{f} \in \mathbb{F}$ de tal forma que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{\alpha_m}(x) = \hat{f}(x). \quad (3.20)$$

A partir de este punto, se hará uso varias veces de la función $\hat{f} \in \mathbb{F}$, de hecho, \hat{f} será la candidata natural a estrategia óptima, por eso desde este momento \hat{f} permanecerá fija.

También, el siguiente lema se usa en la demostración del Teorema 3.2.1, pero además, como se verá más adelante, el lema implica que $\hat{f}(x)$ pertenece a el conjunto B_x .

Lema 3.2.3. Si $P_{xy}(\hat{f}(x)) > 0$, entonces, $x \succeq y$.

Demostración. Sean x y y dos estados fijos en S , tales que, $P_{xy}(\hat{f}(x)) > 0$, entonces,

$$e^{V_{\alpha_m}(x)} = e^{C(x, f_{\alpha_m}(x))} \sum_{z \in S} e^{\alpha_m V_{\alpha_m}(z)} P_{xz}(f_{\alpha_m}(x)) \geq e^{C(x, f_{\alpha_m}(x))} e^{\alpha_m V_{\alpha_m}(y)} P_{xy}(f_{\alpha_m}(x)).$$

Por otro lado, a partir de la desigualdad (3.4) se puede ver que para todo $m \in \mathbb{N}$, $\|C\| + \alpha_m V_{\alpha_m}(x) \geq V_{\alpha_m}(x)$, por lo tanto, las dos últimas desigualdades conlleva a

$$e^{\|C\| + \alpha_m(V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y))} \geq e^{C(x, f_{\alpha_m}(x))} P_{xy}(f_{\alpha_m}(x)).$$

Entonces, tomando el límite cuando m tiende a ∞ , se sigue que

$$e^{\|C\| + \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m (V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y))} \geq e^{C(x, \hat{f}(x))} P_{xy}(\hat{f}(x)) > 0,$$

lo cual implica que el $\lim_{m \rightarrow \infty} (V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y)) > -\infty$, y por lo tanto $x \succeq y$. \square

El teorema que se enuncia a continuación, asegura que la partición del espacio de estados con respecto a la relación que se sentó en la Definición 3.1.2, es una partición finita.

Teorema 3.2.1. *Para cada $x \in S$, existe un estado $x^* \in G$ tal que $x \sim x^*$. Además, si $x \notin G$, entonces $P_x^{\hat{f}}[X_{T_G} = x^*] > 0$.*

La demostración consiste en exhibir un elemento $x^*(x)$ en el conjunto G , para el cual se cumple que $x \succeq x^*(x)$ y $x^*(x) \succeq x$.

Demostración. Sea $x \in S \setminus G$ un estado arbitrario, se define el conjunto G_x como:

$$G_x := \{y \in G : P_x^{\hat{f}}[X_{T_G} = y] > 0\}. \quad (3.21)$$

Se sabe por la Hipótesis 2.1.1, que el proceso conducido bajo la estrategia \hat{f} arriba a G en un tiempo finito, es decir $P_x^{\hat{f}}[T_G < \infty] = 1$, además, sobre el evento $[T_G < \infty]$, $X_{T_G} \in G$, por lo tanto $G_x \neq \emptyset$. Gracias al Lema 3.2.3, y la propiedad de transitividad (3.10), si $y \in G_x$, entonces $x \succeq y$.

Recuerde que $x \notin G$, entonces, usando el hecho de que $g_\alpha(\cdot) \geq 0$, la Hipótesis 2.1.1 y el Lema 3.2.2, se tiene para todo $\alpha \in]0, 1[$ se cumplen las siguientes desigualdades:

$$e^{\alpha V_\alpha(x)} \leq E_x^{\hat{f}}[e^{-\sum_{t=0}^{T_G-1} g_\alpha(X_t) + \alpha V_\alpha(X_{T_G})}] \leq E_x^{\hat{f}}[e^{\alpha V_\alpha(X_{T_G})}] = E_x^{\hat{f}}[e^{\alpha V_\alpha(X_{T_G})} \mathbb{I}_{[X_{T_G} \in G_x]}].$$

Entonces, para cualquier α_m de la sucesión que se fijo a un principio,

$$1 \leq E_x^{\hat{f}}[e^{\alpha_m [V_{\alpha_m}(X_{T_G}) - V_{\alpha_m}(x)]} \mathbb{I}_{[X_{T_G} \in G_x]}]. \quad (3.22)$$

Supóngase por un momento que para cualquier $y \in G_x$, $y \not\succeq x$, entonces, como G_x es un conjunto finito, en (3.22) se puede tomar el límite cuando m tiende a ∞ y se obtiene una contradicción $1 \leq 0$. Por lo tanto, existe $x^* \in G_x$ tal que $x^* \succeq x$.

Entonces, $x \sim x^*$. Como $x^* \in G_x$, de la definición (3.21) se tiene que:

$$P_x^{\hat{f}}[X_{T_G} = x^*] > 0.$$

\square

Ya se dijo, y el anterior teorema lo acaba de aseverar, la partición del espacio de estados con respecto a la relación ‘ \sim ’ es finita, y consiste en a lo más k clases, con $k \leq |G|$, donde $|G|$ es el número de elemetos de G . Las clases de equivalencia con respecto a la relación ‘ \sim ’ se denotan como: $S_1^*, S_2^*, \dots, S_k^*$, de tal forma que para todo $1 \leq i < k$,

$$S_i^* \prec S_{i+1}^*, \quad (3.23)$$

donde ‘ \prec ’ es la relación que se estableció en la Definición en 3.1.4.

3.3. Tasas locales, funciones de valor relativo y estrategia óptima

Con el fin de asegurar la existencia de un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*, la propuesta de esta sección es obtener las tres condiciones restantes. En primer lugar, las tasas locales se obtienen como límite de las funciones de descuento $\{g_{\alpha_m}(\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$, en segundo lugar, se observa que el Lema 3.2.3 trae consigo el hecho de que B_x es un conjunto no vacío, y en tercer lugar, se obtienen las funciones de valor relativo. Después se verifica que tanto las tasas locales, como las funciones relativas son soluciones de las ecuaciones locales de optimalidad, y por ultimo, se ve que la función candidata a estrategia óptima cumple las condiciones (2.6) y (2.7).

Definición 3.3.1. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, se selecciona un estado $x_i \in S_i^*$, y se define la tasa local de crecimiento exponencial g_i^* como:

$$g_i^* := \lim_{m \rightarrow \infty} g_{\alpha_m}(x_i).$$

Tómese un estado $y \in S_i^*$ diferente del estado x_i de la Definición 3.3.1; entonces de la Definición 3.2.1 se tiene la siguiente igualdad:

$$g_{\alpha_m}(x_i) - g_{\alpha_m}(y) = (1 - \alpha_m)(V_{\alpha_m}(x_i) - V_{\alpha_m}(y)), \quad (3.24)$$

como y y x_i están relacionados $x_i \sim y$, la condición (3.5) y (3.24), implican que el $\lim_{m \rightarrow \infty} (g_{\alpha_m}(x_i) - g_{\alpha_m}(y)) = 0$, por lo tanto g_i^* no depende del estado x_i que se selecciono en un principio, o sea que para todo estado $x \in S_i^*$

$$g_i^* := \lim_{m \rightarrow \infty} g_{\alpha_m}(x). \quad (3.25)$$

Lema 3.3.1. Las constantes g_i^* 's de la Definición 3.3.1, son crecientes, es decir, para toda $1 \leq i < k$, $g_i^* \leq g_{i+1}^*$.

Demostración. Para un estado $y \in S_{i+1}^*$, y un estado $x \in S_i^*$, la sucesión $\{V_{\alpha_m}(y) - V_{\alpha_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ converge a ∞ , es decir, existe una constante M de tal forma que para todo $m \in \mathbb{N}$, $V_{\alpha_m}(y) - V_{\alpha_m}(x) \geq M$. Entonces, multiplicando por $(1 - \alpha_m)$, en ambos lados de la desigualdad anterior se tiene que para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$g_{\alpha_m}(y) - g_{\alpha_m}(x) \geq (1 - \alpha_m)M,$$

así que tomando el límite cuando m tiende a ∞ , resulta que $g_{i+1}^* \geq g_i^*$. \square

Proposición 3.3.1. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y $x \in S_i^*$, el conjunto

$$B_x^* := \left\{ a \in A_x : \sum_{y \in \bigcup_{j=1}^i S_j^*} P_{xy}(a) = 1 \right\},$$

es no vacío.

La demostración radica en ver que $\hat{f}(x) \in B_x^*$.

Demostración. Sea x un estado en S_i^* . Supóngase que existe $y \in S_l^*$ con $l > i$, de tal forma que $P_{xy}(\hat{f}(x)) > 0$, entonces, a raíz del Lema 3.2.3 se tiene que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(y)] > -\infty. \quad (3.26)$$

Por otro lado, como $y \in S_l^*$, y $S_i^* \prec S_l^*$, el $\lim_{m \rightarrow \infty} [V_{\alpha_m}(y) - V_{\alpha_m}(x)] = \infty$. Por lo tanto se llega a una contradicción.

Es decir, que la probabilidad de ir del estado x al estado y , bajo la estrategia \hat{f} es cero, $P_{xy}(\hat{f}(x)) = 0$. \square

Cada vez falta menos para tener la certeza de que existe un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*, el lema que se presenta a continuación, es una pieza clave al momento de verificar que las tasas locales y las correspondientes funciones relativas son soluciones de las ecuaciones locales de optimalidad.

El Teorema 3.2.1, implica que para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ el conjunto $S_i^* \cap G$ es diferente del vacío. Entonces, para cada entero m se puede seleccionar un estado $x_{m,i}^* \in S_i^* \cap G$ de tal forma que para todo estado $x \in S_i^* \cap G$, $V_{\alpha_m}(x_{m,i}^*) \geq V_{\alpha_m}(x)$. Después de tomar una sub-sucesión adecuada de $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$, y observar que el conjunto $S_i^* \cap G$ es finito, sin pérdida de generalidad se puede asumir que cada sucesión $\{x_{m,i}^*\}_{m=1}^{\infty}$ es constante, es decir para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_{m,i}^* = x_i^*$. De esta manera, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, el estado $x_i^* \in S_i^* \cap G$, cada estado $x \in S_i^* \cap G$, y $m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$V_{\alpha_m}(x) \leq V_{\alpha_m}(x_i^*). \quad (3.27)$$

Lema 3.3.2. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y x_i^* como en (3.27). Se cumplen las siguientes afirmaciones: Existen M_i y \widehat{M}_i de tal forma que para $m \geq M_i$ y $x \in S_i^*$, $V_{\alpha_m}(x) \leq V_{\alpha_m}(x_i^*)$; y para $m \geq \widehat{M}_i$ con $x \in \bigcup_{j=1}^i S_j^*$, $V_{\alpha_m}(x) \leq V_{\alpha_m}(x_i^*)$.

Demostración. Considérese un índice i en $\{1, 2, \dots, k\}$, y sea x un estado arbitrario en $S_i^* \setminus G$. De forma similar a como se hizo en (3.22), para cualquier entero positivo m se cumple la siguiente desigualdad

$$1 \leq E_x^{\widehat{f}}[e^{\alpha_m[V_{\alpha_m}(X_{T_G}) - V_{\alpha_m}(x)]}].$$

Por otro lado, a partir de la Proposición 3.3.1 se tiene que para todo $t \geq 0$, $P_x^{\widehat{f}}[X_t \in \bigcup_{j=1}^i S_j^*] = 1$, por lo tanto

$$P_x^{\widehat{f}}[X_{T_G} \in \bigcup_{j=1}^i S_j^*] = 1,$$

entonces, como $\{S_j^*; i \leq j \leq k\}$ es una partición de S , a partir de (3.27),

$$\begin{aligned} E_x^{\widehat{f}}[e^{\alpha_m[V_{\alpha_m}(X_{T_G}) - V_{\alpha_m}(x)]}] &= \sum_{j=1}^i E_x^{\widehat{f}}[e^{\alpha_m[V_{\alpha_m}(X_{T_G}) - V_{\alpha_m}(x)]} \mathbb{I}_{[X_{T_G} \in S_j^*]}] \\ &\leq \sum_{j=1}^i E_x^{\widehat{f}}[e^{\alpha_m[V_{\alpha_m}(x_j^*) - V_{\alpha_m}(x)]} \mathbb{I}_{[X_{T_G} \in S_j^*]}] \\ &= \sum_{j=1}^i e^{\alpha_m[V_{\alpha_m}(x_j^*) - V_{\alpha_m}(x)]} P_x^{\widehat{f}}[X_{T_G} \in S_j^*]. \end{aligned}$$

También, para $j \in \{1, 2, \dots, i-1\}$ se tiene que $S_j^* \prec S_i^*$, es decir, que existe una constante M_i de tal forma que para todo $m \geq M_i$,

$$V_{\alpha_m}(x_j^*) \leq V_{\alpha_m}(x_i^*). \quad (3.28)$$

Entonces, para $m \geq M_i$ se sigue que

$$\begin{aligned} 1 \leq E_x^{\widehat{f}}[e^{\alpha_m[V_{\alpha_m}(X_{T_G}) - V_{\alpha_m}(x)]}] &\leq \sum_{j=1}^i e^{\alpha_m[V_{\alpha_m}(x_j^*) - V_{\alpha_m}(x)]} P_x^{\widehat{f}}[X_{T_G} \in S_j^*] \\ &\leq \sum_{j=1}^i e^{\alpha_m[V_{\alpha_m}(x_i^*) - V_{\alpha_m}(x)]} P_x^{\widehat{f}}[X_{T_G} \in S_j^*] \\ &\leq e^{\alpha_m[V_{\alpha_m}(x_i^*) - V_{\alpha_m}(x)]}. \end{aligned}$$

El anterior cálculo permite concluir que para todo $x \in S_i^*$ y $m \geq M_i$,

$$V_{\alpha_m}(x) \leq V_{\alpha_m}(x_i^*). \quad (3.29)$$

Para la segunda parte, sea $\widehat{M}_i := \max_{1 \leq j \leq i} M_j$, y tómesese $m \geq \widehat{M}_i$, y $x \in \bigcup_{j=1}^i S_j^*$, entonces, existe S_l^* con $1 \leq l \leq i$, tal que $x \in S_l^*$. De (3.28) y (3.29) se sigue que $V_{\alpha_m}(x) \leq V_{\alpha_m}(x_l^*) \leq V_{\alpha_m}(x_i^*)$, por lo tanto, para $x \in \bigcup_{j=1}^i S_j^*$, y $m \geq \widehat{M}_i$, se cumple $V_{\alpha_m}(x) \leq V_{\alpha_m}(x_i^*)$. \square

Definición 3.3.2. Sea $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ arbitrario, y sea x_i^* como en (3.27). La función de valor relativo sobre S_i^* se define como:

$$h_i^*(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} [V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(x_i^*)], \quad x \in S_i^*. \quad (3.30)$$

Proposición 3.3.2. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y $x \in S_i^*$, las siguientes dos afirmaciones se cumplen:

- (i) $h_i^*(x) \in] -\infty, 0]$.
- (ii) $e^{g_i^* + h_i^*(x)} = \min_{a \in B_x^*} \{e^{C(x,a)} \sum_{y \in S_i^*} e^{h_i^*(y)} P_{xy}(a)\}$.

Demostración.

- (i) Sea $x \in S_i^*$, entonces $x \sim x_i^*$, por lo tanto $h_i^*(x)$ es finito. También, la primera parte del Lema 3.3.2 implica que: $h_i(x) \leq 0$.
- (ii) Sean $x \in S_i^*$, $a \in B_x^*$, y $m \in \mathbb{N}$ arbitrarios. Por la ecuación (3.3) se tiene que

$$e^{V_{\alpha_m}(x)} \leq e^{C(x,a)} \left[\sum_{y \in \bigcup_{j \leq i} S_j^*} e^{\alpha_m V_{\alpha_m}(y)} P_{xy}(a) \right].$$

Sea x_i^* como en (3.27), multiplicando en ambos lados de la desigualdad anterior por $e^{-\alpha_m V_{\alpha_m}(x_i^*)}$ se obtiene la siguiente desigualdad:

$$e^{g_{\alpha_m}(x_i^*) + V_{\alpha_m}(x) - V_{\alpha_m}(x_i^*)} \leq e^{C(x,a)} \left[\sum_{y \in \bigcup_{j \leq i} S_j^*} e^{\alpha_m [V_{\alpha_m}(y) - V_{\alpha_m}(x_i^*)]} P_{xy}(a) \right].$$

A partir de la segunda parte del Lema 3.3.2, para un m bastante grande, y para $y \in \bigcup_{j=1}^i S_j^*$, se tiene que

$$e^{\alpha_m [V_{\alpha_m}(y) - V_{\alpha_m}(x_i^*)]} \leq 1.$$

Entonces, a partir del orden que presentan las clases de la partición (3.23), la definición de tasa local (3.25), la definición de función relativa (3.30), y del Teorema de Convergencia Dominada, se puede concluir que, $e^{g_i^*+h_i^*(x)} \leq e^{C(x,a)} \sum_{y \in S_i^*} e^{h_i^*(y)} P_{xy}(a)$, por lo tanto

$$e^{g_i^*+h_i^*(x)} \leq \min_{a \in B_x^*} \left\{ e^{C(x,a)} \sum_{y \in S_i^*} e^{h_i^*(y)} P_{xy}(a) \right\}, \quad x \in S_i^*. \quad (3.31)$$

A fin de obtener la otra desigualdad, sea $f_{\alpha_m} \in \mathbb{F}$ y $x_i^* \in S_i^*$, como en (3.20) y (3.27) respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} e^{g_{\alpha_m}(x_i^*)+V_{\alpha_m}(x)-V_{\alpha_m}(x_i^*)} &= e^{C(x,f_{\alpha_m}(x))} \sum_{y \in S} e^{\alpha_m[V_{\alpha_m}(y)-V_{\alpha_m}(x_i^*)]} P_{xy}(f_{\alpha_m}(x)) \\ &\geq e^{C(x,f_{\alpha_m}(x))} \sum_{y \in S_i^*} e^{\alpha_m[V_{\alpha_m}(y)-V_{\alpha_m}(x_i^*)]} P_{xy}(f_{\alpha_m}(x)). \end{aligned}$$

Utilizando el Lema de Fatou en la desigualdad anterior se sigue que

$$e^{g_i^*+h_i^*(x)} \geq e^{C(x,\hat{f}(x))} \sum_{y \in S_i^*} e^{h_i^*(y)} P_{xy}(\hat{f}(x)), \quad (3.32)$$

es decir que para $x \in S_i^*$, $e^{g_i^*+h_i^*(x)} \geq \min_{a \in B_x^*} \left\{ e^{C(x,a)} \sum_{y \in S_i^*} e^{h_i^*(y)} P_{xy}(a) \right\}$.

□

La desigualdad (3.31) y la desigualdad (3.32) traen consigo que

$$e^{g_i^*+h_i^*(x)} = e^{C(x,\hat{f}(x))} \sum_{y \in S_i^*} e^{h_i^*(y)} P_{xy}(\hat{f}(x)), \quad (3.33)$$

para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y $x \in S_i^*$.

Para demostrar que \hat{f} es la estrategia óptima, aún falta ver que dicha función cumple la condición (2.7).

Proposición 3.3.3. Para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y $x \in S_i^*$, existe $f^* \in \mathbb{F}$ de tal forma que se cumplen las siguientes tres condiciones:

- a. $f^*(x) \in B_x^*$,
- b. $e^{g_i^*+h_i^*(x)} = e^{C(x,f^*(x))} \sum_{y \in S_i^*} e^{h_i^*(y)} P_{xy}(f^*(x))$.
- c. $\limsup \frac{1}{n} \log E_x^{f^*} [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i^*, t \leq n-1]}] \leq g_i^*$.

Demostración. Sea m un entero positivo, sean $f_{\alpha_m} \in \mathbb{F}$ y $x_i^* \in S_i^*$ como en (3.20), y (3.27) respectivamente, y sea $x \in S_i^*$ un estado arbitrario. Como $\alpha_m \in]0, 1[$, entonces, utilizando la primera desigualdad del Lema 3.3.2 se sigue que:

$$\begin{aligned} e^{g_{\alpha_m}(x_i^*)+V_{\alpha_m}(x)-V_{\alpha_m}(x_i^*)} &= E_x^{f_{\alpha_m}} [e^{C(X_0, A_0)+\alpha_m[V_{\alpha_m}(X_1)-V_{\alpha_m}(x_i^*)]}] \\ &\geq E_x^{f_{\alpha_m}} [e^{C(X_0, A_0)+\alpha_m[V_{\alpha_m}(X_1)-V_{\alpha_m}(x_i^*)]} \mathbb{I}_{[X_1 \in S_i^*]}] \\ &\geq E_x^{f_{\alpha_m}} [e^{C(X_0, A_0)+[V_{\alpha_m}(X_1)-V_{\alpha_m}(x_i^*)]} \mathbb{I}_{[X_1 \in S_i^*]}]. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\tilde{S}_i^* = \cup_{j=1}^i S_j^*$, entonces usando un argumento de inducción similar al que se usó en el Lema 2.2.1 se tiene que

$$e^{ng_{\alpha_m}(x_i^*)+V_{\alpha_m}(x)-V_{\alpha_m}(x_i^*)} \geq E_x^{f_{\alpha_m}} [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)+[V_{\alpha_m}(X_n)-V_{\alpha_m}(x_i^*)]} \mathbb{I}_{[X_t \in \tilde{S}_i^*, t \leq n]}].$$

En la desigualdad anterior, haciendo uso del hecho que $(1 - \alpha_m)\|V_{\alpha_m}\| \leq \|C\|$, se arriba a la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} e^{ng_{\alpha_m}(x_i^*)+2\frac{\|C\|}{(1-\alpha_m)}} &\geq E_x^{f_{\alpha_m}} [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)-2\frac{\|C\|}{(1-\alpha_m)}} \mathbb{I}_{[X_t \in \tilde{S}_i^*, t \leq n]}] \\ &\geq e^{-\|C\|} e^{-2\frac{\|C\|}{(1-\alpha_m)}} E_x^{f_{\alpha_m}} [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in \tilde{S}_i^*, t \leq n]}] \\ &\geq e^{-\|C\|} e^{-2\frac{\|C\|}{(1-\alpha_m)}} E_x^{f_{\alpha_m}} [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i^*, t \leq n]}], \end{aligned}$$

entonces, para cualquier entero positivo n y $x \in S_i^*$,

$$e^{ng_{\alpha_m}(x_i^*)+\|C\|+4\frac{\|C\|}{(1-\alpha_m)}} \geq E_x^{f_{\alpha_m}} [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i^*, t \leq n]}].$$

Por otro lado, aplicando el lema de Fatou en la parte derecha de la ultima desigualdad, se obtiene que

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} E_x^{f_{\alpha_m}} [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i^*, t \leq n]}] \geq E_x^{\hat{f}} [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i^*, t \leq n]}]. \quad (3.34)$$

Si la anterior desigualdad es estricta, para un entero positivo m bastante grande la definición de límite inferior implica que $e^{ng_{\alpha_m}(x_i^*)+\|C\|+4\frac{\|C\|}{(1-\alpha_m)}} \geq E_x^{\hat{f}} [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i^*, t \leq n]}]$, por lo tanto,

$$e^{g_{\alpha_m}(x_i^*)} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} E_x^{\hat{f}} [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i^*, t \leq n]}]^{\frac{1}{n+1}}. \quad (3.35)$$

Si en (3.34) se mantiene la igualdad, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se satisface que

$$e^{ng_{\alpha_m}(x_i^*)+\|C\|+4\frac{\|C\|}{(1-\alpha_m)}} \geq E_x^{\hat{f}} [e^{\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i^*, t \leq n]}] - \varepsilon,$$

por lo tanto,

$$e^{g\alpha_m(x_i^*)} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (E_x^{\hat{f}} [e^{\sum_{t=0}^n C(X_t, A_t)} \mathbb{I}_{[X_t \in S_i^*, t \leq n]}] - \varepsilon)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (3.36)$$

Tomando el límite cuando m tiende a infinito ∞ en (3.35) o en (3.36), junto con (3.33), y la Proposición 3.3.1, llevan a lo que se pretendía desde un principio, mostrar que $f^* = \hat{f}$. \square

Demostración Teorema de existencia: El *sistema de ecuaciones locales de optimalidad*, se obtiene del Teorema 3.2.1, del Lema 3.3.1, y las Proposiciones 3.3.1 y 3.3.2. La estrategia óptima que cumple (2.6) y (2.7) se sigue de la Proposición 3.3.3. \square

Es fácil llegar a pensar que si al principio de este capítulo se toma o se elige una sucesión diferente a la que se fijó en un comienzo (ver (3.5)-(3.7)), se obtenga un *sistema de ecuaciones locales de optimalidad* diferente al que se obtiene a partir del teorema de existencia 2.1.2; pero, esto no puede ser porque se contradice (2.5) en el teorema de verificación y la última conclusión de éste.

Parte II

Portafolios a tiempo discreto con caídas controladas

Capítulo 4

Optimización de portafolio con caídas controladas

En este capítulo se establece el modelo de un portafolio de inversión a tiempo discreto similar al que se consideró en [4], pero se restringe la atención a un caso muy particular, dicho caso es el mismo que estudiaron Grossman y Zhou en [18] para el modelo de Black-Scholes-Merton a tiempo continuo, y podría describirse de la siguiente manera: el *inversionista* no le permite al *corredor* perder más de cierto porcentaje fijo de la máxima ganancia que ya haya alcanzado. Otra característica a mencionar es que el *inversionista* se rige bajo una función de utilidad U -diferente de la identidad- la cual se usa para medir el desempeño de las estrategias de inversión. Dentro de este contexto se tiene interés en estudiar dos problemas de optimización los cuales se establecen a lo largo del presente capítulo.

4.1. Presentación del problema

Esta sección está dedicada a construir un modelo matemático para representar un portafolio de inversión que evoluciona a tiempo discreto, y cuya principal característica es que el precio de los activos con riesgo está influenciado por factores económicos externos. Otra propiedad importante y que tiene que ver con los problemas a tratar aquí, es que al valor del portafolio no se le permite tener grandes caídas. También, en esta sección, mientras se va edificando el modelo matemático de manera simultanea se plantean los dos problemas de optimización que se quieren estudiar. Por ahora, no está de más recordar que uno de los propósitos de este trabajo es relacionar los dos problemas a estudiar a

partir de la función de Arrow Pratt.

4.1.1. Valor del portafolio

El primer paso para construir el modelo matemático del valor del portafolio, consiste en fijar un proceso estocástico $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ el cual describe la evolución en el tiempo de un conjunto de factores económicos, como por ejemplo: el producto interno bruto, la inflación, las tasas de interés, los tipos de cambio, el desempleo, etc. Dicho proceso será una cadena de Markov estacionaria con un espacio de estados finito S , y una matriz de transición $Q = [Q_{xy}]$; para tener un poco más de claridad si se clasifican las cinco variables que se enunciaron anteriormente en cuatro categorías diferentes, el espacio S constará de $4^5 = 1024$ estados. A continuación se supone la existencia en el mercado de m activos con riesgo, la existencia de un vector aleatorio Z de dimensión m el cual representa el vector de precios relativos en un periodo de tiempo para los m activos con riesgo; además se asume que para todo estado $x \in S$, y todo estado $y \in S$ existe una medida de probabilidad condicional $v(dz|x, y)$ de tal forma que dicha medida es la distribución del vector Z_{t+1} cuando $X_t = x$ y $X_{t+1} = y$. Aquí se puede observar que el precio actual de un activo depende del estado en el que se encontraban dichas variables macroeconómicas externas, uno y solo un tiempo atrás y el nuevo estado al que han saltado las variables externas en el tiempo actual. También se acepta que existe una cuenta bancaria con una tasa de interés constante r ; para el modelo que se quiere describir en este trabajo es más conveniente modelar la inversión en el banco de manera exponencial, que de la forma tradicional para modelos a tiempo discreto, es decir, si se invierte un capital inicial k , al cabo de t periodos dicho capital será ke^{rt} en lugar de $k(1+r)^t$.

Para modelar las estrategias de transacción en cada tiempo t , se toma un sub-conjunto compacto A de \mathbb{R}^m , donde cada vector $a \in A$ representa la proporción de riqueza invertida en los activos con riesgo, por ejemplo: la componente a_i del vector a , es la proporción de riqueza invertida para un solo periodo de tiempo en el i -ésimo activo con riesgo m_i , y la diferencia $1 - \sum_{i=1}^m a_i$, es la proporción de riqueza invertida en la cuenta bancaria durante ese mismo periodo de tiempo.¹ Por lo tanto, si el vector A_t representa las m proporciones invertidas que toma lugar entre los tiempo t y $t+1$, y V_t representa el valor del portafolio

¹Aunque no se menciona, el vector $\mathbf{0}$ debe estar en $\text{int}(A)$ para asegurar que todo el capital se puede invertir en el banco (como una estrategia admisible), y además, para asegurar que se pueden hacer ventas en corto.

al tiempo t bajo cualquier estrategia de inversión en particular, entonces

$$V_{t+1} = V_t[e^r + A_t \cdot (Z_{t+1} - e^r \mathbf{1})].$$

Siguiendo notación estándar $\langle \langle \cdot \rangle \rangle$ representa el producto escalar o producto interior en \mathbb{R}^m , y $\mathbf{1}$ es el vector unidad de dimensión m . A partir de este punto, el factor $[e^r + a \cdot (Z - e^r \mathbf{1})]$ se denota como $F(a, Z)$, y el factor $F(A_t, Z_{t+1})$ se denotara como F_{t+1} .

4.1.2. Restricción de caída y proceso de referencia

Para continuar con la edificación del modelo matemático que se quiere presentar en este trabajo, es indispensable a partir de este momento empezar a describir los problemas que se pretenden estudiar en esta parte de la tesis, a la vez que se detalla con la construcción de dicho modelo. Por lo tanto, el objetivo principal de los párrafos que vienen a continuación es iniciar al lector en dichos problemas, y una buena forma de empezar es presentando las restricciones, *restricciones de caída* sobre el valor del portafolio, pues dichas restricciones son una característica esencial de esta investigación.

Como ya se mencionó, se tiene interés por estrategias de inversión que permiten al *corredor* controlar las caídas del valor del portafolio, pero ¿caídas con respecto a quien o a qué? Para dar respuesta a la anterior pregunta, vamos a definir el siguiente proceso, el cual llevará por nombre: *valor máximo histórico del portafolio*.

Tómese un número real λ en el intervalo $]0, r]$ el cual se interpretará como un factor de crecimiento (y más adelante se discutirá su presencia), y M_0 un valor mayor o igual que V_0 , que debe cumplir la siguiente desigualdad $\frac{V_0}{M_0} \geq \alpha e^{-\lambda}$, la motivación para la desigualdad anterior se encuentra más adelante cuando se define el proceso cociente. El *valor máximo histórico del portafolio* con respecto a λ en el tiempo t , se define como:

$$M_t := \max\{M_0 e^{\lambda t}; V_s e^{\lambda(t-s)}, s \leq t\}.$$

El proceso M_t representa el valor máximo que el portafolio puede alcanzar en el tiempo t si, en cualquier instante $s \leq t$, el *inversionista* decide invertir todo el valor del mismo (del portafolio) a una tasa fija de interés λ . A partir de la definición se puede observar que la siguiente igualdad

$$M_t = \max\{e^\lambda M_{t-1}, V_t\},$$

es válida para todo $t \in \mathbb{N}$.

Fíjese una proporción α en el intervalo $]0, 1[$. Entonces, en este trabajo se supone que tanto el *inversionista* como su *corredor* van a tener una inclinación especial sobre las

estrategias de inversión que cumplen la siguiente desigualdad:

$$V_t \geq \alpha M_{t-1} \quad (4.1)$$

para todo $t \in \mathbb{N}$, casi seguramente (c.s.).

La desigualdad anterior (4.1), es la restricción de caída al tiempo t que se impone al valor del portafolio en dicho tiempo. Todas las estrategias de inversión que satisfacen la restricción (4.1) se consideran como el conjunto de estrategias admisibles con respecto al nivel α , el cual más adelante se va a denotar como Γ_α . También, más adelante se verá que este conjunto de estrategias Γ_α es no vacío.

La interpretación de la restricción (4.1) es la siguiente: el término $1 - \frac{V_t}{M_{t-1}}$ es la proporción que ha caído el valor del portafolio al tiempo t con respecto a M_{t-1} , y para el *inversionista* como para sus clientes una caída del valor del portafolio que sea más grande que una proporción $1 - \alpha$ es inaceptable. Por ejemplo, si el *inversionista* publica a sus clientes un porcentaje α del valor del portafolio cuando éste coincide con el valor máximo histórico, es decir $V_t = M_t$, el *inversionista* le está dando la oportunidad a su *corredor* de perder a lo más un porcentaje $1 - \alpha$ del valor máximo histórico. El parámetro λ se puede interpretar como una tasa de rendimiento que el *inversionista* le ha exigido al *corredor* con la finalidad de mantener el portafolio bajo la dirección o gerencia del *inversionista* (ver [18]).

4.1.3. Proceso cociente

Con la finalidad de plantear los problemas de optimización a ocuparse en esta parte de la tesis, describir el conjunto de estrategias admisibles de inversión Γ_α , seguir estructurando el modelo matemático, y lo más importante, generar una mejor comprensión tanto del modelo como de los problemas en su totalidad, se define el siguiente proceso estocástico:

$$W_t := \frac{V_t}{M_t} \quad \forall t \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

A partir de este instante, se hace referencia al proceso W_t como el *proceso cociente*.

Bajo cualquier estrategia admisible de inversión con respecto al nivel α , se considerarán los siguientes casos: para cada $t \in \mathbb{N}$ se tiene el

Caso 1: $\alpha M_{t-1} \leq V_t < e^\lambda M_{t-1}$, por lo tanto en este caso el proceso cociente W_t toma valores en el intervalo $[\alpha e^{-\lambda}, 1[$,
y el

Caso 2: $V_t \geq e^\lambda M_{t-1}$, entonces $V_t = M_t$, es decir que $W_t = 1$.

Así que de esta manera, el proceso cociente W_t toma valores en el intervalo $[\alpha e^{-\lambda}, 1]$.

Para z en \mathbb{R}^m , a en \mathbb{R}^m y w en el intervalo $[\alpha e^{-\lambda}, 1]$ se define la función

$$S_z(w, a) := wF(a, z). \quad (4.3)$$

Definiendo $S_{t+1} := S_{Z_{t+1}}(W_t, A_t)$, el proceso cociente W_t sigue la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= W_{t+1} \mathbb{I}_{[V_{t+1} < e^\lambda M_t]} + W_{t+1} \mathbb{I}_{[V_{t+1} \geq e^\lambda M_t]} \\ &= \frac{V_{t+1} e^{-\lambda}}{M_t} \mathbb{I}_{[S_{t+1} < e^\lambda]} + \frac{V_{t+1}}{V_{t+1}} \mathbb{I}_{[S_{t+1} \geq e^\lambda]} \\ &= \frac{V_t e^{-\lambda} F_{t+1}}{M_t} \mathbb{I}_{[S_{t+1} < e^\lambda]} + \mathbb{I}_{[S_{t+1} \geq e^\lambda]}, \end{aligned}$$

entonces

$$W_{t+1} = W_t e^{-\lambda} F_{t+1} \mathbb{I}_{[S_{t+1} < e^\lambda]} + \mathbb{I}_{[S_{t+1} \geq e^\lambda]}, \quad (4.4)$$

para todo $t \in \mathbb{N}$ casi seguramente (c.s).

Por lo tanto, a través de un argumento de inducción hacia atrás se tiene que

$$W_{t+1} = W_0 e^{-(t+1)\lambda} \prod_{k=1}^{t+1} F_k \mathbb{I}_{[S_k < e^\lambda]} + \sum_{k=1}^t \mathbb{I}_{[S_k \geq e^\lambda]} e^{(k-(t+1))\lambda} \prod_{i=k+1}^{t+1} F_i \mathbb{I}_{[S_i < e^\lambda]} + \mathbb{I}_{[S_{t+1} \geq e^\lambda]}.$$

4.1.4. Estrategias admisibles de inversión

Haciendo uso del proceso cociente se puede definir de manera precisa una estrategia de inversión admisible con respecto al nivel α para el modelo que se está construyendo. La configuración que formula la definición de dichas estrategias es similar a la que se presentó en el Capítulo 1. Antes de pasar a la definición de Γ_α es imperioso fijar la siguiente hipótesis para asegurar que las estrategias de inversión cumplen la restricción (4.1), y que además permiten asegurar condiciones de continuidad que se utilizarán en el próximo capítulo para establecer una estrategia de inversión óptima, y estudiar el comportamiento asintótico del portafolio cuando el administrador se guía bajo funciones de utilidad diferentes a la función exponencial que se fija en la Sección 4.2.

Hipótesis 4.1.1. i) Para todo par de estados x y y en S , la medida $v(dz|x, y)$ se concentra en un único conjunto compacto B del hiperplano positivo de \mathbb{R}^m , ($v(B|x, y) = 1$), que contiene el vector 0 , y además su interior contiene al vector e^r , ($e^r \in \text{int}(B)$).

- ii) El sub-conjunto compacto A en \mathbb{R}^m , (espacio de estrategias o controles), se toma de tal forma que $a \in A$, si y solamente si, la desigualdad $0 < F(a, Z)$ se cumple casi seguramente (c.s).
- iii) Para todo $w \in [\alpha e^{-\lambda}, 1]$, existe un subconjunto compacto no vacío de A , $A_w \subset A$, de tal forma que $a \in A_w$ si y solamente si, la desigualdad $\frac{\alpha}{w} \leq F(a, Z)$ se satisface casi seguramente:

$$A_w := \{a \in A : \frac{\alpha}{w} \leq F(a, Z); \text{ c. s.}\}.$$

En la terminología que se introdujo en la hipótesis anterior, y similar a la descripción que se hizo en la primera parte, A_w representa el conjunto de estrategias de inversión admisibles cuando el proceso cociente está en w .

Nota 4.1.1. Aunque se establece como hipótesis que existe una familia de compactos no vacíos A_w , se puede justificar su existencia utilizando el siguiente hecho: la función $F(a, z)$ la cual está definida en \mathbb{R}^{2m} , se asemeja a un paraboloide hiperbólico o silla de montar². Más adelante, antes de la demostración del Lema 5.1.2 se volverá a hacer referencia a este hecho. Como también se podrá constatar más adelante, el hecho de que $e^r \in \text{int}(B)$, implica que para $\bar{K} := \max_{A \times B} F(a, z)$, $\ln \bar{K}$ debe ser un número más grande que la tasa de interés r .

A continuación el lector encontrará una semejanza con la Sección 1.1.2 donde se describen las políticas de control sobre las que se basó la primera parte de la tesis.

Para cada $t \geq 0$ se define el espacio de historias factor-cociente hasta el tiempo t , como:

$$\bar{\mathbb{H}}_t := \left(\prod_{k=0}^{t-1} (S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1] \times A)_k \right) \times (S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]).$$

Por lo tanto, un vector de la forma $\bar{h}_t = (x, w, a_0, x_1, w_1, \dots, x_{t-1}, w_{t-1}, a_{t-1}, x_t, w_t)$ representara un elemento genérico factor-cociente en $\bar{\mathbb{H}}_t$.

Una estrategia de inversión admisible con respecto al nivel α , es una sucesión de núcleos estocásticos $\pi := \{\pi_t\}_{t=0}^{\infty}$ donde cada π_t está definido sobre A dado $\bar{\mathbb{H}}_t$, y además satisface la siguiente restricción:

$$\pi_t(A_{w_t} | \bar{h}_t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{N} \text{ y } \bar{h}_t \in \bar{\mathbb{H}}_t.$$

²El nombre de silla de montar se utiliza en algunos textos de cálculo, como por ejemplo, Cálculo Vectorial de Marsden, J.E., y Tromba, A.J.; y se bautiza de esta manera porque su gráfica guarda un parecido con una silla de montar a caballo.

Como se había mencionado anteriormente, el conjunto de estrategias admisibles con respecto al nivel α se denotará como Γ_α .

A continuación se observará que para cualquier $\alpha \in (0, 1)$ el conjunto Γ_α no puede ser vacío. Sea π_* la estrategia que en cada tiempo de comercialización invierte todo el capital en la cuenta bancaria, es decir $a_t = 0$ para todo $t \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\begin{aligned} M_{t-1}^{\pi_*} &= \text{máx}\{M_0 e^{\lambda(t-1)}, V_0 e^{\lambda(t-1)}, \dots, V_0 e^{\lambda(t-1)+(t-2)(r-\lambda)}, V_0 e^{r(t-1)}\} \\ &= \text{máx}\{M_0 e^{\lambda(t-1)}, V_0 e^{r(t-1)}\}, \end{aligned}$$

y $V_t^{\pi_*} = V_0 e^{rt}$. Por consiguiente $V_t^{\pi_*} \geq \alpha M_{t-1}^{\pi_*}$ si y solamente si, $V_0 e^{rt} \geq \alpha M_0 e^{\lambda(t-1)}$, es decir, si y solamente si, $W_0 e^{(r-\lambda)t} \geq \alpha e^{-\lambda}$. Pero, por la manera en que se escogió V_0 y M_0 se sabe que $W_0 \geq \alpha e^{-\lambda}$, por lo que $\pi_* \in \Gamma_\alpha$.

Sea $f : S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1] \rightarrow A$ una función medible, de tal forma que para todo $(x, w) \in S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$ su imagen bajo f está en A_w . De esta manera f se puede asociar con una estrategia aleatorizada $\pi \in \Gamma_\alpha$ si, para $C \in \mathcal{B}(A)$, $t \in \mathbb{N}$, y todo vector $\bar{h}_t \in \bar{\mathbb{H}}_t$, se define π de la siguiente manera: $\pi_t(C|\bar{h}_t) = \mathbb{I}_C(f(x_t, w_t))$. El conjunto de tales funciones se reconocerá como la clase de estrategias de inversión admisibles estacionarias y se denotará como $\bar{\mathbb{F}}_\alpha$, también se acaba de ver que $\bar{\mathbb{F}}_\alpha \subset \Gamma_\alpha$.

4.1.5. Espacio canónico

Sea $\Omega := \prod_{k=1}^{\infty} (A \times S \times \mathbb{R}^m)_k$ y \mathcal{F} la σ -álgebra producto correspondiente. Entonces, a partir del Teorema de C.Ionescu-Tulcea, ver [2, Teorema: 2.7.2], para $x \in S$, $w \in [\alpha e^{-\lambda}, 1]$ y cada estrategia $\pi \in \Gamma_\alpha$, existe una medida de probabilidad P_{xw}^π definida sobre (Ω, \mathcal{F}) . De manera análoga a como se vio en la primera parte, aquí también se puede notar que la probabilidad P_{xw}^π se puede escribir de modo informal como:

$$\begin{aligned} P_{xw}^\pi(da_0, dx_1, dz_1, da_1, dx_2 \dots) = \\ \pi_0(da_0|x, w) Q_{xx_1} v(dz_1|x, x_1) \pi_1(da_1|x, w, a_0, x_1, w_1(w, a_0, z_1)) Q_{x_1 x_2} \dots \end{aligned}$$

Se utiliza E_{xw}^π para denotar el operador esperanza con respecto a la probabilidad P_{xw}^π .

4.2. Índice de desempeño para el caso potencia

Si el *inversionista* se guía bajo una función de utilidad $U_\gamma(x) = x^\gamma$, con x en $]0, \infty[$ y γ un elemento fijo en $]0, 1[$. El objetivo del *inversionista* y, el primero de los problemas a

tratar en esta parte de la tesis, será escoger una estrategia de inversión admisible $\pi \in \Gamma_\alpha$ que maximice la tasa de crecimiento exponencial esperada a largo plazo, con relación a la utilidad U_γ del portafolio; es decir, para un estado inicial $X_0 = x$ y $W_0 = w$ el *inversionista* quiere maximizar la función γ -exponencial

$$\widehat{J}_\gamma(\pi, x, w) := \liminf \frac{1}{t} \ln \Psi_\gamma^{\pi, x, w}(V_t),$$

sobre el conjunto de estrategias admisibles Γ_α . En el capítulo 1 se definió Ψ_U para una función de utilidad cualquiera U , para la función x^γ se utilizara la notación Ψ_γ .³

Al igual que en los problemas de control estocástico óptimo, la función γ -exponencial $\widehat{J}_\gamma(\pi, x, w)$ mide el desempeño de una estrategia de inversión $\pi \in \Gamma_\alpha$. Una justificación para el uso de este índice podría ser la siguiente: en primer lugar, al igual que muchos autores lo han hecho en teoría de control estocástico sensible al riesgo, a la función $T(\gamma) = \ln \Psi_\gamma^{\pi, x, w}(V_t)$ se le puede calcular su expansión de Taylor alrededor del cero, y al mismo tiempo observar que

$$\widehat{J}_\gamma(\pi, x, w) \approx \liminf_t \frac{1}{t} (E_{x, w}^\pi[\ln V_t] + \frac{\gamma}{2} \text{Var}_{x, w}^\pi(\ln V_t)),$$

por lo tanto, la función γ -exponencial se puede interpretar como la tasa de crecimiento a largo plazo del portafolio, con respecto al criterio clásico de Kelly más un termino de penalización proporcional a la varianza, donde γ se puede entender como un parámetro de aversión al riesgo (ver Fleming en [16]). En segundo lugar, y no menos recalable, si se reescribe V_t^γ como $e^{\gamma \ln V_t}$ el criterio γ -exponencial fija de forma natural una conexión con el criterio sensible al riesgo, o aversión al riesgo por la concavidad de U_γ . Por lo tanto, es normal pensar que se pueden utilizar técnicas de optimización en teoría de control estocástico para optimizar la función $\widehat{J}_\gamma(\pi, x, w)$, conforme lo hacen Bielecki y Pliska en [5] para un modelo a tiempo continuo donde la tasa media del retorno de los activos con riesgo se ve impactada por factores económicos, o como lo hacen Bielecki, Hernandez y Pliska en [4] para un modelo análogo al que se presento en [5] pero a tiempo discreto.

Se define la función γ -exponencial óptima como:

$$\widehat{J}_\gamma^*(x, w) := \sup_{\pi \in \Gamma_\alpha} \widehat{J}_\gamma(\pi, x, w), \quad (4.5)$$

y de acuerdo con el párrafo anterior, la meta del *inversionista* -su problema de optimización- consiste en encontrar una estrategia de inversión admisible $\pi^* \in \Gamma_\alpha$, de tal forma

³ $\widehat{J}_\gamma(\pi, x, w) = \liminf \frac{1}{t^\gamma} \ln E_{x, w}^\pi[V_t^\gamma]$.

que $\widehat{J}_\gamma^*(x, w) = \widehat{J}_\gamma(\pi^*, x, w)$, en este caso π^* se nombra como la estrategia de inversión óptima.

En esta parte de la tesis (la segunda) los esfuerzos se centran en encontrar una estrategia de inversión óptima que resuelva el problema de optimización en (4.5). Según se anticipó reglones atrás la táctica para tal fin, consiste en utilizar procedimientos similares a los que se utilizan en control estocástico. Conforme se dio a entender en la Sección 1.2. muchos de estos procedimientos consisten en asegurar la existencia de una solución para la correspondiente ecuación de programación dinámica, y esta tesis no será la excepción salvo una diferencia sustancial, pues la tesis está dedicada a exhibir la solución de una desigualdad de programación dinámica en vez de una solución a la correspondiente ecuación de programación dinámica. Dicha desigualdad es análoga a la que resuelven para un problema de control estocástico sensible al riesgo Jaśkiewicz en [25], Hernández y Marcus en [20], y Cavazos y Salem en [12]. Además, la solución de la desigualdad correspondiente a este trabajo, se construye a partir de una familia de operadores contractivos estableciendo así una conexión entre las dos partes de esta tesis.

4.3. Índice de desempeño para el caso general

Uno de los propósitos de este capítulo es identificar dos problemas de optimización y relacionarlos a través de la función de Arrow-Pratt. El primer problema se ha propuesto en párrafos anteriores, el segundo problema es similar al primero pero bajo la suposición que el *inversionista* se rige bajo una función de utilidad más general.

Con la finalidad de plantear el segundo problema es necesario considerar la siguiente clase de funciones de utilidad.

Definición 4.3.1. La clase \mathcal{U} consiste de todas las funciones de utilidad $U :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, que satisfacen los siguientes requerimientos:

- i U tiene derivadas continuas hasta de segundo orden en $]0, \infty[$,
- ii $U'(x) > 0$ para todo $x \in]0, \infty[$; creciente,
- iii $U''(x) < 0$ para todo $x \in]0, \infty[$; concava.

Con el ánimo de establecer y comprender el segundo problema, a continuación se define la función de Arrow-Pratt. Luego se puede encontrar un comentario del porque de esta definición, y más adelante el uso que se hace de la misma en este trabajo.

Definición 4.3.2 (Función de Arrow-Pratt). Para una función de utilidad $U \in \mathcal{U}$, la correspondiente función de Arrow-Pratt $\Delta_U(x)$ se define como

$$\Delta_U(x) := -x \frac{U''(x)}{U'(x)}, \quad x \in (0, \infty).$$

Si el *inversionista* empieza con un capital inicial x y debe comparar entre una pérdida sin incertidumbre c , y una pérdida aleatoria θY , con $E[Y] < \infty$, -al igual que el planteamiento que se hace en la primera parte de la tesis- el administrador quien se rige bajo una función de utilidad $U \in \mathcal{U}$ es indiferente a correr riesgo si $U(x - c) = E[U(x + \theta Y)]$, y en este caso, utilizando Taylor alrededor de $\theta = 0$,

$$\Psi_U(x + \theta Y) \approx x + \theta E[Y] - \frac{1}{2} \theta^2 x^{-1} \Delta_U(x) \text{Var}(Y).$$

Observe la similitud de la anterior aproximación con la justificación del criterio que se estableció en la sección anterior.

Definición 4.3.3. Una función de utilidad $U \in \mathcal{U}$ es *regular* si el límite $\lambda_U := \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta_U(x)$ existe en \mathbb{R} .

El límite de la anterior definición se nombra *el coeficiente asintótico sensible al riesgo*. Para $\gamma \in]0, 1[$, y la función de utilidad $U_\gamma(x) := x^\gamma$ su correspondiente función de Arrow-Pratt es la función constante $\Delta_{U_\gamma}(x) = 1 - \gamma$, entonces su *coeficiente asintótico sensible al riesgo* es $\lambda_{U_\gamma} = 1 - \gamma$.

Si π es una estrategia de inversión admisible con respecto al nivel α ($\pi \in \Gamma_\alpha$), el proceso factor comienza en $X_0 = x$, y el proceso cociente comienza en $W_0 = w$, el desempeño de π con relación a la función de utilidad U se mide con la tasa de crecimiento exponencial esperada a largo plazo, la cual se define como:

$$\widehat{J}_U(\pi, x, w) := \liminf \frac{1}{t} \ln \Psi_U^{\pi, x, w}(V_t),$$

y la tasa de crecimiento exponencial óptima a largo plazo de U es

$$\widehat{J}_U^*(x, w) := \sup_{\pi \in \Gamma_\alpha} \widehat{J}_U(\pi, x, w).$$

Por lo tanto, la meta principal -el segundo problema de optimización- consiste en demostrar que existe una estrategia de inversión $\pi^* \in \Gamma_\alpha$ de tal forma que $\widehat{J}_U^*(x, w) = \widehat{J}_U(\pi^*, x, w)$, y en este caso π^* es una estrategia de inversión óptima.

En el siguiente capítulo se establecen y demuestran los resultados principales de la segunda parte de la tesis como lo son el Teorema 5.1.1 y el Teorema 5.2.1. El Teorema 5.1.1 da solución al primero de los problemas y se puede resumir de la siguiente manera: sobre el conjunto donde la solución a la correspondiente desigualdad de programación dinámica es finita, se caracteriza la función γ -exponencial óptima, y se exhibe una estrategia óptima para este caso. Por otra parte, el Teorema 5.2.1 da solución al segundo problema, bajo el supuesto de que la función de utilidad $U(x)$ tiene un *coeficiente asintótico sensible al riesgo* igual al de la función potencia gama $U_\gamma(x)$, pero lo interesante es que la solución del primer problema resulta ser solución del segundo problema, y viceversa.

Capítulo 5

Estrategias óptimas

Este capítulo se divide en dos partes. En la primera parte se exhibe una estrategia de inversión óptima cuando el *inversionista* se rige bajo una función de utilidad potencia gama. En la segunda parte se hace uso de la continuidad en γ de la función γ -exponencial y la función γ -exponencial óptima para demostrar que, la solución del primer problema también es solución del segundo problema, siempre y cuando la función de utilidad U comparta el mismo *coeficiente asintótico sensible al riesgo* de la función exponencial gama.

5.1. Estrategia de inversión óptima para el caso potencia

Esta sección empieza enunciando el primero de los dos teoremas importantes de este capítulo, y el resto de la sección está dedicada a la demostración de dicho teorema. En primer lugar se presentan dos lemas, el primero de ellos permite ver que W_1 es una función continua, y el segundo posibilita definir de buena manera una familia de operadores contractivos; los que a la postre facultan exhibir una solución para la desigualdad de programación dinámica que se establece en el teorema.

Todo el trabajo que se desarrolla a partir de este momento se hace bajo la Hipótesis 4.1.1, por eso aunque no se haga mención explícita de la misma, de aquí en adelante se da por hecho que tanto teoremas, proposiciones, lemas, y sus respectivas demostraciones se rigen bajo dicha hipótesis.

Teorema 5.1.1. *Sean γ y α fijos en $]0, 1[$. Existe un número real $g^* \in \mathbb{R}$ y una función semi continua por arriba $h^* : S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1] \rightarrow [-\infty, 0]$ de tal forma que se cumple la*

siguiente desigualdad de programación dinámica

$$e^{g^* + h^*(x,w)} \leq \sup_{a \in A_w} \left\{ \sum_{y \in S} \int_B e^{h^*(y, W_1(w,a,z))} F^\gamma(a, z) v(dz|x, y) Q_{xy} \right\}, \quad (5.1)$$

para todo (x, w) en $S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$. Además, existe una función $f^* \in \overline{\mathbb{F}}_\alpha$ que maximiza el lado derecho de (5.1), es decir,

$$\sup_{a \in A_w} \left\{ \sum_{y \in S} \int_B e^{h^*(y, W_1(w,a,z))} F^\gamma(a, z) v(dz|x, y) Q_{xy} \right\} = \quad (5.2)$$

$$\sum_{y \in S} \int_B e^{h^*(y, W_1(w, f^*(x,w), z))} F^\gamma(f^*(x, w), z) v(dz|x, y) Q_{xy} \quad (5.3)$$

y, si \mathcal{H} es el conjunto $\mathcal{H} := \{(x, w) \in S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1] : h^*(x, w) > -\infty\}$, entonces, sobre dicho conjunto \mathcal{H} se cumple la siguiente igualdad:

$$\widehat{J}_\gamma^*(x, w) = \widehat{J}_\gamma(f^*, x, w) = \frac{g^*}{\gamma}.$$

La demostración del Teorema 5.1.1 consta de la consecución de los siguientes tres pasos: el primero, verificar el Lema 5.1.2, el cual permite definir una familia de operadores contractivos que se utilizarán en el segundo paso para obtener un número g^* , una función h^* y una estrategia de maximización f^* que satisfacen (5.1) y (5.2) respectivamente; conclusión que más adelante se establece como Proposición 5.1.1, el tercer paso consta de verificar que los puntos donde la función h^* es finita la función γ -exponencial óptima es igual a la constante g^*/γ .

5.1.1. Operadores contractivos

Antes de continuar se introduce un poco de notación nueva, la cual permitirá simplificar la escritura y la presentación de aquí en adelante.

Sea $C(S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1])$ el espacio de funciones a valor real continuas definidas sobre el producto $S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$. Entonces, para γ y β en $]0, 1]$, V en $C(S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1])$ y (x, w, a) en $S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1] \times A$, se define la función

$$l_V^\beta(x, w, a) := \sum_{y \in S} \int_B e^{\beta V(y, W_1(w,a,z))} F^\gamma(a, z) v(dz|x, y) Q_{xy}, \quad (5.4)$$

y para (x, w) en $S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$ se define la función

$$\tilde{l}_V^\beta(x, w) := \sup_{a \in A_w} l_V^\beta(x, w, a). \quad (5.5)$$

El lema que se presenta a continuación es una herramienta útil tanto en la demostración del Lema 5.1.2, como también en la demostración de la Proposición 5.1.1. No está de más recordar en este instante que

$$W_1(w, a, z) = wF(a, z)e^{-\lambda} \mathbb{I}_{\{S_z(w, a) < e^\lambda\}} + \mathbb{I}_{\{S_z(w, a) \geq e^\lambda\}}.$$

Lema 5.1.1. Sea α en $]0, 1[$ y z un punto fijo en el conjunto compacto B donde los precios relativos se concentran, entonces, en ese caso $W_1(w, a, z)$ es continua en (w, a) .

Demostración. Sea $\{(w_n, a_n)\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $[\alpha e^{-\lambda}, 1] \times A$ que converge a un punto (w^*, a^*) . Como la función $S_z(w, a)$ es continua, entonces la sucesión $S_z(w_n, a_n)$ converge a $S_z(w^*, a^*)$. Ahora, para continuar con la demostración se analizan los siguientes tres casos:

Caso 1: Sea $z \in B$ de tal forma que $S_z(w^*, a^*) < e^\lambda$, o $S_z(w^*, a^*)$ es de tal forma que $S_z(w^*, a^*) < e^\lambda$. Entonces, la primera implicación es la siguiente $W_1(w^*, a^*, z) = e^{-\lambda} S_z(w^*, a^*)$, en segundo lugar existe un $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que para todo $n \geq N$ se tiene que $S_z(w_n, a_n) < e^\lambda$, por lo tanto, en esta situación $W_1(w_n, a_n, z) = e^{-\lambda} S_z(w_n, a_n)$ para $n \geq N$, y por consiguiente

$$\begin{aligned} \lim W_1(w_n, a_n, z) &= e^{-\lambda} \lim S_z(w_n, a_n) \\ &= e^{-\lambda} S_z(w^*, a^*) \\ &= W_1(w^*, a^*, z). \end{aligned}$$

Caso 2: Si $z \in B$ es tal que $S_z(w^*, a^*) > e^\lambda$, o $S_z(w^*, a^*)$ es de tal forma que $S_z(w^*, a^*) > e^\lambda$, entonces $W_1(w^*, a^*, z) = 1$. A partir de cierto N se tiene que $S_z(w_n, a_n) > e^\lambda$, por lo tanto, $W_1(w_n, a_n, z) = 1$ para todo $n \geq N$, es decir que $\lim W_1(w_n, a_n, z) = 1 = W_1(w^*, a^*, z)$.

Caso 3: El ultimo caso, el caso interesante por así decirlo, es cuando $S_z(w^*, a^*) = e^\lambda$. En este caso $W_1(w^*, a^*, z) = 1$, también, para este caso se tiene que

$$W_1(n) = W_1(w_n, a_n, z) = \begin{cases} 1 & \text{si, } S_z(w_n, a_n) \geq e^\lambda \\ S_z(w_n, a_n)e^{-\lambda} & \text{si, } S_z(w_n, a_n) < e^\lambda. \end{cases}$$

A partir de la definición de $W_1(n)$ se puede ver que el $\limsup W_1(w_n, a_n, z) = 1$. Ahora, haciendo uso de la definición de límite, y del hecho que $S_z(w_n, a_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} S_z(w^*, a^*)$, se tiene que para un $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que para todo $n \geq N$ se cumple la siguiente desigualdad $1 - \epsilon(e^{-\lambda}) < W(w_n, a_n, z)$, además, haciendo uso de la definición de $W_1(n)$ se verifica que para un $k \in \mathbb{N}$, se puede encontrar un $m > k$ de tal forma que $W_1(w_m, a_m, z) = 1 < 1 + \epsilon(e^{-\lambda})$, por lo tanto el $\liminf W_1(w_n, a_n, z) = 1$, esto quiere decir que $\lim W_1(w_n, a_n, z) = 1 = W_1(w^*, a^*, z)$.

□

El propósito del siguiente lema es asegurar que la familia de operadores contractivos que se establece más adelante está bien definida, además del uso implícito que se hace de él cada vez que se habla de un punto a en A que maximice funciones del tipo l_V^β .

Lema 5.1.2. Sean γ, α, β en $]0, 1[$ y $V \in C(S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1])$, entonces, existe una función $f_V^\beta \in \overline{\mathbb{F}}_\alpha$, de tal forma que para todo (x, w) en $S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$,

$$\tilde{l}_V^\beta(x, w) = l_V^\beta(x, w, f_V^\beta(x, w)),$$

y más aun la función $\tilde{l}_V^\beta(x, w)$ es continua en $S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$.

La demostración del Lema 5.1.2 se obtiene como una consecuencia inmediata del Teorema de Selección Medible, Teorema A.2.1 (ver Apéndice A), o el resultado de selección que presenta Himmelber en [23]. La demostración del Lema 5.1.2 se divide en dos fases, la primera consiste en demostrar que la función $l_V^\beta(x, w, a)$ es continua, mientras que la segunda estriba en demostrar que la función conjunto-valuada $w \rightarrow A_w$ es continua.

Antes de pasar a la demostración del Lema 5.1.2 vale la pena recordar la siguiente definición: sean X y Y dos espacios de Borel, y $\mathcal{C}(Y)$ la familia de subconjuntos compactos no vacíos de Y , una función conjunto-valuada compacta $\psi : X \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ es semi-continua por arriba (resp. semi-continua por abajo) si y solo si, para todo conjunto abierto G (resp. cerrado F) en Y , el conjunto $\{x \in X : \psi(x) \subset G\}$ (res. $\{x \in X : \psi(x) \subset F\}$) es un conjunto abierto (res. cerrado) en X , y la función ψ es continua si y solamente si, a la vez es semi-continua por arriba y semi-continua por abajo.

También, con el fin de que la demostración del Lema 5.1.2 sea clara, es fundamental hacer el siguiente comentario: la función $F(a, z)$ la cual está definida sobre \mathbb{R}^{2m} , es una silla de montar centrada en el vector $(\mathbf{0}, \mathbf{e}^r)$, y se recuerda que \overline{K} es el máximo valor que alcanza la función F sobre $A \times B$. Entonces, para w en $[\alpha e^{-\lambda}, 1]$ la familia de conjuntos $\tilde{A}_w = F^{-1}[\frac{\alpha}{w}, \overline{K}] \cap (A \times B)$ es una familia creciente y es un hecho que cada \tilde{A}_w está

determinada y delimitada en cierta medida por las superficies de nivel o los contronos $F(a, z) = \frac{\alpha}{w}$. Lo cual permiten ver que el encaje de la familia \tilde{A}_w crece continuamente conforme también crece w (ver figura 5.1), pero además como F es una función abierta y cerrada a la vez, haciendo uso del [29, Teorema 5 Cap. 18 sec. III] se tiene que \tilde{A}_w es continua.

Por otra parte, de la Hipótesis 4.1.1 se puede ver que A_w es un encaje creciente, pero además cada A_w se puede identificar de la siguiente manera $A_w = \{(a, z) \in \tilde{A}_w : z = \mathbf{0}\}$, identificación que permite observar que la familia A_w es también un encaje que va creciendo continuamente conforme crece w y, ésta es una de las razones que permite justificar la segunda parte de la siguiente demostración.

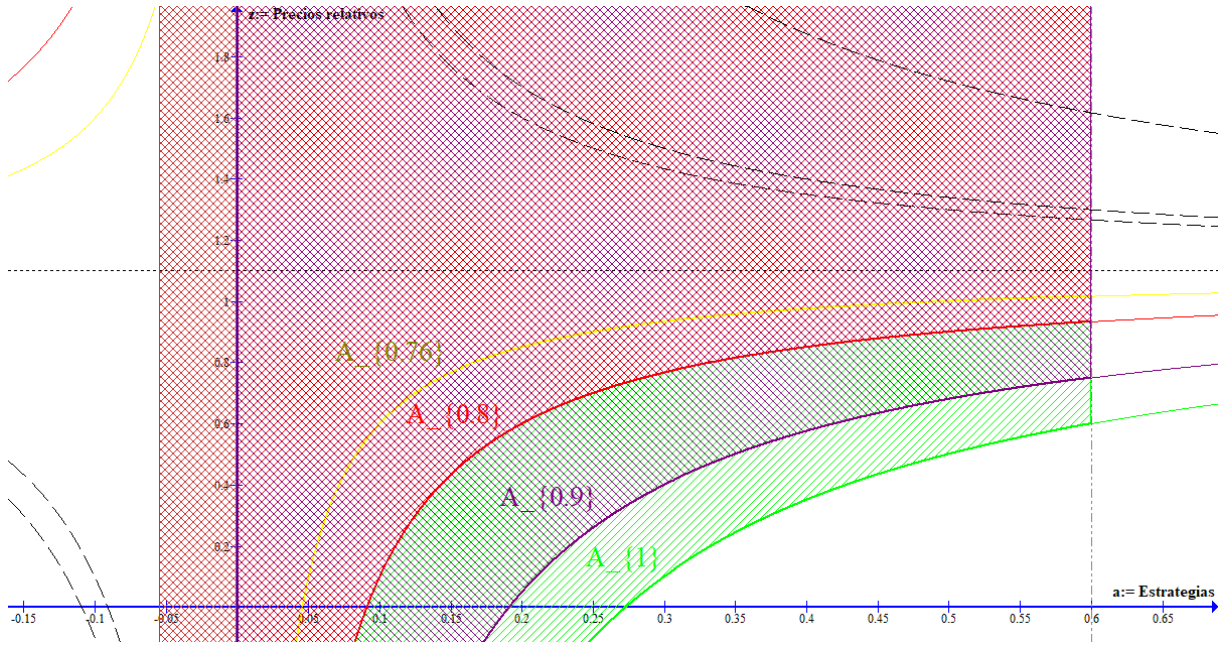


Figura 5.1: Contornos de la función $F(a, z)$ definida sobre \mathbb{R}^2 . $\alpha = 0,8$; $r = 0,1$; $\lambda = 0,05$. El conjunto compacto B es el intervalo $[0, 2]$ y el conjunto de estrategias A es el intervalo $[-0,055; 0,6]$. En este caso $\bar{K} \approx 1,64$ y $\ln \bar{K} \approx 0,214 > 0,1$. El proceso cociente toma valores en el intervalo $[0,76; 1]$. Para $(F(a, z) = \frac{0,8}{0,76}; \text{Cont } \text{---})$, $(F(a, z) = \frac{0,8}{0,8}; \text{Cont } \text{---})$, $(F(a, z) = \frac{0,8}{0,9}; \text{Cont } \text{---})$, $(F(a, z) = \frac{0,8}{1}; \text{Cont } \text{---})$.

Demostración. Antes de pasar a verificar que la función $l_V^\beta(x, w, a)$ es continua, no está de más hacer el siguiente comentario, el espacio de estados S es finito y por lo tanto discreto. Si se elige una sucesión (w_n, a_n) que converja a un punto (w, a) cuando n tiende

a infinito, se puede observar a partir de la Hipótesis 4.1.1 y del hecho de que la función V es continua y está definida sobre un compacto, que la siguiente desigualdad

$$\alpha^\gamma e^{-\beta\|V\|} \leq e^{\beta V(y, W_1(w_n, a_n, z))} F^\gamma(a_n, z) \leq e^{\beta\|V\|} \bar{K}^\gamma \quad (5.6)$$

se cumple para todo $y \in S$, $z \in B$, y $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, utilizando el Teorema de Convergencia Dominada y el Lema 5.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_n l_V^\beta(x, w_n, a_n) &= \sum_{y \in S} \int e^{\beta \lim_n V(y, W_1(w_n, a_n, z))} F^\gamma(a, z) v(dz|x, y) Q_{xy} \\ &= \sum_{y \in S} \int e^{\beta V(y, \lim_n W_1(w_n, a_n, z))} F^\gamma(a, z) v(dz|x, y) Q_{xy} \\ &= \sum_{y \in S} \int e^{\beta V(y, W_1(w, a, z))} F^\gamma(a, z) v(dz|x, y) Q_{xy} \\ &= l_V^\beta(x, w, a), \end{aligned}$$

esto demuestra que la función $l_V^\beta(x, w, a)$ es continua.

Recuerde que A_w se especifica en la Hipótesis 4.1.1 y es una función conjunto-valuada que va del intervalo $[\alpha e^{-\lambda}, 1]$ al espacio de control A .

Para empezar la segunda parte de la demostración se fija G un abierto de A y, a continuación se define el conjunto $I_G := \{w \in [\alpha e^{-\lambda}, 1] : A_w \subset G\}$. Si $G = \emptyset$, entonces $I_G = \emptyset$. Ahora, dos casos triviales para verificar la continuidad de A_w son: cuando G se selecciona de tal forma que $I_G = \emptyset$, es decir cuando ningún A_w está plenamente contenido en G , o cuando se elige G de tal forma que $I_G = [\alpha e^{-\lambda}, 1]$, es decir cuando G contiene a todo A_w . Si se supone que I_G no es vacío y además $I_G \neq [\alpha e^{-\lambda}, 1]$, entonces, en primer lugar se tiene que el conjunto $I_G^c := \{w \in [\alpha e^{-\lambda}, 1] : A_w \cap G^c \neq \emptyset\}$ es diferente del vacío; sea $G_* = \inf I_G^c$ y escójase w en $[\alpha e^{-\lambda}, G_*[$, por consiguiente $w \in I_G$ es decir que $[\alpha e^{-\lambda}, G_*[\subset I_G$. Entonces, a partir de la definición de \inf se tienen las siguientes dos opciones, $I_G = [\alpha e^{-\lambda}, G_*]$ ó $I_G = [\alpha e^{-\lambda}, G_*[$, si $G_* \in I_G$, el conjunto compacto A_{G_*} esta plenamente contenido en el abierto G ($A_{G_*} \subset G$), por lo tanto en base a las observaciones que se hicieron antes de la demostración, existe un conjunto compacto $A_{G_*+\epsilon}$ de tal forma que $A_{G_*} \subset A_{G_*+\epsilon} \subset G$, pero esta ultima afirmación contradice la definición de \inf por lo tanto $I_G = [\alpha e^{-\lambda}, G_*[$, esto es, la función A_w es semi-continua por arriba. Siguiendo un argumento similar se puede ver que la función A_w es semi continua por abajo, y por lo tanto continua.

Por consiguiente, la conclusión del lema se sigue inmediatamente del literal (c) en el Teorema A.2.1. \square

Definición 5.1.1. Para γ, β y α en $]0, 1[$ se define un operador $T_\beta : C(S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]) \rightarrow C(S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1])$ de la siguiente manera: para $V \in C(S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1])$ y $(x, w) \in S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$

$$T_\beta[V](x, w) := \ln \tilde{l}_V^\beta(x, w).$$

Una de las primeras consecuencias del Lema 5.1.2 es que el operador T_β está bien definido.

En este caso, e igual a como se hizo en el Capítulo 3 no hay dificultad en ver que

$$e^{T_\beta[V](x, w)} = \tilde{l}_V^\beta(x, w), \quad (5.7)$$

menos aún hay dificultad en ver que a partir de (5.7) el operador T_β es monótono y β -homogéneo:

1. Monótona: para cada $V, W \in C(S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1])$, con $V \leq W$, $T_\beta[V] \leq T_\beta[W]$.
2. β -Homogeneidad: para $V \in C(S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1])$, y $r \in \mathbb{R}$, $T_\beta[V + r] = T_\beta[V] + \beta r$.

Siguiendo argumentos similares a los que se presentaron entre (3.2) y (3.4) se obtiene la demostración del siguiente lema, por lo que aquí se omite. Cabe mencionar que la importancia del siguiente lema radica en su uso para la consecución de un número \hat{g} y una función \hat{h} que cumplan la desigualdad (5.1), así como de la obtención de una estrategia óptima.

Lema 5.1.3. Para γ, α y β en $]0, 1[$ el operador T_β definido sobre $C(S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1])$ es contractivo, es decir, existe $V_\beta \in C(S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1])$ tal que

i) $T_\beta[V_\beta] = V_\beta$,

ii) además, se cumple la siguiente desigualdad

$$(1 - \beta) \|V_\beta\| \leq \ln \overline{K}^\gamma. \quad (5.8)$$

Para $\beta \in (0, 1)$, la igualdad $T_\beta[V_\beta] = V_\beta$ es equivalente a $e^{V_\beta(x, w)} = \tilde{l}_{V_\beta}^\beta(x, w)$, y por el Lema 5.1.2, existe una función $f_\beta(x, w)$ tal que

$$e^{V_\beta(x, w)} = l_{V_\beta}^\beta(x, w, f_\beta(x, w)), \quad \forall (x, w). \quad (5.9)$$

5.1.2. Existencia

Esta sección es dedicada a demostrar la existencia de una solución para la desigualdad de programación dinámica (5.1), así como la de una estrategia de inversión óptima. Como se ha dicho varias veces dicha solución y estrategia se obtienen a partir de la familia de operadores contractivos de la Definición 5.1.1. Los argumentos son similares a los usados en la primera parte de la tesis, pero gran parte de ellos se basan en el trabajo de Cavazos y Salem en [12].

Definición 5.1.2. Para una sucesión de funciones $h_n : S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1] \rightarrow [-\infty, 0]$ se define el *límite superior generalizado* de la sucesión $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como:

$$\tilde{h}(x, w) := \sup\{r : r = \limsup h_n(x, w_n), \text{ para alguna sucesión } w_n, \text{ tal que } w_n \rightarrow w.\}.$$

La función \tilde{h} de la definición anterior se denota de la siguiente manera: $\tilde{h}(x, w) = \mathbf{g} \limsup h_n(x, w)$.

El siguiente lema establece una propiedad que junto con el Teorema de Selección Medible A.2.1 se utilizarán más adelante para establecer la existencia de una estrategia óptima.

Lema 5.1.4. La función \tilde{h} es semi-continua por arriba.

La demostración del lema anterior se puede encontrar en la tercera sección del Apéndice A, o en [26, Lema 3.1].

En la siguiente definición se utiliza la familia de puntos fijos $\{V_\beta\}_{\beta \in (0,1)}$ que se estableció en el Lema 5.1.3.

Definición 5.1.3. Para cada $\beta \in (0, 1)$, se define $m_\beta := \sup_{(x,w) \in S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]} V_\beta(x, w)$. La tasa relativa $g_\beta \in [-\ln \bar{K}, \ln \bar{K}]$ y la función relativa $h_\beta : S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1] \rightarrow [-\infty, 0]$ se definen como:

$$g_\beta := (1 - \beta)m_\beta, \quad \text{y} \quad h_\beta(x, w) := V_\beta(x, w) - m_\beta; \quad \forall (x, w). \quad (5.10)$$

A partir de (5.10), la ecuación de programación dinámica (5.9) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$e^{g_\beta + h_\beta(x, w)} = l_{h_\beta}^\beta(x, w, f_\beta(x, w)), \quad \forall (x, w) \in S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]. \quad (5.11)$$

La siguiente proposición es la columna vertebral de la demostración del Teorema 5.1.1 y, establece la existencia de una solución para la desigualdad de programación dinámica (5.1). En esta proposición se elige una sucesión $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty \subset]0, 1[$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1, \quad (5.12)$$

y la correspondiente sucesión $\{g_{\beta_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{\beta_n} = \widehat{g}. \quad (5.13)$$

Además para $\{h_{\beta_n}\}_{n=1}^\infty$, sea $\widehat{h} : S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1] \rightarrow [-\infty, 0]$ la correspondiente función *límite superior generalizada*

$$\widehat{h}(x, w) := \mathfrak{g} \limsup h_{\beta_n}(x, w). \quad (5.14)$$

Para simplificar un poco la escritura de aquí en adelante y hasta el final de esta sección, se utiliza la siguiente notación: para todo elemento de la sucesión $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ establecida en (5.12)-(5.14), las tasas relativas se denotan como $g_n := g_{\beta_n}$, las funciones relativas se denotan como $h_n := h_{\beta_n}$, y las estrategias que validan (5.11) como $f_n := f_{\beta_n}$.

Proposición 5.1.1. Sea $\{\beta_n\}$ la sucesión que se fija de (5.12) a (5.14). Entonces, la pareja $(\widehat{g}, \widehat{h})$ como en (5.13) y (5.14) es solución de la desigualdad de programación dinámica (5.1), además, existe una función $\widehat{f} \in \overline{\mathbb{F}}_\alpha$ de tal forma que \widehat{f} cumple la ecuación (5.2).

Demostración. Como primer paso de la demostración se fija un elemento (x, w) en $S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$ y se toma una sucesión arbitraria $\{(x, w_n)\}_{n=1}^\infty \subset S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$, de tal forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x, w_n) = (x, w).$$

A partir de la ecuación (5.11) se puede ver que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{g_n + h_n(x, w_n)} = l_{h_n}^{\beta_n}(x, w_n, f_n(x, w_n)).$$

Ahora, se define el siguiente compacto $C := \{w\} \cup \{w_n\}_{n=1}^\infty$ en $[\alpha e^{-\lambda}, 1]$; entonces, a partir de la continuidad (o mejor semi-continuidad por arriba) de la función $\tilde{w} \rightarrow A_{\tilde{w}}$, la compacidad de cada $A_{\tilde{w}}$ y el Teorema de Berge (ver [3] o [28]), se tiene que la unión $\bigcup_{\tilde{w} \in C} A_{\tilde{w}}$ es compacta en A . Por lo tanto, la sucesión $\{f_n(x, w_n)\}_{n=1}^\infty$ tiene una subsucesión que converge a un punto $a^* \in A$, por la continuidad (o semi-continuidad) de $A_{\tilde{w}}$, se puede

concluir que $a^* \in A_w$. Además, de este modo, sin pérdida de generalidad se puede asumir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, w_n) = a^*. \quad (5.15)$$

Por lo que a partir de la desigualdad (5.6) se puede hacer uso del Lema de Fatou y, también haciendo uso del Lema 5.1.1 junto con (5.15) y (5.14) se tiene que

$$\begin{aligned} \limsup l_{h_n}^{\beta_n}(x, w_n, f_n(x, w_n)) &\leq \sum_{y \in S} \int_B e^{\limsup h_n(y, W_1(w_n, f_n(x, w_n), z))} F^\gamma(a^*, z) v(dz|x, y) Q_{xy} \\ &\leq \sum_{y \in S} \int_B e^{\widehat{h}(y, W_1(w, a^*, z))} F^\gamma(a^*, z) v(dz|x, y) Q_{xy} \\ &= l_{\widehat{h}}^1(x, w, a^*), \end{aligned}$$

es decir que se cumple la siguiente desigualdad

$$\limsup l_{h_n}^{\beta_n}(x, w_n, f_n(x, w_n)) \leq \widetilde{l}_{\widehat{h}}^1(x, w). \quad (5.16)$$

Por otra parte,

$$\limsup l_{h_n}^{\beta_n}(x, w_n, f_n(x, w_n)) = e^{\widehat{g} + \limsup h_n(x, w_n)}.$$

Como al principio se eligió una sucesión arbitraria $\{(x, w_n)\}_{n=1}^\infty$, entonces la desigualdad (5.16) trae como consecuencia que para cualquier sucesión $\{(x, w_n)\}_{n=1}^\infty$ que converja al punto (x, w) , dicha sucesión cumple la siguiente desigualdad,

$$e^{\widehat{g} + \limsup h_n(x, w_n)} \leq \widetilde{l}_{\widehat{h}}^1(x, w),$$

de este modo, junto con (5.14) y la Definición 5.1.2 se llega a la conclusión que existe una pareja $(\widehat{g}, \widehat{h})$ que cumple la desigualdad (5.1),

$$e^{\widehat{g} + \widehat{h}(x, w)} \leq \widetilde{l}_{\widehat{h}}^1(x, w).$$

Ahora, como la función \widehat{h} es semi-continua por arriba (ver Lema 5.1.4), y la función conjunto valuada A_w es continua, se hace uso del literal (b) en el Teorema de Selección Medible A.2.1, el cual garantiza que existe una función $\widehat{f} \in \overline{\mathbb{F}}_\alpha$ tal que, para $(x, w) \in S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$ se verifica la igualdad,

$$\widetilde{l}_{\widehat{h}}^1(x, w) = l_{\widehat{h}}^1(x, w, \widehat{f}(x, w)).$$

□

5.1.3. Verificación.

El siguiente lema es parte de la demostración del Teorema 5.1.1, pero se presenta de manera separada de tal demostración para facilitar la lectura y el entendimiento de ambos resultados.

Lema 5.1.5. Sean $g^* \in \mathbb{R}$, h^* y f^* como en (5.1)-(5.2) respectivamente, si (x, w) pertenece a $S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$ entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad,

$$V_0^\gamma e^{ng^*+h^*(x,w)} \leq E_{xw}^{f^*}[V_n^\gamma e^{h^*(X_n, W_n)}]; \quad (5.17)$$

en consecuencia, si (x, w) es de tal forma que $-\infty < h^*(x, w)$ se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{g^*}{\gamma} \leq \widehat{J}_\gamma(f^*, x, w) \leq \widehat{J}_\gamma^*(x, w).$$

La demostración de este resultado se basa en un argumento de inducción sobre la variable temporal n .

Demostración. El caso $n = 1$, se sigue inmediatamente de (5.2)

$$\begin{aligned} V_0^\gamma e^{g^*+h^*(x,w)} &\leq \sum_{y \in S} \int_B e^{h^*(y, W_1(w, f^*(x, w), z))} V_0^\gamma F^\gamma(f^*(x, w), z) v(dz|x, y) Q_{xy} \\ &= E_{xw}^{f^*}[V_1^\gamma e^{h^*(X_1, W_1)}] \end{aligned}$$

Para continuar con la demostración, a partir de la hipótesis de inducción se tiene el siguiente argumento

$$\begin{aligned} V_0^\gamma e^{(n+1)g^*+h^*(x,w)} &\leq e^{g^*} E_{xw}^{f^*}[V_n^\gamma e^{h^*(X_n, W_n)}] \\ &= \sum_{r_1 \in S} \int_B \cdots \sum_{r_n \in S} \int_B e^{g^*+h^*(r_n, W_n(W_{n-1}, f^*(r_{n-1}, W_{n-1}), z_n))} V_0^\gamma \\ &\quad F^\gamma(f^*(r_{n-1}, W_{n-1}), z_n) \cdots F^\gamma(f^*(x, w), z_1) \\ &\quad v(dz_n|r_{n-1}, r_n) Q_{r_{n-1}r_n} \cdots v(dz|x, r_1) Q_{xr_1} \\ &\leq \sum_{r_1 \in S} \int_B \cdots \sum_{r_{n+1} \in S} \int_B e^{h^*(r_{n+1}, W_{n+1}(W_n, f^*(r_n, W_n), z_{n+1}))} V_0^\gamma \\ &\quad F^\gamma(f^*(r_n, W_n), z_{n+1}) \cdots F^\gamma(f^*(x, w), z_1) \\ &\quad v(dz_{n+1}|r_n, r_{n+1}) Q_{r_n r_{n+1}} \cdots v(dz|x, r_1) Q_{xr_1} \\ &= E_{xw}^{f^*}[V_{n+1}^\gamma e^{h^*(X_{n+1}, W_{n+1})}]. \end{aligned}$$

Como consecuencia de la desigualdad (5.17) se tiene la siguiente desigualdad

$$V_0^\gamma e^{ng^*+h^*(x,w)} \leq E_{xw}^{f^*}[V_n^\gamma],$$

por consiguiente

$$\frac{\ln V_0}{n} + \frac{g^*}{\gamma} + \frac{h^*(x,w)}{\gamma n} \leq \frac{1}{\gamma n} \ln E_{xw}^{f^*}[V_n^\gamma],$$

es decir que a partir del hecho de que $-\infty < h^*(x,w)$, y calculando el límite inferior se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{g^*}{\gamma} \leq \widehat{J}_\gamma(f^*, x, w) \leq \widehat{J}_\gamma^*(x, w).$$

□

Después de este extenso recorrido, se han completado los instrumentos necesarios para demostrar el Teorema 5.1.1.

Demostración del Teorema 5.1.1: La primera parte es consecuencia inmediata de la Proposición 5.1.1 con $\widehat{h} = h^*$, $\widehat{g} = g^*$ y $\widehat{f} = f^*$. Para completar la demostración, a partir del Lema 5.1.3 literal [i], se tiene que para todo $\beta \in (0, 1)$ y todo (x, w)

$$\begin{aligned} e^{g_\beta + \beta h_\beta(x,w)} &\geq e^{g_\beta + h_\beta(x,w)} \\ &= \tilde{l}_{h_\beta}^\beta(x, w), \end{aligned}$$

así que siguiendo un argumento de inducción similar al que se utilizó en la primera parte para demostrar (2.11), se tiene que para cualquier $\pi \in \Gamma_\alpha$, todo $n \in \mathbb{N}$, y $(x, w) \in S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$

$$e^{ng_\beta + \beta h_\beta(x,w)} \geq E_{xw}^\pi[V_n^\gamma e^{\beta h_\beta(X_n, W_n)}],$$

entonces,

$$\frac{g_\beta}{\gamma} + \frac{\beta(h_\beta(x, w) + \|h_\beta\|)}{n\gamma} \geq \frac{1}{n\gamma} \ln E_{xw}^\pi[V_n^\gamma],$$

en consecuencia, tomando el límite inferior cuando n tiende a infinito, se tiene que para todo $\beta \in (0, 1)$,

$$\frac{g_\beta}{\gamma} \geq \widehat{J}_\gamma^*(x, w),$$

por lo tanto, si $h^*(x, w) > -\infty$ de la anterior desigualdad y del Lema 5.1.5 se sigue el resultado

$$\frac{g^*}{\gamma} \leq \widehat{J}_\gamma(f^*, x, w) \leq \widehat{J}_\gamma^*(x, w) \leq \frac{g^*}{\gamma}$$

□

Comentarios

Si la Hipótesis 4.1.1 se debilita de la siguiente manera: toda medida $v(\cdot|x, y)$ se concentra en todo el hiperplano positivo \mathbb{R}^m , entonces en la demostración del Lema 5.1.2 no se puede utilizar el Teorema de convergencia Dominada, pero en cambio si se puede hacer uso del Lema de Fatou y, en vez de tener un resultado de continuidad sobre la función $\tilde{l}_V^\beta(x, w)$ se sigue un resultado de semi continuidad por arriba.

Este debilitamiento trae como consecuencia que la familia de operadores contractivos se tenga que definir sobre un espacio de funciones semi continuas, a la vez que se deben hacer suposiciones de acotamiento sobre los supremos m_β como lo hacen Jaśkiewicz en [25], y Cavazos y Salem en [12]. En el trabajo de Jaśkiewicz en [25], esta suposición de acotamiento se puede verificar haciendo uso de un tiempo de paro; debido a este resultado, se puede esperar que en el modelo propuesto en esta tesis y bajo este debilitamiento de la hipótesis también se pueda verificar una suposición similar a la que hacen Jaskiewicz o Cavazos y Salem en sus trabajos.

Otra consecuencia que trae este debilitamiento y que tiene que ver con este trabajo, es que no se pueden obtener los resultados de γ continuidad que se alcanzan en la siguiente sección, y por ende el resultado que allí se pretende demostrar.

Por otra parte, en un futuro se puede estudiar que tipo de consecuencias traen consigo las condiciones de comunicación que se puedan imponer sobre el proceso factor.

5.2. Resultados asintóticos vía función de Arrow-Pratt

Esta sección se dedica a enunciar y demostrar el Teorema 5.2.1, y como se ha hecho alusión varias veces, los frutos de este último teorema relacionan dos problemas asintóticos, donde la solución de uno es la solución del otro, y viceversa, y he aquí una consecuencia del Teorema 5.1.1 pues exhibe la solución del primero de estos problemas.

Teorema 5.2.1. *Para una función de utilidad regular $U \in \mathcal{U}$ con coeficiente asintótico sensible al riesgo $\lambda_U = 1 - \gamma$, se tiene que $\hat{J}_U^*(x, w) = \hat{J}_\gamma^*(x, w)$. Además, si $\pi^* \in \Gamma_\alpha$ es de tal forma que $\hat{J}_\gamma^*(x, w) = \hat{J}_\gamma(\pi^*, x, w)$, entonces, π^* es una estrategia óptima para U , y viceversa.*

5.2.1. Estrategia óptima para el caso general

En el resto de esta sección se demostrará el teorema anterior. Para la consecución de tal objetivo será necesario establecer la siguiente propiedad de orden inverso que preservan los

certeros equivalentes en la clase de funciones de utilidad \mathcal{U} , en relación con sus respectivas funciones de Arrow-Pratt. También se demuestran algunas propiedades de continuidad, las cuales se establecen después de la siguiente proposición.

Proposición 5.2.1 (Orden). Sea $I = (a, b)$ un intervalo no vacío en $(0, \infty)$, y sean U y V funciones de utilidad en \mathcal{U} de tal forma que si $x \in I$, entonces $\Delta_U(x) \leq \Delta_V(x)$. Además sea Y una variable aleatoria que toma valores en I casi seguramente, y satisface que $U(Y)$ y $V(Y)$ tienen esperanza finita. Entonces, bajo estas hipótesis se tiene que

$$\Psi_V(Y) \leq \Psi_U(Y).$$

La demostración de la Proposición de Orden se puede encontrar en el Apéndice B ó en el trabajo de Cavazos-cadena y Hernández Hernández en [9].

La Hipótesis 4.1.1 implica que para cada estrategia $\pi \in \Gamma_\alpha$ y $\gamma \in]0, 1[$, se cumple la siguiente desigualdad

$$(\alpha M_0 e^{\lambda(t-1)})^\gamma \leq (V_t^\pi)^\gamma \leq (V_0 \bar{K}^t)^\gamma, \quad (5.18)$$

por lo tanto, para un elemento $(x, w) \in S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$ también se tiene la siguiente desigualdad

$$\lambda \leq \widehat{J}_\gamma^*(x, w) \leq \ln \bar{K}.$$

Con el ánimo de obtener los resultados asintóticos, resolver el segundo problema al que se han hecho referencia varias veces, es necesario establecer los siguientes dos lemas, lo cuales a partir de un argumento de continuidad épsilon-delta permiten establecer la veracidad del Teorema 5.2.1.

Lema 5.2.1. La aplicación $\gamma \mapsto \gamma \widehat{J}_\gamma^*(x, w)$ cumple las siguientes tres propiedades:

i) es creciente,

ii) sean γ y β en $]0, 1[$ de tal forma que $\beta < \gamma$, entonces se satisface la siguiente desigualdad

$$\gamma \widehat{J}_\gamma^*(x, w) \leq \beta \widehat{J}_\beta^*(x, w) + (\gamma - \beta) \ln \bar{K}, \quad (5.19)$$

por consiguiente,

iii) $\gamma \widehat{J}_\gamma^*(x, w)$ es continua en el intervalo $]0, 1[$.

Demostración. Sea π una estrategia en Γ_α , (x, w) en $S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$, y γ en $]0, 1[$; si se elige β en $]0, 1[$ de tal forma que $\beta < \gamma$, entonces a partir de (5.18) se tiene que

$$E_{xw}^\pi[V_t^\beta](\alpha M_0 e^{\lambda(t-1)})^{\gamma-\beta} \leq E_{xw}^\pi[V_t^\gamma] \leq E_{xw}^\pi[V_t^\beta](V_0 \bar{K}^t)^{\gamma-\beta}. \quad (5.20)$$

El lado izquierdo de la desigualdad anterior implica la siguiente desigualdad

$$(\gamma - \beta)\lambda + \beta \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t\beta} \ln E_{xw}^\pi[V_t^\beta] \leq \gamma \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t\gamma} \ln E_{xw}^\pi[V_t^\gamma], \quad (5.21)$$

y como $(\gamma - \beta)\lambda$ es positivo, fácilmente se obtiene la primera propiedad, $\beta \widehat{J}_\beta^*(x, w) < \gamma \widehat{J}_\gamma^*(x, w)$.

También, a partir de la desigualdad (5.20) es fácil concluir que

$$\gamma \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t\gamma} \ln E_{xw}^\pi[V_t^\gamma] \leq \beta \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t\beta} \ln E_{xw}^\pi[V_t^\beta] + (\gamma - \beta) \ln \bar{K}, \quad (5.22)$$

así que a partir de (5.22) se puede establecer la desigualdad (5.19).

De la desigualdad (5.19) se concluye la tercera propiedad,

$$|\gamma \widehat{J}_\gamma^*(x, w) - \beta \widehat{J}_\beta^*(x, w)| \leq |\gamma - \beta| \ln K.$$

□

El siguiente lema es consecuencia inmediata de (5.21) y (5.22), por lo que se omite una demostración formal.

Lema 5.2.2. Para (x, w) en $S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$ y una estrategia $\pi \in \Gamma_\alpha$, la aplicación $\gamma \rightarrow \gamma \widehat{J}_\gamma^*(\pi, x, w)$ es continua en el intervalo $]0, 1[$.

Nota 5.2.1. Unas de las consecuencias del Lema 5.2.1 y el Lema 5.2.2 es que $\widehat{J}_\gamma^*(x, w)$ es continua en $]0, 1[$, como también lo es $\widehat{J}_\gamma(\pi, x, w)$. Estas afirmaciones se usaran más adelante.

A continuación, y ya para terminar esta disertación se presenta la demostración del Teorema 5.2.1. Como ya se había adelantado la demostración se basa en un argumento de continuidad épsilon-delta donde se hace uso de la Proposición 5.2.1, y las propiedades de continuidad que se mencionan en la Nota 5.2.1.

Demostración del Teorema 5.2.1: Sea (x, w) un punto en $S \times [\alpha e^{-\lambda}, 1]$ y π una estrategia en Γ_α . Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, a partir de la definición de límite existe un $z > 0$ tal que

$$1 - (\gamma + \varepsilon) \leq \Delta_U(y) \leq 1 - (\gamma - \varepsilon) \quad \forall y > z.$$

Por lo tanto,

$$\Delta_{U_{\gamma+\varepsilon}}(y) \leq \Delta_U(y) \leq \Delta_{U_{\gamma-\varepsilon}}(y), \quad \forall y > z.$$

Ahora, sea t un entero positivo suficientemente grande de tal forma que $\alpha M_0 e^{\lambda(t-1)} > z$, hecho que viene a implicar que $V_t^\pi > z$ casi seguramente, entonces

$$\Delta_{U_{\gamma+\varepsilon}}(V_t^\pi) \leq \Delta_U(V_t^\pi) \leq \Delta_{U_{\gamma-\varepsilon}}(V_t^\pi).$$

En consecuencia, a partir de la Proposición 5.2.1 se tiene que

$$\frac{1}{t} \Psi_{U_{\gamma-\varepsilon}}^{\pi, x, w}(V_t) \leq \frac{1}{t} \Psi_U^{\pi, x, w}(V_t) \leq \frac{1}{t} \Psi_{U_{\gamma+\varepsilon}}^{\pi, x, w}(V_t). \quad (5.23)$$

Siendo así que $\widehat{J}_{\gamma-\varepsilon}^*(x, w) \leq \widehat{J}_U^*(x, w)$ y $\widehat{J}_U^*(x, w) \leq \widehat{J}_{\gamma+\varepsilon}^*(x, w)$, por lo tanto, tomando el límite cuando ε tiende a 0 en la desigualdad anterior, a partir del Lema 5.2.2 se tiene que

$$\widehat{J}_U^*(x, w) = \widehat{J}_\gamma^*(x, w). \quad (5.24)$$

Por otra parte, sea π^* una estrategia en Γ_α de tal forma que $\widehat{J}_\gamma^*(x, w) = \widehat{J}_\gamma(\pi^*, x, w)$. Entonces, tomando el límite cuando ε tiende a 0 otra vez en la desigualdad (5.23), y haciendo uso del Lema 5.2.2, se obtiene que

$$\begin{aligned} \widehat{J}_U(\pi^*, x, w) &= \widehat{J}_\gamma(\pi^*, x, w) \\ &= \widehat{J}_\gamma^*(x, w) \\ &= \widehat{J}_U^*(x, w). \end{aligned}$$

Ahora, si $\pi^* \in \Gamma_\alpha$ es tal que $\widehat{J}_U^*(x, w) = \widehat{J}_U(\pi^*, x, w)$, se puede seguir un razonamiento similar al que se acaba de presentar en el reglón anterior y se llega al resultado que se desea. \square

Apéndice A

Semi continuidad

A.1. Métrica de Hausdorff

Sea (A, d) un espacio métrico. Si B es un subconjunto de A , y a es un elemento en A , se define la distancia de a a B como:

$$d(a, B) := \inf\{d(a, b) : b \in B\}.$$

Si B_1 y B_2 son dos subconjuntos no vacíos y cerrados de A , se define la pseudo distancia de B_1 a B_2 como:

$$d(B_1, B_2) := \sup\{d(b_1, B_2) : b_1 \in B_1\}.$$

Sobre la familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de A , se define la métrica de Hausdorff como:

$$H(B_1, B_2) := \max\{d(B_1, B_2), d(B_2, B_1)\}.$$

A.2. Multifunciones

Sean X y Y dos espacios de Borel. Se empieza esta sección recordando que una función a valor real f definida sobre X es semi continua por arriba (resp. semi continua por abajo) si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a $x \in X$, se tiene que $\limsup f(x_n) \leq f(x)$ (resp. $\liminf f(x_n) \geq f(x)$).

Una aplicación ψ , que a cada elemento de $x \in X$ le asigna un subconjunto no vacío $\psi(x)$ en Y , se dice que es una multifunción o una función conjunto-valuada y, su gráfica se define como:

$$Grph(\psi) := \{(x, y) : x \in X, y \in \psi(x)\}.$$

Sea $\mathcal{C}(Y)$ la familia de subconjuntos compactos no vacíos de Y , una función conjunto-valuada compacta $\psi : X \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ es semi-continua por arriba (resp. semi-continua por abajo) si y solo si, para todo conjunto abierto G (resp. cerrado F) en Y , el conjunto $\{x \in X : \psi(x) \subset G\}$ (res. $\{x \in X : \psi(x) \subset F\}$) es un conjunto abierto (res. cerrado) en X .

Para todo subconjunto G de Y , se define $\psi^{-1}(G) := \{x \in X : \psi(x) \cap G \neq \emptyset\}$, entonces ψ es Borel medible si para todo subconjunto abierto G de Y el conjunto $\psi^{-1}(G)$ es un subconjunto Borel de X . Además si ψ es una función conjunto-valuada compacta, ser Borel medible es equivalente a ser Borel medible cuando la clase $\mathcal{C}(Y)$ se dota con la topología generada por la métrica de Hausdorff.

El siguiente teorema se conoce como Teorema de Selección Medible.

Teorema A.2.1. *Sea $\psi : X \rightarrow \mathcal{C}(A)$ una función conjunto-valuada compacta Borel medible, y sea $l(x, y)$ una función a valor real medible definida sobre el conjunto K , de tal forma que para cada $x \in X$, $l(x, y)$ es semi continua por arriba en $y \in \psi(x)$. Entonces,*

(a) *existe una función selectora $f : X \rightarrow Y$ para ψ de tal forma que*

$$l(x, f(x)) = \max_{\psi(x)} l(x, y) \quad \forall x \in X, \quad (\text{A.1})$$

además la función $l^(x) := \max_{\psi(x)} l(x, y)$ es medible.*

- (b) *Si ψ es semi continua por arriba, y l es semi continua por arriba, entonces existe una función f de tal forma que se cumple (A.1), y l^* es semi continua por arriba.*
- (c) *Si ψ es continua y l es continua y acotada, entonces existe una función f de tal forma que se cumple (A.1), y l^* es continua y acotada.*
- (d) *Si ψ es continua, y Y es compacto entonces $\text{Grph}(\psi)$ es cerrado.*

La demostración del Teorema de Selección Medible se puede encontrar en el trabajo de Himmelberg [23].

A.3. Límite superior generalizado

Demostración Lema 5.1.4: Sea h_n una sucesión de funciones definidas en $h_n : [\alpha e^{-\lambda}, 1] \rightarrow [-\infty, 0]$ y \tilde{h} su correspondiente límite superior generalizado. Se quiere demostrar que para cualquier $d \in \mathbb{R}$ existe un $\varepsilon > 0$ de tal forma que si $y \in B[w, \varepsilon]$, entonces $\tilde{h}(y) < d$.

$B[s, r]$ es la notación estándar para una bola cerrada en $[\alpha e^{-\lambda}, 1]$ centrada en s y de radio r .

Cavazos-Cadena y Salem en [12] demostraron que el límite superior generalizado se caracteriza de la siguiente manera:

$$\tilde{h}(w) = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} \left(\sup_{y \in B(w, 1/n)} h_k(y) \right) \right).$$

Por lo tanto, a partir de la definición del supremo, se puede ver que la sucesión

$$g(w, n) := \sup_{k \geq n} \left(\sup_{y \in B(w, 1/n)} h_k(y) \right)$$

es decreciente y converge a $\tilde{h}(w)$.

Por consiguiente, sea d de tal forma que $\tilde{h}(w) < d$, a partir de la definición de límite existe un $N \in \mathbb{N}$ de tal que si $n > N$, entonces

$$g(w, n) < d.$$

Por otra parte, sean $m > 3n > n > N$, defínase $\varepsilon = \frac{1}{3n}$, y selecciónese $y \in B[w, \varepsilon]$, entonces de la definición de infimo y supremo se sigue que,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(y) &\leq g(y, m) \\ &\leq \sup_{k \geq m} \left(\sup_{z \in B(w, 1/n)} h_k(z) \right) \\ &\leq g(w, n) \\ &< d. \end{aligned}$$

□

Apéndice B

Orden

B.1. Teorema de Orden

Lema B.1.1. Sea $c \in]0, \infty[$ un elemento arbitrario. Para cada función de utilidad $U \in \mathcal{U}$, y para cada $x > 0$ se tiene la siguiente igualdad:

$$U(x) = U(c) + U'(c) \int_c^x e^{-\int_c^y \frac{\Delta_U(t)dt}{t}} dy. \quad (\text{B.1})$$

Además, si Y es una variable aleatoria positiva, de tal forma que $E[U(Y)] < \infty$, entonces $\Psi_U(Y) = c$, si y solo si

$$E \left[\int_c^Y e^{-\int_c^y \frac{\Delta_U(t)dt}{t}} dy \right] = 0;$$

y $\Psi_U(Y) < c$, si y solo si

$$E \left[\int_c^Y e^{-\int_c^y \frac{\Delta_U(t)dt}{t}} dy \right] < 0.$$

Demostración. El primer paso, es observar que a partir de la definición de la función de Arrow Pratt se tiene que, para $y > 0$

$$-\int_c^y \frac{\Delta_U(t)dt}{t} = \ln \frac{U'(y)}{U'(c)},$$

por lo tanto

$$U'(c)e^{-\int_c^y \frac{\Delta_U(t)dt}{t}} = U'(y),$$

entonces, integrando la anterior igualdad, con respecto a y de c a x , se tiene (B.1).

Sea Y una variable aleatoria, de tal forma que $E[U(Y)] < \infty$. Por otra parte, a partir de (B.1) se tiene que

$$E[U(Y)] = U(c) + U'(c)E\left[\int_c^Y e^{-\int_c^y \frac{\Delta_U(t)dt}{t}} dy\right],$$

en consecuencia, la segunda y la tercera parte del lema, se tienen porque la esperanza de $U(Y)$ es finita y $U'(c)$ es estrictamente positiva. \square

Demostración Proposición 5.2.1: Sea $c = \Psi_U(Y)$. entonces, a partir de la segunda parte del Lema B.1.1 se tiene que

$$E\left[\mathbb{I}_{[Y>c]} \int_c^Y e^{-\int_c^y \frac{\Delta_U(t)dt}{t}} dy\right] = E\left[\mathbb{I}_{[Y<c]} \int_Y^c e^{\int_Y^c \frac{\Delta_U(t)dt}{t}} dy\right]. \quad (\text{B.2})$$

Como se tiene la siguiente probabilidad $P[Y \in I] = 1$, entonces el hecho de que U sea creciente ($U' > 0$), trae consigo que $c \in I$. Por lo tanto, sobre el evento $[Y > c, Y \in I]$, para $y \in [c, Y]$ se tiene que $[c, y] \subset I$, es decir que a partir de la hipótesis de la proposición, para todo $t \in [c, y]$ se tiene que $\Delta_U(t) \leq \Delta_V(t)$, y como consecuencia $e^{-\int_c^y \frac{\Delta_U(t)dt}{t}} \leq e^{-\int_c^y \frac{\Delta_V(t)dt}{t}}$ por lo que

$$E\left[\mathbb{I}_{[Y>c]} \int_c^Y e^{-\int_c^y \frac{\Delta_V(t)dt}{t}} dy\right] \leq E\left[\mathbb{I}_{[Y>c]} \int_c^Y e^{-\int_c^y \frac{\Delta_U(t)dt}{t}} dy\right];$$

siguiendo un argumento de manera similar, sobre el eventon $[Y < c, Y \in I]$ se tiene que

$$E\left[\mathbb{I}_{[Y<c]} \int_Y^c e^{\int_Y^c \frac{\Delta_U(t)dt}{t}} dy\right] \leq E\left[\mathbb{I}_{[Y<c]} \int_Y^c e^{\int_Y^c \frac{\Delta_V(t)dt}{t}} dy\right].$$

Por lo tanto, a partir de la igualdad (B.2) se tiene que

$$E\left[\int_c^Y e^{-\int_c^y \frac{\Delta_V(t)dt}{t}} dy\right] < 0,$$

entonces la tercera parte del Lema B.1.1 implica que $\Psi_V(Y) \leq c$. \square

Bibliografía

- [1] Alanís-Durán, A., Cavazos-Cadena, R.: An optimality system for finite average Markov decision chains under risk aversion. *Kybernetika*. 48, 83-104 (2012)
- [2] Ash, R.B.: *Probability and Measure Theory*, Academic Press, New York (2000)
- [3] Berge, E.: *Topological spaces*, MacMillan, New York, (1963)
- [4] Bielecki, T., Hernández-Hernández, D., Pliska, R.: Risk sensitive control of finite state Markov chains in discrete time, with applications to portfolio management. *Math. Meth. Oper. Res.* 50, 167-188 (1999)
- [5] Bielecki, T. R., Pliska, S. R.: Risk-sensitive dynamic asset management. *Appl Math Optim.* 39, 337-360 (1999)
- [6] Billingsley, P.: *Probability and Measure*, Wiley, New York (1995)
- [7] Cavazos-Cadena, R., Fernández-Gaucherand, E.: Risk sensitive control in communicating average Markov decision chains. In: Dror, P., L'Ecuyer, P., Szidarovsky, F. (eds.): *Modelling Uncertainty: An examination of Stochastic Theory, Methods and Applications*, pp 525-544. Kluwer, Boston (2002)
- [8] Cavazos-Cadena, R., Fernández-Gaucherand, E.: Controlled Markov chains with risk-sensitive criteria: Average cost, optimality equations, and optimal solutions. *Math. Meth. Oper. Res.* 49, 299-324 (1999)
- [9] Cavazos-Cadena, R., Hernández-Hernández, D.: A Characterization of the Optimal Certainty Equivalent of the Average Cost via the Arrow-Pratt Sensitivity Function. *Math. Oper. Res.* 41, 224-235 (2016)
- [10] Cavazos-Cadena, R., Hernández-Hernández, D.: Local Poisson equations associated with the Varadhan functional. *Asymptotic Analysis*. 96, 023-050 (2015)

- [11] Cavazos-Cadena, R., Hernández-Hernández, D.: A system of Poisson equations for a non-constant Varadhan functional on finite state space. *Appl. Math. Optim.* 53, 101-119 (2006)
- [12] Cavazos-Cadena, R., Salem-Silva, F.: The discounted method and equivalence of average criteria for risk sensitive Markov decision processes on Borel space. *Appl. Math. Optim.* 61, 167-190 (2009)
- [13] Di Masi, G.B., Stettner, L.: Infinite horizon risk sensitive control of discrete time Markov processes under minorization property. *SIAM J. Control Optim.* 46, 231-252 (2007)
- [14] Di Masi, G.B., Stettner, L.: Infinite horizon risk sensitive control of discrete time Markov processes with small risk. *Syst. Control Lett.* 40, 15-20 (2000)
- [15] Di Masi, G.B., Stettner, L.: Risk sensitive control of discrete time Markov processes with infinite horizon. *SIAM J. Control Optim.* 38, 61-78 (1999)
- [16] Fleming, W. H.: Optimal investment models and risk sensitive stochastic control. In: Davis, M. (eds): *Mathematics Finance*, PP 75-88, Springer Verlag, New York (1995)
- [17] Fleming, W.H., Hernández-Hernández, D.: Risk sensitive control of finite state machines on a infinite horizon I. *SIAM J. Control Optim.* 35, 1790-1810 (1997)
- [18] Grossman, S.J., Zhou, Z.: Optimal investment strategies for controlling drawdowns. *Mathematical Finance.* 3, 241-276 (1993)
- [19] Hernández Hernández, D., Hernández Bustos, D.: Local Poisson Equation Associated with Discrete-Time Markov Control Processes, *J Optim Theory Appl* (2017)
- [20] Hernández Hernández, D., Marcus, S.I.: Risk sensitive control of Markov processes in countable state space. *Syst. Control Lett.* 29, 147-155 (1996). Corrigendum. 34, 105-106 (1999)
- [21] Hernández Hernández, D., Treviño Aguilar, E.: A free model characterization of the asymptotic certainty equivalent by the Arrow-Pratt index. *Modeling, Stochastic Control, Optimization, and Applications, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, Springer-Verlag. Editors: G. Yin and Q. Zhang. (2019)

- [22] Hernández-Lerma, O., Lasserre, J.B.: Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria, Springer , New York (1996)
- [23] Himmelberg, C.J., Partasarathy, T., Van Vleck, F.S.: Optimal plants for dynamic programming problems. *Math. Oper. Res.* 1, 390-394 (1976)
- [24] Howard, A.R., Matheson, J.E.: Risk sensitive Markov decision processes. *Management. Sci.* 18, 356-369 (1972)
- [25] Jaśkiewicz, A.: Average optimal for risk-sensitive control with general state space. *The Annals of Applied Probability.* 17, 654-675 (2007)
- [26] Jaśkiewicz, A., Nowak, A. S.: Zero-sum ergodic stochastic games with feller transition probabilities. *SIAM J. Control Optim.* 45, 773-789 (2006)
- [27] Kirk, W.A.: Contraction mappings and extensions. In: Kirk, W.A., Sims, B. (eds.): *Handbook of metric fixed point theory*, pp 1-34. Springer-Science, (2001)
- [28] Klein, E., Thomson, A.C.: *Theory of correspondences*, Wiley, New York, (1984)
- [29] Kuratowski, K.: *Topology*: Academic Press, New York (1966)
- [30] Sladký, K.: Growth rates and average optimality in risk sensitive Markov decision chains. *Kybernetika.* 44, 205-226 (2008)
- [31] Sladký, K.: Bounds on discrete dynamic programming recursions I. *Kybernetika.* 16, 526-547 (1980)
- [32] Sladký, K., Montes-de-Oca, R.: Risk-sensitive average optimality in Markov decision chains. In: Kalcsics, J., Nickel, S. (eds.) : *Operations Research Proceedings, Vol. 2007*, pp 69-74. Springer Berlin (2008)